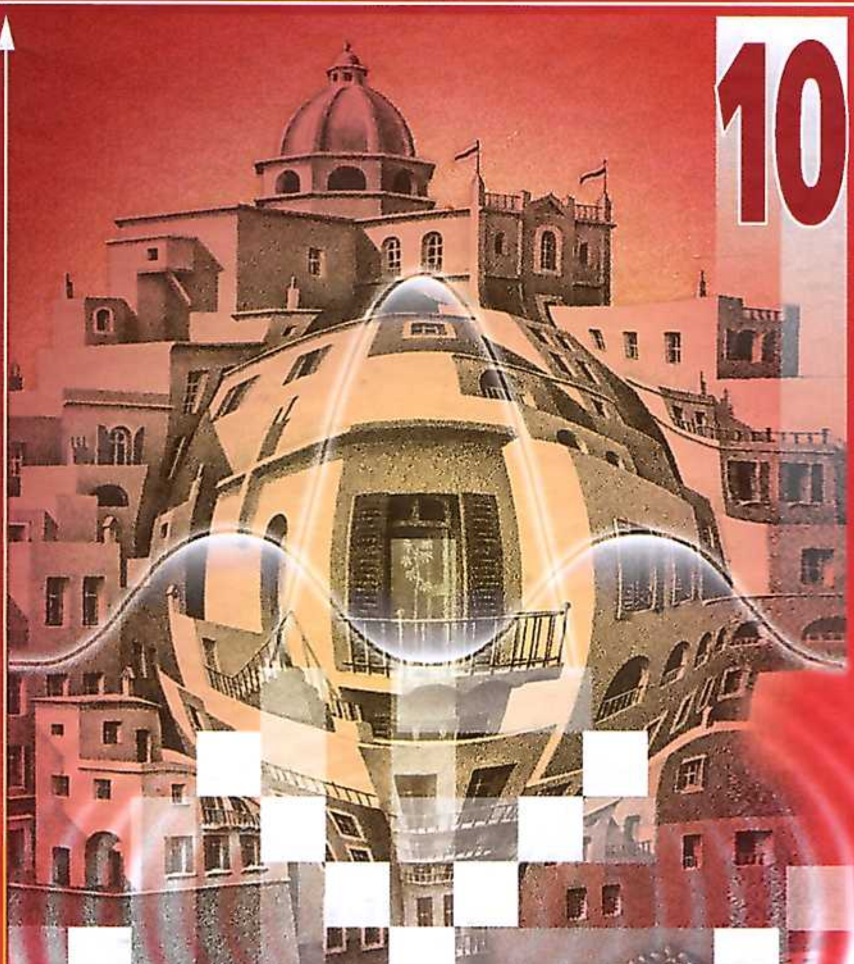
А. Г. Мордкович, И. М. Смирнова

МАТЕМАТИКА

10



ИЗДАТЕЛЬСТВО

МНЕМОЗИНА

А. Г. Мордкович, И. М. Смирнова

МАТЕМАТИКА

10 класс

УЧЕБНИК

для учащихся общеобразовательных учреждений

(базовый уровень)

Рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации

8-е издание, стереотипное

ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА

Москва 2013

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я721
М34

На учебник получены положительные заключения
Российской академии наук (№ 10106-5215/9 от 31.10.2007)
и Российской академии образования (№ 01-662/5/7д от 29.10.2007)

Авторы: *А. Г. Мордкович, И. М. Смирнова,
Л. О. Денищева, Т. А. Корешкова, Т. Н. Мишустина*

Математика. 10 класс : учеб. для учащихся общеобразоват.
М34 учреждений (базовый уровень) / А. Г. Мордкович, И. М. Смирнова [и др.]. — 8-е изд., стер. — М. : Мнемозина, 2013. — 431 с. : ил.

ISBN 978-5-346-02448-4

Учебник написан в соответствии с программой курса математики средней школы, на изучение которого отводится 4 урока в неделю *(базовый уровень)*. Концептуальную основу учебника составили широко апробированные в российских школах учебные пособия тех же авторов по алгебре и началам математического анализа (учебник, задачник) и геометрии (учебник) для 10—11-го классов.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-346-02448-4

ПРЕДИСЛОВИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Этот учебник написан в соответствии с программой курса математики средней общеобразовательной школы (базовый уровень), на изучение которого отводится 4 часа в неделю (примерная пропорция: 2,5 ч на изучение курса «Алгебра и начала математического анализа» и 1,5 ч на изучение курса «Геометрия» в рамках единого курса математики). Главы 1—5 заимствованы из учебного комплекта: А. Г. Мордкович. Алгебра и начала математического анализа, 10—11. Ч. 1. Учебник; А. Г. Мордкович и др. Алгебра и начала математического анализа, 10—11. Ч. 2. Задачник.

В каждом параграфе содержится подробное и обстоятельное изложение теоретического материала, адресованное непосредственно школьникам. Весь материал рассмотреть на уроках невозможно, но это и не нужно, поскольку изложение теоретического материала ориентировано на самостоятельное изучение учащимися. Значение самостоятельной работы с книгой возрастает по причине нехватки недельных часов, отведенных учебным планом на изучение курса, и в связи с актуализировавшейся в современных условиях задачей школы приобщить учеников к самостоятельному извлечению информации (в основном с помощью школьных учебников). Этим, в частности, объясняется наличие во всех параграфах большого числа примеров с подробными решениями и различных методических советов и рекомендаций.

Для удобства работы на окончание решения примера (если нет рубрики *Ответ*) или окончание доказательства того или иного утверждения указывает специальный значок ◁■.

В конце каждого параграфа приводятся разноуровневые упражнения для самостоятельного решения. Устные и частично устные упражнения не содержат никакого значка (слева от номера), номера упражнений средней трудности отмечены значком ○, повышенной сложности — значком ●.

В конце книги даны ответы ко всем упражнениям, кроме устных и частично устных. Число упражнений (особенно в алгебраической части) может показаться чрезмерно объемным. Однако мы сознательно пошли на избыточное число упражнений для того, чтобы у учителя отсутствовала необходимость обращаться к другим учебным пособиям, а учащиеся, решившие все-таки поступать в вузы негуманитарного профиля, были бы для этого (при желании) достаточно подготовлены.

В рамках единого курса целесообразно изучать материал блоками, завершая каждый из них контрольной работой. Тогда практически каждая контрольная работа будет содержать и алгебраический и геометрический материал. В Приложении мы приводим вариант блочного тематического планирования для 10 и 11-го классов.

Авторы

ГЛАВА 1 Числовые функции

§ 1. Определение числовой функции и способы ее задания

Напомним общие сведения о функциях, известные вам из курса алгебры основной школы.

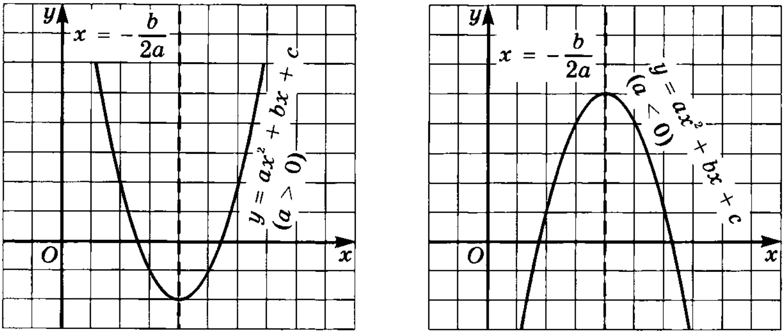
Определение 1. Если даны числовое множество X и правило f, позволяющее поставить в соответствие каждому элементу x из множества X определенное число y, то говорят, что задана **функция** $y = f(x)$ **с областью определения** X. Пишут $y = f(x)$, $x \in X$. Для области определения функции используют обозначение $D(f)$. Переменную x называют **независимой переменной** или **аргументом**, а переменную y — **зависимой переменной.** Множество всех значений функции $y = f(x)$, $x \in X$ называют **областью значений функции** и обозначают $E(f)$.

Если $f(x)$ — алгебраическое выражение и область определения функции $y = f(x)$ совпадает с областью определения этого выражения (такую область определения называют *естественной*), то вместо записи $y = f(x)$, $x \in X$ используют более короткую запись $y = f(x)$.

Определение 2. Если дана функция $y = f(x)$, $x \in X$, то множество точек вида $(x; f(x))$ координатной плоскости xOy называют **графиком функции** $y = f(x)$, $x \in X$.

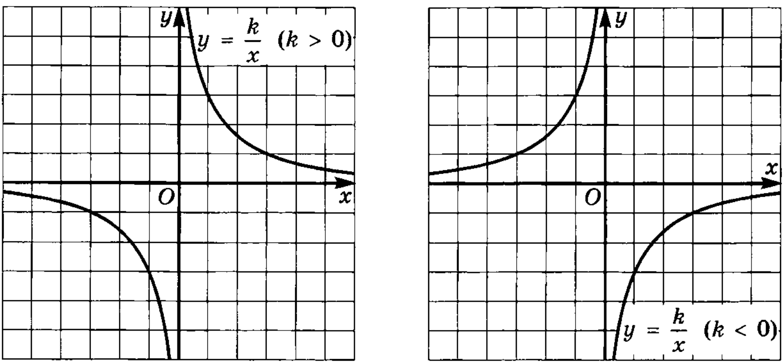
Если известен график функции $y = f(x)$, $x \in X$, то область значений функции можно найти, спроецировав график на ось ординат. То числовое множество, которое получится на оси ординат в результате указанного проецирования, и будет представлять собой $E(f)$.

Из курса алгебры основной школы вам известно, как выглядят графики некоторых функций: $y = kx + m$ — прямая, $y = ax^2 + bx + c$ — парабола (при $a \neq 0$, рис. 1), $y = \frac{k}{x}$ — гипербола (при $k \neq 0$, рис. 2); известны вам также графики функций $y = \sqrt{x}$ (рис. 3), $y = |x|$ (рис. 4).



а *б*

Рис. 1



а *б*

Рис. 2

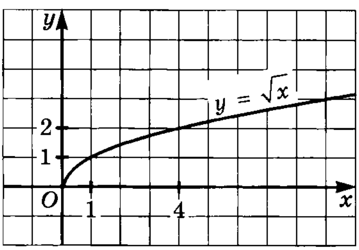


Рис. 3

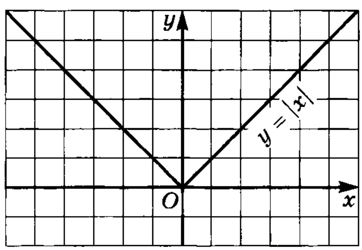


Рис. 4

Зная график функции $y = f(x)$, можно с помощью геометрических преобразований построить некоторые другие графики. Например, график функции $y = f(x + a) + b$ получается из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом на вектор $(-a;\ b)$, т. е. на $|a|$ вправо, если $a < 0$, и влево, если $a > 0$, на $|b|$ вверх, если

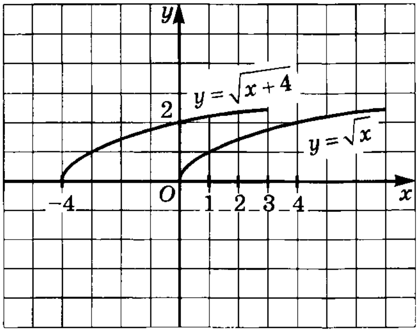


Рис. 5

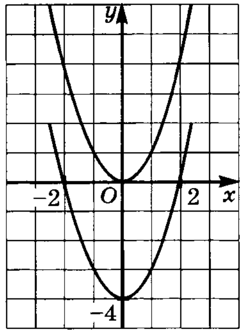


Рис. 6

$b > 0$, и вниз, если $b < 0$. Например, на рисунке 5 изображены графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt{x + 4}$, а на рисунке 6 изображены графики функций $y = x^2$ и $y = x^2 - 4$.

Иногда говорят так: чтобы, зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(x + a) + b$, нужно перейти к новой системе координат, выбрав началом новой системы точку $(-a;\ b)$, и к новой системе «привязать» график функции $y = f(x)$. Например, на рисунке 7 изображен график функции $y = |x - 2| + 3$. Началом новой системы координат выбрана точка $(2;\ 3)$, и к новой системе «привязан» график функции $y = |x|$.

Нетрудно, зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = -f(x)$. Для этого достаточно осуществить симметрию графика функции $y = f(x)$ относительно оси абсцисс. Например, на рисунке 8 изображены графики функций $y = 2x + 6$ и $y = -(2x + 6)$.

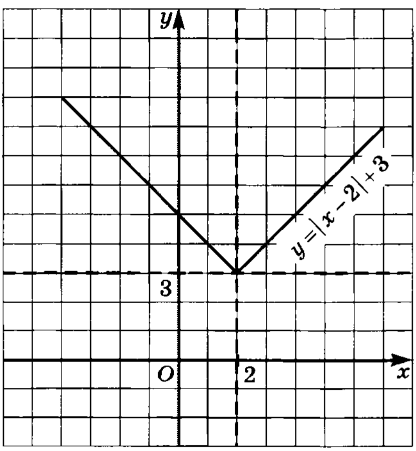


Рис. 7

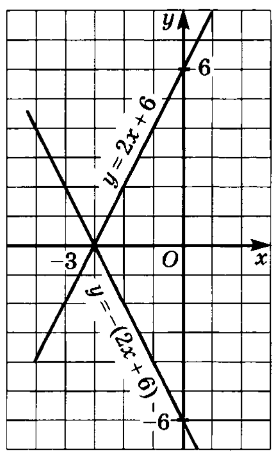


Рис. 8

Пример 1. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ \sqrt{x+1}, \text{ если } 0 < x \leqslant 3, \\ \dfrac{3}{x} + 1, \text{ если } x > 3. \end{cases}$$

а) Вычислить $f(-2)$, $f(0)$, $f(1{,}25)$, $f(6)$, $f(-3)$.
б) Найти $D(f)$ и $E(f)$.

Решение.

а) Значение $x = -2$ удовлетворяет условию $-2 \leqslant x \leqslant 0$, следовательно, $f(-2)$ надо вычислять по формуле $f(x) = -x^2$; $f(-2) = -(-2)^2 = -4$.

Значение $x = 0$ удовлетворяет условию $-2 \leqslant x \leqslant 0$, следовательно, $f(0)$ надо вычислять по формуле $f(x) = -x^2$; $f(0) = -0^2 = 0$.

Значение $x = 1{,}25$ удовлетворяет условию $0 < x \leqslant 3$, следовательно, $f(1{,}25)$ надо вычислять по формуле $f(x) = \sqrt{x+1}$; $f(1{,}25) = \sqrt{1{,}25 + 1} = 1{,}5$.

Значение $x = 6$ удовлетворяет условию $x > 3$, следовательно, $f(6)$ надо вычислять по формуле $f(x) = \frac{3}{x} + 1$; $f(6) = \frac{3}{6} + 1 = 1{,}5$.

Значение $x = -3$ не принадлежит области определения функции, а потому требование вычислить $f(-3)$ в данном случае некорректно.

б) В этом примере речь идет о так называемой *кусочной функции* (или о кусочно-заданной функции). Область определения функции состоит из трех промежутков: $[-2; 0]$, $(0; 3]$, $(3; +\infty)$. Объединив их, получим луч $[-2; +\infty)$.

Чтобы найти область (множество) значений функции, построим ее график. Он состоит из трех «кусочков» — части параболы $y = -x^2$, взятой на отрезке $[-2; 0]$ (рис. 9), части кривой $y = \sqrt{x+1}$, взятой на полуинтервале $(0; 3]$ (рис. 10), и части гиперболы $y = \frac{3}{x} + 1$, взятой на открытом луче $(3; +\infty)$ (рис. 11); заметим, что $y = 1$ — асимптота гиперболы. Объединив эти кусочки на одном чертеже, получим график функции $y = f(x)$ (рис. 12). Спроецировав этот график на ось y, получим область значений функции, которая состоит из отрезка $[-4; 0]$ и полуинтервала $(1; 2]$.

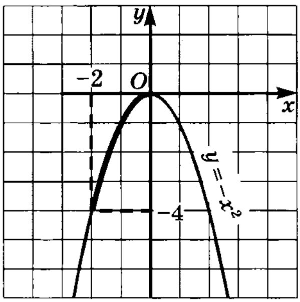


Рис. 9

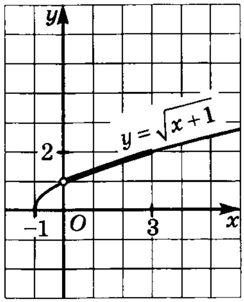


Рис. 10

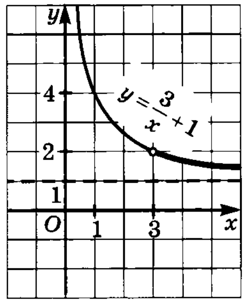


Рис. 11

Итак,

$$D(f) = [-2; +\infty),$$
$$E(f) = [-4; 0] \cup (1; 2].$$

Еще раз подчеркнем, что задать функцию — это значит указать п р а в и л о, которое позволяет по произвольно выбранному значению $x \in D(f)$ вычислить соответствующее значение y. Чаще всего это правило связано с формулой (например, $y = \sqrt{x}$) или с несколькими формулами, как было в примере 1. Такой способ задания функции обычно называют *аналитическим*. Есть и другие способы задания функции.

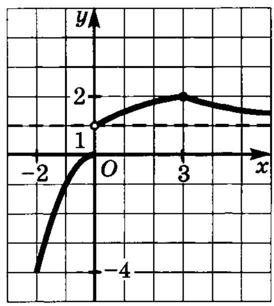


Рис. 12

Пусть F — некоторая линия на координатной плоскости и пусть, спроецировав эту линию на ось x, мы получим отрезок $[a; b]$ (рис. 13). Возьмем произвольную точку x из отрезка $[a; b]$ и проведем через нее прямую, параллельную оси ординат. Потребуем дополнительно, чтобы каждая такая прямая пересекала линию F только в одной точке — на рисунке 13 соответствующая точка обозначена буквой M. Ордината точки M — это число $f(x)$, соответствующее выбранному значению x. Тем самым на отрезке $[a; b]$ задана функция $y = f(x)$. Такой способ задания функции называют *графическим*.

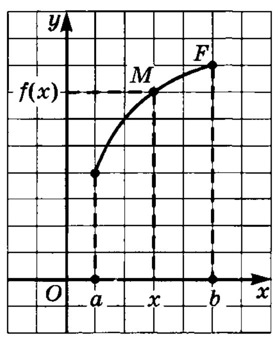


Рис. 13

Если функция была задана аналитически и нам удалось построить ее график, то тем самым мы фактически осуществили переход от аналитического способа задания функции к графическому. Обратный же переход удается осуществить далеко не всегда. Как правило, это довольно трудная задача.

Кроме аналитического и графического, на практике применяют *табличный* способ задания функции — с помощью таблицы, в которой указаны значения функции (иногда точные, иногда приближенные) для конечного множества значений аргумента. Примерами табличного задания функции могут служить таблицы квадратов чисел, кубов чисел, квадратных корней и т. д.

Во многих случаях табличное задание функции является удобным. Оно позволяет найти значения функции для имеющихся в таблице значений аргумента без всяких вычислений.

Аналитический, графический, табличный — наиболее популярные способы задания функции, для наших нужд этих способов вполне достаточно. На самом деле в математике имеется довольно много различных способов задания функции, но мы познакомим вас еще только с одним способом, который используется в весьма своеобразных ситуациях. Речь идет о *словесном* способе, когда правило задания функции описывается словами. Приведем пример.

Пример 2. Функция $y = f(x)$ задана на множестве всех неотрицательных чисел с помощью следующего правила: каждому числу x ставится в соответствие первая цифра после запятой в десятичной записи числа x. Если, скажем, $x = 2{,}534$, то $f(x) = 5$ (первый знак после запятой — цифра 5); если $x = 13{,}002$, то $f(x) = 0$; если $x = \frac{2}{3}$, то, записав $\frac{2}{3}$ в виде бесконечной периодической десятичной дроби $0{,}6666\ldots$, находим: $f(x) = 6$.

А чему равно значение $f(15)$? Оно равно 0, так как $15 = 15{,}000\ldots$, и мы видим, что первая цифра после запятой есть 0 (вообще-то верно и равенство $15 = 14{,}99\ldots$, но обычно не рассматривают бесконечные периодические десятичные дроби с периодом 9).

Любое неотрицательное число x можно записать в виде десятичной дроби (конечной или бесконечной), а потому каждому значению x можно поставить в соответствие значение первой цифры после запятой, так что мы можем говорить о функции, хотя и несколько необычной. У этой функции

$$D(f) = [0; +\infty),\ E(f) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}.$$

Упражнения

1.1. Из заданного соотношения выразите переменную y через переменную x:

а) $3x + 4y = 12$; в) $6y - 5x + 1 = 0$;

б) $2xy + y = -7$; г) $\dfrac{9}{xy} - 4 = 3x$.

Будет ли полученное соотношение задавать функцию?

1.2. Для функции $y = f(x)$, где $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7$, найдите:

а) $f(1)$; б) $f(3)$; в) $f(-2)$; г) $f(1{,}5)$.

О1.3. Для функции $y = f(x)$, где $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 4}{3x + 3}$, найдите:

а) $f(x - 2)$; б) $f(-x^3)$; в) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$; г) $f(2x^2 + 3x + 5)$.

Найдите область определения функции:

1.4. а) $y = \dfrac{3x - 2}{5x + 3}$; в) $y = \dfrac{5 + 6x}{2x - 4}$;

б) $y = \dfrac{6}{x^2 - 16}$; г) $y = \dfrac{7}{25 - x^2}$.

1.5. а) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$; в) $y = \sqrt{x^2 + 4x - 12}$;

б) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$; г) $y = \sqrt{\dfrac{3}{49 - x^2}}$.

О1.6. а) $y = \sqrt{2x - 4} + \dfrac{2x + 3}{\sqrt{10 - 2{,}5x}}$;

б) $y = \sqrt{10x - 3x^2 - 3} + \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 - 4}} - \dfrac{1}{25 - 4x^2}$;

в) $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2} + \dfrac{2x^2 - 4}{\sqrt{10 - 2x}}$;

г) $y = \sqrt{x^2 - 36} + \dfrac{5x + 3}{\sqrt{11x - x^2 - 10}} - \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^4 - 2401}$.

1.7. Постройте график заданной функции, найдите область определения и область значений функции:

а) $y = 2x - 3$; в) $y = \dfrac{x}{2} + 4$;

б) $y = 6 - 3x$; г) $y = -\dfrac{2x}{3} - 3$.

Постройте график заданной функции, найдите область определения и область значений функции:

1.8. а) $y = x^2 + 2$; в) $y = \frac{1}{2}x^2 - 4$;

б) $y = 3 - 2x^2$; г) $y = -1{,}5x^2 - 2$.

1.9. а) $y = \sqrt{x}$; в) $y = -\sqrt{x}$;

б) $y = \sqrt{x - 3}$; г) $y = -\sqrt{x} + 2$.

○1.10. а) $y = x^2 + 3x - 28$; б) $y = -x^2 - 2x + 24$.

○1.11. а) $y = \frac{1}{x} + 3$; б) $y = \frac{5}{x + 3}$; в) $y = \frac{-2}{x} - 1$; г) $y = \frac{4}{1 - x}$.

○1.12. а) $y = |x|$; б) $y = |x - 2|$; в) $y = -|x|$; г) $y = 3 - |x|$.

●1.13. Найдите область определения и область значений функции:

а) $y = \frac{1}{16x^2 - 49}$; в) $y = \frac{1}{9 - 25x^2}$;

б) $y = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$; г) $y = \sqrt{3x - x^2 + 18}$.

○1.14. Используя график функции $y = f(x)$, изображенный на рисунке 14, постройте график функции:

а) $y = f(-x)$; в) $y = -f(-x)$;

б) $y = -f(x)$; г) $y = f(x - 1) + 2$.

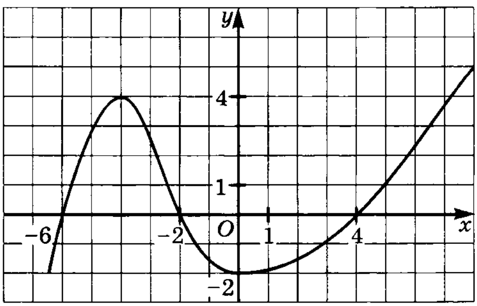


Рис. 14

●1.15. Используя график функции $y = f(x)$, где $f(x) = x^2 - 4x + 3$, постройте график функции:

а) $y = f(|x|)$; б) $y = |f(x)|$; в) $y = |f(|x|)|$; г) $y = -|f(|x|)|$.

○1.16. Решите графически уравнение:

а) $x^3 = 3 - 2x$; в) $|x - 2| = \frac{3}{x}$;

б) $\sqrt{x} = 2x - 6$; г) $x^{-2} = 5x - 4$.

О1.17. Функция $y = f(x)$ задана следующим правилом: каждому неотрицательному числу ставится в соответствие вторая цифра после запятой в записи числа в виде бесконечной десятичной дроби. Найдите:

а) $f\left(\frac{1}{4}\right)$; б) $f(\sqrt{2})$; в) $f\left(1\frac{1}{6}\right)$; г) $f\left((\sqrt{5})^2\right)$.

О1.18. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, \text{ если } 0 < x < 1, \\ \sqrt{x}, \text{ если } x \geqslant 1. \end{cases}$

а) Найдите $f(6{,}25)$; $f(0{,}01)$; $f(-3)$;
б) постройте график функции;
в) найдите $D(f)$;
г) найдите $E(f)$.

О1.19. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 5, \text{ если } -4 \leqslant x < 0, \\ 5 - 2x, \text{ если } 0 \leqslant x < 2, \\ \frac{2}{x}, \text{ если } x \geqslant 2. \end{cases}$$

а) Найдите $f(-5)$; $f(-3)$; $f(0)$; $f(4)$;
б) постройте график функции;
в) найдите $D(f)$;
г) найдите $E(f)$.

§ 2. Свойства функций

В этом параграфе мы вспомним и сформулируем все свойства функций, изученные вами в 7—9-м классах, напомним их геометрический смысл и договоримся, в каком порядке следует перечислять эти свойства при чтении графика функции. Обратите внимание, что во всех определениях фигурирует числовое множество X — подмножество области определения функции: $X \subset D(f)$. На практике чаще всего X — числовой промежуток (отрезок, интервал, луч и т. д.).

Определение 1. Функцию $y = f(x)$ называют **возрастающей на множестве** $X \subset D(f)$, если для любых точек x_1 и x_2 множества X таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Определение 2. Функцию $y = f(x)$ называют **убывающей на множестве** $X \subset D(f)$, если для любых точек x_1 и x_2 множества X таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

На практике удобнее пользоваться следующими формулировками: функция возрастает, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции; функция убывает, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Обычно термины «возрастающая функция», «убывающая функция» объединяют общим названием **монотонная функция**, а исследование функции на возрастание или убывание называют *исследованием функции на монотонность*.

Если функция возрастает (или убывает) на своей естественной области определения, то говорят, что функция возрастающая (или убывающая) — без указания числового множества X.

Пример 1. Исследовать на монотонность функцию:

а) $y = x^3 + 2$; б) $y = 5 - 2x$.

Решение. а) Введем обозначение $f(x) = x^3 + 2$. Возьмем произвольные значения аргумента x_1 и x_2, пусть $x_1 < x_2$. Тогда по свойствам числовых неравенств получим

$$x_1^3 < x_2^3; \qquad x_1^3 + 2 < x_2^3 + 2.$$

Последнее неравенство означает, что $f(x_1) < f(x_2)$.

Итак, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, а это значит, что заданная функция возрастает на всей числовой прямой.

б) Введем обозначение $f(x) = 5 - 2x$. Если $x_1 < x_2$, то $-2x_1 > -2x_2$, и далее $5 - 2x_1 > 5 - 2x_2$, т. е. $f(x_1) > f(x_2)$.

Итак, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$, а это означает, что заданная функция убывает на всей числовой прямой. ◁■

Определение 3. Функцию $y = f(x)$ называют **ограниченной снизу на множестве $X \subset D(f)$**, если все значения этой функции на множестве X *больше некоторого* числа; иными словами, если существует число m такое, что для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) > m$.

Определение 4. Функцию $y = f(x)$ называют **ограниченной сверху на множестве $X \subset D(f)$**, если все значения этой функции *меньше некоторого* числа; иными словами, если существует число M такое, что для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) < M$.

Если множество X не указано, то подразумевается, что речь идет об ограниченности функции снизу или сверху на всей области ее определения.

Если функция ограничена и снизу и сверху на всей области определения, то ее называют **ограниченной.**

Ограниченность функции легко читается по ее графику: если функция ограничена снизу, то ее график целиком расположен выше некоторой горизонтальной прямой $y = m$ (рис. 15); если функция ограничена сверху, то ее график целиком расположен ниже некоторой горизонтальной прямой $y = M$ (рис. 16).

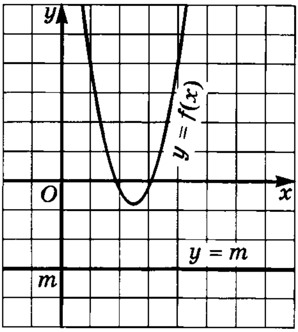


Рис. 15

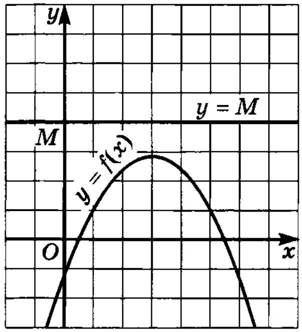


Рис. 16

Пример 2. Исследовать на ограниченность функцию

$$y = \sqrt{9 - x^2}.$$

Решение. С одной стороны, вполне очевидно неравенство

$$\sqrt{9 - x^2} \geqslant 0,$$

это означает, что функция ограничена снизу.

С другой стороны, $9 - x^2 \leqslant 9$, а потому

$$\sqrt{9 - x^2} \leqslant 3.$$

Это означает, что функция ограничена сверху.

Определение 5. Число m называют **наименьшим значением функции $y = f(x)$ на множестве $X \subset D(f)$**, если:

1) существует точка $x_0 \in X$ такая, что $f(x_0) = m$;
2) для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство

$$f(x) \geqslant f(x_0).$$

Определение 6. Число M называют **наибольшим значением функции $y = f(x)$ на множестве $X \subset D(f)$**, если:

1) существует точка $x_0 \in X$ такая, что $f(x_0) = M$;
2) для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство

$$f(x) \leqslant f(x_0).$$

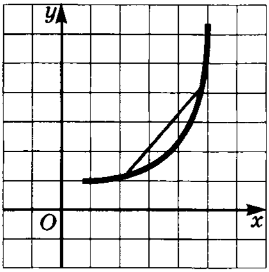


Рис. 17

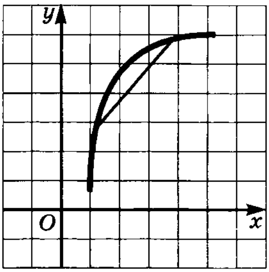


Рис. 18

Наименьшее значение функции обозначают символом $y_{\text{наим}}$, а наибольшее — символом $y_{\text{наиб}}$. Если множество X не указано, то подразумевается, что речь идет о поиске наименьшего или наибольшего значения функции на всей области определения.

Достаточно очевидны следующие полезные утверждения.

1) *Если у функции существует* $y_{\text{наим}}$, *то она ограничена снизу.*

2) *Если у функции существует* $y_{\text{наиб}}$, *то она ограничена сверху.*

3) *Если функция не ограничена снизу, то у нее не существует* $y_{\text{наим}}$.

4) *Если функция не ограничена сверху, то у нее не существует* $y_{\text{наиб}}$.

Напомним еще два свойства функций. Первое — свойство выпуклости функции. Считается, что *функция выпукла вниз* на промежутке $X \subset D(f)$, если, соединив любые две точки ее графика (с абсциссами из X) отрезком, мы обнаружим, что соответствующая часть графика лежит ниже проведенного отрезка (рис. 17). *Функция выпукла вверх* на промежутке $X \subset D(f)$, если, соединив любые две точки ее графика (с абсциссами из X) отрезком, мы обнаружим, что соответствующая часть графика лежит выше проведенного отрезка (рис. 18).

Второе свойство — *непрерывность функции на промежутке X* — означает, что график функции на данном промежутке не имеет точек разрыва (т. е. представляет собой сплошную линию).

Замечание. На самом деле о непрерывности функции можно говорить только тогда, когда *доказано*, что функция является непрерывной. Но соответствующее определение сложное и нам пока не по силам (мы дадим его позднее, в § 26). То же самое можно сказать и о понятии выпуклости. Поэтому, обсуждая указанные два свойства функций, будем пока по-прежнему опираться на наглядно-интуитивные представления.

Пример 3. Прочитать график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ \sqrt{x+1}, \text{ если } 0 < x \leqslant 3, \\ \dfrac{3}{x} + 1, \text{ если } x > 3. \end{cases}$$

Решение. Прочитать график — это значит перечислить свойства функции. Всю информацию снимем с чертежа, представленного в § 1 на рисунке 12.

1) $D(f) = [-2; +\infty)$.

2) Функция возрастает на отрезке $[-2; 0]$ и на полуинтервале $(0; 3]$; функция убывает на луче $[3; +\infty)$.

3) Функция ограничена и снизу и сверху.

4) $y_{\text{наим}} = -4$ (достигается в точке $x = -2$), $y_{\text{наиб}} = 2$ (достигается в точке $x = 3$).

5) Функция непрерывна на отрезке $[-2; 0]$ и на открытом луче $(0; +\infty)$. В точке $x = 0$ функция претерпевает разрыв.

6) $E(f) = [-4; 0] \cup (1; 2]$. ◀

Определение 7. Функцию $y = f(x)$, $x \in X$ называют **четной**, если для любого значения x из множества X выполняется равенство

$$f(-x) = f(x).$$

Определение 8. Функцию $y = f(x)$, $x \in X$ называют **нечетной**, если для любого значения x из множества X выполняется равенство

$$f(-x) = -f(x).$$

Пример 4. Доказать, что $y = x^4$ — четная функция.

Решение. Здесь $f(x) = x^4$, $f(-x) = (-x)^4 = x^4$. Значит, для любого значения x выполняется равенство $f(-x) = f(x)$, т. е. функция является четной. ◀

Аналогично можно доказать, что функции $y = x^2$, $y = x^6$, $y = x^8$ являются четными.

Пример 5. Доказать, что $y = x^3$ — нечетная функция.

Решение. Здесь $f(x) = x^3$, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$. Значит, для любого значения x выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$, т. е. функция является нечетной. ◀

Аналогично можно доказать, что функции $y = x$, $y = x^5$, $y = x^7$ являются нечетными.

Итак, $y = x^3$, $y = x^5$, $y = x^7$ — нечетные функции, $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$ — четные функции. И вообще для любой функции вида $y = x^n$, где n — натуральное число, можно сделать вывод: если n — нечетное число, то функция $y = x^n$ нечетная; если n — четное число, то функция $y = x^n$ четная.

Существуют функции, которые не являются ни четными, ни нечетными. Такова, например, функция $y = 2x + 3$. В самом деле, $f(1) = 5$, а $f(-1) = 1$, т. е. $f(-1) \neq f(1)$ и $f(-1) \neq -f(1)$. Значит, не выполняется ни тождество $f(-x) = f(x)$, ни тождество $f(-x) = -f(x)$.

Итак, функция может быть четной, нечетной, а также ни той ни другой.

Изучение вопроса, является ли заданная функция четной или нечетной, называют *исследованием функции на четность.*

В определениях 7 и 8 речь идет о значениях функции в точках x и $-x$. Тем самым предполагается, что функция определена и в точке x, и в точке $-x$. Это значит, что точки x и $-x$ принадлежат области определения функции. Если числовое множество X вместе с каждым своим элементом x содержит и противоположный элемент $-x$, то такое множество называют *симметричным множеством.*

Скажем, $(-2; 2)$, $[-5; 5]$, $(-\infty; +\infty)$ — симметричные множества, в то время как $[0; +\infty)$, $(-2; 3)$, $[-5; 4]$ — несимметричные множества.

Если функция $y = f(x)$, $x \in X$ четная или нечетная, то ее область определения X — симметричное множество. Если же X — несимметричное множество, то функция $y = f(x)$, $x \in X$ не является ни четной, ни нечетной.

Учитывая сказанное выше, рекомендуем при исследовании функции на четность использовать следующий алгоритм.

Алгоритм исследования функции $y = f(x)$, $x \in X$ на четность

1. Установить, симметрична ли область определения функции. Если нет, то объявить, что функция не является ни четной, ни нечетной. Если да, то перейти ко второму шагу алгоритма.
2. Найти $f(-x)$.
3. Сравнить $f(-x)$ и $f(x)$:
   а) если $f(-x) = f(x)$, то функция четная;
   б) если $f(-x) = -f(x)$, то функция нечетная;
   в) если хотя бы в одной точке $x \in X$ выполняется соотношение $f(-x) \neq f(x)$ и хотя бы в одной точке $x \in X$ выполняется соотношение $f(-x) \neq -f(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной.

Пример 6. Исследовать на четность функцию:

а) $y = x^4 + \frac{2}{x^6}$; в) $y = \frac{x-4}{x^2-9}$;

б) $y = x^5 - \frac{3}{x^3}$; г) $y = \sqrt{x-3}$.

Решение. а) $y = f(x)$, где $f(x) = x^4 + \frac{2}{x^6}$.

1) Функция определена при всех значениях x, кроме 0. Следовательно, $D(f)$ — симметричное множество.

2) $f(-x) = (-x)^4 + \frac{2}{(-x)^6} = x^4 + \frac{2}{x^6}$.

3) Для любого значения x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Таким образом, $y = x^4 + \frac{2}{x^6}$ — четная функция.

б) $y = f(x)$, где $f(x) = x^5 - \frac{3}{x^3}$.

1) Функция определена при всех значениях x, кроме 0. Следовательно, $D(f)$ — симметричное множество.

2) $f(-x) = (-x)^5 - \frac{3}{(-x)^3} = -x^5 - \frac{3}{-x^3} = -\left(x^5 - \frac{3}{x^3}\right)$.

3) Для любого значения x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Таким образом, $y = x^5 - \frac{3}{x^3}$ — нечетная функция.

в) $y = f(x)$, где $f(x) = \frac{x-4}{x^2-9}$.

1) Функция определена при всех значениях x, кроме 3 и -3. Значит, область определения функции — числовая прямая, из которой удалены две точки: 3 и -3. Это симметричное множество.

2) $f(-x) = \frac{(-x)-4}{(-x)^2-9} = -\frac{x+4}{x^2-9}$.

3) Сравнив $f(-x)$ и $f(x)$, замечаем, что, скорее всего, не выполняются ни тождество $f(-x) = f(x)$, ни тождество $f(-x) = -f(x)$. Чтобы в этом убедиться, возьмем конкретное значение x, например $x = 4$; имеем $f(4) = 0$, а $f(-4) = -\frac{8}{7}$, т. е. $f(-4) \neq f(4)$ и $f(-4) \neq -f(4)$.

Таким образом, функция не является ни четной, ни нечетной.

г) Функция $y = \sqrt{x-3}$ определена на луче $[3; +\infty)$. Этот луч — несимметричное множество, значит, функция не является ни четной, ни нечетной.

Пример 7. Исследовать на четность функцию:

а) $y = |x|$, $x \in [-2; 2]$; в) $y = x^3$, $x \in (-5; 5)$;

б) $y = |x|$, $x \in [-3; 3)$; г) $y = x^3$, $x \in (-5; 5]$.

Решение. а) $D(f) = [-2; 2]$ — симметричное множество, и для всех значений x выполняется равенство $|-x| = |x|$. Значит, заданная функция — четная.

б) $D(f) = [-3; 3)$ — несимметричное множество. В самом деле, точка -3 принадлежит полуинтервалу $[-3; 3)$, а противоположная точка 3 не принадлежит этому полуинтервалу. Значит, функция не является ни четной, ни нечетной.

в) $D(f) = (-5; 5)$ — симметричное множество, и $(-x)^3 = -x^3$ для всех значений x из области определения функции. Значит, заданная функция — нечетная.

г) Функция задана на полуинтервале, который не является симметричным множеством. Значит, функция ни четная, ни нечетная. ◁■

Теперь напомним геометрический смысл свойства четности и свойства нечетности функции.

Пусть $y = f(x)$, $x \in X$ — четная функция, т. е. $f(-x) = f(x)$ для любого $x \in X$. Рассмотрим две точки графика функции: $A(x; f(x))$ и $B(-x; f(-x))$. Так как $f(-x) = f(x)$, то у точек A и B абсциссы являются противоположными числами, а ординаты одинаковы, т. е. эти точки симметричны относительно оси y (рис. 19). Таким образом, для каждой точки A графика четной функции существует симметричная ей относительно оси y точка B того же графика. Это означает, что ***график четной функции симметричен относительно оси y.***

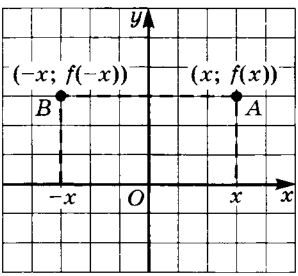


Рис. 19

Пусть $y = f(x)$, $x \in X$ — нечетная функция, т. е. $f(-x) = -f(x)$ для любого $x \in X$. Рассмотрим две точки графика функции: $A(x; f(x))$ и $B(-x; f(-x))$. Так как $f(-x) = -f(x)$, то у точек A и B абсциссы являются противоположными числами и ординаты являются противоположными числами, т. е. эти точки симметричны относительно начала координат (рис. 20). Таким образом, для каждой точки A графика нечетной функции

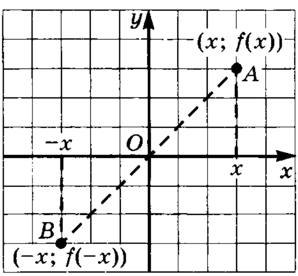


Рис. 20

существует симметричная ей относительно начала координат точка B того же графика. Это означает, что ***график нечетной функции симметричен относительно начала координат.***

Верны и обратные утверждения.

Если график функции $y = f(x)$, $x \in X$ симметричен относительно оси ординат, то $y = f(x)$, $x \in X$ — четная функция.

В самом деле, симметрия графика функции $y = f(x)$ относительно оси y означает, что для всех значений x из области определения функции справедливо равенство $f(-x) = f(x)$, т. е. $y = f(x)$ — четная функция.

Если график функции $y = f(x)$, $x \in X$ симметричен относительно начала координат, то $y = f(x)$, $x \in X$ — нечетная функция.

Симметрия графика функции $y = f(x)$ относительно начала координат означает, что для всех значений x из области определения функции справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$, т. е. $y = f(x)$ — нечетная функция.

Упражнения

Используя свойства числовых неравенств, исследуйте функцию на монотонность:

2.1. а) $y = 8x + 3$; в) $y = \frac{x}{3} + 1$;

б) $y = 5 - 2x$; г) $y = \frac{1}{3} - \frac{2x}{5}$.

2.2. а) $y = 2x^3 - 3$; в) $y = \frac{2}{3} - x^3$;

б) $y = 7 - \frac{x^3}{2}$; г) $y = 4 + x^3$.

О2.3. а) $y = x^2 + 2x + 1$, $x \geqslant -1$; в) $y = -x^2 + 6x - 12$, $x \geqslant 3$;

б) $y = \frac{1}{x + 2}$, $x < -2$; г) $y = \frac{-2}{x + 5}$, $x > -5$.

О2.4. а) $y = x^3 + 2x$; в) $y = 4 - x^5$.

б) $y = 5 - x^3 - 6x^9$; г) $y = x^7 + x^5 - 3$.

О2.5. а) $y = \sqrt{x^3 + 1}$; в) $y = 2 - \sqrt{x}$;

б) $y = 5 - x^5 - \sqrt{2x^3}$; г) $y = \sqrt{x^7} + x - 1$.

Исследуйте функцию на ограниченность:

○2.6. а) $y = x^2 - 8x + 1$; в) $y = -2x^2 - 6x + 15$;

б) $y = \dfrac{2x - 4}{x}$, $x > 0$; г) $y = \dfrac{5 - 2x}{1 - x}$, $x < 1$.

○2.7. а) $y = \sqrt{-x^2 + 4x - 5}$; в) $y = \sqrt{-2x^2 + 8x + 9}$;

б) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 4x + 1}{5}}$; г) $y = \sqrt{\dfrac{5}{2x^2 - 4x + 2}}$.

Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

2.8. а) $y = 3 - 2x$, $x \in [-1; 3]$;

б) $y = -2x^2 + 2x$, $x \in [-3; 2]$;

в) $y = 3 - 4x$, $x \in (-\infty; 3]$;

г) $y = x^2 + 4x + 5$, $x \in (0; 1]$.

2.9. а) $y = \sqrt{x}$, $x \in [2; +\infty)$; в) $y = \sqrt{x}$, $x \in [1{,}44; 6{,}25]$;

б) $y = -\sqrt{x}$, $x \in [1; 9]$; г) $y = -\sqrt{x}$, $x \in (0; 1{,}69]$.

○2.10. а) $y = 2|x| - 1$, $x \in [-3; 2]$; в) $y = 1{,}5 - |5x|$, $x \in [-8; 2]$;

б) $y = 3 - |2x|$, $x \in (-5; 4]$; г) $y = 6|x| - 2$, $x \in [-10; 4)$.

2.11. Исследуйте функцию на четность:

а) $y = x^2 + 2x^4 + 1$; в) $y = \dfrac{-3x^2 + 1}{1 - x^4}$;

б) $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$; г) $y = 5 - 3x^3$.

Постройте и прочитайте график функции:

○2.12. $y = \begin{cases} \dfrac{3}{x}, & \text{если } x < 0, \\ 3\sqrt{x}, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$

○2.13. $y = \begin{cases} 4 - 2x^2, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ x + 1, & \text{если } 1 < x \leqslant 3. \end{cases}$

○2.14. $y = \begin{cases} 2, & \text{если } -3 \leqslant x \leqslant 1, \\ \sqrt{x} + 1, & \text{если } 1 < x \leqslant 4, \\ (x - 5)^2 + 2, & \text{если } 4 < x \leqslant 6. \end{cases}$

О2.15. Постройте и прочитайте график функции:

$$y = \begin{cases} x^3, \text{ если } x < 0, \\ -x^2 + 2x + 2, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ x, \text{ если } 2 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

§ 3. Обратная функция

Сравним функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, графики которых изображены на рисунках 21 и 22. Обе они определены на отрезке $[a; b]$ и имеют множеством своих значений отрезок $[c; d]$. Функция $y = f(x)$ обладает следующим свойством: какое бы число y_0 из множества значений функции ни взять, оно является значением функции только в одной точке x_0: $y_0 = f(x_0)$. Функция $y = g(x)$ этим свойством не обладает; например, для выбранного на рисунке 22 значения y_0 имеем: $y_0 = g(x_1)$, $y_0 = g(x_2)$ и $y_0 = g(x_3)$. Иными словами, среди множества значений функции $y = g(x)$ есть такие, которые функция принимает более чем в одной точке области определения. Говорят, что функция $y = f(x)$ *обратима*, а функция $y = g(x)$ *необратима*.

Определение 1. Функцию $y = f(x)$, $x \in X$ называют **обратимой**, если любое свое значение она принимает только в одной точке множества X (иными словами, если разным значениям аргумента соответствуют разные значения функции).

Теорема 1. **Если функция $y = f(x)$, $x \in X$ монотонна на множестве X, то она обратима.**

Доказательство. Пусть для определенности функция $y = f(x)$ возрастает на X и $x_1 \neq x_2$ — две точки из X; пусть, например, $x_1 < x_2$. Поскольку функция возрастает, из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$. Таким образом, разным значениям аргумента соответствуют разные значения функции, т. е. функция обратима. ◁■

Наглядную иллюстрацию этой теоремы дают рисунки 21 и 22; функция $y = f(x)$ монотонна и обратима, тогда как функция $y = g(x)$ немонотонна и необратима.

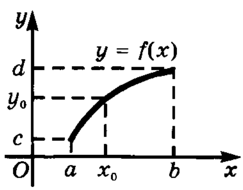


Рис. 21

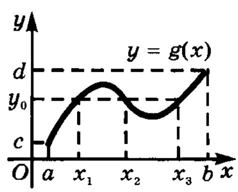


Рис. 22

Определение 2. Пусть $y = f(x)$, $x \in X$ — обратимая функция и $E(f) = Y$. Поставим в соответствие каждому y из Y то единственное значение x, при котором $f(x) = y$ (т. е. единственный корень уравнения $f(x) = y$ относительно переменной x). Тогда получим функцию, которая определена на Y, а X — ее область значений. Эту функцию обозначают $x = f^{-1}(y)$ и называют **обратной** по отношению к функции $y = f(x)$.

Из теоремы 1 следует, что для любой монотонной на X функции $y = f(x)$ существует обратная функция. Чтобы ее найти, надо из уравнения $y = f(x)$ выразить x через y.

Теорема 2. **Если функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на множестве X, а Y — область значений функции, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ возрастает (убывает) на Y.**

Доказательство. Пусть $y = f(x)$ — возрастающая функция, y_1 и y_2 — два ее значения, причем $y_1 < y_2$. Так как функция обратима, то каждое из этих значений достигается в одной точке: $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$. Значения x_1 и x_2 связаны неравенством $x_1 < x_2$. В самом деле, если предположить, что $x_1 \geqslant x_2$, то из возрастания функции $y = f(x)$ следовало бы $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, т. е. $y_1 \geqslant y_2$, что противоречит условию. Значит, из $y_1 < y_2$ следует $x_1 < x_2$, т. е. $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, а это означает, что обратная функция $x = f^{-1}(y)$ возрастает на Y. ◁■

Пример 1. Показать, что для функции $y = 5x - 3$ существует обратная функция, и найти ее аналитическое выражение.

Решение. Линейная функция $y = 5x - 3$ определена на множестве $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел, возрастает на $\boldsymbol{R}$, и область ее значений есть $\boldsymbol{R}$. Значит, обратная функция существует на $\boldsymbol{R}$. Чтобы найти ее аналитическое выражение, решим уравнение $y = 5x - 3$ относительно x; получим $x = \frac{y+3}{5}$. Это и есть искомая обратная функция. Она определена и возрастает на $\boldsymbol{R}$. ◁■

Пример 2. Показать, что для функции $y = x^2$, $x \in (-\infty; 0]$ существует обратная функция, и найти ее аналитическое выражение.

Решение. Функция $y = x^2$, $x \in (-\infty; 0]$ убывает, и область ее значений — луч $[0; +\infty)$ (рис. 23). Значит, обратная функция существует на $[0; +\infty)$.

Из уравнения $y = x^2$ находим $x = \sqrt{y}$ или $x = -\sqrt{y}$. По условию $x \in (-\infty; 0]$. Этому промежутку принадлежат значения функции

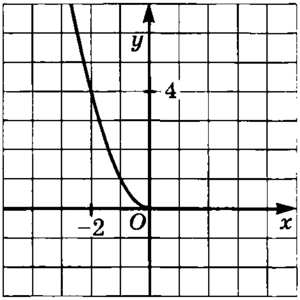


Рис. 23

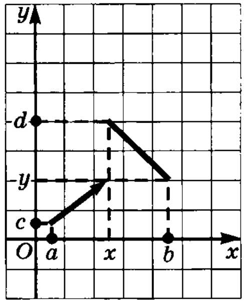


Рис. 24

$x = -\sqrt{y}$ и не принадлежат значения функции $x = \sqrt{y}$. Таким образом, искомая обратная функция такова: $x = -\sqrt{y}$, $y \in [0; +\infty)$. Эта функция, как и исходная функция $y = x^2$, $x \in (-\infty; 0]$, является убывающей. ◀

Замечание. Монотонность функции, как мы видели, является достаточным условием существования обратной функции. Но монотонность не является необходимым условием. Так, на рисунке 24 изображен график немонотонной, но обратимой функции.

Переход от функции $y = f(x)$, $x \in X$ к обратной функции $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$ сводится лишь к изменению ролей множеств X и Y: в первом случае осуществляется переход от X к Y, во втором — от Y к X. Поэтому графики функций $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ представляют собой одно и то же множество точек координатной плоскости xOy.

Обычно для обратной функции аргумент обозначают более привычной буквой x, а значение функции — буквой y, т. е. вместо $x = f^{-1}(y)$ пишут $y = f^{-1}(x)$. Но если пара чисел $(x; y)$ удовлетворяет уравнению $y = f(x)$ или эквивалентному уравнению $x = f^{-1}(y)$, то уравнению $y = f^{-1}(x)$ удовлетворяет пара чисел $(y; x)$. Поэтому график функции $y = f^{-1}(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью преобразования плоскости xOy, переводящего точку $(x; y)$ в точку $(y; x)$. Этим преобразованием, как мы сейчас докажем, является симметрия относительно прямой $y = x$ (биссектрисы I и III координатных углов).

***Теорема 3.* Точки $M(a; b)$ и $P(b; a)$ симметричны относительно прямой $y = x$.**

Доказательство. Будем считать для определенности, что a и b — положительные числа. Рассмотрим треугольники OAM

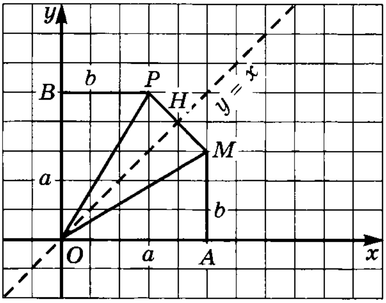


Рис. 25

и OBP (рис. 25). Они равны, значит, $OP = OM$ и $\angle MOA = \angle BOP$. Но тогда и $\angle POH = \angle HOM$, поскольку прямая $y = x$ — биссектриса угла AOB. Итак, треугольник POM равнобедренный, OH — его биссектриса, а значит, и ось симметрии. Точки M и P симметричны относительно прямой OH, что и требовалось доказать. ◁■

Значит, *чтобы получить график функции* $y = f^{-1}(x)$, *обратной по отношению к функции* $y = f(x)$, *надо график функции* $y = f(x)$ *преобразовать симметрично относительно прямой* $y = x$ (рис. 26).

Пример 3. Дана функция $y = x^2$, $x \in [0; +\infty)$. Доказать, что для нее существует обратная функция, записать аналитическое выражение обратной функции в виде $y = f^{-1}(x)$ и построить график обратной функции.

Р е ш е н и е. Заданная функция возрастает на промежутке $[0; +\infty)$, значит, она имеет обратную функцию. Из уравнения $y = x^2$ находим $x = \sqrt{y}$ или $x = -\sqrt{y}$. Промежутку $[0; +\infty)$ принадлежат лишь значения функции $x = \sqrt{y}$. Это и есть обратная функция, которая определена на промежутке $[0; +\infty)$.

Поменяв местами x и y, получим $y = \sqrt{x}$, $x \in [0; +\infty)$. График этой функции получается из графика функции $y = x^2$, $x \in [0; +\infty)$ с помощью симметрии относительно прямой $y = x$ (рис. 27). ◁■

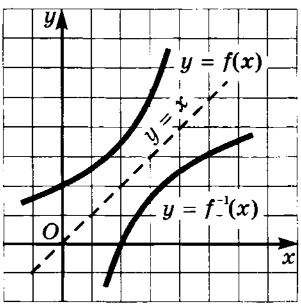


Рис. 26

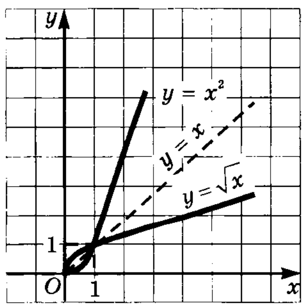


Рис. 27

Упражнения

Для заданной функции найдите обратную функцию:

3.1. а) $y = 3x - 1$; в) $y = 5x + 2$;

б) $y = 2 + 4x$; г) $y = 3 - x$.

○3.2. а) $y = \frac{x + 1}{2x - 3}$; в) $y = \frac{3 - 2x}{5x + 1}$;

б) $y = \frac{4 - 3x}{1 + x}$; г) $y = \frac{2x - 5}{1 + 2x}$.

Для заданной функции найдите обратную; постройте график заданной функции и обратной функции:

○3.3. а) $y = x^2$, $x \geqslant 0$; в) $y = (x - 1)^2$, $x \leqslant 1$;

б) $y = \sqrt{x}$; г) $y = \sqrt{-x}$.

○3.4. а) $y = x^3$; в) $y = 1 - x^3$;

б) $y = (x - 2)^3$; г) $y = (x + 3)^3 - 1$.

●3.5. Выясните, существует ли обратная функция для заданной функции. Если да, то задайте обратную функцию аналитически, постройте график заданной и обратной функций:

а) $y = x^2 + 4x - 8$, $x \in [-3; 0]$;

б) $y = x^2 + 4x - 8$, $x \in (-\infty; -2)$;

в) $y = -x^2 + 2x + 6$, $x \in [0; 3]$;

г) $y = -x^2 + 2x + 6$, $x \in [3; +\infty)$.

ГЛАВА 2 Тригонометрические функции

§ 4. Числовая окружность

В курсе алгебры 7—9-го классов вы изучали алгебраические функции, т. е. функции, заданные аналитическими выражениями, в записи которых использовались алгебраические операции над числами и переменной (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение квадратного и кубического корней). Но математические модели реальных ситуаций часто бывают связаны с функциями других классов — не алгебраическими. В школьном курсе математики рассматриваются показательные, логарифмические и тригонометрические функции. Мы приступаем сейчас к изучению тригонометрических функций.

Для введения тригонометрических функций нам понадобится новая математическая модель — *числовая окружность*.

С числовой окружностью вы до сих пор не встречались, зато хорошо знакомы с числовой прямой. Что такое числовая прямая? Это прямая, на которой заданы начальная точка O, масштаб (единичный отрезок) и положительное направление. Любому действительному числу мы можем сопоставить единственную точку на прямой, и обратно: любая точка прямой соответствует единственному числу.

Как по числу x найти на прямой соответствующую точку M? Числу 0 соответствует начальная точка O. Если $x > 0$, то, двигаясь по прямой из точки O в положительном направлении, нужно пройти путь длиной x. Конец этого пути и будет искомой точкой $M(x)$. Если $x < 0$, то, двигаясь по прямой из точки O в отрицательном направлении, нужно пройти путь длиной $|x|$. Конец этого пути и будет искомой точкой $M(x)$. Число x — координата точки M.

А как решается обратная задача, как найти координату x заданной точки M на числовой прямой? Надо найти длину отрезка OM и взять ее со знаком + или − в зависимости от того, с какой стороны от точки O расположена на прямой точка M.

Но в реальной жизни приходится двигаться не только по прямой. Довольно часто рассматривается движение по окружности. Вот конкретный пример. Будем считать беговую дорожку стадиона окружностью (на самом деле это, конечно, не окружность и тем более не круг, но вспомните, как обычно говорят спортивные комментаторы: «бегун пробежал круг», «до финиша осталось пробежать полкруга» и т. д.), и пусть ее длина равна 400 м. Отмечаем старт — точку A (рис. 28). Бегун из точки A движется по окружности против часовой стрелки. Где он будет через 200 м? через 400 м? через 800 м? через 1500 м? А где провести финишную черту, если он бежит марафонскую дистанцию 42 км 195 м?

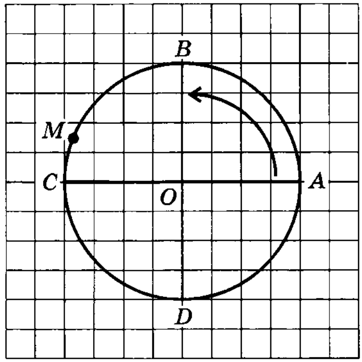


Рис. 28

Через 200 м он будет находиться в точке C, диаметрально противоположной точке A (200 м — это длина половины беговой дорожки, т. е. длина половины окружности). Пробежав 400 м («один круг»), он вернется в точку A. Пробежав 800 м («два круга»), он вновь окажется в точке A. А что такое 1500 м? Это «три круга» (1200 м) плюс еще 300 м, т. е. $\frac{3}{4}$ беговой дорожки, финиш этой дистанции будет в точке D.

Нам осталось разобраться с марафоном. Пробежав 105 кругов, спортсмен преодолеет путь $105 \cdot 400 = 42\,000$ м, т. е. 42 км. До финиша остается 195 м, это на 5 м меньше половины длины окружности. Значит, финиш марафонской дистанции будет в точке M, расположенной около точки C (см. рис. 28).

Замечание 1. Вы, разумеется, понимаете условность последнего примера. Марафонскую дистанцию по кругу стадиона никто не бегает, максимальная дистанция для стайеров (бегунов на длинные дистанции) на стадионе составляет 10 000 м, т. е. 25 кругов.

По беговой дорожке стадиона можно пробежать или пройти путь любой длины. Значит, любому положительному числу соответствует какая-то точка — «финиш дистанции». Более того, и любому отрицательному числу можно поставить в соответствие точку беговой дорожки стадиона, просто спортсмен должен бежать в противоположном направлении (т. е. стартовать из A не в направлении против, а в направлении по часовой стрелке). Тогда беговую дорожку стадиона можно рассматривать как *числовую окружность*.

В принципе любую окружность можно рассматривать как числовую, но удобнее всего использовать для этой цели единичную

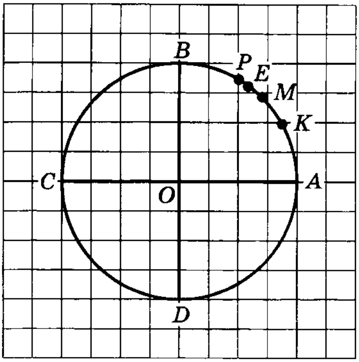


Рис. 29

окружность — окружность, радиус которой принимается за единицу измерения. Это будет наша «беговая дорожка», ее длина l равна 2π ($l = 2\pi R$; здесь $R = 1$), что составляет примерно 6,28.

Мы все время будем пользоваться единичной окружностью, в которой проведены горизонтальный и вертикальный диаметры CA и DB. Условимся называть дугу AB (рис. 29) *первой четвертью*, дугу BC — *второй четвертью*, дугу CD — *третьей четвертью*, дугу DA — *четвертой четвертью*. При этом, как правило, речь будет идти об *открытых дугах*, т. е. о дугах без их концов: например, первая четверть — это дуга AB без точек A и B. Длина каждой четверти единичной окружности равна $\frac{1}{4} \cdot 2\pi$, т. е. $\frac{\pi}{2}$.

Сколько существует дуг единичной окружности, соединяющих точки A и B? Две: поменьше, если идти от точки A к точке B по первой четверти, и побольше, если идти от точки B к точке A по второй, третьей и четвертой четвертям. Как отличить эти дуги друг от друга, используя символы математического языка? Условимся в двухбуквенном обозначении дуги на первом месте писать букву, соответствующую началу дуги, а на втором — букву, соответствующую концу дуги, причем движение по окружности от начала дуги к ее концу будем осуществлять в направлении *против часовой стрелки*. Тогда меньшая из двух дуг, соединяющих точки A и B, о которых мы говорили выше, — это дуга AB, а бóльшая — это дуга BA.

Пример 1. В единичной окружности проведены два взаимно перпендикулярных диаметра: горизонтальный CA и вертикальный DB. Дуга AB разделена точкой M на две равные части, а точками K и P — на три равные части (рис. 29). Чему равна длина дуги AM, MB, AK, KP, PB, AP, KM?

Решение. Так как длина дуги AB равна $\frac{\pi}{2}$ (будем писать кратко: $AB = \frac{\pi}{2}$), то, разделив ее на две равные части точкой M, получим две дуги, длиной $\frac{\pi}{4}$ каждая. Значит, $AM = MB = \frac{\pi}{4}$.

Если дуга AB разбита на три равные части точками K и P, то длина каждой полученной части равна $\frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2}$, т. е. $\frac{\pi}{6}$. Значит, $AK = KP = PB = \frac{\pi}{6}$.

Дуга AP состоит из двух дуг AK и KP длиной $\frac{\pi}{6}$. Значит, $AP = 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Осталось вычислить длину дуги KM. Эта дуга получается из дуги AM исключением дуги AK. Значит, длина дуги KM равна разности длин дуг AM и AK. Таким образом,

$$KM = AM - AK = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}.$$ ◀

З а м е ч а н и е 2. Обратите внимание на некоторую вольность, которую мы позволяем себе в использовании математического языка. Ясно, что д у г а KM и д л и н а д у г и KM — разные вещи (первое понятие — геометрическая фигура, а второе понятие — число). А обозначается и то и другое одинаково: KM. Более того, если точки K и M соединить отрезком, то и полученный отрезок, и его длина обозначаются так же: KM. Обычно из контекста бывает ясно, какой смысл вкладывается в обозначение (дуга, длина дуги, отрезок или длина отрезка).

Пример 2. Вторая четверть единичной окружности разделена пополам точкой M (рис. 30), а четвертая четверть разделена на три равные части точками K и P. Чему равна длина дуги AM, AK, AP, PB, MK, KM?

Р е ш е н и е. Прежде чем переходить к требуемым вычислениям, заметим, что $AB = BC = CD = DA = \frac{\pi}{2}$, $BM = MC = \frac{\pi}{4}$,

$$DK = KP = PA = \frac{\pi}{6}.$$

Значит,

$$AM = AB + BM = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4};$$

$$AK = AB + BC + CD + DK =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{3};$$

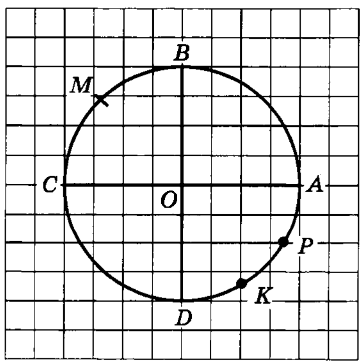


Рис. 30

$$AP = AD + DP = \frac{3\pi}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{6};$$

$$PB = PA + AB = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3};$$

$$MK = MC + CD + DK = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{12};$$

$$KM = KP + PA + AB + BM = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{12}.$$

Заметили ли вы, что во всех разобранных примерах длина дуг выражалась некоторыми долями числа π? Это неудивительно: ведь длина единичной окружности равна 2π, и если мы окружность или ее четверть делим на равные части, то получаются дуги, длина которых выражается долями числа π. А как вы думаете, можно ли найти на единичной окружности такую точку E, что длина дуги AE будет равна 1? Давайте прикинем:

$$\pi \approx 3{,}14; \ \frac{\pi}{3} \approx \frac{3{,}14}{3} \approx 1{,}047; \ \frac{\pi}{4} \approx \frac{3{,}14}{4} \approx 0{,}785.$$

Таким образом, $\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{3}$.

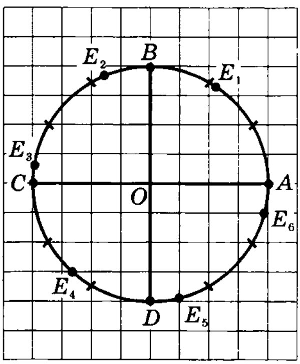


Рис. 31

Обратимся снова к рисунку 29. Если $AE = 1$, то точка E находится между точками M и P, ближе к точке P. Разумеется, точно (а не приблизительно) указать положение точки E на окружности мы не сумеем, но это, впрочем, не так уж важно.

На единичной окружности можно найти и точку E_1, для которой $AE_1 = 1$, и точку E_2, для которой $AE_2 = 2$, и точку E_3, для которой $AE_3 = 3$, и точку E_4, для которой $AE_4 = 4$, и точку E_5, для которой $AE_5 = 5$, и точку E_6, для которой $AE_6 = 6$. На рисунке 31 отмечены (приблизительно) соответствующие точки, причем для ориентировки каждая из четвертей единичной окружности разделена (черточками) на три равные части.

Определение. Дана единичная окружность, на ней отмечена начальная точка A — правый конец горизонтального диаметра. Поставим в соответствие каждому действительному числу t точку окружности по следующему правилу.

1) Если $t > 0$, то, двигаясь из точки A в направлении против часовой стрелки (положительное направление обхода окружности), опишем по окружности путь AM длиной t. Точка M и будет искомой точкой $M(t)$.

2) Если $t < 0$, то, двигаясь из точки A в направлении по часовой стрелке (отрицательное направление обхода окружности), опишем по окружности путь AM длиной $|t|$. Точка M и будет искомой точкой $M(t)$.

3) Числу $t = 0$ поставим в соответствие точку A; $A = A(0)$.

Единичную окружность с установленным соответствием (между действительными числами и точками окружности) будем называть **числовой окружностью.**

Пример 3. Найти на числовой окружности точку, которая соответствует заданному числу: $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, $\frac{7\pi}{2}$, 9π, $-\frac{3\pi}{2}$.

Решение. Так как первые шесть из заданных семи чисел положительны, то для нахождения соответствующих им точек окружности нужно пройти по окружности путь заданной длины, двигаясь из точки A в положительном направлении. Учтем при этом, что длина каждой четверти единичной окружности равна $\frac{\pi}{2}$.

Имеем (см. рис. 31) $AB = \frac{\pi}{2}$, значит, числу $\frac{\pi}{2}$ соответствует точка B; $B = B\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Далее, $AC = \pi$, значит, числу π соответствует точка C, т. е. $C = C(\pi)$.

$AD = \frac{3\pi}{2}$, значит, числу $\frac{3\pi}{2}$ соответствует точка D, т. е. $D = D\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

Числу 2π соответствует точка A, так как, пройдя по окружности путь длиной 2π, т. е. ровно одну окружность, мы попадем в начальную точку A. Итак, $A = A(2\pi)$.

Что такое $\frac{7\pi}{2}$? Это $2\pi + \frac{3\pi}{2}$. Значит, двигаясь из точки A в положительном направлении, нужно пройти целую окружность (путь длиной 2π) и дополнительно путь длиной $\frac{3\pi}{2}$, который закончится в точке D. Итак, $D = D\left(\frac{7\pi}{2}\right)$.

Что такое 9π? Это $4 \cdot 2\pi + \pi$. Значит, двигаясь из точки A в положительном направлении, нужно четыре раза пройти целую окружность (путь длиной $4 \cdot 2\pi$) и дополнительно еще путь длиной π, который закончится в точке C. Итак, $C = C(9\pi)$.

Осталось найти на числовой окружности точку, соответствующую заданному отрицательному числу $-\frac{3\pi}{2}$. Для этого нужно из точки A пройти по окружности в отрицательном направлении (по часовой стрелке) путь длиной $\frac{3\pi}{2}$. Этот путь завершится в точке B, т. е. $B = B\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$.

Замечание 3. При работе с числовой прямой обычно условливаются для краткости не говорить «точка прямой, соответствующая числу x», а говорить «точка x». Точно такой же договоренности будем придерживаться и при работе с числовой окружностью: «точка t» — это значит, что речь идет о точке окружности, которая соответствует числу t.

Пример 4. Найти на числовой окружности точки $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$.

Решение. Разделив первую четверть AB на три равные части точками K и P (рис. 32), получим $K = K\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $P = P\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Разделив дугу AB пополам точкой M, получим $M = M\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

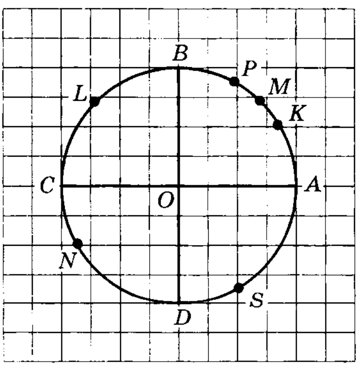


Рис. 32

Пример 5. Найти на числовой окружности точки $-\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{3}$.

Решение. Построения будем проводить, используя рисунок 32. Отложив дугу AM длиной $\frac{\pi}{4}$ от точки A в отрицательном направлении пять раз, получим точку L — середину дуги BC. Итак, $L = L\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$.

Отложив дугу AK длиной $\frac{\pi}{6}$ от точки A в положительном направлении семь раз, попадем в точку N, которая принадлежит третьей четверти — дуге CD, причем $CN = \frac{\pi}{6}$ (третья часть дуги CD). Итак, $N = N\left(\frac{7\pi}{6}\right)$.

Отложив дугу AK (ее длина равна $\frac{\pi}{6}$) от точки A в положительном направлении десять раз, попадем в точку S, которая принадлежит четвертой четверти — дуге DA, причем $DS = \frac{\pi}{6}$ (третья часть дуги DA). Итак, $S = S\left(\frac{10\pi}{6}\right) = S\left(\frac{5\pi}{3}\right)$. ◁■

Особенно часто приходится искать на числовой окружности точки, соответствующие числам $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ и кратным им, т. е. $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{9\pi}{2}$ и т. д. Поэтому нам очень пригодятся два макета числовой окружности.

ПЕРВЫЙ МАКЕТ. Каждая из четырех четвертей числовой окружности разделена на две равные части, и около каждой из имеющихся восьми точек записаны их «имена» (рис. 33).

ВТОРОЙ МАКЕТ. Каждая из четырех четвертей числовой окружности разделена на три равные части, и около каждой из имеющихся двенадцати точек записаны их «имена» (рис. 34).

Учтите, что и на том и на другом макетах мы могли бы заданным точкам присвоить другие «имена»*. Так, числу $-\frac{\pi}{4}$ соответствует середина четвертой четверти. Этой точке на первом макете присвоено имя $\frac{7\pi}{4}$, но, как видите, мы могли присвоить ей и имя $-\frac{\pi}{4}$. Вообще, если двигаться по первому макету из точки 0 по

* Далее условный термин «имя» будем использовать без кавычек.

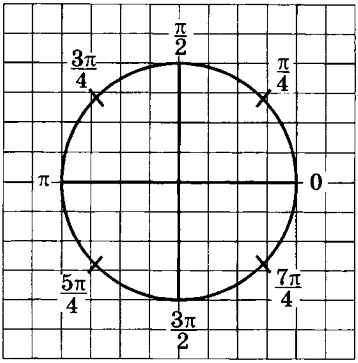


Рис. 33

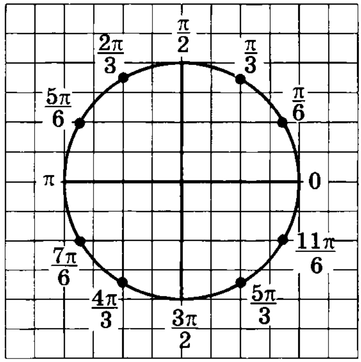


Рис. 34

часовой стрелке, получим для имеющихся на чертеже восьми точек соответственно $0, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}, -\pi, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}$. Аналогично, если двигаться по второму макету из точки 0 по часовой стрелке, получим для имеющихся на чертеже двенадцати точек соответственно $0, -\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{5\pi}{6}, \ldots, -\frac{11\pi}{6}$.

Пример 6. Найти на числовой окружности точки 1, 2, 3, 4, 5, 6, -7.

Решение. Точки, соответствующие числам 1, 2, 3, 4, 5, 6, — это точки E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6 на рисунке 31. О точке -7 поговорим подробнее.

Нам нужно, двигаясь из точки A в отрицательном направлении (по часовой стрелке), пройти по окружности путь длиной 7. Если пройти одну окружность, то получим (приближенно) 6,28, значит, нужно еще пройти (в том же направлении) путь длиной 0,72. Что же это за дуга, длина которой равна 0,72? Она немного меньше половины четверти окружности: ее длина меньше числа $\frac{\pi}{4}$, потому что $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$, а $0{,}72 < 0{,}785$. Точка $M = M(-7)$ отмечена на рисунке 35 (мы немного не дошли до середины четвертой четверти). ◀■

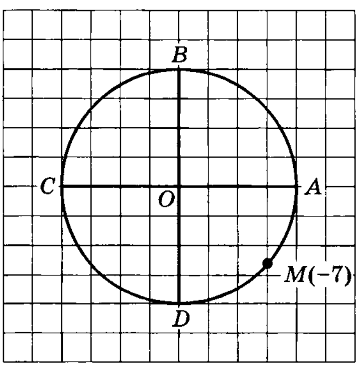


Рис. 35

Итак, на числовой окружности, как и на числовой прямой, каждому действительному числу соответствует одна точка (только, разумеется, на прямой ее найти легче, чем на окружности). Для прямой, как мы уже отметили выше, верно и обратное: каждая точка соответствует единственному числу. Для числовой окружности такое утверждение неверно; выше мы неоднократно убеждались в этом.

Для числовой окружности справедливо следующее утверждение.

Если точка M числовой окружности соответствует числу t, то она соответствует и числу вида t + 2πk, где k — любое целое число (k ∈ Z).

В самом деле, 2π — длина числовой (единичной) окружности, а целое число $|k|$ можно рассматривать как количество полных обходов окружности в ту или иную сторону. Например, если $k = 3$, то это значит, что мы делаем три обхода окружности в положительном направлении; если $k = -7$, то это значит, что мы делаем семь ($|k| = |-7| = 7$) обходов окружности в отрицательном направлении. Но если мы находимся в точке $M(t)$, то, выполнив еще k полных обходов окружности, мы снова окажемся в точке M. Итак,

$$\boxed{\boldsymbol{M(t) = M(t + 2\pi k),\quad \text{где } k \in Z.}}$$

На двух макетах (см. рис. 33, 34) указаны лишь главные имена точек — числа, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$, т. е. числа, соответствующие точкам числовой окружности при первом ее обходе в положительном направлении. На самом деле у точки $\frac{\pi}{4}$ бесконечно много имен: $t = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$; у точки $\frac{5\pi}{6}$ тоже бесконечно много имен: $t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$, и т. д.

Число k иногда называют *параметром*. Впрочем, параметр можно обозначить и другой буквой, например n или m.

Пример 7. Найти на числовой окружности точку:

а) $\frac{21\pi}{4}$; б) $-\frac{37\pi}{6}$.

Решение.

а) $\frac{21\pi}{4} = \frac{21}{4}\pi = \left(4 + \frac{5}{4}\right) \cdot \pi = 4\pi + \frac{5\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2\pi \cdot 2.$

Значит, числу $\frac{21\pi}{4}$ соответствует на числовой окружности та же точка, что и числу $\frac{5\pi}{4}$, — середина третьей четверти (см. рис. 33).

б) $-\frac{37\pi}{6} = -\frac{37}{6}\pi = -\left(6 + \frac{1}{6}\right) \cdot \pi = -6\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot (-3).$

Значит, числу $-\frac{37\pi}{6}$ соответствует на числовой окружности та же точка, что и числу $-\frac{\pi}{6}$, — это точка с именем $\frac{11\pi}{6}$ (см. рис. 34). ◁■

Вы знаете, что промежутки на числовой прямой можно записывать аналитически с помощью двойных неравенств. Так, аналитической записью отрезка [3; 5] (рис. 36) служит двойное неравенство $3 \leqslant x \leqslant 5$; аналитической записью интервала $(-4; 0)$ (рис. 36) служит двойное неравенство $-4 < x < 0$. На окружности роль отрезков или интервалов играют дуги. Их тоже можно записывать аналитически с помощью двойных неравенств, но при этом, естественно, следует учитывать, что, в отличие от числовой прямой, где каждая точка имеет одно числовое имя, на числовой окружности у точки бесконечно много имен. В следующем примере мы покажем, как составляется аналитическая запись дуги числовой окружности.

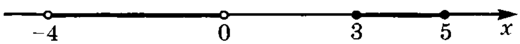


Рис. 36

Пример 8. Найти все числа t, которым на числовой окружности соответствуют точки, принадлежащие заданной дуге:

а) AB; б) BA; в) DB; г) KM; д) MK

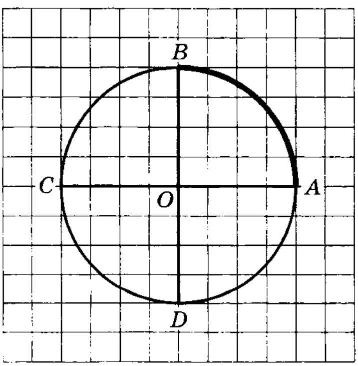


Рис. 37

(здесь K и M — соответственно середина первой и третьей четверти числовой окружности).

Решение. а) Дуга AB — это дуга с началом в точке A и концом в точке B при движении по окружности против часовой стрелки (рис. 37). Главные имена точек A и B — соответственно $t = 0$ и $t = \frac{\pi}{2}$. Значит, для точек t дуги AB имеем

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

Как мы видели ранее, точка A соответствует не только числу 0, но и всем числам вида $0 + 2\pi k$, т. е. $2\pi k$; точка B соответствует не только числу $\frac{\pi}{2}$, но и всем числам вида $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$. Значит, если мы хотим охарактеризовать все числа t, которым на числовой окружности соответствуют точки дуги AB, то придется использовать такую запись:

$$2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \qquad (2)$$

Для удобства будем пользоваться следующей (не общепринятой) терминологией: неравенство (1) — *ядро аналитической записи дуги AB*, неравенство (2) — *аналитическая запись дуги AB*.

б) Для дуги BA (рис. 38) главные имена точек B и A — соответственно $\frac{\pi}{2}$ и 2π. Значит, ядром аналитической записи дуги BA является неравенство $\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant 2\pi$, а сама аналитическая запись дуги BA имеет вид

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant t \leqslant 2\pi + 2\pi k^1.$$

в) Для дуги DB (рис. 39) главные имена точек D и B соответственно $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$; при записи ядра нужно следить за тем, чтобы число в левой части неравенства было меньше числа в правой части. Значит, ядром аналитической записи дуги DB является неравенство

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2},$$

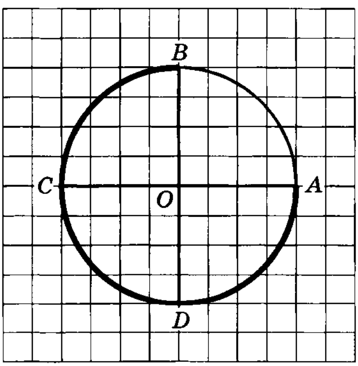


Рис. 38

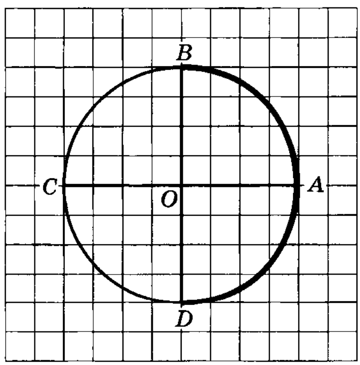


Рис. 39

[1] Условимся в дальнейшем не писать каждый раз $k \in \mathbf{Z}$ или $n \in \mathbf{Z}$ (но, естественно, мы все время будем это подразумевать).

а сама аналитическая запись дуги DB имеет вид

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

г) Дуга KM — это дуга с началом в точке K и концом в точке M при движении по окружности против часовой стрелки (рис. 40). Главные имена точек K и M — соответственно $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{4}$. Значит, ядром аналитической записи дуги KM является неравенство

$$\frac{\pi}{4} \leqslant t \leqslant \frac{5\pi}{4},$$

а сама аналитическая запись дуги KM имеет вид

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{5\pi}{4} + 2\pi k.$$

д) Для дуги MK (рис. 41) главные имена точек M и K — соответственно $-\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4}$. Значит, ядром аналитической записи дуги MK является неравенство

$$-\frac{3\pi}{4} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4},$$

а сама аналитическая запись дуги MK имеет вид

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

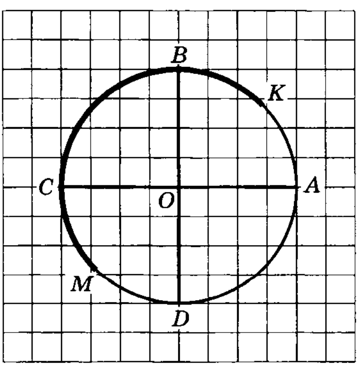


Рис. 40

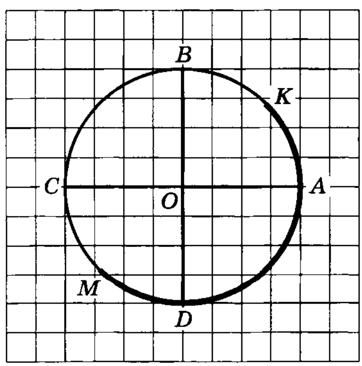


Рис. 41

Упражнения

Горизонтальный диаметр CA и вертикальный диаметр DB разбивают единичную окружность на четыре четверти: AB — первая, BC — вторая, CD — третья, DA — четвертая (рис. 42). Опираясь на эту геометрическую модель, решите следующие задачи.

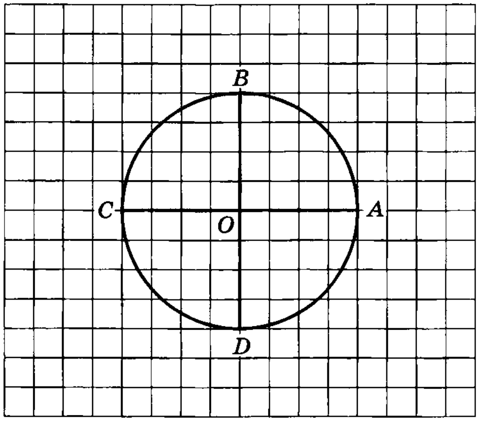


Рис. 42

4.1. Вторая четверть разделена пополам точкой M, а третья четверть разделена на три равные части точками K и P. Чему равна длина дуги AM, BK, MP, DC, KA, BP, CB, BC?

4.2. Первая четверть разделена на две равные части точкой M, а четвертая — на три равные части точками K и P. Чему равна длина дуги AM, BD, CK, MP, DM, MK, CP, PC?

4.3. Первая четверть разделена точкой M в отношении $2 : 3$, считая от точки A. Чему равна длина дуги AM, MB, DM, MC?

4.4. Третья четверть разделена точкой P в отношении $1 : 5$, считая от точки C. Чему равна длина дуги CP, PD, AP?

Найдите на числовой окружности точку, которая соответствует заданному числу:

4.5. а) $\frac{\pi}{2}$; б) π; в) $\frac{3\pi}{2}$; г) 2π.

4.6. а) 7π; б) 4π; в) 10π; г) 3π.

4.7. а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{6}$; г) $\frac{\pi}{8}$.

Найдите на числовой окружности точку, которая соответствует заданному числу:

4.8. а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{3\pi}{4}$; в) $\frac{5\pi}{6}$; г) $\frac{5\pi}{4}$.

4.9. а) $\frac{4\pi}{3}$; б) $\frac{5\pi}{3}$; в) $\frac{7\pi}{6}$; г) $\frac{11\pi}{6}$.

4.10. а) $-\frac{\pi}{2}$; б) $-\frac{2\pi}{3}$; в) -2π; г) $-\frac{3\pi}{4}$.

4.11. а) $\frac{25\pi}{4}$; б) $-\frac{26\pi}{3}$; в) $-\frac{25\pi}{6}$; г) $\frac{16\pi}{3}$.

4.12. Что вы можете сказать о взаимном расположении точек, соответствующих заданным числам, на координатной прямой и на числовой окружности?

а) t и $-t$; в) t и $t+\pi$;

б) t и $t+2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; г) $t+\pi$ и $t-\pi$.

4.13. Запишите все числа, которым соответствует на числовой окружности точка:

а) $M_1\left(\frac{\pi}{4}\right)$; б) $M_2(5)$; в) $M_3\left(\frac{3\pi}{4}\right)$; г) $M_4(-3)$.

4.14. Запишите одной формулой все числа, которым соответствуют на числовой окружности заданные точки (см. рис. 42):

а) A; б) C; в) A и C.

4.15. Запишите одной формулой все числа, которым соответствуют на числовой окружности заданные точки (см. рис. 42):

а) B; б) D; в) B и D.

О4.16. Найдите на числовой окружности точку, которая соответствует числу: а) 1; б) −5; в) 4,5; г) −3.

Какой четверти числовой окружности принадлежит точка, соответствующая числу:

О4.17. а) 6; б) 2; в) 3; г) 4.

О4.18. а) 5; б) −5; в) 8; г) −8.

Найдите все числа t, которым на числовой окружности (см. рис. 42) соответствуют точки, принадлежащие указанной открытой дуге (т. е. дуге без ее концов), если M — середина первой четверти, K — середина второй четверти:

О4.19. а) AM; б) CM; в) MA; г) MC.

О4.20. а) DK; б) BD; в) KD; г) DB.

§ 5. Числовая окружность на координатной плоскости

Расположим числовую окружность в декартовой прямоугольной системе координат xOy так, как показано на рисунке 43: центр окружности совмещен с началом координат, а ее радиус принимается за единичный отрезок. Начальная точка A числовой окружности совмещена с точкой (1; 0) на оси x. При этом $B = B(0; 1)$, $C = C(-1; 0)$, $D = D(0; -1)$. Каждая точка числовой окружности имеет в системе xOy свои координаты, причем (см. рис. 43):

$x > 0$, $y > 0$ в первой четверти;
$x < 0$, $y > 0$ во второй четверти;
$x < 0$, $y < 0$ в третьей четверти;
$x > 0$, $y < 0$ в четвертой четверти.

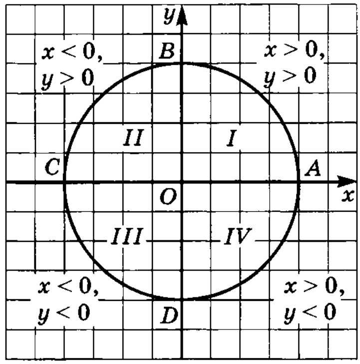


Рис. 43

Для любой точки $M(x; y)$ числовой окружности выполняются неравенства

$$-1 \leqslant x \leqslant 1;\ -1 \leqslant y \leqslant 1.$$

Нетрудно составить уравнение числовой окружности. Для этого заметим, что, во-первых, центром окружности служит начало координат, а уравнение окружности радиусом R с центром в начале координат имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$; во-вторых, $R = 1$, значит, уравнение числовой окружности имеет вид

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Нам важно научиться находить координаты точек числовой окружности, прежде всего тех, которые представлены на двух макетах (см. рис. 33, 34). Начнем с точек первого макета $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{4}$.

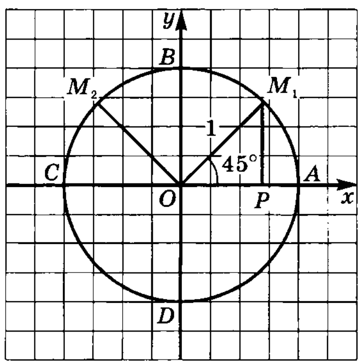


Рис. 44

Точка $M_1\left(\frac{\pi}{4}\right)$ — середина первой четверти. Опустим из точки M_1 перпендикуляр M_1P на прямую OA и рассмотрим треугольник OM_1P (рис. 44). Так как дуга AM_1 составляет половину дуги AB, то

$\angle AOM_1 = 45°$. Значит, OM_1P — равнобедренный прямоугольный треугольник; $OP = M_1P$, т. е. у точки M_1 абсцисса и ордината равны: $x = y$. Кроме того, координаты точки $M_1(x; y)$ удовлетворяют уравнению числовой окружности $x^2 + y^2 = 1$. Таким образом, для нахождения координат точки M_1 нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} x = y, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Подставив x вместо y во второе уравнение системы, получим $x^2 + x^2 = 1$; $x^2 = \frac{1}{2}$; $x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (мы учли, что абсцисса точки M_1 положительна). А так как $y = x$, то и $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Итак,

$$M_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Проанализируем полученное равенство. Что означает запись $M_1\left(\frac{\pi}{4}\right)$? Она означает, что точка M_1 числовой окружности соответствует числу $\frac{\pi}{4}$. А запись $M_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ означает, что точка M_1 имеет соответствующие координаты в прямоугольной системе координат xOy. И в дальнейшем будем придерживаться подобного способа записи: если написано $M(t)$, то это значит, что точка M числовой окружности соответствует числу t; если написано $M(x; y)$, то это значит, что числа x и y являются соответственно абсциссой и ординатой точки M. Таким образом, $(x; y)$ — декартовы координаты точки M, а t — «криволинейная» координата точки M на числовой окружности.

Рассмотрим точку $M_2\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ — середину второй четверти (рис. 44). Рассуждая, как и выше, получим для модуля абсциссы и модуля ординаты этой точки те же значения $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{\sqrt{2}}{2}$, что и для точки $M_1\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Поскольку во второй четверти $x < 0$, а $y > 0$, делаем вывод:

$$M_2\left(\frac{3\pi}{4}\right) = M_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Для точки $M_3\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ — середины третьей четверти — имеем

$$M_3\left(\frac{5\pi}{4}\right) = M_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Для точки $M_4\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ — середины четвертой четверти — имеем

$$M_4\left(\frac{7\pi}{4}\right) = M_4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Сведем полученные результаты в таблицу.

Таблица 1

Точка окружности	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
Абсцисса x	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
Ордината y	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Теперь найдем координаты точек, изображенных на втором макете (см. рис. 34). Возьмем точку $M_1\left(\frac{\pi}{6}\right)$, опустим из нее перпендикуляр M_1P на прямую OA и рассмотрим прямоугольный треугольник OM_1P (рис. 45). Гипотенузой этого треугольника является отрезок OM_1, причем $OM_1 = 1$. Угол M_1OP равен 30°, поскольку дуга AM_1 составляет треть дуги AB, а дуга AB содержит 90°. Из геометрии известно, что катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы. Значит, $M_1P = \frac{1}{2}$ — это ордината точки M_1, т. е. $y = \frac{1}{2}$.

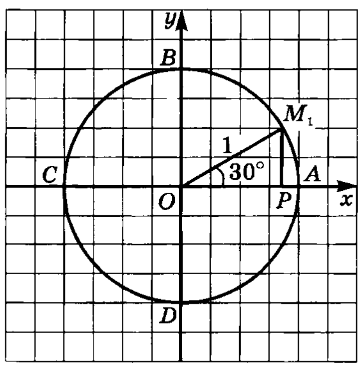


Рис. 45

По теореме Пифагора

$$OP^2 = OM_1^2 - M_1P^2.$$

Значит,

$$x^2 = OP^2 = OM_1^2 - M_1P^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

т. е. $x^2 = \frac{3}{4}$, а потому $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (мы учли, что точка $\frac{\pi}{6}$ принадлежит первой четверти, обе ее координаты — положительные числа).

Итак,

$$M_1\left(\frac{\pi}{6}\right) = M_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

С точкой $M_2\left(\frac{\pi}{3}\right)$ связан такой же прямоугольный треугольник, как и с точкой M_1, только расположенный по-другому (рис. 46). Получаем

$$M_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = M_2\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Те же самые значения (с точностью до знака) будут координатами остальных точек второго макета, исключая, разумеется, точки $A(0)$, $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $C(\pi)$, $D\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, причем по чертежу нетрудно определить, какая координата равна по модулю числу $\frac{1}{2}$, а какая — числу $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Возьмем для примера точку $M_3\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ (см. рис. 46). Опустим перпендикуляр M_3L на ось x. Во-первых, $M_3L < LO$, т. е. $|y| < |x|$. Значит, из двух чисел $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$ в качестве модуля ординаты точки M_3 нужно взять меньшее, т. е. $\frac{1}{2}$, а в качестве модуля абсциссы — большее, т. е. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Во-вторых, $\frac{7\pi}{6}$ — точка третьей четверти, а потому $x < 0$ и $y < 0$.

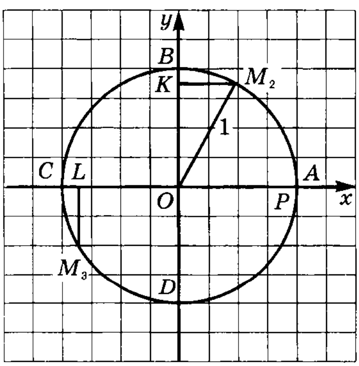


Рис. 46

В итоге получаем

$$M_3\left(\frac{7\pi}{6}\right) = M_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

А теперь возьмите точку $M_4\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ и попробуйте, проведя аналогичные рассуждения, найти ее координаты. Мы же пока приведем таблицу для точек второго макета, с помощью которой вы сможете проверить правильность своего вывода.

Таблица 2

Точка окружности	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
Абсцисса x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Ордината y	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Теперь проверьте себя по таблице 2: $M_4\left(\frac{5\pi}{3}\right) = M_4\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Пример 1. Найти координаты точек числовой окружности:

а) $P_1\left(\frac{45\pi}{4}\right)$; б) $P_2\left(-\frac{37\pi}{3}\right)$; в) $P_3(45\pi)$; г) $P_4(-18\pi)$.

Решение. Во всех четырех случаях воспользуемся утверждением, полученным в § 4: числам t и $t + 2\pi k$ ($k \in Z$) соответствует одна и та же точка числовой окружности.

а) $\frac{45\pi}{4} = \frac{45}{4}\cdot\pi = \left(10 + \frac{5}{4}\right)\cdot\pi = 10\pi + \frac{5\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2\pi\cdot 5.$

Значит, числу $\frac{45\pi}{4}$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $\frac{5\pi}{4}$. Для точки $\frac{5\pi}{4}$ (см. табл. 1) имеем $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Значит,

$$P_1\left(\frac{45\pi}{4}\right) = P_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

б) $-\frac{37\pi}{3} = -\frac{37}{3}\cdot\pi = -\left(12 + \frac{1}{3}\right)\cdot\pi = -12\pi - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi\cdot(-6).$

Значит, числу $-\frac{37\pi}{3}$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $-\frac{\pi}{3}$. А числу $-\frac{\pi}{3}$ на числовой окружности соответствует та же точка, что и числу $\frac{5\pi}{3}$. Для точки $\frac{5\pi}{3}$ (см. табл. 2) имеем $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Таким образом,

$$P_2\left(-\frac{37\pi}{3}\right) = P_2\left(\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

в) $45\pi = 44\pi + \pi = \pi + 2\pi \cdot 22$. Значит, числу 45π соответствует та же точка числовой окружности, что и числу π, — это точка $C(-1;\ 0)$. Итак,

$$P_3(45\pi) = P_3(-1;\ 0).$$

г) $-18\pi = 0 + 2\pi \cdot (-9)$. Значит, числу -18π соответствует та же точка числовой окружности, что и числу 0, — это точка $A(1;\ 0)$. Итак,

$$P_4(-18\pi) = P_4(1;\ 0).$$

Пример 2. Найти на числовой окружности точки с ординатой $y = \frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Решение. Прямая $y = \frac{1}{2}$ пересекает числовую окружность в точках M и P (рис. 47). Точка M соответствует числу $\frac{\pi}{6}$ (см. второй макет — рис. 34), а значит, и любому числу вида $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$. Точка P соответствует числу $\frac{5\pi}{6}$, а значит, и любому числу вида $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. Получили, как часто говорят в таких случаях, *две серии значений*: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ и $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$.

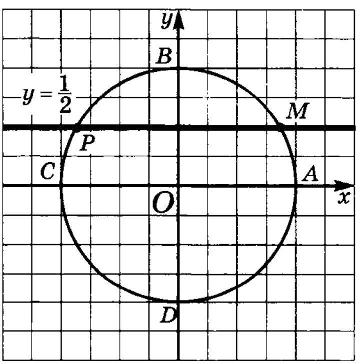


Рис. 47

Ответ: $t = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$; $k \in \mathbf{Z}$.

Пример 3. Найти на числовой окружности точки с абсциссой $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

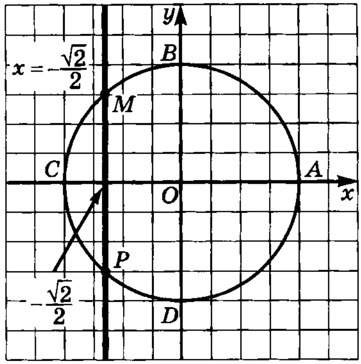


Рис. 48

Решение. Прямая $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ пересекает числовую окружность в точках M и P (рис. 48). Точка M соответствует числу $\frac{3\pi}{4}$ (см. первый макет — рис. 33), а значит, и любому числу вида $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$; точка P соответствует числу $\frac{5\pi}{4}$, а значит, и любому числу вида $\frac{5\pi}{4} + 2\pi k$.

Ответ: $t = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad t = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k.$

Замечание. В примере 3 можно было рассуждать немного по-другому: точка P соответствует числу $-\frac{3\pi}{4}$, а значит, и любому числу вида $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$. Получим две серии значений: $t = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ (для точки M) и $t = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ (для точки P). Чем это решение лучше по сравнению с приведенной записью ответа к примеру 3? Только тем, что обе серии значений можно охватить одной формулой $t = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$.

Пример 4. Найти на числовой окружности точки с ординатой $y > \frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Решение. Прямая $y = \frac{1}{2}$ пересекает числовую окружность в точках M и P (см. рис. 47). Неравенству $y > \frac{1}{2}$ соответствуют точки открытой дуги MP, т. е. дуги без концов M и P. Дуга MP — это дуга с началом в точке M и концом в точке P при движении по окружности против часовой стрелки. Главные имена точек M

и P — соответственно $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$. Значит, ядром аналитической записи дуги MP является неравенство

$$\frac{\pi}{6} < t < \frac{5\pi}{6},$$

а сама аналитическая запись дуги MP имеет вид

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k.$$

Пример 5. Найти на числовой окружности точки с ординатой $y < \frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Решение. Прямая $y = \frac{1}{2}$ пересекает числовую окружность в точках M и P (см. рис. 47). Неравенству $y < \frac{1}{2}$ соответствуют точки открытой дуги PM. Дуга PM — это дуга с началом в точке P и концом в точке M при движении по окружности против часовой стрелки. Главные имена точек P и M в этом случае — соответственно $-\frac{7\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{6}$. Значит, ядром аналитической записи дуги PM является неравенство

$$-\frac{7\pi}{6} < t < \frac{\pi}{6},$$

а сама аналитическая запись дуги MP имеет вид

$$-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{6} + 2\pi k.$$

Пример 6. Найти на числовой окружности точки с абсциссой $x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Решение. Прямая $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ пересекает числовую окружность в точках M и P (см. рис. 48). Неравенству $x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ соответствуют точки дуги PM. Дуга PM — это дуга с началом в точке P и концом в точке M при движении по окружности против часовой стрелки. Главные имена точек P и M в этом случае — соответственно $-\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$. Значит, ядром аналитической записи дуги PM является неравенство

$$-\frac{3\pi}{4} \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{4},$$

а сама аналитическая запись дуги PM имеет вид

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2\pi k.$$

Пример 7. Найти на числовой окружности точки с абсциссой $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Решение. Прямая $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ пересекает числовую окружность в точках M и P (см. рис. 48). Неравенству $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ соответствуют точки открытой дуги MP. Дуга MP — это дуга с началом в точке M и концом в точке P при движении по окружности против часовой стрелки. Главные имена точек M и P в этом случае — соответственно $\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{4}$. Значит, ядром аналитической записи дуги MP является неравенство

$$\frac{3\pi}{4} < t < \frac{5\pi}{4},$$

а сама аналитическая запись дуги MP имеет вид

$$\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Упражнения

Центр числовой окружности совпадает с началом координат на координатной плоскости xOy. Найдите декартовы координаты заданной точки:

5.1. а) $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$; б) $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$; в) $M\left(\frac{\pi}{6}\right)$; г) $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

5.2. а) $M(2\pi)$; б) $M\left(\frac{7\pi}{2}\right)$; в) $M\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$; г) $M(15\pi)$.

5.3. а) $M\left(\frac{15\pi}{4}\right)$; б) $M\left(\frac{16\pi}{3}\right)$; в) $M\left(-\frac{31\pi}{4}\right)$; г) $M\left(-\frac{26\pi}{3}\right)$.

Найдите наименьшее положительное и наибольшее отрицательное числа, которым на числовой окружности соответствует точка с координатами:

5.4. а) $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$; в) $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$;

б) $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$; г) $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$.

5.5. а) $M\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; в) $M\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

б) $M\left(-\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; г) $M\left(\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Найдите на числовой окружности точки с данной ординатой и запишите, каким числам t они соответствуют:

5.6. а) $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $y = \frac{1}{2}$; в) $y = 0$; г) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

5.7. а) $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $y = 1$; в) $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $y = -1$.

Найдите на числовой окружности точки с данной абсциссой и запишите, каким числам t они соответствуют:

5.8. а) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $x = \frac{1}{2}$; в) $x = 1$; г) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5.9. а) $x = 0$; б) $x = -\frac{1}{2}$; в) $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $x = -1$.

О5.10. Укажите знаки абсциссы и ординаты точки числовой окружности:

а) $E(2)$; б) $K(-4)$; в) $F(-1)$; г) $L(6)$.

Найдите на числовой окружности точки с абсциссой или ординатой, удовлетворяющей заданному неравенству, и запишите (с помощью двойного неравенства), каким числам t они соответствуют:

О5.11. а) $x > 0$; б) $x < \frac{1}{2}$; в) $x > \frac{1}{2}$; г) $x < 0$.

О5.12. а) $x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

О5.13. а) $y > 0$; б) $y \leqslant \frac{1}{2}$; в) $y > \frac{1}{2}$; г) $y < 0$.

О5.14. а) $y < \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $y > -\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $y \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $y \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

§ 6. Синус и косинус. Тангенс и котангенс

Определение 1. Если точка M числовой окружности соответствует числу t, то абсциссу точки M называют **косинусом числа t** и обозначают $\cos t$, а ординату точки M называют **синусом числа t** и обозначают $\sin t$.

Итак (рис. 49),

если $M(t) = M(x;\ y)$, то

$$x = \cos t,$$

$$y = \sin t.$$

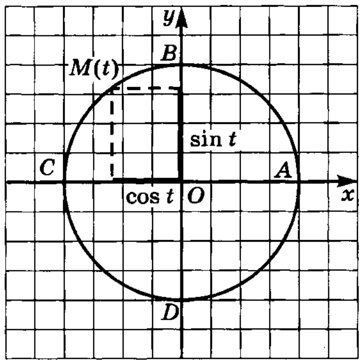


Рис. 49

Отсюда следует, что

$$-1 \leqslant \sin t \leqslant 1,$$

$$-1 \leqslant \cos t \leqslant 1.$$

Определение 2. Отношение синуса числа t к косинусу того же числа называют **тангенсом числа t** и обозначают $\operatorname{tg} t$. Отношение косинуса числа t к синусу того же числа называют **котангенсом числа t** и обозначают $\operatorname{ctg} t$:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}; \quad \operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

Говоря о $\operatorname{tg} t$, подразумевают, что $\cos t \neq 0$, а говоря о $\operatorname{ctg} t$, подразумевают, что $\sin t \neq 0$.

Мы отметили в § 5, что каждая точка числовой окружности имеет в системе xOy свои координаты, причем

$x > 0$, $y > 0$ в первой четверти;
$x < 0$, $y > 0$ во второй четверти;
$x < 0$, $y < 0$ в третьей четверти;
$x > 0$, $y < 0$ в четвертой четверти (см. рис. 43).

Это позволяет нам составить таблицу знаков синуса, косинуса, тангенса и котангенса по четвертям окружности (табл. 3).

Таблица 3

Четверть окружности	1-я	2-я	3-я	4-я
$\cos t$	+	−	−	+
$\sin t$	+	+	−	−
$\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$	+	−	+	−

Уравнение числовой окружности имеет вид $x^2 + y^2 = 1$. Тем самым фактически получено важное равенство, связывающее $\sin t$ и $\cos t$:

$$\boxed{\cos^2 t + \sin^2 t = 1.}$$

Мы говорили в § 5, что нам важно научиться находить координаты точек числовой окружности, и прежде всего тех, которые представлены на первом и втором макетах (см. рис. 33 и 34). Необходимость этого стала теперь предельно ясной: опираясь на таблицы из § 5, мы без труда составим соответствующие таблицы для значений $\cos t$ и $\sin t$.

Таблица 4

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\sin t$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Таблица 5

t	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\cos t$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin t$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Зная значения синуса и косинуса числа t, нетрудно вычислить соответствующие значения тангенса и котангенса. Тем не менее есть смысл составить таблицу основных значений тангенса и котангенса.

Таблица 6

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg} t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\operatorname{ctg} t$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Пример 1. Вычислить $\cos t$ и $\sin t$, если:

а) $t = \frac{45\pi}{4}$; б) $t = -\frac{37\pi}{3}$; в) $t = 45\pi$; г) $t = -18\pi$.

Решение. а) При решении примера 1а из § 5 мы установили, что числу $t = \frac{45\pi}{4}$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $\frac{5\pi}{4}$. Для точки $\frac{5\pi}{4}$ (табл. 4) имеем $\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Значит,

$$\cos\frac{45\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin\frac{45\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

б) При решении примера 1б из § 5 мы установили, что числу $t = -\frac{37\pi}{3}$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $\frac{5\pi}{3}$. Для точки $\frac{5\pi}{3}$ (табл. 5) имеем $\cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Значит,

$$\cos\left(-\frac{37\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}; \quad \sin\left(-\frac{37\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

в) При решении примера 1в из § 5 мы установили, что числу $t = 45\pi$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу π. Для точки π (см. табл. 4) имеем $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$. Значит,

$$\cos 45\pi = -1; \quad \sin 45\pi = 0.$$

г) В примере 1г из § 5 мы установили, что числу $t = -18\pi$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу 0. Для точки 0 (см. табл. 4) имеем $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$. Значит,

$$\cos(-18\pi) = 1; \quad \sin(-18\pi) = 0.$$

Пример 2. Решить уравнение $\sin t = \frac{1}{2}$.

Решение. Учтем, что $\sin t$ — это ордината точки $M(t)$ числовой окружности. Значит, нам нужно найти на числовой окружности точки с ординатой $\frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют. Эта задача уже решена в примере 2 из § 5.

Ответ: $t = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$; $k \in \mathbf{Z}$.

Пример 3. Решить уравнение $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Учтем, что $\cos t$ — это абсцисса точки $M(t)$ числовой окружности. Значит, нам нужно найти на числовой окружности точки с абсциссой $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют. Эта задача уже решена в примере 3 из § 5.

Ответ: $t = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $t = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$ (или $t = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$).

Пример 4. Решить неравенство $\sin t > \frac{1}{2}$.

Решение. Учтем, что $\sin t$ — это ордината точки $M(t)$ числовой окружности. Значит, нам нужно найти на числовой окружности точки с ординатой $y > \frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют. Эта задача уже решена в примере 4 из § 5.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$.

Пример 5. Решить неравенство $\cos t \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Учтем, что $\cos t$ — это абсцисса точки $M(t)$ числовой окружности. Значит, нам нужно найти на числовой окружности точки с абсциссой $x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют. Эта задача уже решена в примере 6 из § 5.

Ответ: $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$; $k \in \mathbf{Z}$.

Пример 6. Решить уравнения:

а) $\sin t = 0$; б) $\sin t = 1$; в) $\sin t = -1$.

Решение. а) Нам нужно найти на числовой окружности точки с ординатой 0 и записать, каким числам t они соответствуют. Ординату 0 имеют точки A и C (см. рис. 49), они соответствуют числам 0 (точка A), π (точка C), 2π (точка A), 3π (точка C), $-\pi$ (точка C), -2π (точка A) и т. д. Обобщая, это можно записать так: точки A и C соответствуют числам вида πk.

Итак, решения уравнения $\sin t = 0$ имеют вид

$$t = \pi k.$$

б) Ординату 1 имеет точка B числовой окружности (см. рис. 49), она соответствует числу $\frac{\pi}{2}$, а значит, и всем числам вида $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Итак, решения уравнения $\sin t = 1$ имеют вид

$$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

в) Ординату -1 имеет точка D числовой окружности (см. рис. 49), она соответствует числу $-\frac{\pi}{2}$, а значит, и всем числам вида

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

Итак, решения уравнения $\sin t = -1$ имеют вид

$$t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

Ответ: а) $t = \pi k$; б) $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; в) $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Пример 7. Решить уравнения:

а) $\cos t = 0$; б) $\cos t = 1$; в) $\cos t = -1$.

Решение. а) Нам нужно найти на числовой окружности точки с абсциссой 0 и записать, каким числам t они соответствуют. Абсциссу 0 имеют точки B и D (см. рис. 49), они соответствуют числам $\frac{\pi}{2}$ (точка B), $\frac{3\pi}{2}$ (точка D), $\frac{5\pi}{2}$ (точка B), $\frac{7\pi}{2}$ (точка D), $-\frac{\pi}{2}$ (точка D), $-\frac{3\pi}{2}$ (точка B) и т. д. Обобщая, это можно записать так: точки B и D соответствуют числам вида $\frac{\pi}{2} + \pi k$.

Итак, решения уравнения $\cos t = 0$ имеют вид

$$t = \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

б) Абсциссу 1 имеет точка A числовой окружности (см. рис. 49), она соответствует числу 0, а значит, и всем числам вида $0 + 2\pi k$, т. е. $2\pi k$.

Итак, решения уравнения $\cos t = 1$ имеют вид

$$t = 2\pi k.$$

в) Абсциссу -1 имеет точка C числовой окружности (см. рис. 49), она соответствует числу π, а значит, и всем числам вида $\pi + 2\pi k$.

Итак, решения уравнения $\cos t = -1$ имеют вид

$$t = \pi + 2\pi k.$$

Ответ: а) $t = \frac{\pi}{2} + \pi k$; б) $t = 2\pi k$; в) $t = \pi + 2\pi k$.

Замечание. Напомним еще раз о нашей договоренности: параметр k (или n) принимает любые целочисленные значения ($k \in \mathbf{Z}$), мы это постоянно подразумеваем, но для краткости не всегда записываем.

Впредь, говоря о $\operatorname{tg} t$ или $\operatorname{ctg} t$, мы будем подразумевать (а иногда и записывать), что аргумент t принимает только допустимые значения: для $\operatorname{tg} t$ они определяются условием $\cos t \neq 0$, т. е. $t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ (см. пример 7а); для $\operatorname{ctg} t$ они определяются условием $\sin t \neq 0$, т. е. $t \neq \pi k$ (см. пример 6а).

Завершая разговор о синусе, косинусе, тангенсе и котангенсе, докажем некоторые важные свойства.

Свойство 1. Для любого значения t справедливы равенства

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(-t) &= -\sin t;\\ \cos(-t) &= \cos t;\end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned}\operatorname{tg}(-t) &= -\operatorname{tg} t;\\ \operatorname{ctg}(-t) &= -\operatorname{ctg} t.\end{aligned}}$$

Например,

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2};$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Доказательство. Если числу t соответствует точка M числовой окружности, то числу $-t$ соответствует точка P, симметричная точке M относительно горизонтального диаметра окружности (рис. 50), т. е. симметричная точке M относительно оси абсцисс. У таких точек одна и та же абсцисса, а это значит, что $\cos(-t) = \cos t$. У таких точек равные по модулю, но противоположные по знаку ординаты. А это значит, что $\sin(-t) = -\sin t$.

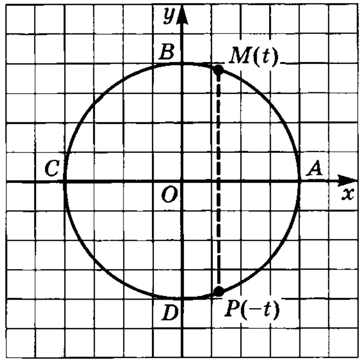


Рис. 50

Далее,

$$\operatorname{tg}(-t) = \frac{\sin(-t)}{\cos(-t)} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t;$$

$$\operatorname{ctg}(-t) = \frac{\cos(-t)}{\sin(-t)} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\operatorname{ctg} t.$$

Свойство 2. Для любого значения t справедливы равенства

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(t + 2\pi k) &= \sin t;\\ \cos(t + 2\pi k) &= \cos t.\end{aligned}}$$

Это очевидно, поскольку числам t и $t + 2\pi k$ соответствует одна и та же точка числовой окружности (чем мы уже не раз пользовались).

Свойство 3. Для любого значения t справедливы равенства

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(t + \pi) &= -\sin t;\\ \cos(t + \pi) &= -\cos t;\end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned}\operatorname{tg}(t + \pi) &= \operatorname{tg} t;\\ \operatorname{ctg}(t + \pi) &= \operatorname{ctg} t.\end{aligned}}$$

Например,

$$\sin\frac{7\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2};$$

$$\cos\frac{5\pi}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

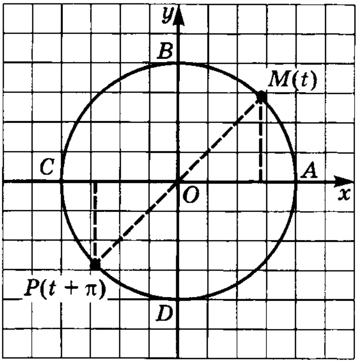


Рис. 51

Доказательство. Если числу t соответствует точка M числовой окружности, то числу $t+\pi$ соответствует точка P, симметричная точке M относительно центра окружности — начала координат (рис. 51). У таких точек и абсциссы и ординаты равны по модулю, но противоположны по знаку. Это значит, что

$$\cos(t+\pi) = -\cos t;$$
$$\sin(t+\pi) = -\sin t.$$

Далее,

$$\operatorname{tg}(t+\pi) = \frac{\sin(t+\pi)}{\cos(t+\pi)} = \frac{-\sin t}{-\cos t} =$$

$$= \frac{\sin t}{\cos t} = \operatorname{tg} t;$$

$$\operatorname{ctg}(t+\pi) = \frac{\cos(t+\pi)}{\sin(t+\pi)} = \frac{-\cos t}{-\sin t} =$$

$$= \frac{\cos t}{\sin t} = \operatorname{ctg} t.$$

Выполняются и такие равенства:

$$\operatorname{tg}(t+2\pi) = \operatorname{tg} t, \quad \operatorname{tg}(t-\pi) = \operatorname{tg} t, \quad \operatorname{ctg}(t+2\pi) = \operatorname{ctg} t$$ и т. д.

Вообще можно записать так:

$$\boxed{\begin{gathered}\operatorname{tg}(t+\pi k) = \operatorname{tg} t;\\ \operatorname{ctg}(t+\pi k) = \operatorname{ctg} t.\end{gathered}}$$

Свойство 4. Для любого значения t справедливы равенства

$$\boxed{\begin{gathered}\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = \cos t;\\ \cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin t.\end{gathered}}$$

Доказательство. Пусть числу t соответствует точка M числовой окружности, а числу $t + \frac{\pi}{2}$ — точка P (рис. 52). Сразу обратим внимание на важное обстоятельство: если точка M находится в первой четверти, то точка P — во второй; если точка M находится во второй четверти, то точка P — в третьей и т. д. Дуги AM и BP равны, соответственно равны и прямоугольные треугольники OKM и OLP. Значит, $OK = OL$, $MK = PL$. Из этих равенств, учитывая замечание о расположении точек M и P в четвертях числовой окружности, делаем два вывода:

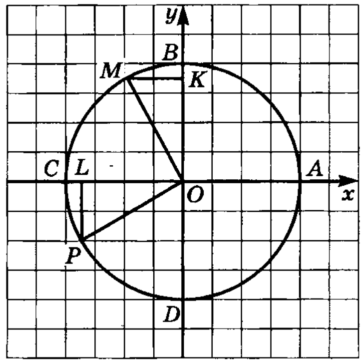


Рис. 52

1) ордината точки P и по модулю, и по знаку совпадает с абсциссой точки M. Это значит, что

$$\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t;$$

2) абсцисса точки P по модулю равна ординате точки M, но отличается от нее знаком. Это значит, что

$$\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin t.$$

Пример 8. Доказать тождества:

а) $\sin(\pi - t) = \sin t$; в) $\sin(2\pi - t) = -\sin t$;
б) $\cos(\pi - t) = -\cos t$; г) $\cos(2\pi - t) = \cos t$.

Решение. а) Запишем $\sin(\pi - t)$ в виде $\sin(-t + \pi)$. Применив к выражению $\sin(-t + \pi)$ свойство 3, получим:

$$\sin(-t + \pi) = -\sin(-t).$$

По свойству 1, $\sin(-t) = -\sin t$. Значит, $-\sin(-t) = \sin t$, а потому $\sin(-t + \pi) = \sin t$.

Итак, $\sin(\pi - t) = \sin t$, что и требовалось доказать.

б) Запишем $\cos(\pi - t)$ в виде $\cos(-t + \pi)$. Применив к выражению $\cos(-t + \pi)$ свойство 3, получим: $\cos(-t + \pi) = -\cos(-t)$.

По свойству 1 $\cos(-t) = \cos t$. Значит, $\cos(\pi - t) = -\cos t$, что и требовалось доказать.

в) $\sin(2\pi - t) = \sin(-t + 2\pi) = \sin(-t) = -\sin t$;

г) $\cos(2\pi - t) = \cos(-t + 2\pi) = \cos(-t) = \cos t$.

Пример 9. Вычислить:

а) $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; б) $\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$.

Решение. а) По свойству 1, $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{7\pi}{3}$. Так как $\frac{7\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3}$, то $-\operatorname{tg}\frac{7\pi}{3} = -\operatorname{tg}\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

(мы воспользовались свойством 3, а точнее, его обобщением).

Итак,

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}.$$

б) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4} = \operatorname{ctg}\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1$

(здесь мы также воспользовались свойством 3). ◁■

Для синуса и косинуса у нас есть геометрическая иллюстрация на числовой окружности. Можно дать и геометрическую иллюстрацию для тангенса. Возьмем на координатной плоскости числовую окружность, проведем касательную к ней в точке A и будем считать эту касательную числовой прямой, ориентированной так же, как ось y (рис. 53) и с началом в точке A. Пусть числу t соответствует точка M числовой окружности, принадлежащая первой четверти. Из подобия треугольников OMK и OPA делаем вывод: $\frac{MK}{OK} = \frac{PA}{OA}$. Но $MK = \sin t$, $OK = \cos t$, $OA = 1$.

Значит, $\frac{\sin t}{\cos t} = \frac{PA}{1}$, т. е. $PA = \operatorname{tg} t$. Значит, $\operatorname{tg} t$ можно трактовать как координату точки P на числовой прямой l. Та же точка P характеризует значение тангенса для точки M_1, диаметрально противоположной точке M (см. рис. 53).

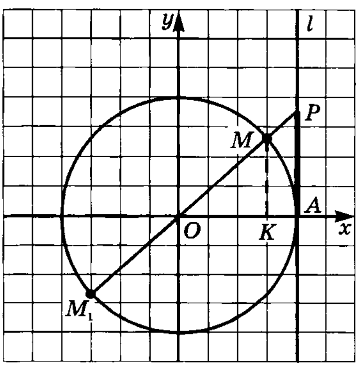


Рис. 53

Пусть теперь числу t соответствует точка M числовой окружности, принадлежащая второй четверти (рис. 54). Из подобия треугольников OMK и OPA делаем тот же вывод: $\frac{MK}{OK} = \frac{PA}{OA}$.

Здесь, как и выше, $MK = \sin t$, $OA = 1$, но $OK = -\cos t$ (поскольку речь идет о сторонах треугольника, длина которых выражается положительными числами, а $\cos t$ во второй четверти отрицателен). Значит, $\frac{\sin t}{-\cos t} = \frac{PA}{1}$, т. е. $PA = -\operatorname{tg} t$. Итак, длина отрезка PA

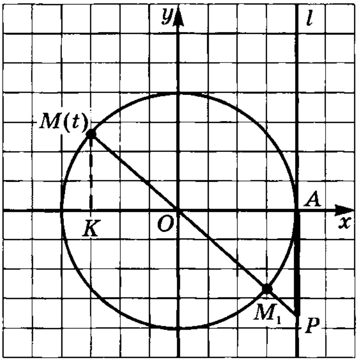


Рис. 54

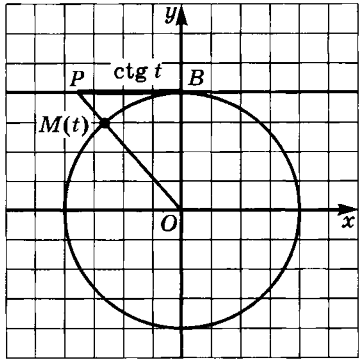


Рис. 55

равна $-\operatorname{tg} t$, это — положительное число. Но мы договорились рассматривать касательную l как числовую прямую, это значит, что точка P соответствует отрицательному числу, противоположному длине отрезка PA. Вывод: точка P имеет на рассматриваемой числовой прямой координату $\operatorname{tg} t$. Так же обстоит дело для точки M_1, диаметрально противоположной точке M (рис. 54).

Итак, если числу t соответствует на числовой окружности точка M, то, проведя прямую OM, получим в пересечении ее с числовой прямой l точку P, которая имеет на числовой прямой l координату $\operatorname{tg} t$. Числовую прямую l называют *линией тангенсов*. С помощью линии тангенсов можно решать и обратную задачу: зная значение тангенса, найти на числовой окружности соответствующие точки (см. ниже пример 10).

Аналогично можно ввести в рассмотрение *линию котангенсов* (рис. 55).

Пример 10. Решить уравнения: а) $\operatorname{tg} t = \sqrt{3}$; б) $\operatorname{tg} t = -1$; в) $\operatorname{ctg} t = -\sqrt{3}$.

Решение. а) Отметим на линии тангенсов точку $P = P(\sqrt{3})$. Прямая OP пересекает числовую окружность в двух точках (рис. 56) — это и есть точки M_1, M_2, соответствующие тем значениям t, для которых $\operatorname{tg} t = \sqrt{3}$.

Точка M_1 соответствует значениям $t = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, точка M_2 — значениям $t = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$. Эти две серии решений можно объединить: $t = \frac{\pi}{3} + \pi n$.

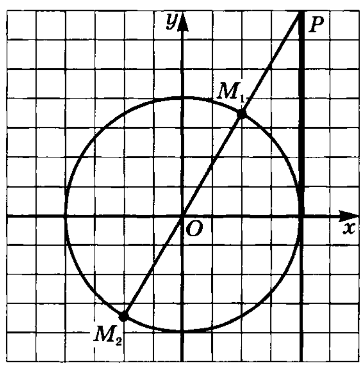


Рис. 56

б) Отметим на линии тангенсов точку $P = P(-1)$. Прямая OP пересекает числовую окружность в двух точках (рис. 57). Точка M_1 соответствует

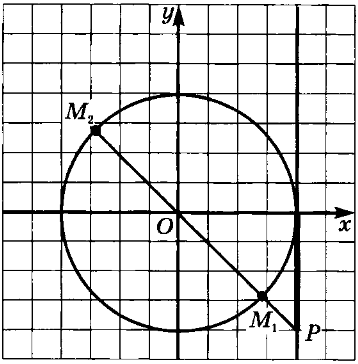


Рис. 57

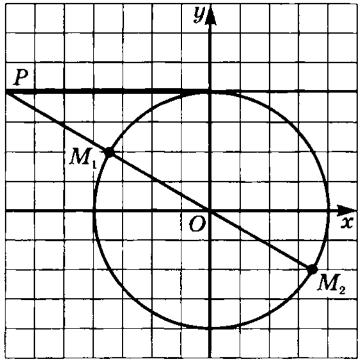


Рис. 58

значениям $t = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, точка M_2 — значениям $t = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$. Эти две серии решений можно объединить: $t = -\frac{\pi}{4} + \pi n$.

в) Отметим на линии котангенсов точку $P = P(-\sqrt{3})$. Прямая OP пересекает числовую окружность в двух точках (рис. 58). Точка M_1 соответствует значениям $t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, точка M_2 — значениям $t = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k$.

Эти две серии решений можно объединить: $t = \frac{5\pi}{6} + \pi n$.

Пример 11. Решить неравенства: а) $\operatorname{tg} t > \sqrt{3}$; б) $\operatorname{tg} t < -1$; в) $\operatorname{ctg} t \leqslant -\sqrt{3}$.

Решение. а) Отметим на линии тангенсов точку $P = P(\sqrt{3})$. Неравенство $\operatorname{tg} t > \sqrt{3}$ означает, что нас интересуют на этой прямой точки, лежащие выше точки P. Прямая OP пересекает числовую окружность в точках M_1, M_2; точкам, расположенным выше точки P, соответствуют точки открытых дуг M_1B, M_2D (рис. 59). Аналитическая запись дуги M_1B такова: $\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; аналитическая запись дуги M_2D такова: $\frac{4\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$. Эти две серии решений можно объединить:

$$\frac{\pi}{3} + \pi n < t < \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

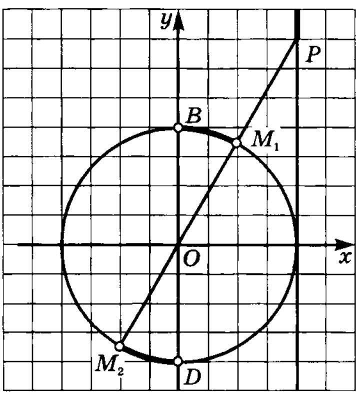


Рис. 59

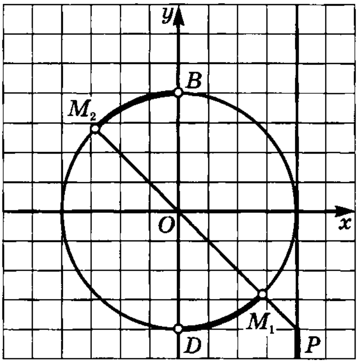


Рис. 60

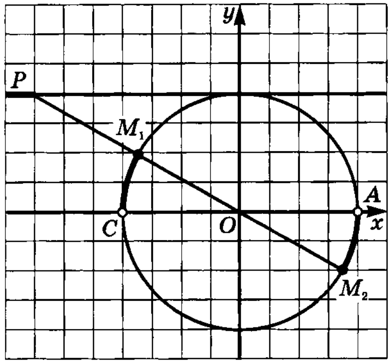


Рис. 61

б) Отметим на линии тангенсов точку $P = P(-1)$. Неравенство $\operatorname{tg} t < -1$ означает, что нас интересуют на этой прямой точки, лежащие ниже точки P. Прямая OP пересекает числовую окружность в точках M_1, M_2; точкам, расположенным ниже точки P, соответствуют точки открытых дуг DM_1, BM_2 (рис. 60). Аналитическая запись дуги DM_1 такова: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < t < -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; аналитическая запись дуги BM_2 такова: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k < t < \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$. Эти две серии решений можно объединить: $-\frac{\pi}{2} + \pi n < t < -\frac{\pi}{4} + \pi n$.

в) Отметим на линии котангенсов точку $P = P\left(-\sqrt{3}\right)$. Неравенство $\operatorname{ctg} t \leqslant -\sqrt{3}$ означает, что нас интересуют на этой прямой точки, лежащие левее точки P, и сама точка P. Прямая OP пересекает числовую окружность в точках M_1, M_2; точкам, расположенным левее точки P, соответствуют точки открытых дуг M_1C, M_2A (рис. 61). Аналитическая запись дуги M_1C такова: $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \leqslant t < \pi + 2\pi k$; аналитическая запись дуги M_2A такова: $\frac{11\pi}{6} + 2\pi k \leqslant t < 2\pi + 2\pi k$. Эти две серии решений можно объединить: $\frac{5\pi}{6} + \pi n \leqslant t < \pi + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Упражнения

Найдите $\sin t$, $\cos t$ и $\operatorname{tg} t$, если:

6.1. а) $t = 0$; б) $t = \frac{\pi}{2}$; в) $t = \frac{3\pi}{2}$; г) $t = \pi$.

6.2. а) $t = -2\pi$; б) $t = -\frac{\pi}{2}$; в) $t = -\frac{3\pi}{2}$; г) $t = -\pi$.

Найдите $\sin t$, $\cos t$ и $\operatorname{tg} t$, если:

6.3. а) $t = \frac{5\pi}{6}$; б) $t = \frac{5\pi}{4}$; в) $t = \frac{7\pi}{6}$; г) $t = \frac{7\pi}{4}$.

6.4. а) $t = -\frac{7\pi}{4}$; б) $t = -\frac{4\pi}{3}$; в) $t = -\frac{5\pi}{6}$; г) $t = -\frac{5\pi}{3}$.

6.5. а) $t = \frac{13\pi}{6}$; б) $t = -\frac{8\pi}{3}$; в) $t = \frac{23\pi}{6}$; г) $t = -\frac{11\pi}{4}$.

Вычислите:

○6.6. а) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\frac{\pi}{3} + \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

б) $\cos\frac{\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{2}$;

в) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos(-\pi) + \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$;

г) $\sin\frac{\pi}{6} \cdot \sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{3} \cdot \sin\frac{\pi}{2}$.

○6.7. а) $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 \cdot \sin\frac{\pi}{2}$;

б) $\cos\frac{5\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3} + \sin\frac{3\pi}{2} \cdot \sin\frac{5\pi}{8} \cdot \cos\frac{3\pi}{2}$.

6.8. а) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4}$; в) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$;

б) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$; г) $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{4} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$.

○6.9. а) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$;

б) $2\sin\pi + 3\cos\pi + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$;

в) $2\sin\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}$;

г) $2\operatorname{tg} 0 + 8\cos\frac{3\pi}{2} - 6\sin^2\frac{\pi}{3}$.

6.10. Вычислите:

а) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}$; в) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{7}$;

б) $3\operatorname{tg}2{,}3\cdot\operatorname{ctg}2{,}3$; г) $7\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}$.

6.11. Докажите тождество:

а) $\sin t\cdot\operatorname{ctg}t=\cos t$; в) $\cos t\cdot\operatorname{tg}t=\sin t$;

б) $\dfrac{\sin t}{\operatorname{tg}t}=\cos t$; г) $\dfrac{\cos t}{\operatorname{ctg}t}=\sin t$.

О6.12. Упростите выражение:

а) $\sin t\cdot\cos t\cdot\operatorname{tg}t$; в) $\sin^2 t-\operatorname{tg}t\cdot\operatorname{ctg}t$;

б) $\sin t\cdot\cos t\cdot\operatorname{ctg}t-1$; г) $\dfrac{1-\cos^2 t}{1-\sin^2 t}$.

Найдите значение выражения:

О6.13. а) $\cos 2t$, если $t=\frac{\pi}{2}$; в) $\sin 2t$, если $t=-\frac{\pi}{6}$;

б) $\sin\frac{t}{2}$, если $t=-\frac{\pi}{3}$; г) $\cos\frac{t}{2}$, если $t=-\frac{\pi}{3}$.

О6.14. а) $\sin^2 t-\cos^2 t$, если $t=\frac{\pi}{3}$;

б) $\sin^2 t+\cos^2 t$, если $t=\frac{\pi}{4}$;

в) $\sin^2 t-\cos^2 t$, если $t=\frac{\pi}{4}$;

г) $\sin^2 t+\cos^2 t$, если $t=\frac{\pi}{6}$.

О6.15. Найдите наименьшее и наибольшее значения выражения:

а) $2\sin t$; б) $3+4\cos t$; в) $-3\cos t$; г) $3-5\sin t$.

6.16. Решите уравнение:

а) $\cos t=\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\cos t=-\frac{1}{2}$;

б) $\sin t=-\frac{1}{2}$; г) $\sin t=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решите уравнение:

6.17. а) $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\sin t = \sqrt{3}$; г) $\cos t = -\frac{\pi}{3}$.

6.18. а) $\sin t + 1 = 0$; в) $1 - 2\sin t = 0$;

б) $\cos t - 1 = 0$; г) $2\cos t - 1 = 0$.

6.19. Укажите все значения t, при которых не имеет смысла выражение:

а) $\frac{\sin t - 1}{\cos t}$; б) $\frac{\cos t + 5}{2\sin t - \sqrt{3}}$; в) $\frac{\cos t}{3 - 3\sin t}$; г) $\frac{\sin t}{10 - 20\cos t}$.

Определите знак числа:

○6.20. а) $\sin \frac{4\pi}{7}$; б) $\cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right)$; в) $\sin \frac{9\pi}{8}$; г) $\sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$.

○6.21. а) $\operatorname{tg} \frac{6\pi}{7}$; б) $\operatorname{ctg} \frac{10\pi}{9}$; в) $\operatorname{tg} \frac{8\pi}{11}$; г) $\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{5}$.

○6.22. а) $\sin(-2)$; б) $\cos 3$; в) $\sin 5$; г) $\cos(-6)$.

○6.23. а) $\sin 10$; б) $\cos(-12)$; в) $\sin(-15)$; г) $\cos 8$.

○6.24. а) $\sin 1 \cdot \cos 2$; в) $\cos 2 \cdot \sin(-3)$;

б) $\sin \frac{\pi}{7} \cdot \cos\left(-\frac{7\pi}{5}\right)$; г) $\cos\left(-\frac{14\pi}{9}\right) \cdot \sin\left(-\frac{4\pi}{9}\right)$.

○6.25. а) $\cos \frac{5\pi}{9} - \operatorname{tg} \frac{25\pi}{18}$; в) $\sin \frac{7\pi}{10} - \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{5}$;

б) $\operatorname{tg} 1 - \cos 2$; г) $\sin 2 - \operatorname{ctg} 5{,}5$.

○6.26. а) $\sin 1 \cdot \cos 2 \cdot \operatorname{tg} 3 \cdot \operatorname{ctg} 4$;

б) $\sin(-5) \cdot \cos(-6) \cdot \operatorname{tg}(-7) \cdot \operatorname{ctg}(-8)$.

Вычислите:

○6.27. а) $\cos 1 + \cos (1 + \pi) + \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos \left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

б) $\sin 2 + \sin (2 + \pi) + \cos^2 \left(-\frac{\pi}{12}\right) + \sin^2 \frac{\pi}{12}$.

○6.28. а) $\sin^2 (1{,}5 + 2\pi k) + \cos^2 1{,}5 + \cos \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

б) $\cos^2 \left(\frac{\pi}{8} + 4\pi\right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} - 44\pi\right)$.

○6.29. а) $\operatorname{tg} 2{,}5 \cdot \operatorname{ctg} 2{,}5 + \cos^2 \pi - \sin^2 \frac{\pi}{8} - \cos^2 \frac{\pi}{8}$;

б) $\sin^2 \frac{3\pi}{7} - 2 \operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{ctg} 1 + \cos^2 \left(-\frac{3\pi}{7}\right) + \sin^2 \frac{5\pi}{2}$.

Решите уравнение:

○6.30. а) $10 \sin t = \sqrt{75}$;

б) $\sqrt{8} \sin t + 2 = 0$;

в) $8 \cos t - \sqrt{32} = 0$;

г) $8 \cos t = -\sqrt{48}$.

○6.31. а) $\sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} - \sqrt{2} \sin t = 0$;

б) $\sqrt{\frac{4}{3}} \cos t = \cos^2 1 + \sin^2 1$.

●6.32. а) $|\sin t| = 1$;

б) $\sqrt{1 - \sin^2 t} = \frac{1}{2}$;

в) $|\cos t| = 1$;

г) $\sqrt{1 - \cos^2 t} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

○6.33. Имеет ли смысл выражение:

а) $\sqrt{\sin 10{,}2\pi}$;

б) $\sqrt{\cos 1{,}3\pi}$;

в) $\sqrt{\sin (-3{,}4\pi)}$;

г) $\sqrt{\cos (-6{,}9\pi)}$?

●6.34. Сравните числа a и b, если:

а) $a = \sin\frac{7\pi}{10}$, $b = \sin\frac{5\pi}{6}$; в) $a = \cos\frac{\pi}{8}$, $b = \cos\frac{\pi}{3}$;

б) $a = \cos 2$, $b = \sin 2$; г) $a = \sin 1$, $b = \cos 1$.

●6.35. Определите знак разности:

а) $\sin\frac{2\pi}{9} - \sin\frac{10\pi}{9}$; в) $\sin\frac{15\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{4}$;

б) $\sin 1 - \sin 1{,}1$; г) $\cos 1 - \cos 0{,}9$.

Расположите в порядке возрастания числа:

○6.36. а) $\sin\frac{\pi}{7}$, $\sin\frac{\pi}{5}$, $\sin\frac{2\pi}{3}$, $\sin\frac{7\pi}{6}$, $\sin\frac{4\pi}{3}$;

б) $\cos\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{3}$, $\cos\frac{5\pi}{6}$, $\cos\frac{5\pi}{4}$, $\cos\frac{7\pi}{4}$.

●6.37. а) $\sin 2$, $\sin 3$, $\cos 4$, $\cos 5$; в) $\sin 3$, $\sin 4$, $\sin 6$, $\sin 7$;

б) $\cos 3$, $\cos 4$, $\cos 6$, $\cos 7$; г) $\cos 2$, $\cos 3$, $\sin 4$, $\sin 5$.

●6.38. а) 1, $\sin 1$, $\cos 1$, $\operatorname{tg} 1$; б) 2, $\sin 2$, $\cos 2$, $\operatorname{tg} 2$.

Решите неравенство:

○6.39. а) $\sin t > 0$; в) $\sin t < 0$;

б) $\sin t < \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sin t > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

○6.40. а) $\cos t > 0$; в) $\cos t < 0$;

б) $\cos t < \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\cos t > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

○6.41. а) $\sin t > -\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sin t < -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos t > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos t < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

§ 7. Тригонометрические функции числового аргумента

Каким бы ни было действительное число t, ему можно поставить в соответствие однозначно определенное число $\sin t$. Правда, правило соответствия довольно сложное и заключается в следующем.

Чтобы по числу t найти значение $\sin t$, нужно:

1) расположить числовую окружность на координатной плоскости так, чтобы центр окружности совпал с началом координат, а начальная точка A окружности попала в точку $(1; 0)$;

2) на окружности найти точку, соответствующую числу t;

3) найти ординату этой точки.

Эта ордината и есть $\sin t$.

Фактически речь идет о функции $s = \sin t$, где t — любое действительное число. Мы умеем вычислять некоторые значения этой функции (например, $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ и т. д.), знаем некоторые ее свойства.

Точно так же мы можем считать, что уже получили некоторые представления еще о трех функциях: $s = \cos t$, $s = \operatorname{tg} t$, $s = \operatorname{ctg} t$. Все эти функции называют *тригонометрическими функциями числового аргумента* t.

Есть целый ряд соотношений, связывающих значения различных тригонометрических функций. Некоторые из этих соотношений вы уже знаете:

$$\boxed{\sin^2 t + \cos^2 t = 1;}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} \text{ при } t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k;}$$

$$\boxed{\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t} \text{ при } t \neq \pi k.}$$

Из двух последних формул легко получить соотношение, связывающее $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$:

$$\boxed{\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1 \text{ при } t \neq \frac{\pi k}{2}.}$$

Пример 1. Упростить выражение:

а) $1 + \mathrm{tg}^2\, t$; б) $1 + \mathrm{ctg}^2\, t$.

Решение. а) $1 + \mathrm{tg}^2\, t = 1 + \dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \dfrac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \dfrac{1}{\cos^2 t}$.

б) $1 + \mathrm{ctg}^2\, t = 1 + \dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t} = \dfrac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t} = \dfrac{1}{\sin^2 t}$.

Мы получили еще две важные формулы:

$$\boxed{1 + \mathrm{tg}^2\, t = \frac{1}{\cos^2 t} \text{ при } t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k;}$$

$$\boxed{1 + \mathrm{ctg}^2\, t = \frac{1}{\sin^2 t} \text{ при } t \neq \pi k.}$$

Всюду, напомним, подразумевается, что $k \in \mathbf{Z}$.

Все полученные формулы используются в тех случаях, когда при заданном значении какой-либо тригонометрической функции требуется вычислить значения остальных тригонометрических функций.

Пример 2. Известно, что $\sin t = \frac{3}{5}$ и $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Найти соответствующие значения $\cos t$, $\mathrm{tg}\, t$, $\mathrm{ctg}\, t$.

Решение. Из соотношения $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ находим

$$\cos^2 t = 1 - \sin^2 t.$$

По условию $\sin t = \frac{3}{5}$, значит, $\cos^2 t = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$.

Из уравнения $\cos^2 t = \frac{16}{25}$ находим $\cos t = \frac{4}{5}$ или $\cos t = -\frac{4}{5}$.

По условию аргумент t принадлежит первой четверти числовой окружности, а в ней $\cos t > 0$. Значит, из двух найденных возможных соотношений выбираем первое: $\cos t = \frac{4}{5}$.

Зная значения $\sin t$ и $\cos t$, нетрудно вычислить соответствующие значения $\mathrm{tg}\, t$ и $\mathrm{ctg}\, t$:

$$\mathrm{tg}\, t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4}; \quad \mathrm{ctg}\, t = \frac{1}{\mathrm{tg}\, t} = \frac{4}{3}.$$

Ответ: $\cos t = \frac{4}{5}$; $\mathrm{tg}\, t = \frac{3}{4}$; $\mathrm{ctg}\, t = \frac{4}{3}$.

Пример 3. Известно, что $\operatorname{tg} t = -\frac{5}{12}$ и $\frac{\pi}{2} < t < \pi$. Найти значения $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{ctg} t$.

Решение. Воспользуемся соотношением $1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$.

По условию $\operatorname{tg} t = -\frac{5}{12}$, значит, $\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \left(-\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{169}{144}$.

Отсюда находим, что $\cos^2 t = \frac{144}{169}$, значит, $\cos t = \frac{12}{13}$ или $\cos t = -\frac{12}{13}$.

По условию аргумент t принадлежит второй четверти числовой окружности, а в ней $\cos t < 0$. Поэтому из двух указанных выше возможностей выбираем вторую: $\cos t = -\frac{12}{13}$.

Зная значения $\operatorname{tg} t$ и $\cos t$, нетрудно вычислить соответствующие значения $\sin t$ и $\operatorname{ctg} t$:

$$\sin t = \operatorname{tg} t \cdot \cos t = \left(-\frac{5}{12}\right) \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{5}{13}; \ \operatorname{ctg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t} = -\frac{12}{5}.$$

Ответ: $\cos t = -\frac{12}{13}$; $\sin t = \frac{5}{13}$; $\operatorname{ctg} t = -\frac{12}{5}$.

Упражнения

Упростите выражение:

7.1. а) $1 - \sin^2 t$; в) $1 - \cos^2 t$;

б) $\cos^2 t - 1$; г) $\sin^2 t - 1$.

7.2. а) $(1 - \sin t)(1 + \sin t)$; в) $(1 - \cos t)(1 + \cos t)$;

б) $\cos^2 t + 1 - \sin^2 t$; г) $\sin^2 t + 2\cos^2 t - 1$.

7.3. а) $\frac{1}{\cos^2 t} - 1$; в) $1 - \frac{1}{\sin^2 t}$;

б) $\frac{1 - \sin^2 t}{\cos^2 t}$; г) $\frac{1 - \cos^2 t}{1 - \sin^2 t}$.

7.4. Упростите выражение:

а) $\dfrac{(\sin t + \cos t)^2}{1 + 2\sin t \cos t}$; б) $\dfrac{1 - 2\sin t \cos t}{(\cos t - \sin t)^2}$.

7.5. Докажите тождество:

а) $\dfrac{\cos^2 t}{1 - \sin t} - \sin t = 1$; б) $\dfrac{\sin^2 t}{1 + \cos t} + \cos t = 1$.

О7.6. Докажите, что при всех допустимых значениях t выражение принимает одно и то же значение; укажите это значение:

а) $\sin^4 t - \cos^4 t + 2\cos^2 t$;

б) $\dfrac{2 - \sin^2 t - \cos^2 t}{3\sin^2 t + 3\cos^2 t}$;

в) $\sin^4 t + \cos^4 t + 2\sin^2 t \cos^2 t$;

г) $\dfrac{\sin^4 t - \cos^4 t}{\sin^2 t - \cos^2 t}$.

По заданному значению функции найдите значения остальных тригонометрических функций:

О7.7. а) $\sin t = \dfrac{4}{5}$, $\dfrac{\pi}{2} < t < \pi$; в) $\sin t = -0{,}6$, $-\dfrac{\pi}{2} < t < 0$;

б) $\sin t = \dfrac{5}{13}$, $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$; г) $\sin t = -0{,}28$, $\pi < t < \dfrac{3\pi}{2}$.

О7.8. а) $\cos t = 0{,}8$, $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$; в) $\cos t = 0{,}6$, $\dfrac{3\pi}{2} < t < 2\pi$;

б) $\cos t = -\dfrac{5}{13}$, $\dfrac{\pi}{2} < t < \pi$; г) $\cos t = -\dfrac{24}{25}$, $\pi < t < \dfrac{3\pi}{2}$.

О7.9. а) $\operatorname{tg} t = \dfrac{3}{4}$, $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$; в) $\operatorname{tg} t = -\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{\pi}{2} < t < \pi$;

б) $\operatorname{tg} t = 2{,}4$, $\pi < t < \dfrac{3\pi}{2}$; г) $\operatorname{tg} t = -\dfrac{5}{12}$, $\dfrac{3\pi}{2} < t < 2\pi$.

О7.10. а) $\operatorname{ctg} t = \frac{12}{5}$, $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$;
в) $\operatorname{ctg} t = -\frac{5}{12}$, $\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$;

б) $\operatorname{ctg} t = \frac{7}{24}$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$;
г) $\operatorname{ctg} t = -\frac{8}{15}$, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$.

О7.11. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $s = f(t)$, если:

а) $f(t) = 1 - (\cos^2 t - \sin^2 t)$;

б) $f(t) = 1 - \sin t \cdot \cos t \cdot \operatorname{tg} t$;

в) $f(t) = \sin t + 3\sin^2 t + 3\cos^2 t$;

г) $f(t) = \cos^2 t \cdot \operatorname{tg}^2 t + 5\cos^2 t - 1$.

Упростите выражение:

О7.12. а) $\operatorname{ctg} t - \frac{\cos t - 1}{\sin t}$;
в) $\cos^2 t - (\operatorname{ctg}^2 t + 1) \cdot \sin^2 t$;

б) $\operatorname{ctg}^2 t - (\sin^{-2} t - 1)$;
г) $\frac{\sin^2 t - 1}{\cos^2 t - 1} + \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t$.

О7.13. а) $\frac{\sin t}{1 + \cos t} + \frac{\sin t}{1 - \cos t}$;
в) $\frac{\cos t}{1 + \sin t} + \frac{\cos t}{1 - \sin t}$;

б) $\operatorname{ctg}^2 t \cdot (\cos^2 t - 1) + 1$;
г) $\frac{\operatorname{tg} t + 1}{1 + \operatorname{ctg} t}$.

О7.14. а) $\frac{1 - \sin^2 t}{1 - \cos^2 t} + \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t$;
б) $\frac{\cos^2 t - \operatorname{ctg}^2 t}{\sin^2 t - \operatorname{tg}^2 t}$.

Докажите тождество:

О7.15. а) $1 + \sin t = \frac{\cos t + \operatorname{ctg} t}{\operatorname{ctg} t}$;
в) $\frac{\sin t + \operatorname{tg} t}{\operatorname{tg} t} = 1 + \cos t$;

б) $\frac{1 - \sin t}{\cos t} = \frac{\cos t}{1 + \sin t}$;
г) $\frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{1 + \cos t}{\sin t}$.

О7.16. а) $\frac{(\sin t + \cos t)^2 - 1}{\operatorname{ctg} t - \sin t \cos t} = 2\operatorname{tg}^2 t$;

б) $\sin^3 t\,(1 + \operatorname{ctg} t) + \cos^3 t\,(1 + \operatorname{tg} t) = \sin t + \cos t$.

○7.17. а) Дано: $\sin(4\pi + t) = \frac{3}{5}$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Вычислите $\operatorname{tg}(\pi - t)$.

б) Дано: $\cos(2\pi + t) = \frac{12}{13}$, $\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$. Вычислите $\operatorname{ctg}(\pi - t)$.

○7.18. а) Дано: $\cos t = -\frac{5}{13}$, $8{,}5\pi < t < 9\pi$. Вычислите $\sin(-t)$.

б) Дано: $\sin t = \frac{4}{5}$, $\frac{9\pi}{2} < t < 5\pi$. Вычислите $\cos(-t) + \sin(-t)$.

●7.19. Вычислите: $\sin t + \cos t$, если $\operatorname{tg} t - \frac{1}{\operatorname{tg} t} = -\frac{7}{12}$ и $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

●7.20. Постройте график функции:

а) $y = \cos^2 x + \sin^2 x$;

б) $y = \cos^2 \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{1}{x}$;

в) $y = \sin^2 \sqrt{x} + \cos^2 \sqrt{x}$;

г) $y = \sin^2 \frac{1}{x^2 - 4} + \cos^2 \frac{1}{x^2 - 4}$.

§ 8. Тригонометрические функции углового аргумента

Термины «синус», «косинус», «тангенс» и «котангенс», которые мы ввели выше, на самом деле уже были вам знакомы, правда, до сих пор их использовали в другом смысле: в геометрии и физике вы рассматривали синус, косинус, тангенс и котангенс угла (а не числа, как это было в предыдущих параграфах).

Из геометрии известно, что синус (косинус) острого угла — это отношение катета прямоугольного треугольника к его гипотенузе, а тангенс (котангенс) угла — это отношение катетов прямоугольного треугольника. Совсем другой подход к понятиям синуса, косинуса, тангенса и котангенса мы развивали в предыдущих параграфах. На самом деле все тесно взаимосвязанно, в чем мы сейчас убедимся.

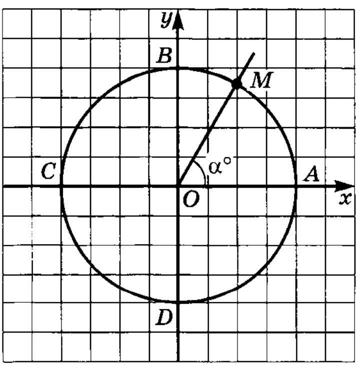


Рис. 62

Возьмем угол с градусной мерой $\alpha°$ и расположим его в модели «числовая окружность на координатной плоскости» так, как показано на рисунке 62: вершину угла совместим с центром окружности (с началом системы координат), а одну сторону угла совместим с положительным лучом оси абсцисс.

Точку пересечения второй стороны угла с окружностью обозначим буквой M. Ординату точки M естественно считать *синусом угла* $\alpha°$, а абсциссу этой точки — *косинусом угла* $\alpha°$.

Для нахождения синуса или косинуса угла $\alpha°$ совсем необязательно каждый раз проводить подобные построения. Достаточно заметить, что дуга AM составляет такую же часть единичной окружности, которую угол $\alpha°$ составляет от угла $360°$. Если длину дуги AM обозначить буквой t, то получим

$$\frac{\alpha°}{360°} = \frac{t}{2\pi};$$

$$t = \frac{\pi\alpha}{180}.$$

Таким образом,

$$\sin\alpha° = \sin t = \sin\frac{\pi\alpha}{180}; \quad \cos\alpha° = \cos t = \cos\frac{\pi\alpha}{180}.$$

Например,

$$\sin 30° = \sin\frac{\pi\cdot 30}{180} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};$$

$$\cos 90° = \cos\frac{\pi\cdot 90}{180} = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Говорят, что $30°$ — это *градусная мера угла*, а $\frac{\pi}{6}$ — *радианная мера* того же угла: $30° = \frac{\pi}{6}$ *рад*. Аналогично: $90° = \frac{\pi}{2}$ *рад*. Вообще

$$\alpha° = \frac{\pi\alpha}{180} \text{ рад}.$$

В частности,

$$\boxed{1° = \frac{\pi}{180} \text{ рад}.}$$

Отсюда, в свою очередь, получаем

$$\boxed{1 \text{ рад} = \frac{180°}{\pi}.}$$

Например,

$$35° = \frac{\pi}{180}\cdot 35 = \frac{7\pi}{36} \text{ рад}; \quad \frac{2\pi}{3} \text{ рад} = \frac{180°}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{3} = 120°.$$

Для краткости условимся обозначение *рад* опускать, т. е. вполне допустимой является, например, следующая запись:

$$\operatorname{tg} 45° = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{180}\cdot 45\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1.$$

Так что же такое 1 радиан? Вы знаете, что есть различные меры длины: сантиметры, метры, ярды и т. д. Есть и различные меры величины угла. Мы рассматриваем центральные углы единичной окружности. **Угол в 1°** — это центральный угол, опирающийся на дугу, составляющую $\frac{1}{360}$ часть окружности. **Угол в 1 радиан** — это центральный угол, опирающийся в единичной окружности на дугу длиной 1, а в окружности произвольного размера — *на дугу, длина которой равна радиусу окружности.*

Из формулы 1 $рад = \frac{180°}{\pi}$ получаем

$$\boxed{1\ рад \approx 57{,}3°.}$$

Говоря о функции $s = \sin t$ (или о любой другой тригонометрической функции), мы можем считать независимую переменную t числовым аргументом, как это было в предыдущих параграфах, но можем считать ее и мерой угла, т. е. угловым аргументом. Рассматривая ту или иную тригонометрическую функцию, мы можем считать ее функцией как числового, так и углового аргумента. В основном мы будем говорить о функциях числового аргумента.

Завершая параграф, убедимся в том, что определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса, с которыми вы познакомились в курсе геометрии, представляют собой частные случаи тех определений, что были предложены в § 6.

Теорема. **Если a и b — катеты, c — гипотенуза прямоугольного треугольника ABC** (рис. 63), **то выполняются следующие равенства:**

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c},$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}.$$

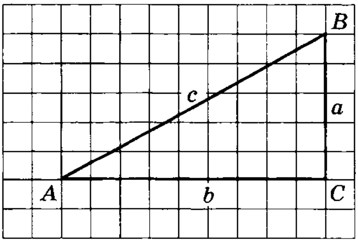


Рис. 63

Доказательство. Совместим прямоугольный треугольник ABC с числовой окружностью так, как показано на рисунке 64: вершину A поместим в центр O окружности, катет AC «пустим» по положительному направлению оси абсцисс. Точку пересечения прямой AB с окружностью обозначим

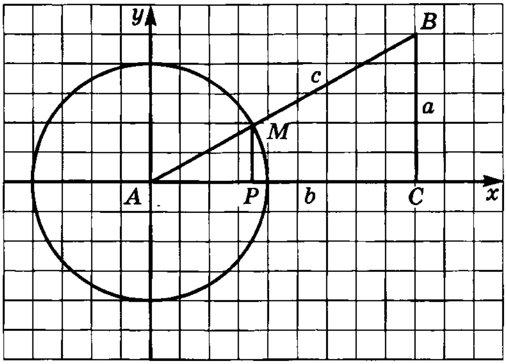


Рис. 64

буквой M. Опустим из точки M перпендикуляр MP на прямую AC. Заметим, что AP и MP — абсцисса и ордината точки M, т. е. $AP = \cos A$, $MP = \sin A$. Учтем также, что $AM = 1$ и что $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

Так как треугольники AMP и ABC подобны, то

$$\frac{MP}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC}\text{, т. е.}$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{1}{c} = \frac{\cos A}{b}.$$

Из пропорции $\frac{\sin A}{a} = \frac{1}{c}$ получаем $\sin A = \frac{a}{c}$.

Из пропорции $\frac{\cos A}{b} = \frac{1}{c}$ получаем $\cos A = \frac{b}{c}$.

Далее, $\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b}$; аналогично $\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}$. ◀

Упражнения

Переведите из градусной меры в радианную:

8.1. а) 120°; б) 220°; в) 300°; г) 765°.

8.2. а) 210°; б) 150°; в) 330°; г) 675°.

Переведите из радианной меры в градусную:

8.3. а) $\frac{3\pi}{4}$; б) $\frac{11\pi}{3}$; в) $\frac{6\pi}{5}$; г) $\frac{46\pi}{9}$.

8.4. а) $\frac{5\pi}{8}$; б) $\frac{7\pi}{12}$; в) $\frac{11\pi}{12}$; г) $\frac{47\pi}{9}$.

Вычислите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ для заданного значения угла α:

8.5. а) 90°; б) 180°; в) 270°; г) 360°.

8.6. а) 30°; б) 150°; в) 210°; г) 240°.

Расположите в порядке возрастания числа:

○**8.7.** $\sin 40°$; $\sin 80°$; $\sin 120°$; $\sin 160°$.

○**8.8.** $\cos 40°$; $\cos 80°$; $\cos 120°$; $\cos 160°$.

○**8.9.** $\sin 20°$; $\sin 110°$; $\sin 210°$; $\sin 400°$.

Найдите сторону x прямоугольного треугольника, изображенного на данном рисунке:

8.10. а) рис. 65; б) рис. 66; в) рис. 67; г) рис. 68.

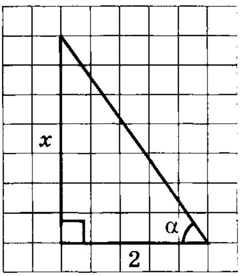


Рис. 65

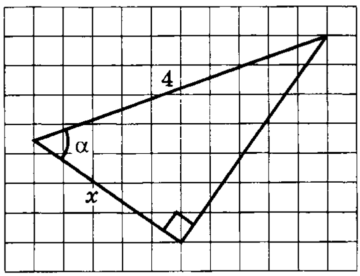


Рис. 66

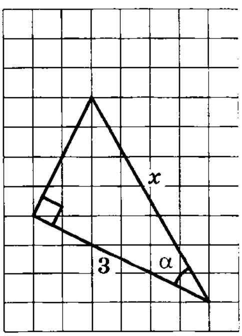


Рис. 67

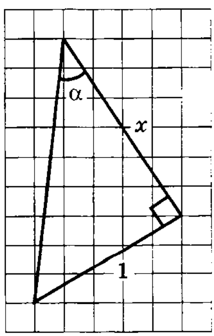


Рис. 68

8.11. а) рис. 69; б) рис. 70; в) рис. 71; г) рис. 72.

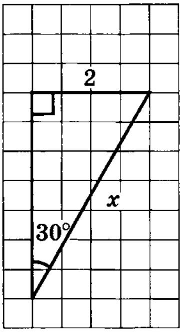


Рис. 69

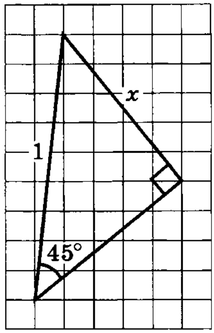


Рис. 70

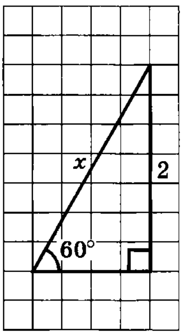


Рис. 71

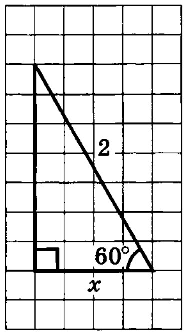


Рис. 72

O8.12. В прямоугольном треугольнике известны длина гипотенузы c и острый угол $\alpha°$. Найдите длину катета, площадь треугольника и радиус описанной окружности, если:

а) $c = 12$, $\alpha = 60°$; в) $c = 4$, $\alpha = 30°$;

б) $c = 6$, $\alpha = 45°$; г) $c = 60$, $\alpha = 60°$.

O8.13. Хорда AB образует с диаметром AC окружности угол $\alpha°$. Найдите длину хорды AB, если радиус окружности равен R.

O8.14. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

O8.15. В $\triangle ABC$ известно, что $AB = 4\sqrt{2}$ см, $\angle A = 45°$, $\angle C = 30°$. Найдите BC, AC и площадь $\triangle ABC$.

О8.16. Высота треугольника составляет 5 см, а углы, прилегающие к основанию, равны 60° и 45°. Найдите площадь треугольника.

§ 9. Формулы приведения

Если под знаком тригонометрической функции содержится выражение $\frac{\pi}{2} + t$, $\frac{\pi}{2} - t$, $\pi + t$, $\pi - t$, $\frac{3\pi}{2} + t$, $\frac{3\pi}{2} - t$ и вообще любое выражение вида $\frac{\pi n}{2} \pm t$, где n — произвольное целое число, то такое выражение всегда можно привести к более простому виду, при котором под знаком тригонометрической функции будет содержаться только аргумент t. Соответствующие формулы обычно называют *формулами приведения*. Некоторые из этих формул мы вывели в § 6, говоря о свойствах синуса, косинуса, тангенса и котангенса:

$$\sin(\pi + t) = -\sin t;$$

$$\cos(\pi + t) = -\cos t;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos t;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin t;$$

$$\operatorname{tg}(\pi + t) = \operatorname{tg} t;$$

$$\operatorname{ctg}(\pi + t) = \operatorname{ctg} t.$$

Используя свойства, отмеченные в § 6, можно вывести ряд других формул приведения. Например,

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = \sin\left(\pi + \left(\frac{\pi}{2} + t\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\cos t;$$

$$\cos(\pi - t) = \cos(\pi + (-t)) = -\cos(-t) = -\cos t.$$

Формул приведения очень много. Выводить их каждый раз довольно утомительно. Можно составить таблицу формул приведения и постоянно ею пользоваться, но она громоздка. Поэтому был придуман простой и удобный способ их запоминания *(мнемоническое правило)*. Он заключается в следующем.

1) Если под знаком преобразуемой тригонометрической функции содержится выражение $\pi + t$, $\pi - t$, $2\pi + t$ или $2\pi - t$, то наименование тригонометрической функции следует сохранить.

2) Если под знаком преобразуемой тригонометрической функции содержится выражение $\frac{\pi}{2} + t$, $\frac{\pi}{2} - t$, $\frac{3\pi}{2} + t$ или $\frac{3\pi}{2} - t$, то наименование тригонометрической функции следует изменить на родственное (синус — на косинус, косинус — на синус, тангенс — на котангенс, котангенс — на тангенс).

3) Перед полученной функцией от аргумента t надо поставить тот знак, который *имела бы* преобразуемая функция при условии, что $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

Это правило используется и в тех случаях, когда аргумент задан в градусах, т. е. когда под знаком тригонометрической функции содержится выражение $90° + \alpha$, $90° - \alpha$, $180° + \alpha$ и т. д.

Попробуем применить сформулированное правило сначала к уже перечисленным в этом параграфе формулам приведения.

Преобразуем $\sin(\pi + t)$. Наименование функции сохраняется, т. е. записываем $\sin t$. Далее, если предположить, что $0 < t < \frac{\pi}{2}$, то $\pi + t$ — аргумент из третьей четверти, а в ней преобразуемая функция синус имеет знак минус. Этот знак надо поставить перед записанной функцией. Таким образом, $\sin(\pi + t) = -\sin t$.

Преобразуем $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$. Наименование функции изменяется, т. е. записываем $\sin t$. Далее, если предположить, что $0 < t < \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2} + t$ — аргумент из второй четверти, а в ней преобразуемая функция косинус имеет знак минус. Этот знак надо поставить перед записанной функцией. Таким образом, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin t$.

А теперь воспользуемся сформулированным правилом для получения пары новых формул приведения.

Преобразуем $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - t\right)$. Наименование функции следует изменить: пишем $\operatorname{tg} t$. Далее, если считать, что $0 < t < \frac{\pi}{2}$, получим, что $\frac{3\pi}{2} - t$ — аргумент из третьей четверти, а в ней преобразуемая функция котангенс имеет знак плюс. Этот знак надо поставить перед записанной функцией. Таким образом, $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = \operatorname{tg} t$.

Преобразуем $\sin(360° - \alpha)$. Наименование функции следует сохранить (не забывайте, что $360° = 2\pi$): пишем $\sin\alpha$. Далее, если считать, что $0 < \alpha < 90°$, получим, что $360° - \alpha$ — аргумент из четвертой четверти, а в ней преобразуемая функция синус имеет знак минус. Этот знак надо поставить перед записанной функцией. Таким образом, $(360° - \alpha) = -\sin\alpha$.

Разумеется, формулы приведения можно применять и в тех случаях, когда место аргумента t занимает более сложное выражение. Например, мы видели выше, что $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = \operatorname{tg} t$, значит, и $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - 5t\right) = \operatorname{tg} 5t$, и $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{y}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{y}{2}$ и т. д.

Упражнения

Упростите выражение:

9.1. а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$; в) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + t\right)$;

б) $\cos(2\pi - t)$; г) $\sin(\pi + t)$.

9.2. а) $\sin(\pi - t)$; в) $\cos(2\pi + t)$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$; г) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right)$.

9.3. а) $\cos(90° - \alpha)$; в) $\sin(270° - \alpha)$;

б) $\sin(360° - \alpha)$; г) $\cos(180° - \alpha)$.

9.4. а) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$; в) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + t\right)$;

б) $\operatorname{ctg}(180° - \alpha)$; г) $\operatorname{ctg}(360° - \alpha)$.

Вычислите с помощью формул приведения:

9.5. а) $\sin 240°$; в) $\cos 330°$;

б) $\operatorname{tg} 300°$; г) $\operatorname{ctg} 315°$.

9.6. а) $\cos \frac{5\pi}{3}$; в) $\sin \frac{7\pi}{6}$;

б) $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$; г) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$.

○9.7. а) $\cos 630° - \sin 1470° - \operatorname{ctg} 1125°$;

б) $\sin(-7\pi) + 2\cos\frac{31\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}$;

в) $\operatorname{tg} 1800° - \sin 495° + \cos 945°$;

г) $\cos(-9\pi) + 2\sin\left(-\frac{49\pi}{6}\right) - \operatorname{ctg}\left(-\frac{21\pi}{4}\right)$.

Упростите выражение:

○9.8. а) $\sin(90° - \alpha) + \cos(180° + \alpha) + \operatorname{tg}(270° + \alpha) + \operatorname{ctg}(360° + \alpha)$;

б) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) - \cos(\pi - t) + \operatorname{tg}(\pi - t) + \operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2} - t\right)$.

○9.9. а) $\dfrac{\cos(180° + \alpha)\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)\sin(90° + \alpha)}$; в) $\dfrac{\sin(-\alpha)\operatorname{ctg}(-\alpha)}{\cos(360° - \alpha)\operatorname{tg}(180° + \alpha)}$;

б) $\dfrac{\sin(\pi - t)\cos(2\pi - t)}{\operatorname{tg}(\pi - t)\cos(\pi - t)}$; г) $\dfrac{\sin(\pi + t)\sin(2\pi + t)}{\operatorname{tg}(\pi + t)\cos\left(\frac{3\pi}{2} + t\right)}$.

○9.10. а) $\dfrac{\cos(\pi - t) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\sin(2\pi - t) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right)}$;

б) $\dfrac{\sin^2(\pi - t) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\sin(\pi - t)} \cdot \operatorname{tg}(\pi - t)$.

О9.11. Докажите тождество:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi - t)}{\cos(\pi + t)} \cdot \dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + t\right)}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + t\right)} = \operatorname{tg}^2 t;$

б) $\dfrac{\sin(\pi - t)}{\operatorname{tg}(\pi + t)} \cdot \dfrac{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} + t\right)} \cdot \dfrac{\cos(2\pi - t)}{\sin(-t)} = \sin t.$

Решите уравнение:

О9.12. а) $2\cos(2\pi + t) + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + t\right) = 3;$

б) $\sin(\pi + t) + 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + t\right) = 3;$

в) $2\sin(\pi + t) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = -\dfrac{1}{2};$

г) $3\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + t\right) - \cos(2\pi + t) = 1.$

О9.13. а) $5\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + t\right) - \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + t\right) - 8\cos(2\pi - t) = 1;$

б) $\sin(2\pi + t) - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) + \sin(\pi - t) = 1.$

О9.14. а) $\sin^2(\pi + t) + \cos^2(2\pi - t) = 0;$

б) $\sin^2(\pi - t) + \cos^2(2\pi + t) = 1.$

§ 10. Функция $y = \sin x$, ее свойства и график

В § 7 мы уже познакомились с функцией $s = \sin t$, где $t \in \boldsymbol{R}$. Отметим свойства этой функции.

Свойства функции $s = \sin t$

Свойство 1. Область определения — множество $\boldsymbol{R}$ действительных чисел.

Свойство 2. $s = \sin t$ — нечетная функция.

В § 6 мы уже доказали, что для любого t выполняется равенство $\sin(-t) = -\sin t$. Значит, $s = \sin t$ — нечетная функция.

График функции $s = \sin t$, как график любой нечетной функции, симметричен относительно начала координат в прямоугольной системе координат tOs.

Свойство 3. Функция $s = \sin t$ возрастает на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ и убывает на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Это следует из того, что при движении точки по первой четверти числовой окружности (от 0 до $\frac{\pi}{2}$) ордината постепенно увеличивается (от 0 до 1 — рис. 73, *а*), а при движении по второй четверти числовой окружности (от $\frac{\pi}{2}$ до π) ордината постепенно уменьшается (от 1 до 0 — рис. 73, *б*).

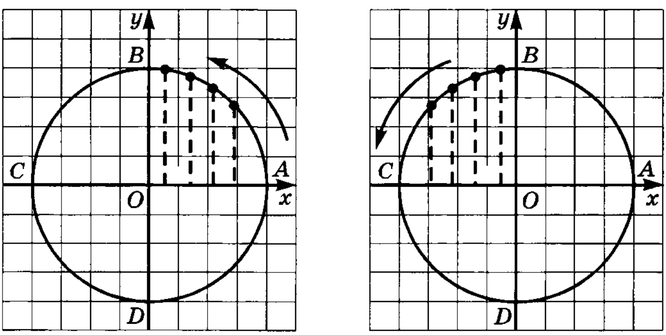
Свойство 4. Функция $s = \sin t$ ограничена и снизу и сверху.

Ограниченность функции $s = \sin t$ следует из того, что для любого t справедливо неравенство

$$-1 \leqslant \sin t \leqslant 1.$$

Свойство 5. $s_{\text{наим}} = -1$ (этого значения функция достигает в любой точке вида $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$); $s_{\text{наиб}} = 1$ (этого значения функция достигает в любой точке вида $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$).

Воспользовавшись полученными свойствами, построим график интересующей нас функции. Обратите внимание, что вместо $s = \sin t$ будем писать $y = \sin x$, так как привычнее запись $y = f(x)$, а не $s = f(t)$. Значит, и строить график будем в привычной системе координат xOy.



а *б*

Рис. 73

Сначала построим график функции $y = \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$. При этом договоримся о следующем масштабе на осях координат: в тетради в клеточку роль единичного отрезка на оси y составит отрезок в две клеточки; на оси x единичный отрезок (две клеточки) будем считать равным $\frac{\pi}{3}$. Фактически мы полагаем, что $\pi = 3$, что не совсем соответствует действительности (на самом деле $\pi \approx 3{,}14$), но на это при построении графика особого внимания обращать не будем.

Составим таблицу значений функции $y = \sin x$:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Отметим эти точки на координатной плоскости и соединим их плавной кривой, учтя при этом, что функция возрастает на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ и убывает на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Это график функции $y = \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$ (рис. 74). Обратите внимание на плавность графика в точке $\left[\frac{\pi}{2}; 1\right]$ и на то, что из начала координат кривая выходит как бы под углом 45°. О том, почему так происходит, поговорим в § 28.

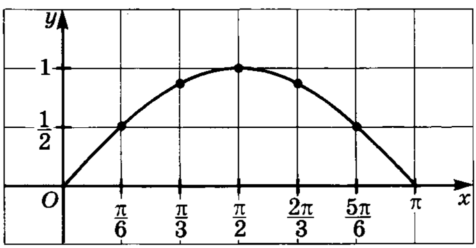


Рис. 74

Добавив к построенному графику линию, симметричную ему относительно начала координат, получим график функции $y = \sin x$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ (рис. 75 — здесь масштаб уменьшили в два раза по сравнению с рис. 74).

А теперь построим график функции $y = \sin x$ на отрезке $[\pi; 3\pi]$. Обратите внимание: если $x \in [-\pi; \pi]$, то $(x + 2\pi) \in [\pi; 3\pi]$.

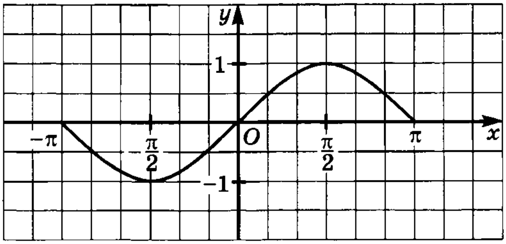


Рис. 75

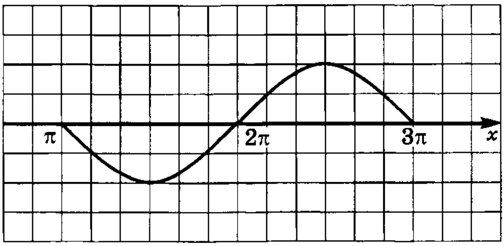


Рис. 76

Но $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. Это означает, что в точке $x + 2\pi$ функция $y = \sin x$ принимает то же значение, что и в точке x. Иными словами, на отрезке $[\pi; 3\pi]$ график функции $y = \sin x$ выглядит так же, как и на отрезке $[-\pi; \pi]$ (рис. 76). И на отрезках $[3\pi; 5\pi]$, $[5\pi; 7\pi]$, $[-3\pi; -\pi]$ и т. д. график этой функции выглядит так же, как на отрезке $[-\pi; \pi]$. Окончательный вид графика функции $y = \sin x$ (в уменьшенном масштабе) представлен на рисунке 77.

Линию, служащую графиком функции $y = \sin x$, называют **синусоидой**. Ту часть синусоиды, которая изображена на рисунке 75 или 76, называют *волной синусоиды*, а ту часть синусоиды, которая изображена на рисунке 74, называют *полуволной* или *аркой синусоиды*.

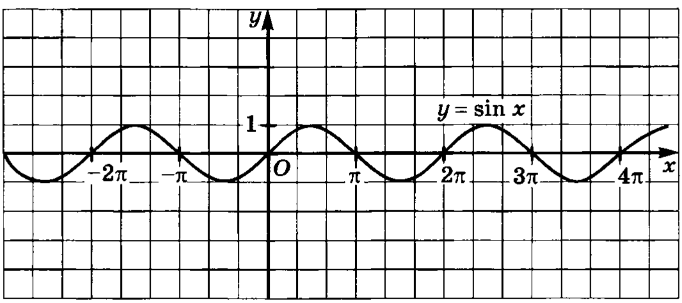


Рис. 77

Опираясь на построенный график, отметим еще несколько свойств функции $y = \sin x$.

Свойство 6. *Функция* $y = \sin x$ *возрастает на любом отрезке вида* $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$ *и убывает на любом отрезке вида* $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, где $k \in \mathbf{Z}$.

Свойство 7. $y = \sin x$ — непрерывная функция.

Непрерывность функции, напомним, означает, что график функции сплошной, не имеет разрыва. Это, конечно, весьма поверхностное представление о данном свойстве, более точное истолкование непрерывности функции мы получим в § 26.

Свойство 8. Область значений функции — отрезок $[-1;\ 1]$.

Пример 1. Решить уравнение $\sin x = x - \pi$.

Решение.

1) Возьмем две функции: $y = \sin x$ и $y = x - \pi$.

2) Построим график функции $y = \sin x$ (рис. 78).

3) Построим график линейной функции $y = x - \pi$. Это прямая линия, проходящая через точки $(0;\ -\pi)$ и $(\pi;\ 0)$ (рис. 78).

4) Построенные графики пересекаются в одной точке — предположительно в точке $A\ (\pi;\ 0)$. Проверка показывает, что это на самом деле так: $\sin \pi = 0$ и $\pi - \pi = 0$. Значит, заданное уравнение имеет единственный корень π — это абсцисса точки A.

Ответ: $x = \pi$.

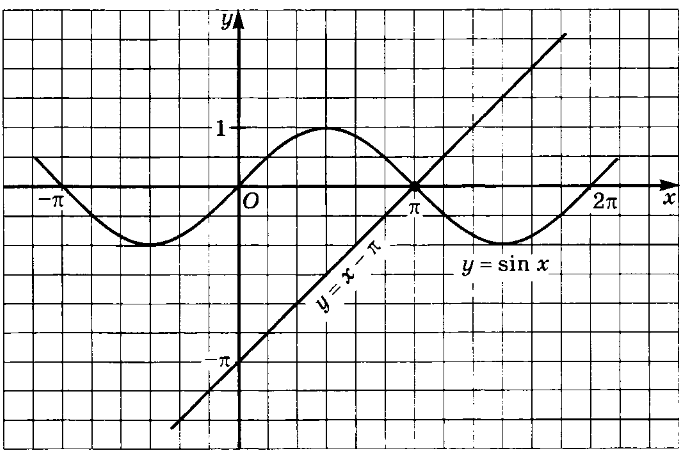


Рис. 78

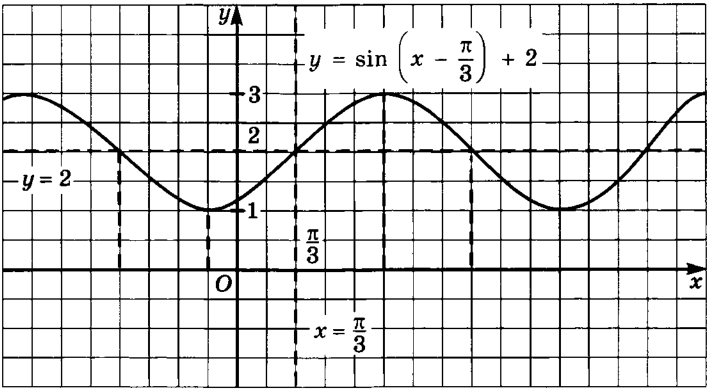


Рис. 79

Пример 2. Построить график функции $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$.

Решение. Искомый график получается из графика функции $y = \sin x$ параллельным переносом на $\frac{\pi}{3}$ единиц вправо и 2 единицы вверх (рис. 79).

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right]$.

Решение. Построив график функции $y = \sin x$ и выделив его часть на отрезке $\left[\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right]$, убеждаемся (рис. 80), что $y_{\text{наиб}} = \frac{1}{2}$ (этого значения функция достигает в точке $x = \frac{5\pi}{6}$), а $y_{\text{наим}} = -1$ (этого значения функция достигает в точке $x = \frac{3\pi}{2}$).

Ответ: $y_{\text{наиб}} = \frac{1}{2}$; $y_{\text{наим}} = -1$.

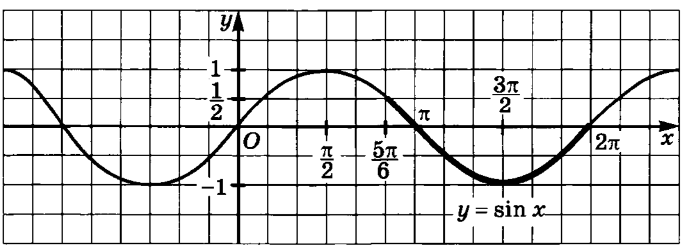


Рис. 80

Упражнения

Для функции $y = f(x)$, где $f(x) = \sin x$, найдите:

10.1. а) $f(\pi)$; б) $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; в) $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$; г) $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

10.2. а) $f(-x)$; б) $f(2x)$; в) $f(x+1)$; г) $f(x)-5$.

О10.3. Найдите значение функции:

а) $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ при $x = \frac{4\pi}{3}$;

б) $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ при $x = -\frac{\pi}{2}$;

в) $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ при $x = \frac{7\pi}{6}$;

г) $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ при $x = -\frac{15\pi}{4}$.

10.4. Не выполняя построения, ответьте, принадлежит ли графику функции $y = \sin x$ точка:

а) $\left(-\frac{\pi}{2};\ -1\right)$; в) $(\pi;\ 1)$;

б) $\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{1}{2}\right)$; г) $\left(\frac{3\pi}{2};\ -1\right)$.

О10.5. Не выполняя построения, ответьте, принадлежит ли графику функции $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$ точка:

а) $\left(0;\ \frac{3}{2}\right)$; в) $\left(\frac{2\pi}{3};\ \frac{3}{2}\right)$;

б) $\left(\frac{\pi}{6};\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\right)$; г) $(4\pi;\ 2{,}5)$.

О10.6. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \sin x$:

а) на отрезке $\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{2\pi}{3}\right]$; в) на интервале $\left(-\frac{3\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4}\right)$;

б) на луче $\left[\frac{\pi}{4},\ +\infty\right)$; г) на полуинтервале $\left(-\pi,\ \frac{\pi}{3}\right]$.

Постройте график функции:

○10.7. а) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; в) $y = \sin(x-\pi)$;

б) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; г) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

○10.8. а) $y = \sin x - 2$; в) $y = \sin x + 2$;

б) $y = \sin x + 1$; г) $y = \sin x - 3$.

○10.9. а) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$; б) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$.

○10.10. а) $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = -\sin x + 3$.

Решите графически уравнение:

○10.11. а) $\sin x = x + \pi$; в) $\sin x + x = 0$;

б) $\sin x = 2x$; г) $\sin x = 2x - 2\pi$.

●10.12. а) $\sin x = \frac{2}{\pi}x$; б) $\sin x = -\frac{4}{\pi}x + 3$.

●10.13. а) $\sin x - \sqrt{x - \pi} = 0$; б) $-\sin x = \sqrt{x}$.

○10.14. Докажите, что функция $y = f(x)$ является нечетной, если:

а) $f(x) = x + \sin x$; в) $f(x) = \frac{x^2 \cdot \sin x}{x^2 - 9}$;

б) $f(x) = x^3 \cdot \sin x^2$; г) $f(x) = x^3 - \sin x$.

●10.15. Дано: $f(x) = 2x^2 - x + 1$. Докажите, что

$f(\sin x) = 3 - 2\cos^2 x - \sin x$.

○10.16. Постройте график функции $y = f(x)$, где:

а) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x < 0, \\ \sin x, & \text{если } x \geqslant 0; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x < 0, \\ x^2, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$

О10.17. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} \sin x, \text{ если } -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ \sqrt{x}, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

а) Вычислите: $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(\pi^2)$;

б) постройте график функции $y = f(x)$;

в) прочитайте график функции $y = f(x)$.

О10.18. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, \text{ если } x < 0, \\ \sin x, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

а) Вычислите: $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$;

б) постройте график функции $y = f(x)$;

в) прочитайте график функции $y = f(x)$.

§ 11. Функция $y = \cos x$, ее свойства и график

Рассказ о функции $y = \cos x$ можно было бы построить по той же схеме, которая была использована в § 10 для функции $y = \sin x$. Но мы выберем путь, быстрее приводящий к цели: воспользуемся формулой приведения $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Что дает эта формула? Она позволяет утверждать, что функции $y = \cos x$ и $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ тождественны, значит, их графики совпадают.

График функции $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ получается из графика функции $y = \sin x$ параллельным переносом на $\frac{\pi}{2}$ единиц влево. Это и будет график функции $y = \cos x$ (рис. 81).

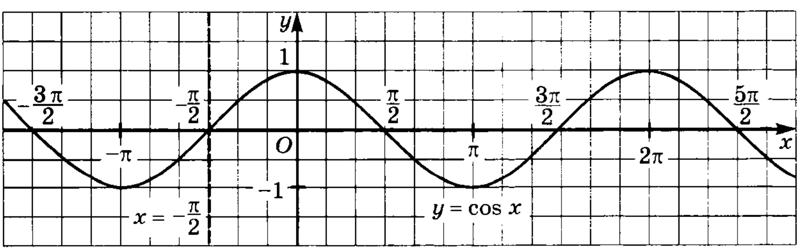


Рис. 81

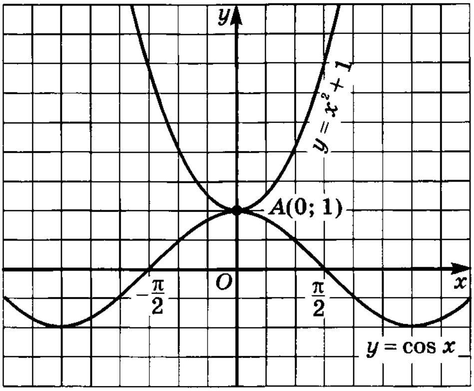


Рис. 82

График функции $y = \cos x$, как и график функции $y = \sin x$, называют синусоидой (что вполне естественно).

Свойства функции $y = \cos x$

Свойство 1. $D(f) = (-\infty; \infty)$.

Свойство 2. $y = \cos x$ — четная функция.

Это следует из выведенной в § 6 формулы $\cos(-t) = \cos t$; четность функции иллюстрирует график на рисунке 81 — он симметричен относительно оси y.

Свойство 3. Функция убывает на отрезке $[0; \pi]$, возрастает на отрезке $[\pi; 2\pi]$ и т. д.

Свойство 4. Функция ограничена и снизу и сверху.

Свойство 5. $y_{наим} = -1$ (этого значения функция достигает в любой точке вида $x = \pi + 2\pi k$); $y_{наиб} = 1$ (этого значения функция достигает в любой точке вида $x = 2\pi k$).

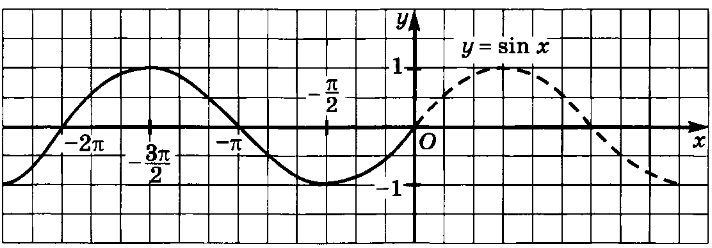


Рис. 83

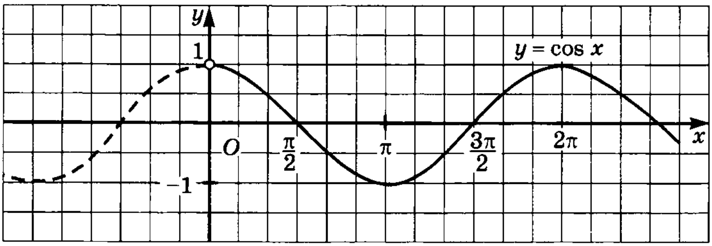


Рис. 84

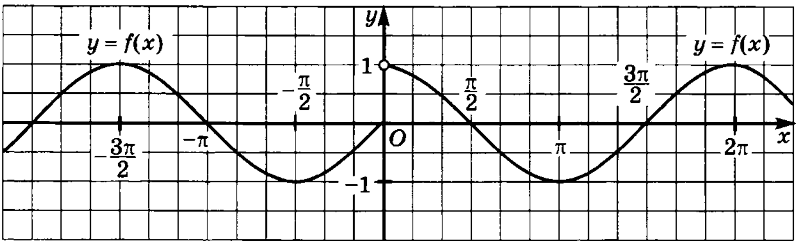


Рис. 85

Свойство 6. $y = \cos x$ — непрерывная функция.

Свойство 7. $E(f) = [-1; 1]$.

Пример 1. Решить уравнение $\cos x = x^2 + 1$.

Решение.

1) Возьмем две функции: $y = \cos x$ и $y = x^2 + 1$.

2) Построим график функции $y = \cos x$ (рис. 82).

3) Построим график функции $y = x^2 + 1$. Это парабола (см. рис. 82).

4) Построенные графики имеют одну общую точку $A(0; 1)$. Значит, заданное уравнение имеет один корень 0 — это абсцисса точки A.

Ответ: $x = 0$.

Пример 2. Построить график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x \leqslant 0; \\ \cos x, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Решение. Построение графика осуществим «по кусочкам». Сначала построим график функции $y = \sin x$ и выделим его часть (рис. 83) на луче $(-\infty; 0]$. Затем построим график функции $y = \cos x$ и выделим его часть (рис. 84) на открытом луче $(0; +\infty)$. Наконец, оба «кусочка» изобразим в одной системе координат — это и будет график функции $y = f(x)$ (рис. 85). ◁■

Упражнения

Для функции $y = f(x)$, где $f(x) = \cos x$, найдите:

11.1. а) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$; б) $f(-\pi)$; в) $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$; г) $f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

11.2. а) $f(-x)$; б) $f(3x)$; в) $f(x+2)$; г) $f(x) - 6$.

Найдите значение функции:

11.3. $y = 2\sin x + \cos x$, если:

а) $x = -\frac{\pi}{2}$; б) $x = \frac{\pi}{6}$.

О11.4. $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$, если:

а) $x = -\frac{\pi}{2}$; б) $x = \frac{\pi}{4}$.

О11.5. Постройте график функции:

а) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; в) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

б) $y = \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$; г) $y = \cos\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$.

О11.6. Постройте график функции:

а) $y = \cos x + 1$; в) $y = \cos x - \frac{1}{2}$;

б) $y = \cos x - 2$; г) $y = \cos x + 1{,}5$.

О11.7. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \cos x$:

а) на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$;

б) на интервале $\left(-\pi; \frac{\pi}{4}\right)$;

в) на луче $\left[-\frac{\pi}{3}; +\infty\right)$;

г) на полуинтервале $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

O11.8. Постройте и прочитайте график функции $y = f(x)$, где:

а) $f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ если } x < 0, \\ \cos x, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} \cos x, \text{ если } x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ \sin x, \text{ если } x > \frac{\pi}{2}; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x}, \text{ если } x < 0, \\ -\cos x, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$

г) $f(x) = \begin{cases} -\cos x, \text{ если } x < 0, \\ 2x^2 - 1, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$

Решите графически уравнение:

O11.9. а) $\cos x = x + \frac{\pi}{2}$; в) $\cos x = 2x + 1$;

б) $-\cos x = 3x - 1$; г) $\cos x = -x + \frac{\pi}{2}$.

●11.10. а) $\cos x = \sqrt{x} + 1$; в) $\cos x = -(x - \pi)^2 - 1$;

б) $\cos x = \sqrt{x - \frac{\pi}{2}}$; г) $\cos x = |x| + 1$.

O11.11. Докажите, что функция $y = f(x)$ является четной, если:

а) $f(x) = x^2 \cdot \cos x$; в) $f(x) = \frac{\cos 5x + 1}{|x|}$;

б) $f(x) = \frac{\cos x^3}{4 - x^2}$; г) $f(x) = (4 + \cos x)(\sin^6 x - 1)$.

O11.12. Докажите, что функция $y = f(x)$ является нечетной, если:

а) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$; в) $f(x) = \frac{\cos x^3}{x(25 - x^2)}$;

б) $f(x) = x^5 \cdot \cos 3x$; г) $f(x) = x^{11} \cdot \cos x + \sin x$.

●11.13. а) Дано: $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$. Докажите, что

$$-f(\cos x) = 2\sin^2 x + 3\cos x.$$

б) Дано: $f(x) = 5x^2 + x + 4$. Докажите, что

$$f(\cos x) = 9 + \cos x - 5\sin^2 x.$$

§ 12. Периодичность функций $y = \sin x$, $y = \cos x$

В предыдущих параграфах мы использовали семь свойств функций: область определения, четность или нечетность, монотонность, ограниченность, наибольшее и наименьшее значения, непрерывность, область значений функции. Использовали мы эти свойства либо для того, чтобы построить график функции (так было, например, в § 10), либо для того, чтобы прочитать построенный график. Теперь введем еще одно (восьмое) свойство функции, которое можно заметить на построенных выше графиках функций $y = \sin x$ (см. рис. 77), $y = \cos x$ (см. рис. 81).

Определение. Функцию $y = f(x)$, $x \in X$ называют **периодической**, если существует такое отличное от нуля число T, что для любого x из множества X выполняется двойное равенство

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Число T, удовлетворяющее указанному условию, называют **периодом функции** $y = f(x)$.

Отсюда следует, что, поскольку для любого x справедливы равенства

$$\sin(x - 2\pi) = \sin x = \sin(x + 2\pi),$$
$$\cos(x - 2\pi) = \cos x = \cos(x + 2\pi),$$

функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ *являются периодическими, причем число* 2π *служит периодом и той и другой функции.*

Периодичность — это и есть обещанное восьмое свойство функций.

А теперь посмотрите на график функции $y = \sin x$ (см. рис. 77). Чтобы построить синусоиду, достаточно построить одну ее волну (на отрезке $[0; 2\pi]$ или на отрезке $[-\pi; \pi]$), а затем сдвинуть эту волну по оси x на 2π вправо, на 2π влево, на 4π вправо, на 4π влево и т. д. В итоге с помощью одной волны мы построим весь график.

Посмотрим с этой же точки зрения на график функции $y = \cos x$ (см. рис. 81). И здесь для построения графика достаточно сначала построить одну волну, например, на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, а затем сдвинуть ее по оси x на 2π вправо, на 2π влево, на 4π вправо, на 4π влево и т. д.

Обобщая, делаем следующий вывод.

Если функция $y = f(x)$ имеет период T, то для построения графика функции нужно сначала построить ветвь (волну, часть) графика на любом промежутке длины T (чаще всего берут промежуток с концами в точках 0 и T или $-\frac{T}{2}$ и $\frac{T}{2}$), *а затем сдвинуть эту ветвь по оси x вправо и влево на T, $2T$, $3T$ и т. д.*

У периодической функции бесконечно много периодов: если T — период, то и $2T$ — период, и $3T$ — период, и $-T$ — период; вообще *периодом является любое число вида kT, где $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$* . Обычно стараются, если это возможно, выделить наименьший положительный период, его называют *основным периодом.* Для функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ основной период равен 2π.

Итак, ***любое число вида $2\pi k$, где $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, является периодом функций $y = \sin x$, $y = \cos x$; 2π — основной период и той и другой функции.***

Пример. Найти основной период функции:

а) $y = \sin 3x$; б) $y = \cos 0{,}5x$.

Решение. а) Пусть T — основной период функции $y = \sin 3x$. Введем обозначение $f(x) = \sin 3x$. Тогда

$$f(x + T) = \sin 3(x + T) = \sin (3x + 3T).$$

Чтобы число T было периодом функции, должно выполняться тождество $\sin (3x + 3T) = \sin 3x$. Значит, $3T = 2\pi n$. Но поскольку речь идет о нахождении основного периода, получаем $3T = 2\pi$, $T = \frac{2\pi}{3}$.

б) Пусть T — основной период функции $y = \cos 0{,}5x$. Введем обозначение $f(x) = \cos 0{,}5x$. Тогда

$$f(x + T) = \cos 0{,}5(x + T) = \cos (0{,}5x + 0{,}5T).$$

Чтобы число T было периодом функции, должно выполняться тождество $\cos (0{,}5x + 0{,}5T) = \cos 0{,}5x$. Значит, $0{,}5T = 2\pi n$. Но поскольку речь идет о нахождении основного периода, получаем $0{,}5T = 2\pi$, $T = 4\pi$.

Ответ: а) $T = \frac{2\pi}{3}$; б) $T = 4\pi$.

Обобщением результатов, полученных в примере, является следующее утверждение: *основной период функции* $y = \sin kx$ $(y = \cos kx)$ *равен* $\left|\frac{2\pi}{k}\right|$.

Упражнения

12.1. На рисунке 86 изображена часть графика периодической функции $y = f(x)$ на отрезке $[-1; 1]$, длина которого равна периоду функции. Постройте график функции:

а) на отрезке $[1; 3]$;

б) на отрезке $[-3; -1]$;

в) на отрезке $[3; 7]$;

г) на всей числовой прямой.

12.2. На рисунке 87 изображена часть графика периодической функции $y = f(x)$ на отрезке $[0; 3]$, длина которого равна периоду функции. Постройте график функции:

а) на отрезке $[3; 6]$;

б) на отрезке $[-3; 0]$;

в) на отрезке $[6; 12]$;

г) на всей числовой прямой.

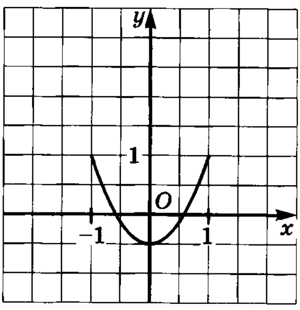


Рис. 86

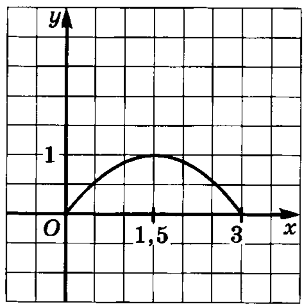


Рис. 87

О12.3. Постройте график периодической функции $y = f(x)$ с периодом $T = 4$, если известно, что $f(x) = \frac{x^2}{2}$ на отрезке $[-2; 2]$.

О12.4. Постройте график периодической функции $y = f(x)$ с периодом $T = 2$, если известно, что $f(x) = x^4$ на отрезке $[-1; 1]$.

12.5. Является ли число 32π периодом функции $y = \sin x$, $y = \cos x$? А основным периодом?

Вычислите, преобразовав заданное выражение ($\sin t$ или $\cos t$) к виду $\sin t_0$ или $\cos t_0$ так, чтобы выполнялось соотношение $0 < t_0 < 2\pi$ или $0 < t_0 < 360°$.

12.6. а) $\sin 50{,}5\pi$; в) $\sin 25{,}25\pi$;

б) $\sin 51{,}75\pi$; г) $\sin 29{,}5\pi$.

12.7. а) $\sin 390°$; в) $\sin 540°$;

б) $\cos 750°$; г) $\cos 930°$.

О12.8. Докажите тождество:

а) $\sin^2 (x - 8\pi) = 1 - \cos^2 (16\pi - x)$;

б) $\cos^2 (4\pi + x) = 1 - \sin^2 (22\pi - x)$.

О12.9. Решите уравнение:

а) $\sin (x + 4\pi) + \sin (x - 6\pi) = \sqrt{3}$;

б) $\cos (x + 2\pi) + \cos (x - 8\pi) = \sqrt{2}$.

§ 13. Преобразования графиков тригонометрических функций

В курсе алгебры 8—9-го классов вы научились, зная график функции $y = f(x)$, строить графики функций $y = f(x + a)$, $y = f(x) + b$, $y = f(x + a) + b$. Все эти графики получаются из графика функции $y = f(x)$ с помощью преобразования параллельного переноса: на $|a|$ единиц масштаба вправо или влево вдоль оси x и на $|b|$ единиц масштаба вверх или вниз вдоль оси y (мы использовали этот прием в § 1, 10 и 11). Теперь мы познакомимся еще с двумя преобразованиями, позволяющими, зная график функции $y = f(x)$, довольно быстро строить графики функций $y = mf(x)$ и $y = f(kx)$, где m и k — любые действительные числа (кроме нуля).

Задача 1. Зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = mf(x)$, где m — положительное число.

Решение. Ординаты точек графика функции $y = mf(x)$ получаются умножением ординат соответствующих точек графика функции $y = f(x)$ на число m. Такое преобразование графика обычно называют *растяжением от оси x с коэффициентом m*. Отметим, что при этом преобразовании остаются на месте точки

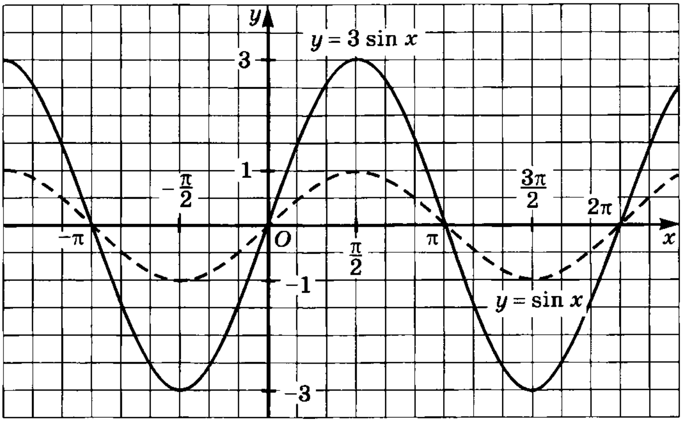


Рис. 88

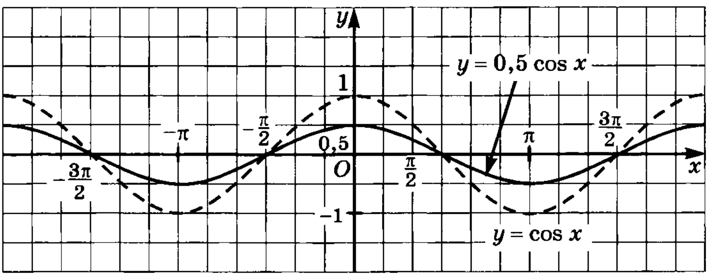


Рис. 89

пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью x, т. е. точки, удовлетворяющие уравнению $f(x) = 0$.

Если $m < 1$, то предпочитают говорить не о растяжении с коэффициентом m, а о *сжатии к оси x с коэффициентом* $\frac{1}{m}$. Например, если $m = \frac{1}{3}$, то говорят не о растяжении с коэффициентом $\frac{1}{3}$, а о сжатии с коэффициентом 3.

На рисунке 88 показаны графики функций $y = \sin x$ и $y = 3\sin x$, а на рисунке 89 — графики функций $y = \cos x$ и $y = 0{,}5\cos x$.

На практике обычно, выполняя сжатие или растяжение графика функции $y = \sin x$ или $y = \cos x$, сначала работают с одной полуволной синусоиды, а потом достраивают весь график.

Задача 2. Зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = mf(x)$, где $m = -1$.

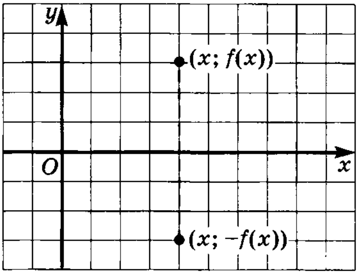


Рис. 90

Решение. Речь идет о построении графика функции $y = -f(x)$. Ординаты точек графика функции $y = -f(x)$ отличаются от соответствующих ординат точек графика функции $y = f(x)$ только знаком. Точки $(x; f(x))$ и $(x; -f(x))$ симметричны относительно оси x (рис. 90). Значит, *график функции $y = -f(x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью преобразования симметрии относительно оси x.* На рисунке 91 изображены графики функций $y = \cos x$ и $y = -\cos x$.

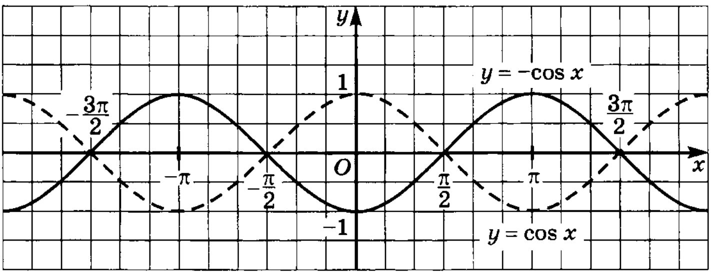


Рис. 91

Задача 3. Зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = mf(x)$, где m — отрицательное число.

Решение. При $m < 0$ справедливо равенство $mf(x) = -|m|f(x)$. Значит, речь идет о построении графика функции $y = -|m|f(x)$. Это можно сделать в три шага:

1) построить график функции $y = f(x)$;

2) осуществить его растяжение от оси x с положительным коэффициентом $|m|$;

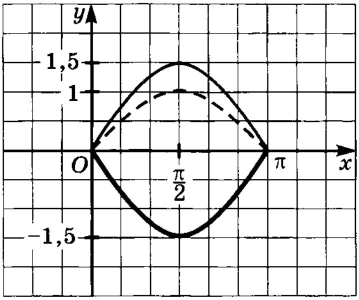


Рис. 92

3) растянутый график подвергнуть преобразованию симметрии относительно оси x.

Пример 1. Построить график функции $y = -1{,}5 \sin x$.

Решение. 1) Построим график функции $y = \sin x$; для начала достаточно построить одну полуволну графика (пунктирная линия на рис. 92).

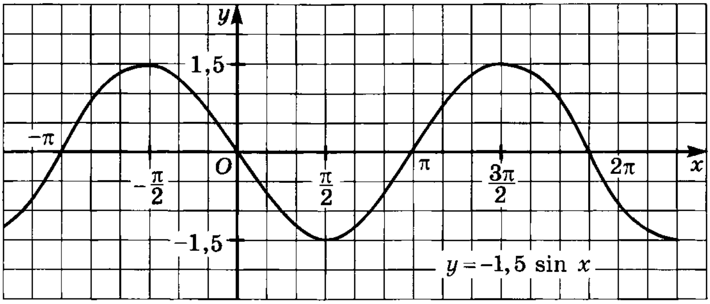


Рис. 93

2) Осуществим растяжение построенного графика от оси x с коэффициентом 1,5; получим одну полуволну графика функции $y = 1,5 \sin x$ (тонкая линия на рис. 92).

3) Подвергнем построенную полуволну графика функции $y = 1,5 \sin x$ преобразованию симметрии относительно оси x; получим полуволну графика функции $y = -1,5 \sin x$ (она выделена на рис. 92).

4) С помощью построенной полуволны получаем весь график функции $y = -1,5 \sin x$ (рис. 93).

Задача 4. Зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(kx)$, где k — положительное число.

Р е ш е н и е. Чтобы вам было проще понять суть дела, рассмотрим конкретный пример, когда $k = 2$. Как построить график функции $y = f(2x)$, если известен график функции $y = f(x)$?

Пусть, например, на графике функции $y = f(x)$ имеются точки (4; 7) и (−2; 3). Это значит, что $f(4) = 7$ и $f(-2) = 3$. Куда переместятся эти точки, когда мы будем строить график функции $y = f(2x)$?

Если $x = 2$, то $y = f(2x) = f(2 \cdot 2) = f(4) = 7$. Значит, на графике функции $y = f(2x)$ есть точка (2; 7). Далее, если $x = -1$, то $y = f(2x) = f(-1 \cdot 2) = f(-2) = 3$. Значит, на графике функции $y = f(2x)$ есть точка (−1; 3).

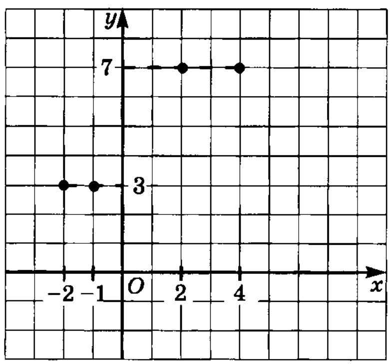


Рис. 94

Итак, на графике функции $y = f(x)$ есть точки (4; 7) и (−2; 3), а на графике функции $y = f(2x)$ есть точки (2; 7) и (−1; 3) (рис. 94), т. е. точки с той же ординатой, но с абсциссой в два раза меньшей

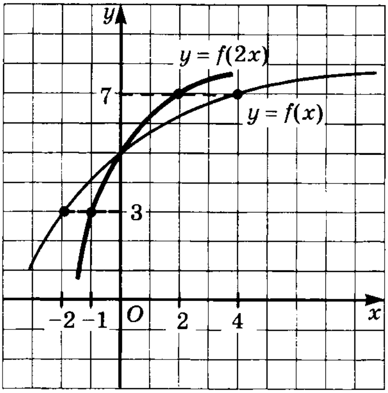


Рис. 95

(по модулю). Так же обстоит дело и с другими точками графика функции $y = f(x)$, когда мы переходим к графику функции $y = f(2x)$ (рис. 95). Такое преобразование обычно называют *сжатием к оси ординат с коэффициентом* 2.

Вообще график функции $y = f(kx)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью сжатия к оси y с коэффициентом k. Отметим, что при этом преобразовании остается на месте точка пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью y (если $x = 0$, то и $kx = 0$).

Впрочем, если $0 < k < 1$, то предпочитают говорить не о сжатии с коэффициентом k, а о растяжении от оси y с коэффициентом $\frac{1}{k}$. Например, если $k = \frac{1}{3}$, то говорят не о сжатии с коэффициентом $\frac{1}{3}$, а о растяжении коэффициентом 3.

Пример 2. Построить графики функций:

а) $y = \sin \frac{x}{2}$;   б) $y = \cos 2x$.

Решение. а) Построим полуволну графика функции $y = \sin x$ (пунктирная линия на рис. 96) и осуществим ее растяжение от оси y с коэффициентом 2; получим одну полуволну искомого графика функции $y = \sin \frac{x}{2}$ (рис. 96). Затем построим весь график (рис. 97; здесь масштаб уменьшен).

б) Построим полуволну графика функции $y = \cos x$ (пунктирная линия на рис. 98) и осуществим ее сжатие к оси y с коэффи-

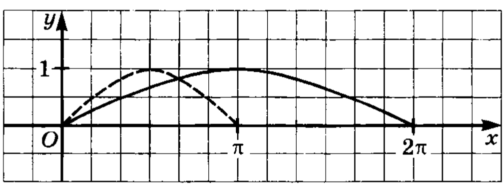


Рис. 96

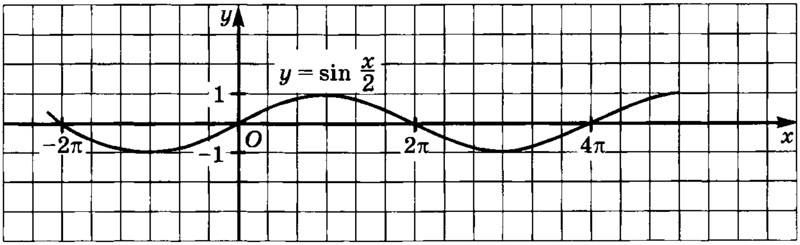


Рис. 97

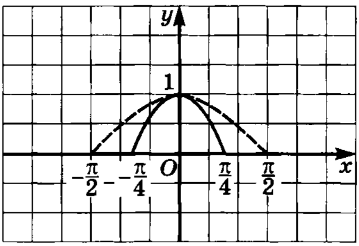


Рис. 98

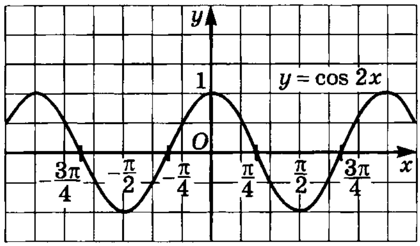


Рис. 99

циентом 2; получим одну полуволну искомого графика функции $y = \cos 2x$ (см. рис. 98). Затем построим весь график (см. рис. 99).

Задача 5. Зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(kx)$, где $k = -1$.

Решение. Речь идет о построении графика функции $y = f(-x)$. Предположим, что на графике функции $y = f(x)$ есть точки (3; 5) и (−6; 1). Это значит, что $f(3) = 5$, а $f(-6) = 1$. Соответственно на графике функции $y = f(-x)$ имеется точка (−3; 5), так как при подстановке в формулу $y = f(-x)$ значения $x = -3$ получим: $y = f(3) = 5$. Аналогично убеждаемся, что графику функции $y = f(-x)$ принадлежит точка (6; 1).

Итак, точке (3; 5), принадлежащей графику функции $y = f(x)$, соответствует точка (−3; 5), принадлежащая графику функции $y = f(-x)$, а точке (−6; 1), принадлежащей графику функции $y = f(-x)$, соответствует точка (6; 1), принадлежащая графику функции $y = f(-x)$. Указанные пары точек симметричны относительно оси y (рис. 100).

Обобщая эти рассуждения, приходим к следующему выводу: *график функции $y = f(-x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью преобразования симметрии относительно оси y.*

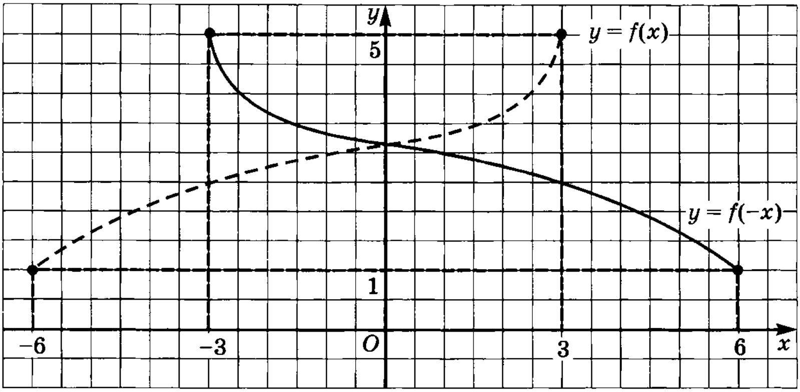


Рис. 100

Замечание. Если речь идет о построении графика функции $y = f(-x)$, то обычно сначала проверяют, является ли функция $y = f(x)$ четной или нечетной. Если $y = f(x)$ — четная функция, т. е. $f(-x) = f(x)$, то график функции $y = f(-x)$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$. Если $y = f(x)$ — нечетная функция, т. е. $y = f(-x) = -f(x)$, то вместо графика функции $y = f(-x)$ можно построить график функции $y = -f(x)$.

Задача 6. Зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(kx)$, где k — отрицательное число.

Решение. При $k < 0$ справедливо равенство $f(kx) = f(-|k|x)$. Значит, речь идет о построении графика функции $y = f(-|k|x)$. Это можно сделать в три шага:

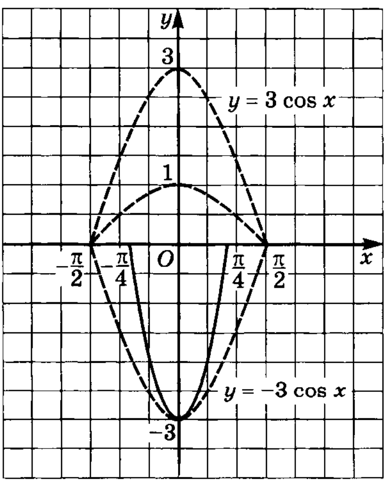


Рис. 101

1) построить график функции $y = f(x)$;

2) осуществить его сжатие к оси y с коэффициентом $|k|$;

3) сжатый график подвергнуть преобразованию симметрии относительно оси y.

Пример 3. Построить график функции $y = -3\cos(-2x)$.

Решение. Прежде всего заметим, что $\cos(-2x) = \cos 2x$.

1) Построим график функции $y = \cos x$, точнее, одну полуволну графика (рис. 101). Все предварительные построения обозначены пунктирными линиями.

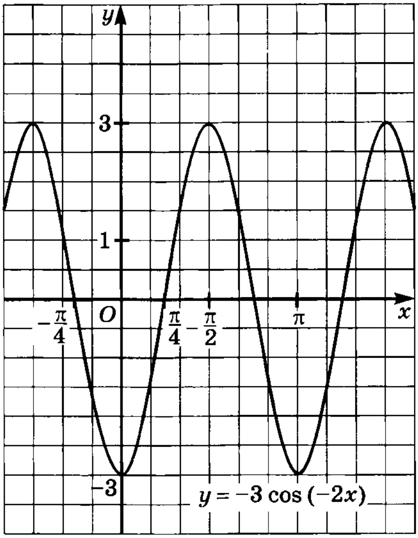


Рис. 102

2) Осуществим растяжение построенного графика от оси x с коэффициентом 3; получим одну полуволну графика функции $y = 3\cos x$.

3) Подвергнем построенную полуволну графика функции $y = 3\cos x$ преобразованию симметрии относительно оси x; получим полуволну графика функции $y = -3\cos x$.

4) Осуществим для полуволны графика функции $y = -3\cos x$ сжатие к оси y с коэффициентом 2; получим полуволну графика функции $y = -3\cos 2x$ (рис. 101, сплошная линия).

5) С помощью полученной полуволны построим весь график (рис. 102). ◁■

Упражнения

Постройте график функции:

13.1. а) $y = 2\sin x$; в) $y = -\sin x$;

б) $y = -\cos x$; г) $y = 3\cos x$.

13.2. а) $y = -2\sin x$; в) $y = 1{,}5\sin x$;

б) $y = -3\cos x$; г) $y = -1{,}5\cos x$.

О13.3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2\cos x$:

а) на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

б) на интервале $\left(0; \frac{3\pi}{2}\right)$;

в) на полуинтервале $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right)$;

г) на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right]$.

О13.4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = -3\sin x$:

а) на луче $[0; +\infty)$;

б) на открытом луче $\left(-\infty; \frac{\pi}{2}\right)$;

в) на луче $\left[\frac{\pi}{4}; +\infty\right)$;

г) на открытом луче $(-\infty; 0)$.

О13.5. Известно, что $f(x) = 3\sin x$. Найдите:

а) $f(-x)$; б) $2f(x)$; в) $2f(x)+1$; г) $f(-x)+f(x)$.

О13.6. Известно, что $f(x) = -\frac{1}{2}\cos x$. Найдите:

а) $f(-x)$; б) $2f(x)$; в) $f(x+2\pi)$; г) $f(-x)-f(x)$.

Постройте график функции:

О13.7. а) $y = 2\sin x - 1$; в) $y = -\frac{3}{2}\sin x + 3$;

б) $y = -\frac{1}{2}\cos x + 2$; г) $y = 3\cos x - 2$.

О13.8. а) $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; в) $y = -\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$;

б) $y = -3\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; г) $y = 1{,}5\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$.

●13.9. Составьте возможное аналитическое задание функции по ее графику, изображенному:

а) на рис. 103; б) на рис. 104.

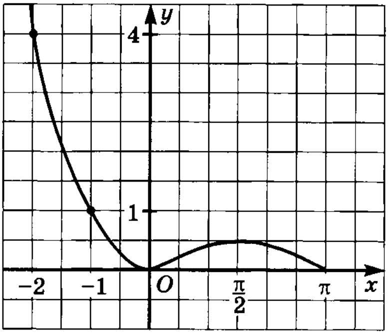


Рис. 103

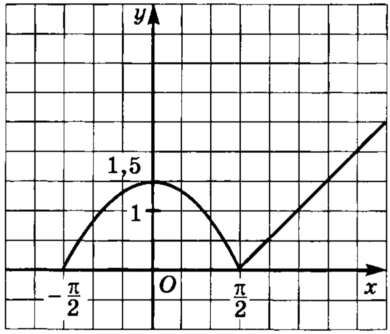


Рис. 104

○13.10. Постройте и прочитайте график функции $y = f(x)$:

а) $f(x) = \begin{cases} 3\sin x, \text{ если } x < \frac{\pi}{2}, \\ 2\cos x + 3, \text{ если } x \geqslant \frac{\pi}{2}; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} -2\cos x, \text{ если } x < 0, \\ \frac{1}{2}x^4, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$

○13.11. Постройте график функции:

а) $y = \sin\frac{x}{3}$; в) $y = \cos\frac{x}{2}$;

б) $y = \cos 2x$; г) $y = \sin 3x$.

○13.12. а) $y = 3\sin\frac{x}{2}$; в) $y = -3\cos 2x$;

б) $y = 2{,}5\cos 2x$; г) $y = 2\sin\frac{x}{3}$.

○13.13. а) $y = 3\sin(-x)$; в) $y = 2\sin(-2x)$;

б) $y = -2\cos(-3x)$; г) $y = -3\cos(-x)$.

О13.14. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \sin 2x$:

а) на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$;

б) на интервале $\left(-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right)$;

в) на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right]$;

г) на полуинтервале $(0;\ \pi]$.

О13.15. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \cos \frac{x}{3}$:

а) на луче $[0;\ +\infty)$;

б) на открытом луче $(-\infty;\ \pi)$;

в) на луче $\left(-\infty;\ \frac{\pi}{2}\right]$;

г) на открытом луче $\left(\frac{\pi}{3};\ +\infty\right)$.

О13.16. Известно, что $f(x) = \cos \frac{x}{3}$. Найдите:

а) $f(-x)$;

б) $3f(x)$;

в) $f(-3x)$;

г) $f(-x) - f(x)$.

О13.17. Известно, что $f(x) = \sin 2x$. Найдите:

а) $f(-x)$;

б) $2f(x)$;

в) $f(-3x)$;

г) $f(-x) + f(x)$.

О13.18. Постройте график функции:

а) $y = \sin 2x - 1$;

б) $y = \cos \frac{x}{2} + 1$;

в) $y = \cos 2x + 3$;

г) $y = \sin \frac{x}{3} - 2$.

О13.19. Постройте и прочитайте график функции $y = f(x)$:

а) $f(x) = \begin{cases} \cos 2x, \text{ если } x \leqslant \pi, \\ -\frac{1}{2}, \text{ если } x > \pi; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} -\sin 3x, \text{ если } x < 0, \\ \sqrt{x}, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$

●13.20. Составьте возможное аналитическое задание функции (предполагается, что $D(f) = \boldsymbol{R}$) по ее графику, изображенному:

а) на рис. 105; в) на рис. 107;
б) на рис. 106; г) на рис. 108.

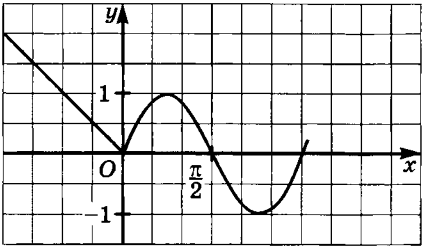


Рис. 105

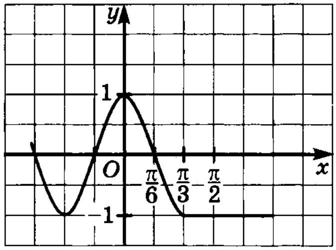


Рис. 106

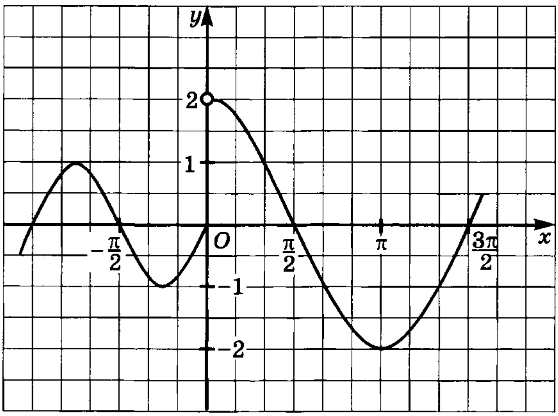


Рис. 107

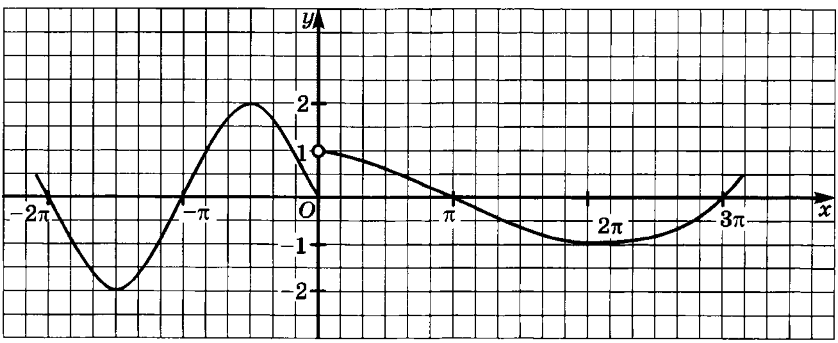


Рис. 108

§ 14. Функции $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, их свойства и графики

Рассмотрим свойства функции $y = \operatorname{tg} x$, причем в первую очередь те, которые помогут составить представление о графике функции (большинство из этих свойств фактически известно из § 6). Когда такое представление сложится, начнем строить график, как обычно, по точкам.

Свойство 1. Область определения функции $y = \operatorname{tg} x$ — множество всех действительных чисел, за исключением чисел вида

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Это свойство означает, что на графике функции $y = \operatorname{tg} x$ нет точки, принадлежащей прямой $x = \frac{\pi}{2}$, нет точки, принадлежащей прямой $x = \frac{3\pi}{2}$, нет точки, принадлежащей прямой $x = \frac{5\pi}{2}$, нет точки, принадлежащей прямой $x = -\frac{\pi}{2}$, и т. д. Эти прямые проведены пунктиром на рисунке 109.

Первое представление о графике получено: он состоит из бесконечного множества ветвей (в полосе между $x = -\frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{\pi}{2}$, в полосе между $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{3\pi}{2}$ и т. д.).

Свойство 2. $y = \operatorname{tg} x$ — периодическая функция с основным периодом π.

То, что π — период, следует из двойного равенства

$$\operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi),$$

полученного в § 6. То, что π — основной период, наглядно иллюстрирует рисунок 109.

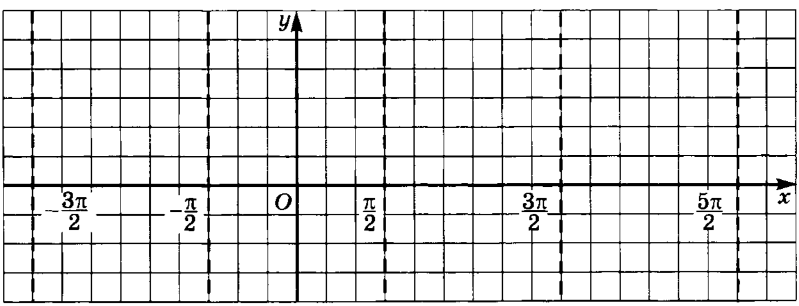


Рис. 109

Значит, если мы построим ветвь графика в полосе от $x = -\frac{\pi}{2}$ до $x = \frac{\pi}{2}$, то затем нужно будет сдвинуть построенную ветвь по оси x вправо и влево на π, 2π, 3π и т. д. Тем самым получено второе представление о графике.

Свойство 3. $y = \mathrm{tg}\, x$ — нечетная функция.

Это следует из доказанного в § 6 соотношения $\mathrm{tg}\,(-t) = -\mathrm{tg}\, t$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат. Значит, достаточно построить часть графика на промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$, а затем воспользоваться указанной симметрией.

Приступим к построению графика фукнции $y = \mathrm{tg}\, x$ на полуинтервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Выберем контрольные точки:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\mathrm{tg}\, x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Отметим эти точки на координатной плоскости и проведем через них плавную кривую (рис. 110). Добавим линию, симметричную построенной кривой относительно начала координат (рис. 111). Воспользовавшись периодичностью, достроим график до конца (рис. 112).

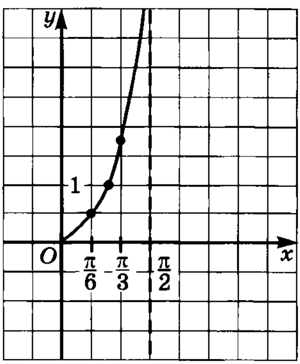


Рис. 110

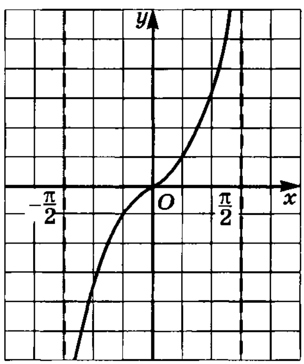


Рис. 111

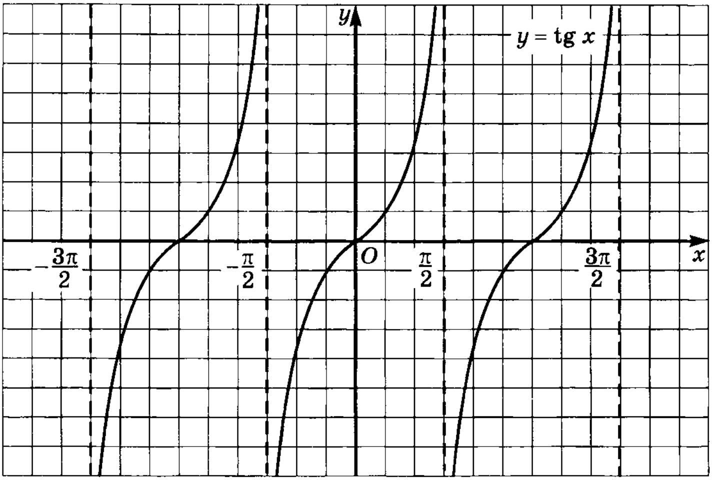


Рис. 112

График функции $y = \operatorname{tg} x$ называют *тангенсоидой*. Ту ее часть, которая изображена на рисунке 111, обычно называют *главной ветвью* тангенсоиды.

Обратите внимание на то, что из начала координат главная ветвь тангенсоиды выходит как бы под углом 45°. Почему это так, вы узнаете в § 29.

Отметим еще несколько свойств функции $y = \operatorname{tg} x$.

Свойство 4. Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Вообще функция возрастает на любом интервале вида

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right); k \in \boldsymbol{Z}.$$

Свойство 5. Функция $y = \operatorname{tg} x$ не ограничена ни сверху ни снизу.

Свойство 6. У функции $y = \operatorname{tg} x$ нет ни наибольшего, ни наименьшего значений.

Свойство 7. Функция $y = \operatorname{tg} x$ непрерывна на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Вообще функция непрерывна на любом интервале вида $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$.

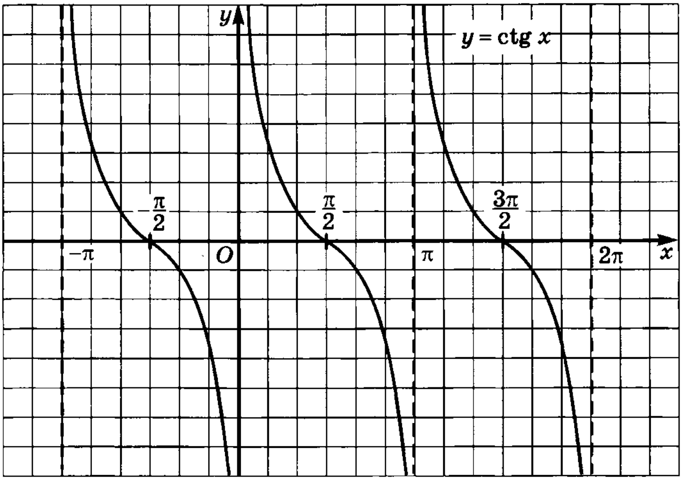


Рис. 113

В точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ функция претерпевает разрыв. Каждая прямая вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ служит вертикальной асимптотой графика функции.

Свойство 8. $E(f) = (-\infty; +\infty)$.

Рассуждая аналогично, можно построить график функции $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 113). График функции $y = \operatorname{ctg} x$, как и график функции $y = \operatorname{tg} x$, называют *тангенсоидой. Главной ветвью* графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ обычно называют ветвь, заключенную в полосе от $x = 0$ до $x = \pi$.

Пример. Решить уравнение $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

Решение. Выше мы уже решили это уравнение — с помощью линии тангенсов (см. пример 10а в § 6). Сейчас мы решим это уравнение графически. Построим в одной системе координат графики функций $y = \operatorname{tg} x$ — тангенсоиду и $y = \sqrt{3}$ — прямую, параллельную оси x. Они имеют бесконечно много точек пересечения (рис. 114), причем абсциссы этих точек отличаются друг от друга на πk. На главной ветви абсцисса соответствующей точки равна $\frac{\pi}{3}$ (мы воспользовались тем, что $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$), это один корень уравнения, а все решения описываются формулой $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

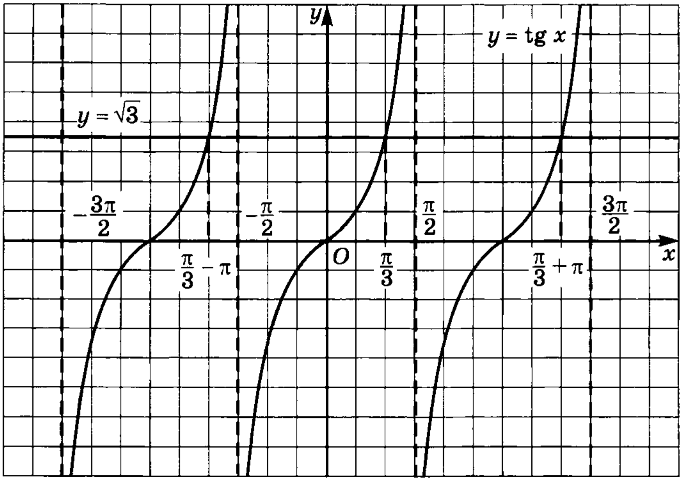


Рис. 114

Упражнения

14.1. Найдите значение функции $y = \text{tg}\, x$ при заданном значении аргумента x:

а) $x = \frac{\pi}{4}$; б) $x = \frac{2\pi}{3}$; в) $x = \frac{3\pi}{4}$; г) $x = \pi$.

○14.2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \text{tg}\, x$ на заданном промежутке:

а) на интервале $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$;

б) на полуинтервале $\left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$;

в) на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{6}\right]$;

г) на полуинтервале $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

○14.3. Решите графически уравнение:

а) $\text{tg}\, x = -\sqrt{3}$; б) $\text{tg}\, x = 1$; в) $\text{tg}\, x = -1$; г) $\text{tg}\, x = 0$.

14.4. Найдите значение функции $y = \text{ctg}\, x$ при заданном значении аргумента x:

а) $x = \frac{\pi}{4}$; б) $x = \frac{\pi}{3}$; в) $x = 2\pi$; г) $x = \frac{\pi}{2}$.

○14.5. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \mathrm{ctg}\, x$ на заданном промежутке:

а) на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$;

б) на полуинтервале $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right)$;

в) на интервале $(-\pi; 0)$;

г) на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

○14.6. Решите графически уравнение:

а) $\mathrm{ctg}\, x = 1$;

б) $\mathrm{ctg}\, x = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

в) $\mathrm{ctg}\, x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

г) $\mathrm{ctg}\, x = 0$.

○14.7. Исследуйте функцию $y = f(x)$ на четность, если:

а) $f(x) = \mathrm{tg}\, x - \cos x$;

б) $f(x) = \mathrm{tg}\, x + x$;

в) $f(x) = \mathrm{ctg}^2\, x - x^4$;

г) $f(x) = x^3 - \mathrm{ctg}\, x$.

○14.8. Известно, что $\mathrm{tg}\,(9\pi - x) = -\frac{3}{4}$. Найдите $\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{ctg}\, x$.

○14.9. Известно, что $\mathrm{ctg}\,(7\pi - x) = \frac{5}{7}$. Найдите $\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{ctg}\, x$.

○14.10. Определите знак разности:

а) $\mathrm{tg}\, 200° - \mathrm{tg}\, 201°$;

б) $\mathrm{tg}\, 1 - \mathrm{tg}\, 1{,}01$;

в) $\mathrm{tg}\, 2{,}2 - \mathrm{tg}\, 2{,}1$;

г) $\mathrm{tg}\, \frac{3\pi}{5} - \mathrm{tg}\, \frac{6\pi}{5}$.

○14.11. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \mathrm{tg}\, x$. Докажите, что $f(2x + 2\pi) + f(7\pi - 2x) = 0$.

○14.12. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = x^2 + 1$. Докажите, что $f(\mathrm{tg}\, x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Постройте график функции:

●14.13. а) $y = 2\, \mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{ctg}\, x$;

б) $y = \mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{ctg}\, x + \sqrt{x}$.

●14.14. а) $y = \sin^2(\mathrm{tg}\, x) + \cos^2(\mathrm{tg}\, x)$;

б) $y = 2\cos^2(\mathrm{ctg}\, x) + 2\sin^2(\mathrm{ctg}\, x)$.

●14.15. а) $y = \mathrm{tg}\,(\cos x) \cdot \mathrm{ctg}\,(\cos x)$;

б) $y = -2\, \mathrm{tg}\,(\sin x) \cdot \mathrm{ctg}\,(\sin x)$.

ГЛАВА 3

Тригонометрические уравнения

§ 15. Арккосинус. Решение уравнения $\cos t = a$

В главе 2 мы уже решали некоторые уравнения вида $\cos t = a$. Например, для уравнения $\cos t = \frac{1}{2}$ с помощью числовой окружности (рис. 115) находим $t = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, а для уравнения $\cos t = 1$ получаем (рис. 116) $t = 2\pi k$ (где, напомним, $k \in \mathbf{Z}$).

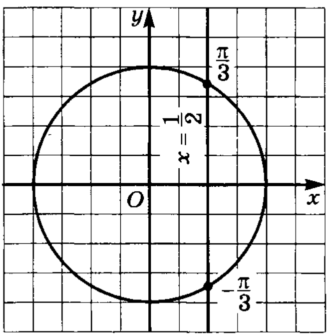


Рис. 115

Теперь рассмотрим уравнение $\cos t = \frac{2}{5}$. С помощью числовой окружности получаем (рис. 117)

$$t = t_1 + 2\pi k, \quad t = t_2 + 2\pi k,$$

где t_1 — длина дуги AM, а $t_2 = -t_1$.

Но что это за число t, пока неизвестно, ясно только то, что $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Столкнувшись с подобной ситуацией, математики поняли, что надо придумать способ ее описания на математическом языке. Они ввели в рас-

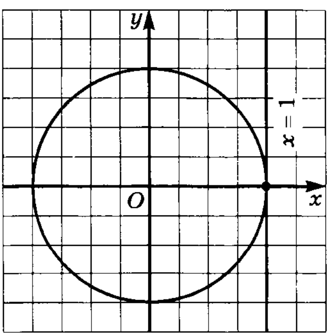


Рис. 116

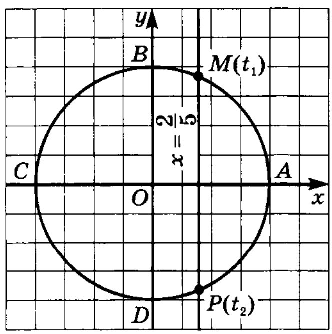


Рис. 117

смотрение новый символ $\arccos\frac{2}{5}$, который читается: *арккосинус двух пятых* (arcus в переводе с латинского значит *дуга*, сравните со словом *арка*), и с помощью этого символа таинственные корни t_1 и t_2 уравнения $\cos t = \frac{2}{5}$ записали так:

$$t_1 = \arccos\frac{2}{5}, \quad t_2 = -\arccos\frac{2}{5}.$$

Теперь все корни уравнения $\cos t = \frac{2}{5}$ можно описать двумя формулами:

$$t = \arccos\frac{2}{5} + 2\pi k, \quad t = -\arccos\frac{2}{5} + 2\pi k$$

или, обобщая, одной формулой:

$$t = \pm\arccos\frac{2}{5} + 2\pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Что же такое $\arccos\frac{2}{5}$? Это число (длина дуги AM), косинус которого равен $\frac{2}{5}$ и которое принадлежит отрезку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

З а м е ч а н и е. Символ $\arccos\frac{2}{5}$ состоит как бы из трех частей: содержит новый математический знак (arc), напоминание об исходной функции ($\cos t$) и, наконец, напоминание о правой части уравнения, в приведенном нами случае — о числе $\frac{2}{5}$.

Теперь рассмотрим уравнение $\cos t = -\frac{2}{5}$. С помощью числовой окружности (рис. 118) получаем

$$t = t_1 + 2\pi k, \quad t = t_2 + 2\pi k,$$

где t_1 — длина дуги AM, а $t_2 = -t_1$. Число t_1 обозначают символом $\arccos\left(-\frac{2}{5}\right)$ и записывают все корни уравнения $\cos t = -\frac{2}{5}$ следующим образом:

$$t = \arccos\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi k,$$

$$t = -\arccos\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi k.$$

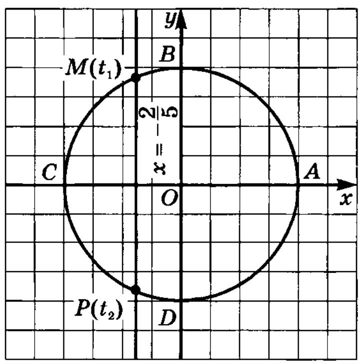
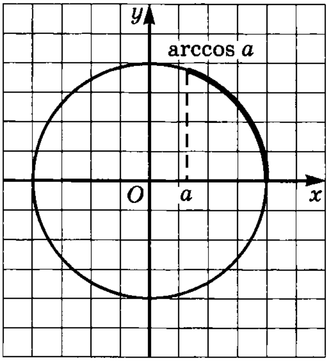
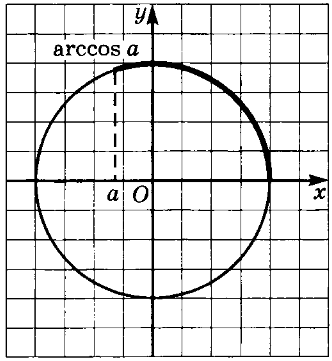


Рис. 118



а



б

Рис. 119

Написанные две формулы можно объединить в одну:

$$t = \pm\arccos\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi k.$$

Что же такое $\arccos\left(-\frac{2}{5}\right)$? Это число (длина дуги AM), косинус которого равен $-\frac{2}{5}$ и которое принадлежит отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Сформулируем определение арккосинуса в общем виде.

Определение. Если $|a| \leqslant 1$, то **arccos *a* (арккосинус *a*)** — это такое число из отрезка $[0; \pi]$, косинус которого равен a (рис. 119).

Итак,

$$\boxed{\begin{gathered}\textbf{если } |a| \leqslant 1, \textbf{ то}\\ \arccos a = t \Leftrightarrow \begin{cases}\cos t = a,\\ 0 \leqslant t \leqslant \pi.\end{cases}\end{gathered}}$$

В приведенной выше записи символ $\Leftrightarrow$ можно прочитать так: «это значит, что».

Теперь мы в состоянии сделать общий вывод о решении уравнения $\cos t = a$:

Если $|a| \leqslant 1$, то уравнение $\cos t = a$ имеет решения

$$\boxed{t = \pm\arccos a + 2\pi k,\ k \in Z.}$$

Правда, в трех случаях предпочитают пользоваться не полученной общей формулой, а более простыми соотношениями:

если $\cos t = 0$, то $t = \frac{\pi}{2} + \pi k$;

если $\cos t = 1$, то $t = 2\pi k$;

если $\cos t = -1$, то $t = \pi + 2\pi k$.

Пример 1. Вычислить:

а) $\arccos \frac{1}{2}$; в) $\arccos 0$;

б) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; г) $\arccos 1$.

Решение. а) Пусть $\arccos \frac{1}{2} = t$. Тогда $\cos t = \frac{1}{2}$ и $t \in [0; \pi]$. Значит, $t = \frac{\pi}{3}$, поскольку $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{3} \in [0; \pi]$. Итак, $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

б) Пусть $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = t$. Тогда $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $t \in [0; \pi]$. Значит, $t = \frac{3\pi}{4}$, поскольку $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{3\pi}{4} \in [0; \pi]$. Итак, $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$.

в) Пусть $\arccos 0 = t$. Тогда $\cos t = 0$ и $t \in [0; \pi]$. Значит, $t = \frac{\pi}{2}$, поскольку $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ и $\frac{\pi}{2} \in [0; \pi]$. Итак, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

г) Пусть $\arccos 1 = t$. Тогда $\cos t = 1$ и $t \in [0; \pi]$. Значит, $t = 0$, поскольку $\cos 0 = 1$ и $0 \in [0; \pi]$. Итак, $\arccos 1 = 0$. ◁■

Теорема. **Для любого $a \in [-1; 1]$ выполняется равенство**

$$\arccos a + \arccos(-a) = \pi.$$

Доказательство. Будем считать для определенности, что $a > 0$. Отметим $\arccos a$ на числовой окружности — это длина дуги AM; $\arccos(-a)$ — длина дуги AP (рис. 120). Дуги AM и PC симметричны относительно вертикального диаметра окружности, значит, эти дуги равны по длине. Получаем

$$\arccos a + \arccos(-a) = AM + AP = PC + AP = AC = \pi.$$ ◁■

На практике полученное соотношение удобнее использовать в следующем виде:

$$\boxed{\arccos(-a) = \pi - \arccos a, \text{ где } 0 < a < 1.}$$

При этом учитывают, что в случае, когда $a > 0$, число $\arccos a$ принадлежит интервалу $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Например, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

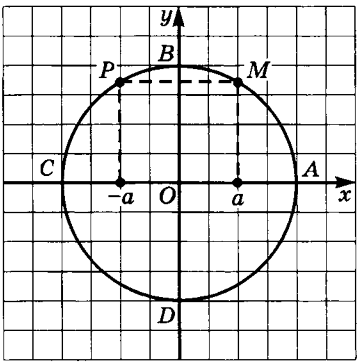


Рис. 120

Такой же результат был получен выше при решении примера 1б.

Пример 2. Решить уравнение:

а) $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\cos t = \frac{2}{7}$;

б) $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos t = -1,2$.

Решение. а) Составим формулу решений

$$t = \pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k.$$

Вычислим значение арккосинуса:

$$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Подставим найденное значение в формулу решений

$$t = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k.$$

б) Составим формулу решений

$$t = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k.$$

Вычислим значение арккосинуса:

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Подставим найденное значение в формулу решений

$$t = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k.$$

в) Составим формулу решений

$$t = \pm\arccos\frac{2}{7} + 2\pi k.$$

Вычислить значение арккосинуса в данном случае мы не можем, поэтому запись решений уравнения оставим в полученном виде.

г) Так как $-1{,}2 < -1$, то уравнение $\cos t = -1{,}2$ не имеет решений. ◁■

Пример 3. Решить неравенство

$$\cos t > 0{,}3.$$

Решение. Учтем, что $\cos t$ — абсцисса точки $M(t)$ числовой окружности. Значит, надо найти такие точки $M(t)$, лежащие на окружности, которые удовлетворяют неравенству $x > 0{,}3$. Прямая $x = 0{,}3$ пересекает числовую окружность в точках K и P (рис. 121). Неравенству $x > 0{,}3$ соответствуют точки открытой дуги KP. Главные имена точек K и P в этом случае — соответственно $-\arccos 0{,}3$ и $\arccos 0{,}3$. Значит, аналитическая запись дуги KP имеет вид

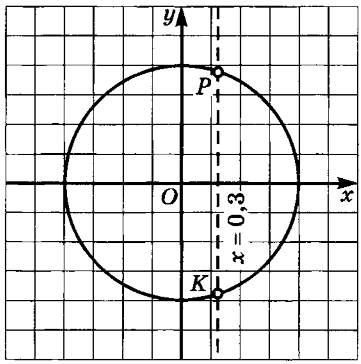


Рис. 121

$$-\arccos 0{,}3 + 2\pi k < t < \arccos 0{,}3 + 2\pi k.$$ ◁■

Упражнения

Вычислите:

15.1. а) $\arccos 0$; в) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\arccos 1$; г) $\arccos\frac{1}{2}$.

15.2. а) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; в) $\arccos(-1)$;

б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; г) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Вычислите:

О15.3. а) $\arccos(-1) + \arccos 0$; в) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\arccos\frac{1}{2} - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \arccos\frac{1}{2}$.

О15.4. а) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$; в) $\mathrm{ctg}\,(\arccos 0)$;

б) $\mathrm{tg}\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; г) $\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решите уравнение:

15.5. а) $\cos t = \frac{1}{2}$; в) $\cos t = 1$;

б) $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

15.6. а) $\cos t = -1$; в) $\cos t = -\frac{1}{2}$;

б) $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

15.7. а) $\cos t = \frac{1}{3}$; в) $\cos t = -\frac{3}{7}$;

б) $\cos t = -1{,}1$; г) $\cos t = 2{,}04$.

О15.8. Вычислите:

а) $\cos\left(2\arccos\frac{1}{2} - 3\arccos 0 - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;

б) $\frac{1}{3}\left(\arccos\frac{1}{3} + \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

О15.9. Найдите область определения выражения:

а) $\arccos x$; в) $\arccos(x - 1)$;

б) $\arccos 2x$; г) $\arccos(3 - 2x)$.

○15.10. Имеет ли смысл выражение:

а) $\arccos \sqrt{5}$; в) $\arccos \frac{\pi}{5}$;

б) $\arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$; г) $\arccos \left(-\sqrt{3}\right)$?

○15.11. Докажите тождество

$$\operatorname{tg}(\arccos 0{,}1 + \arccos(-0{,}1) + x) = \operatorname{tg} x.$$

Решите уравнение:

○15.12. а) $\frac{8\cos t - 3}{3\cos t + 2} = 1$;

б) $\frac{3\cos t + 1}{2} + \frac{5\cos t - 1}{3} = 1{,}75.$

○15.13. а) $6\cos^2 t + 5\cos t + 1 = 0$;

б) $3 + 9\cos t = 5\sin^2 t.$

○15.14. Найдите корни заданного уравнения на заданном промежутке:

а) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [0, 2\pi]$;

б) $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x \in [2\pi, 4\pi]$;

в) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in [-\pi, 3\pi]$;

г) $\cos x = -1$, $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

●15.15. Найдите корни заданного уравнения на заданном промежутке:

а) $\cos x = \frac{1}{2}$, $x \in (1, 6)$;

б) $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x \in (2, 10)$;

в) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, 12\right)$;

г) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in \left(-4, \frac{5\pi}{4}\right)$.

●15.16. Постройте график функции:

а) $y = \arccos x + \arccos(-x)$;

б) $y = \cos(\arccos x)$.

Решите неравенство:

○15.17. а) $\cos t > \frac{1}{2}$;

в) $\cos t \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos t \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) $\cos t < \frac{1}{2}$.

●15.18. а) $\cos t < \frac{2}{3}$;

в) $\cos t > \frac{2}{3}$;

б) $\cos t > -\frac{1}{7}$;

г) $\cos t < -\frac{1}{7}$.

●15.19. а) $3\cos^2 t - 4\cos t \geqslant 4$;

в) $3\cos^2 t - 4\cos t < 4$;

б) $6\cos^2 t + 1 > 5\cos t$;

г) $6\cos^2 t + 1 \leqslant 5\cos t$.

●15.20. а) $4\cos^2 t < 1$;

в) $9\cos^2 t > 1$;

б) $3\cos^2 t < \cos t$;

г) $3\cos^2 t > \cos t$.

Вычислите:

●15.21. а) $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$;

б) $\sin(\arccos(-0{,}8))$.

●15.22. а) $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right)$;

б) $\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{4}{5}\right)$.

§ 16. Арксинус. Решение уравнения $\sin t = a$

Рассмотрим уравнение $\sin t = \frac{2}{5}$. С помощью числовой окружности (рис. 122) получаем

$$t = t_1 + 2\pi k, \quad t = t_2 + 2\pi k,$$

где t_1 — длина дуги AM, а t_2 — длина дуги AP. Поскольку $AP = AC - PC$, $AC = \pi$, а $PC = AM$, то получаем, что $t_2 = \pi - t_1$.

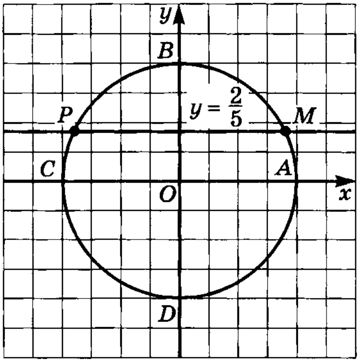


Рис. 122

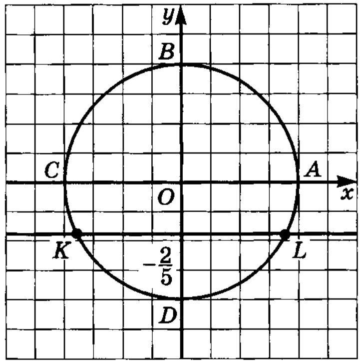


Рис. 123

Математики ввели для числа t_1 символ $\arcsin \frac{2}{5}$, который читается *арксинус двух пятых*. С его помощью все корни уравнения $\sin t = \frac{2}{5}$ можно описать двумя формулами:

$$t = \arcsin \frac{2}{5} + 2\pi k,$$

$$t = \pi - \arcsin \frac{2}{5} + 2\pi k.$$

Что же такое $\arcsin \frac{2}{5}$? Это число (длина дуги AM), синус которого равен $\frac{2}{5}$ и которое принадлежит отрезку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Теперь рассмотрим уравнение $\sin t = -\frac{2}{5}$. С помощью числовой окружности (рис. 123) получаем

$$t = t_1 + 2\pi k, \quad t = t_2 + 2\pi k,$$

где t_1 — длина дуги LA, взятая со знаком минус, t_2 — длина дуги AK. Математики обозначили число t_1 символом $\arcsin\left(-\frac{2}{5}\right)$ и сразу обратили внимание на два обстоятельства.

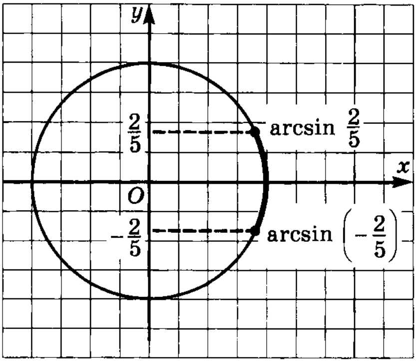


Рис. 124

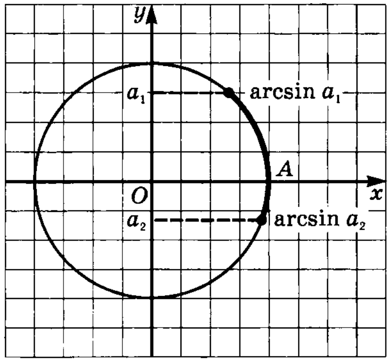


Рис. 125

Первое: дуги AM и AL (см. рис. 122 и 123) равны по длине и противоположны по направлению. Значит,

$$\arcsin\left(-\frac{2}{5}\right) = -\arcsin\frac{2}{5} \text{ (рис. 124).}$$

Второе:

$$AK = AC + CK = AC + LA =$$
$$= AC - AL = \pi - \arcsin\left(-\frac{2}{5}\right).$$

Значит, и в этом случае получается, что $t_2 = \pi - t_1$. Это дает возможность записать все решения уравнения $\sin t = -\frac{2}{5}$ следующим образом:

$$t = \arcsin\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi k, \quad t = \pi - \arcsin\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi k.$$

Что же такое $\arcsin\left(-\frac{2}{5}\right)$? Это — число, синус которого равен $-\frac{2}{5}$ и которое принадлежит отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

Сформулируем определение арксинуса в общем виде.

Определение. Если $|a| \leqslant 1$, то **$\arcsin a$ (арксинус a)** — это такое число из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a (рис. 125).

Итак,

$$\boxed{\begin{gathered}\textbf{если } |a| \leqslant 1, \textbf{ то}\\ \arcsin a = t \Leftrightarrow \begin{cases}\sin t = a,\\ -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}.\end{cases}\end{gathered}}$$

Теперь мы в состоянии сделать общий вывод о решении уравнения $\sin t = a$.

Если $|a| \leqslant 1$, ***то уравнение*** $\sin t = a$ ***имеет две серии решений:***

$$\boxed{t = \arcsin a + 2\pi k, \quad t = \pi - \arcsin a + 2\pi k; \ k \in Z.}$$

Правда, в трех случаях предпочитают пользоваться не полученной общей формулой, а более простыми соотношениями:

если $\sin t = 0$, то $t = \pi k$;

если $\sin t = 1$, то $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$;

если $\sin t = -1$, то $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Пример 1. Вычислить:

а) $\arcsin \frac{1}{2}$; в) $\arcsin 0$;

б) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; г) $\arcsin 1$.

Решение. а) Пусть $\arcsin \frac{1}{2} = t$. Тогда $\sin t = \frac{1}{2}$ и $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Значит, $t = \frac{\pi}{6}$, поскольку $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Итак, $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

б) Пусть $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = t$. Тогда $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Значит, $t = -\frac{\pi}{4}$, поскольку $\sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $-\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Итак, $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

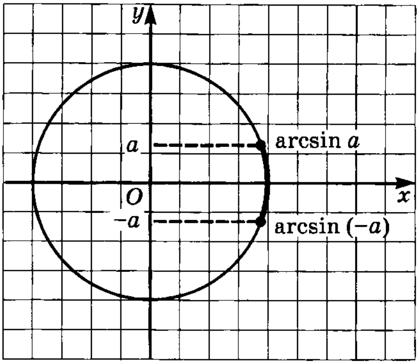


Рис. 126

в) Пусть $\arcsin 0 = t$. Тогда $\sin t = 0$ и $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Значит, $t = 0$, поскольку $\sin 0 = 0$ и $0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Итак, $\arcsin 0 = 0$.

г) Пусть $\arcsin 1 = t$. Тогда $\sin t = 1$ и $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Значит, $t = \frac{\pi}{2}$, поскольку $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ и $\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Итак, $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$. ◁■

Выше мы отметили, что

$$\arcsin\left(-\frac{2}{5}\right) = -\arcsin\frac{2}{5}.$$

Вообще для любого $a \in [-1; 1]$ справедлива формула (рис. 126)

$$\boxed{\arcsin(-a) = -\arcsin a.}$$

Пример 2. Решить уравнение:

а) $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin t = \frac{2}{7}$;

б) $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sin t = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Решение. а) Составим формулы решений:

$$t = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k; \quad t = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k.$$

Вычислим значение арксинуса:

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Подставим найденное значение в формулы решений:

$$t = \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \quad t = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k.$$

б) Составим формулы решений:

$$t = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k; \quad t = \pi - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k;$$

Вычислим значение арксинуса:

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}.$$

Подставим найденное значение в формулы решений:

$$t = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \quad t = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2\pi k, \quad \text{т. е.} \quad t = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k.$$

в) Составим формулы решений:

$$t = \arcsin\frac{2}{7} + 2\pi k; \quad t = \pi - \arcsin\frac{2}{7} + 2\pi k.$$

Вычислить значение арксинуса в данном случае мы не можем, поэтому запись решений уравнения оставим в полученном виде.

г) Так как $\frac{\sqrt{5}}{2} > 1$, то уравнение $\sin t = \frac{\sqrt{5}}{2}$ не имеет решений. ◁■

Пример 3. Решить неравенство $\sin t \leqslant 0{,}3$.

Решение. а) Учтем, что $\sin t$ — ордината точки $M(t)$ числовой окружности. Значит, надо найти такие точки $M(t)$, лежащие на окружности, которые удовлетворяют неравенству $y \leqslant 0{,}3$. Прямая $y = 0{,}3$ пересекает числовую окружность в точках K и P (рис. 127). Неравенству $y \leqslant 0{,}3$ соответствуют точки дуги PK (рис. 127). Главные имена точек P и K в этом случае $-\pi - \arcsin 0{,}3$ и $\arcsin 0{,}3$ соответственно. Значит, решение неравенства имеет вид

$$-\pi - \arcsin 0{,}3 + 2\pi k \leqslant t \leqslant$$
$$\leqslant \arcsin 0{,}3 + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \quad ◁■$$

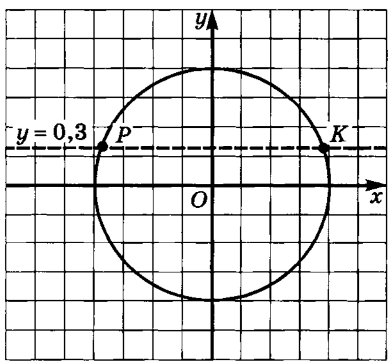


Рис. 127

Выше были получены две формулы для решения уравнения $\sin t = a$:

$$t = \arcsin a + 2\pi k;$$
$$t = \pi - \arcsin a + 2\pi k.$$

Их можно объединить одной формулой. Перепишем эти формулы следующим образом:

$$t = \arcsin a + \pi \cdot 2k,$$
$$t = -\arcsin a + \pi(2k + 1).$$

Замечаем, что если перед $\arcsin a$ стоит знак +, то у числа π множителем является четное число $2k$ (см. первую строку); если же перед $\arcsin a$ стоит знак −, то у числа π множителем является нечетное число $2k + 1$ (см. вторую строку). Это наблюдение позволяет записать общую формулу для решения уравнения $\sin t = a$:

$$\boxed{t = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}.}$$

Почему эта формула общая? Смотрите: при четном n ($n = 2k$) из нее получается первая из написанных выше формул, а при нечетном n ($n = 2k + 1$) — вторая из написанных выше формул.

С помощью полученной общей формулы можно по-другому записать решения уравнений из примера 2. Так, для уравнения $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ получаем $t = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n$. Для уравнения $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ получаем $t = (-1)^n\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n$. Это выражение можно записать иначе, выполнив следующие преобразования:

$$(-1)^n\left(-\frac{\pi}{3}\right) = (-1)^n(-1)\frac{\pi}{3} = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}.$$

В итоге получаем $t = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n$.

Для рассмотренного в примере 2в уравнения $\sin t = \frac{2}{7}$ ответ можно записать так: $t = (-1)^n \arcsin\frac{2}{7} + \pi n$.

Важное замечание. Итак, мы получили формулы корней для уравнений $\cos t = a$ и $\sin t = a$: соответственно $t = \pm\arccos a + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; $t = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ (где $|a| \leqslant 1$). Переменную мы пока обозначали буквой t для удобства читателя, подчеркивая тем самым, что вся информация получена с помощью числовой окружности. Но когда имеется готовая формула, переменная может быть обозначена любой буквой, в том числе более традиционной для уравнений буквой x. Так мы чаще всего и будем поступать в дальнейшем при решении тригонометрических уравнений. Для неравенств пока сохраним обозначение переменной буквой t, поскольку при решении неравенств приходится использовать числовую окружность.

Упражнения

Вычислите:

16.1. а) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\arcsin 1$; г) $\arcsin 0$.

16.2. а) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; в) $\arcsin(-1)$;

б) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; г) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

○16.3. а) $\arcsin 0 + \arccos 0$;

б) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos \frac{1}{2}$;

г) $\arcsin(-1) + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$.

○16.4. а) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;

б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arcsin(-1)$;

в) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

г) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

16.5. Решите уравнение:

а) $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin t = 1$;

б) $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\sin t = \frac{1}{2}$.

Решите уравнение:

16.6. а) $\sin t = -1$;

б) $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\sin t = -\frac{1}{2}$;

г) $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

16.7. а) $\sin t = \frac{1}{4}$;

б) $\sin t = 1{,}02$;

в) $\sin t = -\frac{1}{7}$;

г) $\sin t = \frac{\pi}{3}$.

○16.8. Докажите тождество:

а) $\sin(\arccos x + \arccos(-x)) = 0$;

б) $\cos(\arcsin x + \arcsin(-x)) = 1$.

Найдите корни заданного уравнения на заданном промежутке:

○16.9. а) $\sin x = \frac{1}{2}$, $x \in [0; 2\pi]$;

б) $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x \in [-\pi; \pi]$;

в) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in [-\pi; 2\pi]$;

г) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [-2\pi; \pi]$.

●16.10. а) $\sin x = \frac{1}{2}$, $x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{11\pi}{4}\right)$;

б) $\sin x = -\frac{1}{2}$, $x \in \left(-\frac{5\pi}{6}; 6\right)$;

в) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in (-4; 3)$;

г) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in (-3; 6)$.

○16.11. Найдите область определения выражения:

а) $\arcsin x$;

б) $\arcsin (5 - 2x)$;

в) $\arcsin \frac{x}{2}$;

г) $\arcsin (x^2 - 3)$.

○16.12. Имеет ли смысл выражение:

а) $\arcsin \left(-\frac{2}{3}\right)$;

б) $\arcsin 1{,}5$;

в) $\arcsin \left(3-\sqrt{20}\right)$;

г) $\arcsin \left(4-\sqrt{20}\right)$?

Решите уравнение:

○16.13. а) $(2 \cos x + 1)(2 \sin x - \sqrt{3}) = 0$;

б) $2 \cos x - 3 \sin x \cos x = 0$;

в) $4 \sin^2 x - 3 \sin x = 0$;

г) $2 \sin^2 x - 1 = 0$.

○16.14. а) $6 \sin^2 x + \sin x = 2$;

б) $3 \cos^2 x = 7 (\sin x + 1)$.

Решите неравенство:

○16.15. а) $\sin t > \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\sin t > -\frac{1}{2}$;

в) $\sin t < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\sin t \leqslant -\frac{1}{2}$.

●16.16. а) $\sin t < \frac{1}{3}$;

б) $\sin t \geqslant -0{,}6$;

в) $\sin t \geqslant \frac{1}{3}$;

г) $\sin t < -0{,}6$.

●16.17. а) $5 \sin^2 t > 11 \sin t + 12$;

б) $5 \sin^2 t \leqslant 11 \sin t + 12$.

●16.18. а) $6 \cos^2 t + \sin t > 4$;

б) $6 \cos^2 t + \sin t \leqslant 4$.

●16.19. Вычислите:

а) $\cos \left(\arcsin \left(-\frac{5}{13}\right)\right)$;

б) $\operatorname{tg} (\arcsin 0{,}6)$;

в) $\cos \left(\arcsin \frac{8}{17}\right)$;

г) $\operatorname{ctg} (\arcsin (-0{,}8))$.

§ 17. Арктангенс и арккотангенс. Решение уравнений tg $x = a$, ctg $x = a$

Рассмотрим уравнение $\operatorname{tg} x = 2$.

Графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = 2$ имеют бесконечно много общих точек, абсциссы всех этих точек имеют вид $x = x_1 + \pi k$, где x_1 — абсцисса точки пересечения прямой $y = 2$ с главной ветвью тангенсоиды (рис. 128). Для числа x_1 математики ввели обозначение $\operatorname{arctg} 2$ (читается: *арктангенс двух*). Все корни уравнения $\operatorname{tg} x = 2$ можно описать формулой $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$.

Что же такое $\operatorname{arctg} 2$? Это число, тангенс которого равен 2 и которое принадлежит интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Рассмотрим теперь уравнение $\operatorname{tg} x = -2$.

Графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = -2$ имеют бесконечно много общих точек, абсциссы всех этих точек имеют вид $x = x_2 + \pi k$, где x_2 — абсцисса точки пересечения прямой $y = -2$ с главной ветвью тангенсоиды. Для числа x_2 математики ввели обозначение $\operatorname{arctg}(-2)$. Все корни уравнения можно описать формулой $x = \operatorname{arctg}(-2) + \pi k$.

Что же такое $\operatorname{arctg}(-2)$? Это число, тангенс которого равен -2 и которое принадлежит интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Обратите внимание на то, что $x_2 = -x_1$ (рис. 128). Это значит, что $\operatorname{arctg}(-2) = -\operatorname{arctg} 2$.

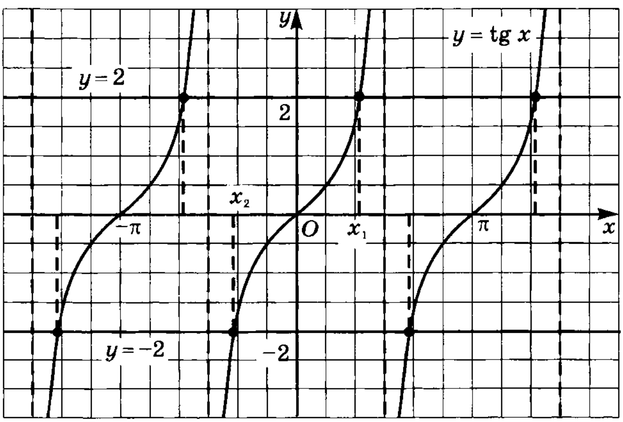


Рис. 128

Сформулируем определение арктангенса в общем виде.

Определение 1. **arctg a (арктангенс a)** — это такое число из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a.

Итак,

$$\boxed{\operatorname{arctg} a = x \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = a, \\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}. \end{cases}}$$

Теперь мы в состоянии сделать общий вывод о решении уравнения $\operatorname{tg} x = a$: ***уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет решения***

$$\boxed{x = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in Z.}$$

Выше мы отметили, что $\operatorname{arctg}(-2) = -\operatorname{arctg} 2$. Вообще для любого значения a справедлива формула

$$\boxed{\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a.}$$

Пример 1. Вычислить:

а) $\operatorname{arctg} 1$; б) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; в) $\operatorname{arctg} 0$.

Решение. а) Пусть $\operatorname{arctg} 1 = x$. Тогда $\operatorname{tg} x = 1$ и $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Значит, $x = \frac{\pi}{4}$, поскольку $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ и $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Итак, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

б) Пусть $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = x$. Тогда $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Значит, $x = -\frac{\pi}{6}$, поскольку $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $-\frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Итак, $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

Можно было рассуждать и по-другому:

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}.$$

в) Пусть $\operatorname{arctg} 0 = x$. Тогда $\operatorname{tg} x = 0$ и $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Значит, $x = 0$, поскольку $\operatorname{tg} x = 0$ и $0 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Итак, $\operatorname{arctg} 0 = 0$. ◁■

Пример 2. Решить уравнения:

а) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; б) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; в) $\operatorname{tg} x = -1{,}2$.

Р е ш е н и е. а) Составим формулу решений: $x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi k$.

Находим, что $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$; подставив найденное значение в формулу решений, получим

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi k.$$

б) Составим формулу решений: $x = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \pi k$.

Находим, что $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\operatorname{arctg} \sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$; подставив найденное значение в формулу решений, получим

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi k.$$

в) Составим формулу решений $x = \operatorname{arctg}(-1{,}2) + \pi k$.

Вычислить значение арктангенса в данном случае мы не можем, поэтому запись решений уравнения оставим в полученном виде. ◁■

Рассмотрим уравнение $\operatorname{ctg} x = a$, где $a > 0$. Графики функций $y = \operatorname{ctg} x$ и $y = a$ имеют бесконечно много общих точек, абсциссы всех этих точек имеют вид $x = x_1 + \pi k$, где $x_1 = \operatorname{arcctg} a$ — абсцисса точки пересечения прямой $y = a$ с главной ветвью тангенсоиды (рис. 129). Значит, $\operatorname{arcctg} a$ — это число, котангенс которого равен a и которое принадлежит интервалу $(0; \pi)$ — на этом интервале строится главная ветвь графика функции $y = \operatorname{ctg} x$.

На рисунке 129 представлена графическая иллюстрация решения уравнения $\operatorname{ctg} x = -a$. Графики функций $y = \operatorname{ctg} x$ и $y = -a$ имеют бесконечно много общих точек, абсциссы всех этих точек имеют вид $x = x_2 + \pi k$, где $x_2 = \operatorname{arcctg}(-a)$ — абсцисса точки пересечения прямой $y = -a$ с главной ветвью тангенсоиды. Значит, $\operatorname{arcctg}(-a)$ — это число, котангенс которого равен $-a$ и которое принадлежит интервалу $(0; \pi)$.

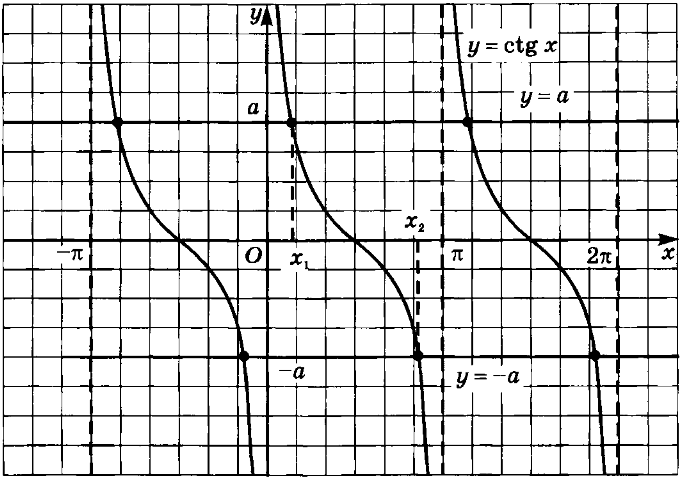


Рис. 129

***Определение* 2.** arcctg a (арккотангенс a) — это такое число из интервала $(0;\ \pi)$, котангенс которого равен a.

Итак,

$$\boxed{\operatorname{arcctg} a = x \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg} x = a, \\ 0 < x < \pi. \end{cases}}$$

Теперь мы в состоянии сделать общий вывод о решении уравнения $\operatorname{ctg} x = a$: ***уравнение*** $\operatorname{ctg} x = a$ ***имеет решения***

$$\boxed{x = \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in Z.}$$

Обратите внимание на то, что $x_2 = \pi - x_1$ (рис. 129). Это значит, что

$$\boxed{\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a.}$$

Пример 3. Вычислить:

а) $\operatorname{arcctg} 1$;   б) $\operatorname{arcctg}(-1)$;   в) $\operatorname{arcctg} 0$.

Решение. а) Пусть $\operatorname{arcctg} 1 = x$. Тогда $\operatorname{ctg} x = 1$ и $x \in (0;\ \pi)$. Значит, $x = \frac{\pi}{4}$, поскольку $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$ и $\frac{\pi}{4} \in (0;\ \pi)$. Итак, $\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

б) $\operatorname{arcctg}(-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Итак, $\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$.

в) Пусть $\operatorname{arcctg} 0 = x$. Тогда $\operatorname{ctg} x = 0$ и $x \in (0; \pi)$. Значит, $x = \frac{\pi}{2}$, поскольку $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0$ и $\frac{\pi}{2} \in (0; \pi)$. Итак, $\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$. ◁■

Замечание. Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ практически всегда можно преобразовать к виду $\operatorname{tg} x = \frac{1}{a}$. Исключение составляет уравнение $\operatorname{ctg} x = 0$. Но в этом случае, воспользовавшись тем, что $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, можно перейти к уравнению $\cos x = 0$. Таким образом, уравнение вида $\operatorname{ctg} x = a$ самостоятельного интереса не представляет.

Упражнения

Вычислите:

17.1. а) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$;

б) $\operatorname{arctg} 1$; г) $\operatorname{arctg} 0$.

17.2. а) $\operatorname{arctg} (-1)$; в) $\operatorname{arctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

б) $\operatorname{arctg} \left(-\sqrt{3}\right)$; г) $\operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

17.3. а) $\operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\operatorname{arcctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

б) $\operatorname{arcctg} 1$; г) $\operatorname{arcctg} 0$.

О17.4. а) $\operatorname{arcctg} (-1) + \operatorname{arctg} (-1)$;

б) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \operatorname{arcctg} \left(-\sqrt{3}\right)$;

в) $\operatorname{arcctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$;

г) $\arccos \left(-\frac{1}{2}\right) - \operatorname{arcctg} \left(-\sqrt{3}\right)$.

Решите уравнение:

17.5. а) $\operatorname{tg} x = 1$; в) $\operatorname{tg} x = -1$;

б) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

17.6. а) $\operatorname{tg} x = 0$; в) $\operatorname{tg} x = -3$;

б) $\operatorname{tg} x = -2$; г) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$.

17.7. а) $\operatorname{ctg} x = 1$; в) $\operatorname{ctg} x = 0$;

б) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$; г) $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

○17.8. а) $\operatorname{tg}^2 x - 6 \operatorname{tg} x + 5 = 0$;

б) $\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$.

○17.9. а) $\operatorname{tg} (\pi + x) = \sqrt{3}$;

б) $2 \operatorname{ctg} (2\pi + x) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{3}$;

в) $-\sqrt{3} \operatorname{tg} (\pi - x) = 1$;

г) $\operatorname{ctg} (2\pi - x) + \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 2$.

●17.10. Постройте график функции:

а) $y = \arccos 2x + \arccos (-2x)$;

б) $y = \arccos \frac{1}{x} + \arccos \left(-\frac{1}{x}\right)$;

в) $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} (-x)$;

г) $y = \operatorname{arcctg} \sqrt{x} + \operatorname{arcctg} \left(-\sqrt{x}\right)$.

§ 18. Тригонометрические уравнения

1. Простейшие тригонометрические уравнения

Тригонометрическими уравнениями обычно называют уравнения, в которых переменные содержатся под знаками тригонометрических функций. К их числу прежде всего относятся *простейшие тригонометрические уравнения*, т. е. уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, где a — действительное число. К настоящему моменту мы знаем, что:

1) если $|a| \leqslant 1$, то решения уравнения $\cos x = a$ имеют вид

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n;$$

2) если $|a| \leqslant 1$, то решения уравнения $\sin x = a$ имеют вид

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,$$

или, что то же самое,

$$x = \arcsin a + 2\pi k, \quad x = \pi - \arcsin a + 2\pi k;$$

3) если $|a| > 1$, то уравнения $\cos x = a$, $\sin x = a$ не имеют решений;

4) решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$ для любого значения a имеют вид

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n;$$

5) следует выделить частные случаи:

$$\sin x = 0, \quad x = \pi n;$$

$$\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$

$$\sin x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$

$$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n;$$

$$\cos x = 1, \quad x = 2\pi n;$$

$$\cos x = -1, \quad x = \pi + 2\pi n.$$

Во всех перечисленных формулах подразумевается, что параметр (n, k) принимает любые целочисленные значения ($n \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$).

К простейшим относят и уравнения вида $T(kx + m) = a$, где T — знак какой-либо тригонометрической функции.

Пример 1. Решить уравнения:

а) $\sin 2x = \frac{1}{2}$; б) $\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\operatorname{tg}\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение. а) Введем новую переменную $t = 2x$. Тогда заданное уравнение примет вид $\sin t = \frac{1}{2}$, откуда получаем

$$t = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n.$$

Далее, $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, значит, $t = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$.

Возвращаясь к переменной x, получаем $2x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$. Осталось обе части этого равенства разделить почленно на 2:

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}.$$

Заметим, что при наличии некоторого опыта можно не вводить промежуточную переменную $t = 2x$, а сразу переходить от уравнения $\sin 2x = \frac{1}{2}$ к записи $2x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n$. Именно так мы и будем действовать в дальнейшем.

б) Решения уравнения $\cos t = a$ имеют вид $t = \pm\arccos a + 2\pi n$. Для данного примера это означает, что $3x = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n$. Вычислим $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, воспользовавшись соответствующей формулой для арккосинуса (см. § 15):

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Значит, $3x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, откуда находим, что

$$x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}.$$

в) Решения уравнения $\operatorname{tg} t = a$ имеют вид $t = \operatorname{arctg} a + \pi n$. Для данного примера это означает, что $4x - \frac{\pi}{6} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi n$. Вычислив $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$, получим $\frac{\pi}{6}$. Далее последовательно получаем

$$4x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \pi n;$$

$$4x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \pi n;$$

$$4x = \frac{\pi}{3} + \pi n;$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример 2. Найти те корни уравнения $\sin 2x = \frac{1}{2}$, которые принадлежат отрезку $[0; \pi]$.

Решение. Сначала решим уравнение в общем виде: $x = (-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$ (см. пример 1а). Далее придадим параметру n последовательно значения 0, 1, 2, ..., −1, −2, ... и подставим эти значения в общую формулу корней.

Если $n = 0$, то $x = (-1)^0 \frac{\pi}{12} + 0 = \frac{\pi}{12}$. Это число принадлежит заданному отрезку $[0; \pi]$.

Если $n = 1$, то $x = (-1)^1 \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{12}$. Это число принадлежит заданному отрезку $[0; \pi]$.

Если $n = 2$, то $x = (-1)^2 \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{13\pi}{12}$. Это число не принадлежит заданному отрезку $[0; \pi]$. Тем более не будут принадлежать заданному отрезку те значения x, которые получаются из общей формулы при $n = 3, 4, \ldots$.

Пусть теперь $n = -1$. Тогда

$$x = (-1)^{-1} \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2} = -\frac{7\pi}{12}.$$

Это число не принадлежит заданному отрезку $[0; \pi]$. Тем более не будут принадлежать заданному отрезку те значения x, которые получаются из общей формулы при $n = -2, -3, \ldots$.

Итак, заданному отрезку $[0; \pi]$ принадлежат те корни уравнения, которые получаются из общей формулы при следующих значениях параметра n: $n = 0$, $n = 1$. Эти корни таковы: $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$. ◁■

2. Два основных метода решения тригонометрических уравнений

В пункте 1 мы говорили лишь о простейших тригонометрических уравнениях вида $T(kx + m) = a$, где T — символ одной из тригонометрических функций. В более сложных случаях применяют метод введения новой переменной и метод разложения на множители.

Пример 3. Решить уравнения:

а) $2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$;   б) $\cos^2 x - \sin^2 x - \cos x = 0$.

Решение. а) Введем новую переменную $z = \sin x$. Тогда уравнение примет вид $2z^2 - 5z + 2 = 0$, откуда находим $z_1 = 2$, $z_2 = \frac{1}{2}$.

Значит, либо $\sin x = 2$, либо $\sin x = \frac{1}{2}$. Первое уравнение не имеет корней, а из второго находим

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n; \; x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n.$$

б) Воспользуемся тем, что $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Тогда заданное уравнение можно переписать в виде

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - \cos x = 0.$$

После понятных преобразований получим

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$$

Введем новую переменную $z = \cos x$. Тогда уравнение примет вид $2z^2 - z - 1 = 0$, откуда находим $z_1 = 1$, $z_2 = -\frac{1}{2}$. Значит, либо $\cos x = 1$, либо $\cos x = -\frac{1}{2}$. Из первого уравнения находим $x = 2\pi n$; из второго уравнения находим

$$x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n;\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n.$$

Ответ: а) $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$; б) $x = 2\pi n$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$.

Теперь поговорим о втором методе решения тригонометрических уравнений — *методе разложения на множители*. Смысл этого метода вам знаком: если уравнение $f(x) = 0$ удается преобразовать к виду $f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$, то либо $f_1(x) = 0$, либо $f_2(x) = 0$. В подобных случаях обычно говорят так: *задача сводится к решению совокупности уравнений*:

$$f_1(x) = 0; \quad f_2(x) = 0.$$

Пример 4. Решить уравнение $\left(\sin x - \frac{1}{3}\right)\left(\cos x + \frac{2}{5}\right) = 0.$

Решение. Задача сводится к решению совокупности уравнений:

$$\sin x = \frac{1}{3}; \quad \cos x = -\frac{2}{5}.$$

Из этих уравнений находим соответственно

$$x = (-1)^n\arcsin\frac{1}{3} + \pi n; \quad x = \pm\arccos\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi n.$$ ◀■

Пример 5. Решить уравнение $2\sin x\cos 5x - \cos 5x = 0$.

Решение. Имеем $\cos 5x(2\sin x - 1) = 0$. Значит, приходим к совокупности уравнений:

$$\cos 5x = 0; \quad \sin x = \frac{1}{2}.$$

Из первого уравнения находим $5x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$.

Из второго уравнения находим $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$; $n \in \boldsymbol{Z}$.

Замечание. Учтите, что переход от уравнения $f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$ к совокупности уравнений $f_1(x) = 0$; $f_2(x) = 0$ не всегда безопасен. Рассмотрим, например, уравнение $\operatorname{tg} x\,(\sin x - 1) = 0$. Из уравнения $\operatorname{tg} x = 0$ находим $x = \pi n$; из уравнения $\sin x = 1$ находим $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Но включить обе серии решений в ответ нельзя. Дело в том, что при значениях $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ входящий в заданное уравнение множитель $\operatorname{tg} x$ не имеет смысла, т. е. значения $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ не принадлежат области определения уравнения (области допустимых значений переменной — ОДЗ), это посторонние корни.

3. *Однородные тригонометрические уравнения*

Здесь мы познакомимся с довольно часто встречающимися на практике тригонометрическими уравнениями специального вида.

Определение. Уравнение вида $a \sin x + b \cos x = 0$ называют **однородным** тригонометрическим уравнением **первой степени**; уравнение вида $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ называют **однородным** тригонометрическим уравнением **второй степени**.

Сначала поговорим о решении однородных тригонометрических уравнений первой степени, причем рассмотрим только самый общий случай, когда оба коэффициента a и b отличны от нуля; ведь если, например, $a = 0$, уравнение принимает вид $b \cos x = 0$, т. е. $\cos x = 0$, — такое уравнение отдельного обсуждения не заслуживает. Аналогично при $b = 0$ получаем $a \sin x = 0$, что тоже не требует отдельного обсуждения.

Итак, дано уравнение $a \sin x + b \cos x = 0$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$. Разделив обе части уравнения почленно на $\cos x$, получим

$$\frac{a \sin x}{\cos x} + \frac{b \cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x};$$

$$a \operatorname{tg} x + b = 0.$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a};$$

$$x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{b}{a}\right) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Обратите внимание, что делить обе части уравнения на одно и то же выражение можно только в том случае, когда мы уверены, что это выражение не обращается в нуль (на 0 делить нельзя). Уверены ли мы, что в рассматриваемом случае $\cos x$ отличен от нуля? Давайте проанализируем. Предположим, что $\cos x = 0$. Тогда однородное уравнение $a \sin x + b \cos x = 0$ примет вид $a \sin x = 0$, т. е. $\sin x = 0$ (вы ведь не забыли, что коэффициент a отличен от нуля). Получается, что и $\cos x = 0$, и $\sin x = 0$, а это невозможно, так как $\sin x$ и $\cos x$ обращаются в нуль в р а з л и ч н ы х точках. Итак, в однородном тригонометрическом уравнении первой степени деление обеих частей уравнения на $\cos x$ — вполне благополучная операция, не приводящая к потере решений.

Уравнения вида $a \sin mx + b \cos mx = 0$ тоже называют однородными тригонометрическими уравнениями первой степени. Для их решения обе части уравнения делят почленно на $\cos mx$.

Пример 6. Решить уравнение $2 \sin x - 3 \cos x = 0$.

Р е ш е н и е. Разделив обе части уравнения почленно на $\cos x$, получим

$$2 \operatorname{tg} x - 3 = 0; \quad \operatorname{tg} x = \frac{3}{2}; \quad x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n.$$

Ответ: $x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n$.

Пример 7. Решить уравнение $\cos(2\pi - 2x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Р е ш е н и е. Мы знаем, что $\cos(-t) = \cos t$, значит,

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right).$$

По формулам приведения (см. § 9) имеем:

$$\cos(2\pi - 2x) = \cos 2x; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sin 2x.$$

Это позволяет переписать заданное уравнение в более простом виде: $\cos 2x = \sin 2x$, т. е. $\sin 2x - \cos 2x = 0$.

Разделим обе части уравнения почленно на $\cos 2x$:

$$\operatorname{tg} 2x - 1 = 0;$$

$$\operatorname{tg} 2x = 1;$$

$$2x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n;$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n;$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

◀■

Рассмотрим теперь однородное тригонометрическое уравнение второй степени

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0.$$

Если коэффициент a отличен от нуля, т. е. в уравнении содержится член $\sin^2 x$ с каким-то коэффициентом, отличным от нуля, то, рассуждая как и выше, легко убедиться в том, что при интересующих нас значениях переменной $\cos x$ не обращается в нуль, а потому можно обе части уравнения разделить почленно на $\cos^2 x$. Тогда уравнение примет вид

$$\frac{a \sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{b \sin x \cos x}{\cos^2 x} + \frac{c \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x},$$

$$\text{т. е.} \quad a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0.$$

Это — квадратное уравнение относительно новой переменной $z = \operatorname{tg} x$.

Пусть теперь в однородном тригонометрическом уравнении

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

коэффициент a равен 0, т. е. отсутствует член $a \sin^2 x$. Тогда уравнение принимает вид

$$b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0.$$

Это уравнение можно решить методом разложения на множители:

$$\cos x\,(b \sin x + c \cos x) = 0;$$

$$\cos x = 0 \quad \text{или} \quad b \sin x + c \cos x = 0.$$

Получились два уравнения, которые мы решать умеем.

Аналогично обстоит дело и в случае, когда $c = 0$, т. е. когда однородное уравнение имеет вид $a \sin^2 x + b \sin x \cos x = 0$ (здесь можно вынести за скобки $\sin x$).

Фактически мы выработали алгоритм решения однородного уравнения второй степени.

Алгоритм решения уравнения
$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$

1. Посмотреть, есть ли в уравнении член $a \sin^2 x$.
2. Если член $a \sin^2 x$ в уравнении содержится (т. е. $a \neq 0$), то уравнение решается делением обеих его частей на $\cos^2 x$ и последующим введением новой переменной $z = \operatorname{tg} x$.
3. Если член $a \sin^2 x$ в уравнении не содержится (т. е. $a = 0$), то уравнение решается методом разложения на множители: за скобки выносят $\cos x$.

Так же обстоит дело и в однородных уравнениях вида

$$a\sin^2 mx + b\sin mx\cos mx + c\cos^2 mx = 0.$$

Пример 8. Решить уравнение $\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$.

Решение. Разделив обе части уравнения почленно на $\cos^2 x$, получим

$$\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0.$$

Введя новую переменную $z = \operatorname{tg} x$, получим

$$z^2 - 3z + 2 = 0;$$

$$z_1 = 1,\ z_2 = 2.$$

Значит, либо $\operatorname{tg} x = 1$, либо $\operatorname{tg} x = 2$. Из уравнения $\operatorname{tg} x = 1$ находим

$$x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n, \quad \text{т. е.} \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n.$$

Из уравнения $\operatorname{tg} x = 2$ находим $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$.

Пример 9. Решить уравнение $\sqrt{3}\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$.

Решение. Здесь отсутствует член вида $a\sin^2 x$, значит, делить обе части уравнения на $\cos^2 x$ нельзя. Решим уравнение методом разложения на множители:

$$\cos x\left(\sqrt{3}\sin x + \cos x\right) = 0;$$

$$\cos x = 0 \quad \text{или} \quad \sqrt{3}\sin x + \cos x = 0.$$

Из первого уравнения находим $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

Второе уравнение — однородное тригонометрическое уравнение первой степени. Решим его с помощью почленного деления обеих частей уравнения на $\cos x$:

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0;$$

$$\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 1 = 0;$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi n;$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi n.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n$; $n \in \mathbf{Z}$.

В заключение рассмотрим более сложный пример.

Пример 10. Решить уравнение

$$3\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\sin 3x\cos 3x + 5\cos^2 3x = 2.$$

Решение. Чем это уравнение сложнее предыдущих? Во-первых, оно не является однородным, так как в правой его части содержится не 0, а 2. Во-вторых, в левой части уравнения под знаками синуса и косинуса находится не x, а $3x$.

С числом 2, содержащимся в правой части уравнения, поступим следующим образом. Известно, что $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ — это тождество верно для любого t. В частности, $\sin^2 3x + \cos^2 3x = 1$. Но тогда $2\sin^2 3x + 2\cos^2 3x = 2$. Заменив в правой части уравнения 2 на $2\sin^2 3x + 2\cos^2 3x$, получим

$$3\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\sin 3x\cos 3x + 5\cos^2 3x = 2\sin^2 3x + 2\cos^2 3x;$$

$$3\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\sin 3x\cos 3x + 5\cos^2 3x - 2\sin^2 3x - 2\cos^2 3x = 0;$$

$$\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\sin 3x\cos 3x + 3\cos^2 3x = 0.$$

Как видите, удалось преобразовать заданное уравнение в однородное тригонометрическое уравнение второй степени. Оно содержит в своем составе член $\sin^2 3x$, значит, применим способ почленного деления на $\cos^2 3x$:

$$\operatorname{tg}^2 3x - 2\sqrt{3}\operatorname{tg} 3x + 3 = 0.$$

Введя новую переменную $z = \operatorname{tg} 3x$, получим квадратное уравнение

$$z^2 - 2\sqrt{3}z + 3 = 0.$$

Для решения этого уравнения можно использовать формулу корней квадратного уравнения, но изящнее сделать так: заметив, что $z^2 - 2\sqrt{3}z + 3 = \left(z - \sqrt{3}\right)^2$, преобразовать квадратное уравнение к виду $\left(z - \sqrt{3}\right)^2 = 0$, откуда находим, что $z = \sqrt{3}$.

Итак,

$$\operatorname{tg} 3x = \sqrt{3};$$

$$3x = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi n;$$

$$3x = \frac{\pi}{3} + \pi n;$$

$$x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbf{Z}.$$

Упражнения

Решите уравнение:

О18.1. а) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos \frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$;

в) $\sin \frac{x}{4} = \frac{1}{2}$;

г) $\cos 4x = 0$.

О18.2. а) $\sin\left(-\frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos(-2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\operatorname{tg}(-4x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

г) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{x}{2}\right) = 1$.

О18.3. а) $2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$;

б) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = 3$;

в) $2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$;

г) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0$.

О18.4. а) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -1$;

б) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = -1$;

в) $2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}\right) = \sqrt{3}$;

г) $2\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \sqrt{2}$.

О18.5. а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) - \cos(\pi + t) = 1$;

б) $\sin(\pi + t) + \sin(2\pi - t) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) + 1{,}5 = 0$;

в) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) - \sin(\pi + t) = \sqrt{2}$;

г) $\sin(\pi + t) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \sqrt{3}$.

О18.6. а) $3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$;

б) $3\sin^2 2x + 10\sin 2x + 3 = 0$;

в) $4\sin^2 x + 11\sin x - 3 = 0$;

г) $2\sin^2 \frac{x}{2} - 3\sin \frac{x}{2} + 1 = 0$.

Решите уравнение:

○18.7. а) $6\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$;

б) $2\cos^2 3x - 5\cos 3x - 3 = 0$;

в) $2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0$;

г) $2\cos^2 \frac{x}{3} + 3\cos \frac{x}{3} - 2 = 0$.

○18.8. а) $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$;

б) $8\sin^2 2x + \cos 2x + 1 = 0$;

в) $5\cos^2 x + 6\sin x - 6 = 0$;

г) $4\sin 3x + \cos^2 3x = 4$.

○18.9. а) $3\,\mathrm{tg}^2 x + 2\,\mathrm{tg}\, x - 1 = 0$;

б) $\mathrm{ctg}^2 2x - 6\,\mathrm{ctg}\, 2x + 5 = 0$;

в) $2\,\mathrm{tg}^2 x + 3\,\mathrm{tg}\, x - 2 = 0$;

г) $7\,\mathrm{ctg}^2 \frac{x}{2} + 2\,\mathrm{ctg}\, \frac{x}{2} = 5$.

18.10. а) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$;

б) $\sin x + \cos x = 0$;

в) $\sin x - 3\cos x = 0$;

г) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$.

○18.11. а) $\sin^2 x + \sin x \cos x = 0$;

б) $\sqrt{3}\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$;

в) $\sin^2 x = 3\sin x \cos x$;

г) $\sqrt{3}\cos^2 x = \sin x \cos x$.

○18.12. а) $\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$;

б) $\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0$;

в) $\sin^2 x + \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$;

г) $3\sin^2 x + \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$.

○18.13. Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0;\ 2\pi]$:

а) $\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)(\sin x + 1) = 0;$

б) $\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)(\cos x - 1) = 0;$

в) $\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0;$

г) $(1 + \cos x)\left(\sqrt{2}\sin x - 1\right) = 0.$

○18.14. а) Найдите корни уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $[0;\ 4\pi]$.

б) Найдите корни уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $[-2\pi;\ 3\pi]$.

Найдите корни уравнения на заданном промежутке:

○18.15. а) $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $[0;\ 2\pi]$;

б) $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $[-\pi;\ \pi]$;

в) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $[-3\pi;\ 3\pi]$;

г) $\operatorname{ctg} 4x = -1$, $[0;\ \pi]$.

●18.16. а) $\sin x = -\frac{1}{2}$, $[-4;\ 4]$;

б) $\cos x = 1$, $[-6;\ 16]$.

●18.17. а) $\sin\frac{x}{2} = 0$, $[-12;\ 18]$;

б) $\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $[1;\ 7]$.

○18.18. Решите уравнение $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$ и найдите:

а) наименьший положительный корень;

б) корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$;

в) наибольший отрицательный корень;

г) корни, принадлежащие интервалу $\left(-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

О18.19. Решите уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{1}{2}$ и найдите:

а) наименьший положительный корень;

б) корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$;

в) наибольший отрицательный корень;

г) корни, принадлежащие интервалу $\left(-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Решите уравнение:

О18.20. а) $\sin^2 \frac{3x}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin x - \cos^2 \frac{3x}{4} + 1$;

б) $\cos^2 2x - 1 - \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin^2 2x$.

О18.21. а) $\operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x + 1 = 0$;

б) $\frac{\operatorname{tg} x + 5}{2} = \frac{1}{\cos^2 x}$;

в) $2 \operatorname{ctg} x - 3 \operatorname{tg} x + 5 = 0$;

г) $\frac{7 - \operatorname{ctg} x}{4} = \frac{1}{\sin^2 x}$.

О18.22. а) $2\cos^2 \frac{x}{2} + \sqrt{3}\cos \frac{x}{2} = 0$;

б) $4\cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 3 = 0$;

в) $\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 3x - 3\operatorname{tg} 3x = 0$;

г) $4\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$.

●18.23. а) $\sin^2 x - \frac{12 - \sqrt{2}}{2}\sin x - 3\sqrt{2} = 0$;

б) $\cos^2 x - \frac{8 - \sqrt{3}}{2}\cos x - 2\sqrt{3} = 0$.

О18.24. а) $\sin 2x = \cos 2x$;

б) $\sqrt{3}\sin 3x = \cos 3x$;

в) $\sin \frac{x}{2} = \sqrt{3}\cos \frac{x}{2}$;

г) $\sqrt{2}\sin 17x = \sqrt{6}\cos 17x$.

О18.25. а) $2\sin^2 2x - 5\sin 2x \cos 2x + 2\cos^2 2x = 0$;

б) $3\sin^2 3x + 10\sin 3x\cos 3x + 3\cos^2 3x = 0$.

О18.26. а) $\sin^2 \frac{x}{2} = 3\cos^2 \frac{x}{2}$;

б) $\sin^2 4x = \cos^2 4x$.

○18.27. а) $5\sin^2 x - 14\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 2$;

б) $3\sin^2 x - \sin x\cos x = 2$;

в) $2\cos^2 x - \sin x\cos x + 5\sin^2 x = 3$;

г) $4\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 3$.

○18.28. а) $5\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 5$;

б) $2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 4$.

○18.29. а) $3\sin^2 2x - 2 = \sin 2x\cos 2x$;

б) $2\sin^2 4x - 4 = 3\sin 4x\cos 4x - 4\cos^2 4x$.

○18.30. а) $4\sin^2 \frac{x}{2} - 3 = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$;

б) $3\sin^2 \frac{x}{3} + 4\cos^2 \frac{x}{3} = 3 + \sqrt{3}\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}$.

○18.31. а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$;

б) $2\sin(\pi - 3x) + \cos(2\pi - 3x) = 0$.

○18.32. а) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) - 3\cos\left(\pi - \frac{x}{2}\right) = 0$;

б) $\sqrt{3}\sin\left(\pi - \frac{x}{3}\right) + 3\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3}\right) = 0$.

●18.33. а) $\sqrt{16 - x^2}\cdot\sin x = 0$;

б) $\sqrt{7x - x^2}\cdot(2\cos x - 1) = 0$.

●18.34. а) $\left(\sqrt{2}\cos x - 1\right)\sqrt{4x^2 - 7x + 3} = 0$;

б) $\left(2\sin x - \sqrt{3}\right)\sqrt{3x^2 - 7x + 4} = 0$.

●18.35. Найдите область значений функции:

а) $y = \cos 3x + \sqrt{\cos^2 3x + 1}$;

б) $y = \sin 2x + \sqrt{\sin^2 4x - 1}$.

ГЛАВА 4 Преобразование тригонометрических выражений

§ 19. Синус и косинус суммы и разности аргументов

В этой главе речь пойдет о преобразовании тригонометрических выражений. Для этого используются различные тригонометрические формулы. Пожалуй, самыми важными являются следующие две формулы (доказательство технически довольно сложно, и мы его здесь не приводим):

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y,\\&\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y.\end{aligned}}$$

Эти формулы обычно называют *синус суммы* и *косинус суммы*. А считаются они самыми важными потому, что, как мы увидим далее, из этих формул без особого труда выводятся практически все формулы тригонометрии.

Рассмотрим выражение $\sin(x-y)$. Если переписать его в виде $\sin(x+(-y))$, то появляется возможность применить формулу синуса суммы для аргументов x и $-y$:

$$\sin(x+(-y))=\sin x\cos(-y)+\cos x\sin(-y). \qquad (1)$$

А теперь воспользуемся тем, что

$$\cos(-y)=\cos y,\quad \sin(-y)=-\sin y.$$

Это позволит правую часть равенства (1) переписать в виде

$$\sin x\cos y-\cos x\sin y.$$

Таким образом, получилась формула *синуса разности*:

$$\boxed{\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y.}$$

Аналогичные рассуждения позволяют вывести формулу *косинуса разности*:

$$\cos(x-y)=\cos(x+(-y))=\cos x\cos(-y)-\sin x\sin(-y)=$$
$$=\cos x\cos y+\sin x\sin y.$$

Итак,

$$\boxed{\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.}$$

Пример 1. Вычислить $\sin 75°$ и $\cos 75°$.

Решение. Воспользуемся тем, что $75° = 45° + 30°$, и тем, что значения синуса и косинуса углов 45° и 30° известны:

$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin 30° = \frac{1}{2}; \quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Имеем

$$\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin 45° \cdot \cos 30° + \cos 45° \cdot \sin 30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};$$

$$\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° - \sin 45° \cdot \sin 30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\sin 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\cos 75° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Пример 2. Доказать, что

а) $\sin(\pi + x) = -\sin x$; в) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$;

б) $\cos(\pi + x) = -\cos x$; г) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$.

Решение.

а) $\sin(\pi + x) = \sin \pi \cos x + \cos \pi \sin x = 0 \cdot \cos x + (-1) \cdot \sin x = -\sin x$;

б) $\cos(\pi + x) = \cos \pi \cos x - \sin \pi \sin x = (-1) \cdot \cos x - 0 \cdot \sin x = -\cos x$;

в) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos x - \cos \frac{\pi}{2} \sin x = 1 \cdot \cos x - 0 \cdot \sin x = \cos x$;

г) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos x + \sin \frac{\pi}{2} \sin x = 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x = \sin x$. ◁■

Замечание. Это известные вам формулы приведения (см. § 9). Все формулы приведения для синуса и косинуса без труда выводятся с помощью формул синуса и косинуса суммы и разности аргументов.

Пример 3. Вычислить $\sin x$ и $\cos x$, если $x = 255°$.

Решение. $\sin 255° = \sin(180° + 75°) = -\sin 75°$;

$$\cos 255° = \cos(180° + 75°) = -\cos 75°.$$

В примере 1 мы установили, что

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}; \quad \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Значит,

$$\sin 255^\circ = -\sin 75^\circ = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};$$

$$\cos 255^\circ = -\cos 75^\circ = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Пример 4. Известно, что

$$\sin x = \frac{3}{5}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}; \quad \cos y = -\frac{3}{5}, \quad \pi < y < \frac{3\pi}{2}.$$

Вычислить: а) $\sin(x + y)$; б) $x + y$.

Решение. а) Воспользуемся формулой синуса суммы:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y. \qquad (2)$$

Значения $\sin x$ и $\cos y$ заданы, нужно вычислить значения $\cos x$ и $\sin y$.

Имеем $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$. По условию аргумент x принадлежит первой четверти, а в ней косинус положителен. Поэтому из равенства $\cos^2 x = \frac{16}{25}$ находим, что $\cos x = \frac{4}{5}$.

Имеем $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$. По условию аргумент y принадлежит третьей четверти, а в ней синус отрицателен. Поэтому из равенства $\sin^2 y = \frac{16}{25}$ находим, что $\sin y = -\frac{4}{5}$.

Подставим заданные и найденные значения в правую часть формулы (2):

$$\sin(x + y) = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -1.$$

б) В условии сказано, что $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\pi < y < \frac{3\pi}{2}$.

Сложив эти два двойных неравенства, получим

$$\pi < x + y < 2\pi.$$

Итак, $\sin(x + y) = -1$ и $\pi < x + y < 2\pi$. Значит, $x + y = \frac{3\pi}{2}$.

Ответ: а) -1; б) $\frac{3\pi}{2}$.

Пример 5. Вычислить:

а) $\sin\frac{4\pi}{15}\cos\frac{\pi}{15}+\cos\frac{4\pi}{15}\sin\frac{\pi}{15}$;

б) $\cos 37^\circ\cos 8^\circ-\sin 37^\circ\sin 8^\circ$;

в) $\sin 44^\circ\cos 14^\circ-\sin 46^\circ\cos 76^\circ$.

Решение. а) Заданное выражение можно «свернуть» в синус суммы аргументов $\frac{4\pi}{15}$ и $\frac{\pi}{15}$:

$$\sin\frac{4\pi}{15}\cos\frac{\pi}{15}+\cos\frac{4\pi}{15}\sin\frac{\pi}{15}=\sin\left(\frac{4\pi}{15}+\frac{\pi}{15}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

б) Заданное выражение можно «свернуть» в косинус суммы аргументов 37° и 8°:

$$\cos 37^\circ\cos 8^\circ-\sin 37^\circ\sin 8^\circ=\cos(37^\circ+8^\circ)=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

в) По формулам приведения находим

$$\sin 46^\circ=\sin(90^\circ-44^\circ)=\cos 44^\circ;$$
$$\cos 76^\circ=\cos(90^\circ-14^\circ)=\sin 14^\circ.$$

Это значит, что в заданном выражении можно заменить $\sin 46^\circ$ на $\cos 44^\circ$, а $\cos 76^\circ$ на $\sin 14^\circ$. Тогда заданное выражение примет вид

$$\sin 44^\circ\cdot\cos 14^\circ-\cos 44^\circ\cdot\sin 14^\circ.$$

Это синус разности аргументов 44° и 14°:

$$\sin 44^\circ\cdot\cos 14^\circ-\cos 44^\circ\cdot\sin 14^\circ=\sin(44^\circ-14^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}.$$

Ответ: а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{1}{2}$.

Пример 6. а) Упростить выражение $\sqrt{3}\cos x-\sin x$;

б) решить уравнение $\sqrt{3}\cos x-\sin x=1$.

Решение. а) Если переписать заданное выражение в виде $2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)$ и вспомнить, что $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$, а $\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$, то можно увидеть, что выражение в скобках представляет собой правую часть формулы косинуса суммы для аргументов $\frac{\pi}{6}$ и x. Таким образом,

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x - \sin\frac{\pi}{6}\sin x\right) =$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right).$$

б) В пункте а) мы получили, что

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right).$$

Значит, заданное уравнение можно переписать в виде $2\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 1$. Решая это уравнение, последовательно получаем:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \frac{1}{2};$$

$$\frac{\pi}{6} + x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n;$$

$$\frac{\pi}{6} + x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n;$$

$$x = -\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n.$$

Учтем, что $-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$, а $-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$. Это позволит записать решение уравнения не в виде одной, а в виде двух серий, но зато они выглядят понятнее: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Ответ: а) $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$; б) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 7. Решить уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \sqrt{3}$.

Решение.

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\sin x\right) +$$

$$+\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x + \sin\frac{\pi}{6}\sin x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x - \frac{1}{2}\cdot\sin x +$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x + \frac{1}{2}\cdot\sin x = \sqrt{3}\cos x.$$

Теперь заданное уравнение можно переписать в виде $\sqrt{3}\cos x =$
$= \sqrt{3}$, т. е. $\cos x = 1$, откуда получаем $x = 2\pi n$.

Ответ: $x = 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$.

Упражнения

19.1. Представив 105° как сумму 60° + 45°, вычислите:
а) $\sin 105°$; б) $\cos 105°$.

Упростите выражение:

19.2. а) $\sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha\cos\beta$;

б) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \frac{1}{2}\sin\alpha$;

в) $\sin\alpha\sin\beta + \cos(\alpha + \beta)$;

г) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$.

○**19.3.** а) $\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \alpha\right) - \frac{1}{2}\cos\alpha$;

б) $\sqrt{3}\cos\alpha - 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$;

в) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha + \cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{3}\right)$;

г) $\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\alpha$.

19.4. а) $\cos(\alpha - \beta) - \cos\alpha\cos\beta$;

б) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$;

в) $\sin\alpha\cos\beta - \sin(\alpha - \beta)$;

г) $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$.

19.5. Докажите тождество:

а) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(-\alpha)\cos(-\beta) = \sin\beta\cos\alpha$;

б) $\cos(\alpha + \beta) + \sin(-\alpha)\sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta$.

Докажите тождество:

19.6. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$;

б) $\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$.

○19.7. а) $\sin(30° - \alpha) - \cos(60° - \alpha) = -\sqrt{3}\sin\alpha$;

б) $\sin(30° - \alpha) + \sin(30° + \alpha) = \cos\alpha$.

19.8. а) $\sin 5x \cos 3x + \cos 5x \sin 3x = \sin 8x$;

б) $\cos 5x \cos 3x - \sin 5x \sin 3x = \cos 8x$.

19.9. а) $\sin 7x \cos 4x - \cos 7x \sin 4x = \sin 3x$;

б) $\cos 2x \cos 12x + \sin 2x \sin 12x = \cos 10x$.

Найдите значение выражения:

○19.10. а) $\cos 107° \cos 17° + \sin 107° \sin 17°$;

б) $\cos 36° \cos 24° - \sin 36° \sin 24°$;

в) $\sin 63° \cos 27° + \cos 63° \sin 27°$;

г) $\sin 51° \cos 21° - \cos 51° \sin 21°$.

○19.11. а) $\cos\frac{5\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{5\pi}{8}\sin\frac{3\pi}{8}$;

б) $\sin\frac{2\pi}{15}\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{15}\sin\frac{\pi}{5}$;

в) $\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{4}$;

г) $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{4}$.

Решите уравнение:

○19.12. а) $\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 1$;

б) $\cos 3x \cos 5x = \sin 3x \sin 5x$.

○19.13. а) $\sin 6x \cos x + \cos 6x \sin x = \frac{1}{2}$;

б) $\cos 5x \cos 7x - \sin 5x \sin 7x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

○19.14. а) $\cos 6x \cos 5x + \sin 6x \sin 5x = -1$;

б) $\sin 3x \cos 5x - \sin 5x \cos 3x = 0{,}5$.

○19.15. Найдите наименьший положительный корень (в градусах) уравнения:

а) $\sin x \cos 45° + \cos x \sin 45° =$

$= \cos 17° \cos 13° - \sin 17° \sin 13°$;

б) $\cos x \cos 60° - \sin x \sin 60° =$

$= \sin 200° \cos 25° + \cos 200° \sin 25°$.

○19.16. Найдите корни уравнения на заданном промежутке:

а) $\sin 0{,}2x \cos 0{,}8x + \cos 0{,}2x \sin 0{,}8x = \cos 3x \cos 2x + \sin 3x \sin 2x$, $x \in [0; 3\pi]$;

б) $\cos 0{,}7x \cos 1{,}3x - \sin 0{,}7x \sin 1{,}3x = \sin 7x \cos 9x - \sin 9x \cos 7x$, $x \in [-\pi; \pi]$.

○19.17. Зная, что $\sin t = \frac{3}{5}$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$, вычислите:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + t\right)$; в) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$; г) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + t\right)$.

○19.18. Зная, что $\cos t = -\frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$, вычислите:

а) $\sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$; в) $\cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$;

б) $\cos\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)$; г) $\sin\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)$.

●19.19. Зная, что $\cos \alpha = \frac{15}{17}$, $\cos \beta = \frac{4}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, найдите значение выражения:

а) $\sin(\alpha - \beta)$; б) $\cos(\alpha - \beta)$.

●19.20. Зная, что $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = -\frac{15}{17}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, найдите значение выражения:

а) $\sin(\alpha - \beta)$; б) $\cos(\alpha - \beta)$.

Вычислите:

○19.21. а) $\sin 77^\circ \cos 17^\circ - \sin 13^\circ \cos 73^\circ$;

б) $\cos 125^\circ \cos 5^\circ + \sin 55^\circ \cos 85^\circ$.

○19.22. а) $\dfrac{\cos 105^\circ \cos 5^\circ + \sin 105^\circ \cos 85^\circ}{\sin 95^\circ \cos 5^\circ + \sin 95^\circ \sin 185^\circ}$;

б) $\dfrac{\sin 75^\circ \cos 5^\circ - \cos 75^\circ \cos 85^\circ}{\cos 375^\circ \cos 5^\circ - \sin 15^\circ \sin 365^\circ}$.

Решите уравнение:

○19.23. а) $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \cos x = 0{,}5$;

б) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + \sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

○19.24. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = 1$;

б) $\sin x - \cos x = 1$;

в) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = 1$;

г) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$.

○19.25. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = 1$;

б) $\sin x + \cos x = 1$;

в) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = 1$;

г) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$.

●19.26. Решите неравенство:

а) $\sin x \cos 3x + \cos x \sin 3x > \frac{1}{2}$;

б) $\cos 2x \cos 5x - \sin 2x \sin 5x < -\frac{1}{3}$;

в) $\sin 2x \sin 5x + \cos 2x \cos 5x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{4} \sin \frac{x}{2} < \frac{1}{3}$.

§ 20. Тангенс суммы и разности аргументов

В § 19 мы получили формулы, выражающие синус и косинус суммы и разности аргументов через синусы и косинусы аргументов. В этом параграфе речь пойдет о том, как тангенс суммы или разности аргументов выражается через тангенсы аргументов. Соответствующие формулы выглядят следующим образом:

$$\boxed{\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y};}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.}$$

При этом, разумеется, предполагается, что все тангенсы имеют смысл, т. е. что $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $y \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x + y \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$ (для первой формулы), $x - y \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$ (для второй формулы).

Доказательства этих формул достаточно сложны, мы приведем одно из них в конце параграфа. Но сначала рассмотрим ряд примеров, показывающих, как использовать эти формулы на практике.

Пример 1. Вычислить:

а) $\operatorname{tg} 75°$; б) $\operatorname{tg} 15°$; в) $\frac{\operatorname{tg} 27° + \operatorname{tg} 18°}{1 - \operatorname{tg} 27° \operatorname{tg} 18°}$.

Решение. а) Воспользуемся тем, что $75° = 45° + 30°$. Получим

$$\operatorname{tg} 75° = \operatorname{tg}(45° + 30°) = \frac{\operatorname{tg} 45° + \operatorname{tg} 30°}{1 - \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} 30°} =$$

$$= \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}.$$

Есть смысл избавиться от иррациональности в знаменателе, домножив числитель и знаменатель полученной дроби на $3 + \sqrt{3}$:

$$\frac{(3+\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} = \frac{(3+\sqrt{3})^2}{3^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{9+6\sqrt{3}+3}{9-3} = \frac{12+6\sqrt{3}}{6} =$$

$$= \frac{6(2+\sqrt{3})}{6} = 2+\sqrt{3}.$$

Итак, $\operatorname{tg} 75° = 2 + \sqrt{3}$.

б) Можно воспользоваться тем, что $15° = 45° - 30°$, и далее рассуждать так же, как в пукте а) (сделайте это!). Но мы поступим по-другому:

$$\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(90° - 75°) = \operatorname{ctg} 75°;$$

$$\operatorname{ctg} 75° = \frac{1}{\operatorname{tg} 75°}.$$

В пункте а) мы установили, что $\operatorname{tg} 75° = 2 + \sqrt{3}$. Значит,

$$\operatorname{tg} 15° = \frac{1}{\operatorname{tg} 75°} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{2-\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2} = 2-\sqrt{3}.$$

Итак, $\operatorname{tg} 15° = 2 - \sqrt{3}$.

в) Заметим, что заданное выражение представляет собой правую часть формулы тангенса суммы для аргументов 27° и 18°. Значит,

$$\frac{\operatorname{tg} 27° + \operatorname{tg} 18°}{1 - \operatorname{tg} 27° \operatorname{tg} 18°} = \operatorname{tg}(27° + 18°) = \operatorname{tg} 45° = 1.$$

Ответ: а) $2 + \sqrt{3}$; б) $2 - \sqrt{3}$; в) 1.

Пример 2. Доказать тождество $\dfrac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$.

Решение. Применим к правой части проверяемого тождества формулу тангенса разности:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg} x} = \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}.$$

З а м е ч а н и е. Когда речь идет о доказательстве тождества или о преобразовании выражения, всегда предполагается, что переменные принимают только допустимые значения. Так, в рассмотренном примере доказанное тождество справедливо при следующих условиях: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{\pi}{4} - x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $n \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 3. Вычислить $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$, если известно, что

$$\cos x = -\frac{3}{5},\ \frac{\pi}{2} < x < \pi.$$

Р е ш е н и е. Воспользуемся тождеством, полученным в предыдущем примере:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}. \qquad (1)$$

Если мы вычислим $\operatorname{tg} x$, то вычислим и $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

Значение $\cos x$ задано, значение $\operatorname{tg} x$ найдем с помощью соотношения $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$. Получим

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{25}{9} - 1 = \frac{16}{9}.$$

По условию аргумент x принадлежит второй четверти, а в ней тангенс отрицателен. Поэтому из равенства $\operatorname{tg}^2 x = \frac{16}{9}$ находим $\operatorname{tg} x = -\frac{4}{3}$.

Подставим найденное значение $\operatorname{tg} x$ в правую часть формулы (1):

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \frac{1 + \frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{3}} = \frac{7}{3} : \left(-\frac{1}{3}\right) = -7.$$

В заключение, как было обещано, докажем формулу тангенса суммы.

Имеем

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}.$$

Разделим в полученной дроби числитель и знаменатель почленно на $\cos x \cos y$ (это возможно, поскольку $\cos x \cos y \neq 0$ при допустимых значениях x, y):

$$\frac{\dfrac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \dfrac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\dfrac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \dfrac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\sin y}{\cos y}}{1 - \dfrac{\sin x}{\cos x} \cdot \dfrac{\sin y}{\cos y}} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Итак, $\operatorname{tg}(x + y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$, что и требовалось доказать.

Упражнения

Вычислите:

О20.1. а) $\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{12}$; в) $\operatorname{tg} \dfrac{5\pi}{12}$;

б) $\operatorname{tg} 105°$; г) $\operatorname{tg} 165°$.

О20.2. а) $\dfrac{\operatorname{tg} 25° + \operatorname{tg} 20°}{1 - \operatorname{tg} 25° \operatorname{tg} 20°}$; в) $\dfrac{\operatorname{tg} 9° + \operatorname{tg} 51°}{1 - \operatorname{tg} 9° \operatorname{tg} 51°}$;

б) $\dfrac{1 - \operatorname{tg} 70° \operatorname{tg} 65°}{\operatorname{tg} 70° + \operatorname{tg} 65°}$; г) $\dfrac{1 + \operatorname{tg} 54° \operatorname{tg} 9°}{\operatorname{tg} 54° - \operatorname{tg} 9°}$.

О20.3. а) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$, если $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{2}{3}$;

б) $\operatorname{tg}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right)$, если $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{4}{5}$;

в) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)$, если $\operatorname{ctg} \alpha = \dfrac{4}{3}$;

г) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{ctg} \alpha = 1{,}6$.

О20.4. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \beta = \dfrac{1}{3}$. Найдите:

а) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$; б) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$.

О20.5. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{2}{5}$, $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} + \beta\right) = -3$. Вычислите:

а) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$; б) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$.

Упростите выражение:

20.6. а) $\dfrac{\operatorname{tg} 2{,}22 + \operatorname{tg} 0{,}92}{1 - \operatorname{tg} 2{,}22 \operatorname{tg} 0{,}92}$; б) $\dfrac{\operatorname{tg} 1{,}47 - \operatorname{tg} 0{,}69}{1 + \operatorname{tg} 1{,}47 \operatorname{tg} 0{,}69}$.

○20.7. а) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)}$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)\operatorname{tg}\alpha}$.

○20.8. Докажите тождество:

а) $\dfrac{1 - \operatorname{tg} 2\alpha}{1 + \operatorname{tg} 2\alpha} = \operatorname{tg}(45^\circ - 2\alpha)$;

б) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} + \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)} = 2$.

○20.9. Решите уравнение:

а) $\dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x} = 1$; б) $\dfrac{\operatorname{tg} 5x - \operatorname{tg} 3x}{1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 5x} = \sqrt{3}$.

●20.10. Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$:

а) $\dfrac{\sqrt{3} - \operatorname{tg} x}{1 + \sqrt{3}\operatorname{tg} x} = 1$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} - \operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\operatorname{tg} 2x + 1} = \sqrt{3}$.

○20.11. а) Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 3$.

б) Найдите $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}2$.

○20.12. а) Зная, что $\operatorname{tg}\alpha = 3$ и $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 1$, найдите $\operatorname{tg}\beta$.

б) Зная, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$ и $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = 2$, найдите $\operatorname{tg}\beta$.

○20.13. Известно, что $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Найдите:

а) $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$; б) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

○20.14. Известно, что $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Найдите:

а) $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$; б) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$.

●20.15. Докажите, что прямые $y = 3x - 1$ и $y = 6 - 2x$ пересекаются под углом 45°.

●20.16. Точка K — середина стороны CD квадрата $ABCD$. Чему равен угол между диагональю AC и отрезком BK?

§ 21. Формулы двойного аргумента

Здесь речь пойдет о формулах тригонометрии, позволяющих выразить $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{tg} 2x$ через $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$. Эти формулы обычно называют *формулами двойного аргумента*. Название, может быть, не очень удачное, как, впрочем, и такие названия, как формулы приведения, синус суммы, косинус разности и т. д. Но это не суть важно: главное, что есть некий словесный символ, позволяющий понять, о чем идет речь.

Рассмотрим выражение $\sin 2x$, представив при этом $2x$ в виде $x + x$. Это позволит применить к выражению $\sin(x + x)$ формулу синуса суммы (см. § 19)

$$\sin 2x = \sin(x + x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x.$$

Итак,

$$\boxed{\sin 2x = 2 \sin x \cos x.}$$

Рассмотрим выражение $\cos 2x$, представив при этом $2x$ в виде $x + x$. Это позволит применить к выражению $\cos(x + x)$ формулу косинуса суммы (см. § 19)

$$\cos 2x = \cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Итак,

$$\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.}$$

Рассмотрим выражение $\operatorname{tg} 2x$, представив при этом $2x$ в виде $x + x$. Это позволит применить к выражению $\operatorname{tg}(x + x)$ формулу тангенса суммы (см. § 20)

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(x + x) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

Итак,

$$\boxed{\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}.}$$

Формулы синуса двойного аргумента и косинуса двойного аргумента справедливы для любых значений аргумента (никаких ограничений нет), тогда как формула тангенса двойного аргумента справедлива лишь для тех значений аргумента x, для которых определены $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} 2x$, а также отличен от нуля знаменатель дроби, т. е. $1 - \operatorname{tg}^2 x \neq 0$.

Разумеется, все полученные формулы можно применять и в тех случаях, когда место аргумента x занимает более сложное выражение. Например, справедливы следующие соотношения:

$$\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x;$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2};$$

$$\cos 48° = \cos^2 24° - \sin^2 24°;$$

$$\cos (2x + 6y) = \cos^2 (x + 3y) - \sin^2 (x + 3y);$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3} - 2t\right) = \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - t\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{3} - t\right)}.$$

И, как всегда, любую из трех полученных в этом параграфе формул двойного аргумента можно использовать как справа налево, так и слева направо.

Например, вместо $2 \sin 3x \cos 3x$ можно написать $\sin 6x$, вместо $\cos^2 2{,}5t - \sin^2 2{,}5t$ можно написать $\cos 5t$.

Пример 1. Доказать тождества:

а) $1 + \sin 2x = (\cos x + \sin x)^2$;

б) $1 - \sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$.

Решение. а) Воспользуемся тем, что $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, и формулой синуса двойного аргумента. Получим

$$1 + \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = (\cos x + \sin x)^2.$$

б) $1 - \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = (\cos x - \sin x)^2$. ◁■

Пример 2. Сократить дробь $\frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x}$.

Решение. В числителе дроби воспользуемся доказанным в примере 1 тождеством, а в знаменателе — формулой косинуса двойного аргумента:

$$\frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} = \frac{(\cos x + \sin x)^2}{\cos^2 x - \sin^2 x} =$$

$$= \frac{(\cos x + \sin x)^2}{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}.$$

Пример 3. Вычислить:

а) $\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}$; б) $\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}$.

Решение. а) Заданное выражение представляет собой правую часть формулы косинуса двойного аргумента. Заметив это, получим

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} = \cos \frac{2\pi}{8} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

б) Заданное выражение представляет собой правую часть формулы синуса двойного аргумента, но только не хватает множителя 2. Введя его, получим

$$\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = 0{,}5 \cdot \left(2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}\right) = 0{,}5 \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right) =$$

$$= 0{,}5 \sin \frac{\pi}{6} = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25.$$

Ответ: а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) 0,25.

Пример 4. Зная, что $\cos x = \frac{3}{5}$ и $x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$, вычислить:

а) $\cos 2x$; б) $\sin 2x$; в) $\operatorname{tg} 2x$.

Решение. а) $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$.

Теперь нетрудно вычислить $\cos 2x$:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}.$$

б) Для вычисления $\sin 2x$ воспользуемся формулой

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

Значение $\cos x$ дано в условии, а значение $\sin x$ найдем следующим образом. Во-первых, мы уже знаем, что $\sin^2 x = \frac{16}{25}$. Это значит, что $\sin x = \frac{4}{5}$ или $\sin x = -\frac{4}{5}$.

Во-вторых, по условию аргумент x принадлежит четвертой четверти, а в ней синус отрицателен. Это значит, что $\sin x = -\frac{4}{5}$.

Теперь нетрудно вычислить $\sin 2x$:

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}.$$

в) $\operatorname{tg} 2x$ вычислим, воспользовавшись определением тангенса:

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{-\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}} = \frac{24}{7}.$$

Ответ: а) $-\frac{7}{25}$; б) $-\frac{24}{25}$; в) $\frac{24}{7}$.

Пример 5. Решить уравнение $\sin 4x - \cos 2x = 0$.

Решение. Если в левой части уравнения к выражению $\sin 4x$ применить формулу синуса двойного аргумента, то удастся разложить левую часть на множители:

$$\sin 4x - \cos 2x = 0;$$

$$2\sin 2x \cos 2x - \cos 2x = 0;$$

$$\cos 2x\,(2\sin 2x - 1) = 0;$$

$$\cos 2x = 0 \quad \text{или} \quad 2\sin 2x - 1 = 0.$$

Из уравнения $\cos 2x = 0$ находим

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}.$$

Из уравнения $2\sin 2x - 1$ находим

$$\sin 2x = \frac{1}{2};$$

$$2x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n;$$

$$2x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n;$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$; $n \in \boldsymbol{Z}$.

Если в формуле $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ заменить $\sin^2 x$ на $1 - \cos^2 x$, получим

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1.$$

Таким образом, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, значит,

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.}$$

Если в формуле $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ заменить $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, получим

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x.$$

Таким образом, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, значит,

$$\boxed{\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.}$$

Полученные две формулы обычно называют *формулами понижения степени.*

Замечание. Откуда появилось такое название? Дело в том, что в левой части обоих тождеств содержится вторая степень косинуса или синуса, а в правой части — первая степень косинуса, т. е. степень понизилась. Но при применении этих формул будьте внимательны: степень понижается, зато аргумент удваивается.

Пример 6. Зная, что $\cos x = -\frac{5}{13}$ и $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, вычислить:

а) $\cos\frac{x}{2}$; б) $\sin\frac{x}{2}$; в) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Решение. а) Воспользуемся формулой понижения степени

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}.$$

Получим

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1-\frac{5}{13}}{2} = \frac{4}{13}.$$

По условию $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, значит, $\frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$. Таким образом, аргумент $\frac{x}{2}$ принадлежит первой четверти, а в ней косинус положителен. Поэтому из уравнения $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{4}{13}$ получаем $\cos\frac{x}{2} = \frac{2}{\sqrt{13}}$.

Итак, $\cos \frac{x}{2} = \frac{2}{\sqrt{13}}$.

б) Воспользуемся формулой понижения степени

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}.$$

Получим

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\frac{5}{13}}{2} = \frac{9}{13}.$$

Выше мы уже установили, что аргумент $\frac{x}{2}$ принадлежит первой четверти, а в ней синус положителен. Поэтому из уравнения $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{9}{13}$ получаем $\sin \frac{x}{2} = \frac{3}{\sqrt{13}}$.

Итак, $\sin \frac{x}{2} = \frac{3}{\sqrt{13}}$.

в) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \dfrac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \dfrac{\frac{3}{\sqrt{13}}}{\frac{2}{\sqrt{13}}} = \dfrac{3}{2}$.

Ответ: а) $\frac{2}{\sqrt{13}}$; б) $\frac{3}{\sqrt{13}}$; в) 1,5.

Пример 7. Доказать тождество $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \frac{1+\sin 2x}{2}$.

Решение. Применим к левой части доказываемого тождества формулу понижения степени

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \frac{1-\cos\left(2\cdot\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right)}{2}.$$

Замечаем, воспользовавшись формулой приведения, что

$$\cos\left(2\cdot\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right) = -\sin 2x.$$

Таким образом, $1-\cos\left(2\cdot\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right) = 1+\sin 2x$, а это значит, что

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \frac{1+\sin 2x}{2}.$$

Пример 8. Решить уравнение $\cos^2 3x = \frac{3}{4}$.

Решение. Можно, конечно, извлечь из обеих частей уравнения квадратный корень и получить два более простых уравнения: $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, — а затем каждое из этих уравнений решить по соответствующей формуле. Но удобнее воспользоваться формулой понижения степени

$$\cos^2 3x = \frac{1 + \cos 6x}{2}.$$

Тогда заданное уравнение примет вид $\frac{1 + \cos 6x}{2} = \frac{3}{4}$, откуда находим

$$\cos 6x = \frac{1}{2};$$

$$6x = \pm\arccos \frac{1}{2} + 2\pi n;$$

$$6x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n;$$

$$x = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}.$$

Пример 9. Доказать, что если $x \neq \pi + 2\pi n$, то справедливы следующие тождества:

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Решение. Имеем

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{1 + \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{\frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} =$$

$$= \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{\cos x}{1} = \cos x;$$

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{\frac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \sin x.$$

Почему сделано ограничение $x \neq \pi + 2\pi n$? Потому что если $x = \pi + 2\pi n$, то $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, и тогда $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ не определен.

Упражнения

Упростите выражение:

21.1. а) $\frac{\sin 2t}{\cos t} - \sin t$; в) $\cos^2 t - \cos 2t$;

б) $\frac{\sin 6t}{\cos^2 3t}$; г) $\frac{\cos 2t}{\cos t - \sin t} - \sin t$.

21.2. а) $\frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}$; в) $\frac{\sin 100^\circ}{2\cos 50^\circ}$;

б) $\frac{\cos 80^\circ}{\cos 40^\circ + \sin 40^\circ}$; г) $\frac{\cos 36^\circ + \sin^2 18^\circ}{\cos 18^\circ}$.

Вычислите:

21.3. а) $2\sin 15^\circ \cos 15^\circ$; в) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$;

б) $(\cos 75^\circ - \sin 75^\circ)^2$; г) $(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)^2$.

21.4. а) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$; в) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$;

б) $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)^2$.

21.5. а) $\frac{2\operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}$; в) $\frac{\operatorname{tg} 75^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 75^\circ}$;

б) $\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$; г) $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}{\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6} - 1}$.

Докажите тождество:

21.6. а) $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sin x$;

б) $\cos^2\frac{x}{4} - \sin^2\frac{x}{4} = \cos\frac{x}{2}$;

в) $\sin 2x \cos 2x = \frac{1}{2}\sin 4x$;

г) $\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos x$.

21.7. а) $\cos(2\alpha + 2\beta) = \cos^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha + \beta)$;

б) $\sin(2\alpha + 2\beta) = 2\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha + \beta)$.

21.8. а) $\operatorname{tg}(2\alpha + 2\beta) = \frac{2\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha + \beta)}$;

б) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)}$.

○**21.9.** Известно, что $\sin t = \frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$. Найдите:

а) $\sin 2t$;
б) $\cos 2t$;
в) $\operatorname{tg} 2t$;
г) $\operatorname{ctg} 2t$.

○**21.10.** Известно, что $\cos x = 0{,}8$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Найдите

а) $\sin 2x$;
б) $\cos 2x$;
в) $\operatorname{tg} 2x$;
г) $\operatorname{ctg} 2x$.

○**21.11.** а) Дано: $\cos t = \frac{3}{4}$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

Вычислите $\cos\frac{t}{2}$; $\sin\frac{t}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{t}{2}$; $\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$.

б) Дано: $\operatorname{ctg} t = \frac{3}{4}$, $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$.

Вычислите $\cos\frac{t}{2}$; $\sin\frac{t}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{t}{2}$; $\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$.

●21.12. а) Дано: $\sin 2x = -\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$.

Вычислите $\cos x$; $\sin x$; $\operatorname{tg} x$; $\operatorname{ctg} x$.

б) Дано: $\operatorname{tg} 2x = \frac{3}{4}$, $\pi < x < \frac{5\pi}{4}$.

Вычислите $\cos x$; $\sin x$; $\operatorname{tg} x$; $\operatorname{ctg} x$.

Упростите выражение:

○21.13. а) $\dfrac{\sin t}{2\cos^2 \frac{t}{2}}$; в) $\dfrac{\sin 4t}{\cos 2t}$;

б) $\dfrac{\cos t}{\cos \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2}}$; г) $\dfrac{\cos 2t - \sin 2t}{\cos 4t}$.

○21.14. а) $\dfrac{\sin 2t - 2\sin t}{\cos t - 1}$; в) $\sin 2t \operatorname{ctg} t - 1$;

б) $\dfrac{\cos 2t - \cos^2 t}{1 - \cos^2 t}$; г) $(\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t)\sin 2t$.

○21.15. а) $\dfrac{2}{\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t}$; б) $\dfrac{2}{\operatorname{tg} t - \operatorname{ctg} t}$.

○21.16. а) $(1 - \operatorname{tg}^2 t)\cos^2 t$; б) $2\cos^2 \dfrac{\pi + t}{4} - 2\sin^2 \dfrac{\pi + t}{4}$.

Докажите тождество:

○21.17. а) $(\sin t - \cos t)^2 = 1 - \sin 2t$;

б) $2\cos^2 t = 1 + \cos 2t$;

в) $(\sin t + \cos t)^2 = 1 + \sin 2t$;

г) $2\sin^2 t = 1 - \cos 2t$.

○21.18. а) $\cos^4 t - \sin^4 t = \cos 2t$;

б) $\cos^4 t + \sin^4 t = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2t$.

Докажите тождество:

О21.19. а) $\operatorname{ctg} t - \sin 2t = \operatorname{ctg} t \cos 2t$;

б) $\sin 2t - \operatorname{tg} t = \cos 2t \operatorname{tg} t$.

О21.20. а) $\sin^2 2t = \dfrac{1 - \cos 4t}{2}$;

в) $2 \sin^2 2t = 1 + \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - 4t\right)$;

б) $2 \sin^2 \dfrac{t}{2} + \cos t = 1$;

г) $2 \cos^2 t - \cos 2t = 1$.

О21.21. а) $\cos^2 3t = \dfrac{1 + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 6t\right)}{2}$;

б) $\dfrac{1 - \cos t}{1 + \cos t} = \operatorname{tg}^2 \dfrac{t}{2}$;

в) $\cos^2 3t = \dfrac{1 - \cos(6t - 3\pi)}{2}$;

г) $\dfrac{1 - \cos t}{\sin t} = \operatorname{tg} \dfrac{t}{2}$.

О21.22. а) $1 + \sin \alpha = 2 \cos^2\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)$;

б) $2 \sin^2 (45^\circ - \alpha) + \sin 2\alpha = 1$;

в) $1 - \sin \alpha = 2 \sin^2\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)$;

г) $2 \cos^2 (45^\circ + \alpha) + \sin 2\alpha = 1$.

О21.23. Вычислите (с помощью формул понижения степени):

а) $\sin 22{,}5^\circ$;

в) $\sin \dfrac{3\pi}{8}$;

б) $\cos 22{,}5^\circ$;

г) $\cos \dfrac{3\pi}{8}$.

О21.24. Решите уравнение:

а) $\sin 2x - 2 \cos x = 0$;

в) $2 \sin x = \sin 2x$;

б) $\sin 2x - \sin x = 0$;

г) $\sin 2x + \cos x = 0$.

Решите уравнение:

О21.25. а) $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$; в) $\cos^2 \frac{x}{3} - \sin^2 \frac{x}{3} = \frac{1}{2}$;

б) $\sin 4x \cos 4x = \frac{1}{2}$; г) $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$.

О21.26. а) $1 - \cos x = 2 \sin \frac{x}{2}$; б) $1 + \cos x = 2 \cos \frac{x}{2}$.

О21.27. а) $1 - \cos x = \sin x \sin \frac{x}{2}$;

б) $\sin x = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} (1 + \cos x)$.

О21.28. а) $\sin^2 2x = 1$; в) $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{3}{4}$;

б) $\cos^2 4x = \frac{1}{2}$; г) $\cos^2 \frac{x}{4} = \frac{1}{4}$.

О21.29. Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$:

а) $\cos 2x + 3 \sin x = 1$; в) $\cos 2x = \cos^2 x$;

б) $\sin^2 x = -\cos 2x$; г) $\cos 2x = 2 \sin^2 x$.

Вычислите:

О21.30. а) $\sin 11°15' \cos 11°15' \cos 22°30' \cos 45°$;

б) $\sin \frac{\pi}{48} \cos \frac{\pi}{48} \cos \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{12}$.

О21.31. а) $\frac{1 + \cos 40° + \cos 80°}{\sin 80° + \sin 40°} \cdot \operatorname{tg} 40°$;

б) $\frac{1 - \cos 25° + \cos 50°}{\sin 50° - \sin 25°} - \operatorname{tg} 65°$.

О21.32. Представив $3x$ в виде $x + 2x$, докажите тождество:

а) $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$;

б) $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.

○21.33. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$, если:

а) $f(x) = 2\cos 2x + \sin^2 x$;

б) $f(x) = 2\sin^2 3x - \cos 6x$.

○21.34. Найдите наибольший отрицательный корень (в градусах) уравнения:

а) $\cos x = \dfrac{\sin 22{,}5^\circ \cos 22{,}5^\circ}{\cos^2 67{,}5^\circ - \sin^2 67{,}5^\circ}$;

б) $\sin x = \dfrac{\sin^2 75^\circ - \cos^2 75^\circ}{4\sin 15^\circ \cos 15^\circ}$.

○21.35. Решите уравнение:

а) $3\sin 2x + \cos 2x = 1$; б) $\cos 4x + 2\sin 4x = 1$.

●21.36. Найдите корни уравнения на заданном промежутке:

а) $4\sin x + \sin 2x = 0$, $x \in [0; 2\pi]$;

б) $\cos^2\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$, $x \in \left[\dfrac{3\pi}{4}; \pi\right]$.

●21.37. Сколько корней имеет уравнение $2\cos^2\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{\pi}{9} = 1$ на отрезке $[-2\pi; 2\pi]$? Найдите эти корни.

●21.38. Сколько корней имеет уравнение:

а) $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2\sin 2x$,

на отрезке $\left[\dfrac{20\pi}{9}; \dfrac{28\pi}{9}\right]$;

б) $2\cos^2\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right) + 1 = 0$,

на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$?

§ 22. Преобразование сумм тригонометрических функций в произведения

Продолжим изучение формул тригонометрии, но сначала обсудим один вопрос, который, наверное, вы уже задавали своему учителю: формул тригонометрии очень много, неужели все эти формулы мы должны помнить, как таблицу умножения? Запоминать все формулы не нужно! Вы должны, во-первых, иметь представление о том, что эти тригонометрические формулы существуют, и, во-вторых, научиться применять их на практике. Главное — выписать нужные формулы, удачно их расположить и держать перед глазами, когда решаете тригонометрический пример. В конце главы 4 мы составим такую «шпаргалку».

В этом параграфе речь пойдет о формулах, особенно полезных при решении тригонометрических уравнений, поскольку они позволяют сумму или разность синусов или косинусов разложить на множители.

Рассмотрим выражение $\sin(s + t) + \sin(s - t)$. Применив формулы синуса суммы и синуса разности, получим

$$(\sin s \cos t + \cos s \sin t) + (\sin s \cos t - \cos s \sin t) = 2 \sin s \cos t.$$

Итак,

$$\sin(s + t) + \sin(s - t) = 2 \sin s \cos t. \qquad (1)$$

Пусть $x = s + t$, $y = s - t$. Если эти равенства сложить, получим $x + y = 2s$, т. е. $s = \frac{x + y}{2}$. Если же из равенства $x = s + t$ вычесть равенство $y = s - t$, получим $x - y = 2t$, т. е. $t = \frac{x - y}{2}$. А теперь заменим в формуле (1) $s + t$ на x, $s - t$ на y, s на $\frac{x + y}{2}$, t на $\frac{x - y}{2}$. Тогда формула (1) примет вид

$$\boxed{\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}.} \qquad (2)$$

Например,

$$\sin 6x + \sin 4x = 2 \sin \frac{6x + 4x}{2} \cos \frac{6x - 4x}{2} = 2 \sin 5x \cos x;$$

$$\sin 43° + \sin 17° = 2 \sin \frac{43° + 17°}{2} \cos \frac{43° - 17°}{2} =$$

$$= 2 \sin 30° \cos 13° = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 13° = \cos 13°.$$

Воспользовавшись тем, что $-\sin y = \sin(-y)$, и формулой суммы синусов, находим, что

$$\sin x - \sin y = \sin x + \sin(-y) =$$

$$= 2\sin\frac{x+(-y)}{2}\cos\frac{x-(-y)}{2} = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}.$$

Итак,

$$\boxed{\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}.} \qquad (3)$$

Например,

$$\sin 3x - \sin 5x = 2\sin\frac{3x-5x}{2}\cos\frac{3x+5x}{2} =$$

$$= 2\sin(-x)\cos 4x = -2\sin x\cos 4x.$$

Рассмотрим выражение $\cos(s+t) + \cos(s-t)$. Применив формулы косинуса суммы и косинуса разности, получим

$$(\cos s\cos t - \sin s\sin t) + (\cos s\cos t + \sin s\sin t) = 2\cos s\cos t.$$

Итак, $\cos(s+t) + \cos(s-t) = 2\cos s\cos t$.

Рассуждая далее, как выше при переходе от формулы (1) и формуле (2), получим

$$\boxed{\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.} \qquad (4)$$

Например,

$$\cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{8} = 2\cos\frac{\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{8}-\frac{3\pi}{8}}{2} =$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}.$$

Рассмотрим выражение $\cos(s+t) - \cos(s-t)$. Применив формулы косинуса суммы и косинуса разности, получим

$$(\cos s\cos t - \sin s\sin t) - (\cos s\cos t + \sin s\sin t) = -2\sin s\sin t.$$

Итак, $\cos(s+t) - \cos(s-t) = -2\sin s\sin t$.

Рассуждая далее, как выше при переходе от формулы (1) и формуле (2), получим

$$\boxed{\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.} \qquad (5)$$

Например,

$$\cos(2x + y) - \cos(4x - y) =$$

$$= -2\sin\frac{(2x+y)+(4x-y)}{2}\sin\frac{(2x+y)-(4x-y)}{2} =$$

$$= -2\sin 3x\sin(-x + y) = 2\sin 3x\sin(x - y).$$

Пример 1. Решить уравнения:

а) $\sin 5x + \sin x = 0$; б) $\sin 17x = \sin 7x$; в) $\cos 3x = \sin x$.

Решение. а) Преобразовав сумму синусов в произведение по формуле (2), получим

$$\sin 5x + \sin x = 2\sin 3x\cos 2x.$$

Теперь заданное уравнение можно переписать так:

$$2\sin 3x\cos 2x = 0.$$

Значит, либо $\sin 3x = 0$, либо $\cos 2x = 0$. Из уравнения $\sin 3x = 0$ находим

$$3x = \pi n;\ x = \frac{\pi n}{3}.$$

Из уравнения $\cos 2x = 0$ находим

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi n;\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}.$$

б) Имеем последовательно:

$$\sin 17x - \sin 7x = 0;$$
$$2\sin 5x\cos 12x = 0;$$
$$\sin 5x = 0;\ \cos 12x = 0.$$

Из уравнения $\sin 5x = 0$ находим $5x = \pi n$; $x = \frac{\pi n}{5}$.

Из уравнения $\cos 12x = 0$ находим

$$12x = \frac{\pi}{2} + \pi n;\ x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{12}.$$

в) Здесь придется воспользоваться формулой приведения $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, чтобы вместо разности синуса и косинуса получить разность косинусов, для которой применима формула (5):

$$\cos 3x - \sin x = 0;$$

$$\cos 3x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0;$$

$$-2\sin\frac{3x+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2}\sin\frac{3x-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2}=0;$$

$$-2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0;$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0;\ \sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Из первого уравнения находим $x+\frac{\pi}{4}=\pi n;\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi n.$

Из второго уравнения находим $2x-\frac{\pi}{4}=\pi n;\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}.$

Ответ: а) $x=\frac{\pi n}{3},\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$; б) $x=\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{12},\ x=\frac{\pi n}{5}$;

в) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}.$

(Напомним: всюду подразумевается, что $n\in\boldsymbol{Z}$.)

Пример 2. Решить уравнение $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$.

Решение. Сгруппируем первое и третье слагаемые левой части уравнения:

$$(\sin x+\sin 3x)+\sin 2x=0.$$

Далее имеем

$$2\sin 2x\cos x+\sin 2x=0;$$
$$\sin 2x\,(2\cos x+1)=0;$$
$$\sin 2x=0;\ \cos x=-\frac{1}{2}.$$

Из первого уравнения находим $2x=\pi n;\ x=\frac{\pi n}{2}.$

Из второго уравнения находим

$$x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n;\quad x=\pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{2}\right)+2\pi n;$$

$$x=\pm\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+2\pi n;\quad x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n.$$

Ответ: $x=\frac{\pi n}{2},\quad x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\quad n\in\boldsymbol{Z}.$

Рассмотрим выражение $A\sin x + B\cos x$; пусть для определенности A и B — положительные числа.

Введем обозначение $C = \sqrt{A^2 + B^2}$. Заметим, что

$$\left(\frac{A}{C}\right)^2 + \left(\frac{B}{C}\right)^2 = 1.$$

В самом деле,

$$\left(\frac{A}{C}\right)^2 + \left(\frac{B}{C}\right)^2 = \frac{A^2}{C^2} + \frac{B^2}{C^2} = \frac{A^2 + B^2}{C^2} = \frac{C^2}{C^2} = 1.$$

Это значит, что пара чисел $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ удовлетворяет уравнению $x^2 + y^2 = 1$, т. е. точка с координатами $\left(\frac{A}{C}; \frac{B}{C}\right)$ лежит на числовой (единичной) окружности. Но тогда $\frac{A}{C}$ есть косинус, а $\frac{B}{C}$ — синус некоторого аргумента t, т. е. $\frac{A}{C} = \cos t$, $\frac{B}{C} = \sin t$.

Учитывая все это, поработаем с выражением $A\sin x + B\cos x$:

$$A\sin x + B\cos x = C\left(\frac{A}{C}\sin x + \frac{B}{C}\cos x\right) =$$
$$= C(\cos t\sin x + \sin t\cos x) = C\sin(x + t).$$

Итак,

$$\boxed{A\sin x + B\cos x = C\sin(x + t),\ \text{где}\ C = \sqrt{A^2 + B^2}.}$$

Аналогично можно выражение $A\sin x - B\cos x$, где $A > 0$, $B > 0$, преобразовать к виду $C\sin(x - t)$.

Обычно аргумент t называют *вспомогательным (дополнительным) аргументом*. Как его находят, покажем в примере 3.

Пример 3. Преобразовать в произведение выражение $5\sin x - 12\cos x$.

Решение. Здесь $A = 5$, $B = -12$, $C = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = 13$.

Имеем $5\sin x - 12\cos x = 13\left(\frac{5}{13}\sin x - \frac{12}{13}\cos x\right)$.

Введем вспомогательный аргумент t, удовлетворяющий соотношениям: $\cos t = \frac{5}{13}$, $\sin t = \frac{12}{13}$; можно считать, что $t = \arcsin\frac{12}{13}$. Тогда

$$\frac{5}{13}\sin x - \frac{12}{13}\cos x = \sin x\cos t - \cos x\sin t = \sin(x - t).$$

Итак,

$$5 \sin x - 12 \cos x = 13 \sin (x - t), \text{ где } t = \arcsin \frac{12}{13}.$$

Пример 4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = 5 \sin x - 12 \cos x.$$

Решение. Имеем (см. пример 3) $y = 13 \sin (x - t)$.

Теперь ясно, что $y_{\text{наим}} = -13$, $y_{\text{наиб}} = 13$ (поскольку синус принимает значения от -1 до 1).

Ответ: $y_{\text{наим}} = -13$, $y_{\text{наиб}} = 13$.

Пример 5. Решить уравнение $5 \sin x - 12 \cos x = 13$.

Решение. В этом примере, как и в примере 4, есть смысл преобразовать выражение $5 \sin x - 12 \cos x$ к виду $13 \sin (x - t)$. Получим

$$13 \sin (x - t) = 13;$$
$$\sin (x - t) = 1;$$
$$x - t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$
$$x = t + \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

где $t = \arcsin \frac{12}{13}$ (см. пример 3).

Ответ: $x = \arcsin \frac{12}{13} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Замечание. С равным успехом мы могли считать, что $\frac{A}{C} = \sin t$, $\frac{B}{C} = \cos t$. Тогда

$$A \sin x + B \cos x = C\left(\frac{A}{C} \sin x + \frac{B}{C} \cos x\right) =$$
$$= C (\sin t \sin x + \cos t \cos x) = C \cos (x - t).$$

Упражнения

Представьте в виде произведения:

22.1. а) $\sin 40° + \sin 16°$; в) $\sin 10° + \sin 50°$;

б) $\sin 20° - \sin 40°$; г) $\sin 52° - \sin 36°$.

22.2. а) $\cos 15° + \cos 45°$; в) $\cos 20° + \cos 40°$;

б) $\cos 46° - \cos 74°$; г) $\cos 75° - \cos 15°$.

Представьте в виде произведения:

О22.3. а) $\sin\frac{\pi}{5} - \sin\frac{\pi}{10}$; в) $\sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{7}$;

б) $\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{4}$; г) $\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{11}$.

О22.4. а) $\cos\frac{\pi}{10} - \cos\frac{\pi}{20}$; в) $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{\pi}{11}$;

б) $\cos\frac{11\pi}{12} + \cos\frac{3\pi}{4}$; г) $\cos\frac{3\pi}{8} + \cos\frac{5\pi}{4}$.

О22.5. а) $\sin 3t - \sin t$;

б) $\cos(\alpha - 2\beta) - \cos(\alpha + 2\beta)$;

в) $\cos 6t + \cos 4t$;

г) $\sin(\alpha - 2\beta) - \sin(\alpha + 2\beta)$.

О22.6. а) $\operatorname{tg} 25^\circ + \operatorname{tg} 35^\circ$; в) $\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40$;

б) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{10}$; г) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

О22.7. Вычислите:

а) $\dfrac{\cos 68^\circ - \cos 22^\circ}{\sin 68^\circ - \sin 22^\circ}$; б) $\dfrac{\sin 130^\circ + \sin 110^\circ}{\cos 130^\circ + \cos 110^\circ}$.

О22.8. Проверьте равенство:

а) $\sin 35^\circ + \sin 25^\circ = \cos 5^\circ$;

б) $\sin 40^\circ + \cos 70^\circ = \cos 10^\circ$;

в) $\cos 12^\circ - \cos 48^\circ = \sin 18^\circ$;

г) $\cos 20^\circ - \sin 50^\circ = \sin 10^\circ$.

О22.9. Докажите тождество:

а) $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 6\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 6\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha$;

б) $\dfrac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha \operatorname{tg} \alpha$.

О22.10. Решите уравнение:

а) $\cos x + \cos 3x = 0$; в) $\cos x = \cos 5x$;

б) $\sin 12x + \sin 4x = 0$; г) $\sin 3x = \sin 17x$.

О22.11. Решите уравнение:

а) $\sin x + \sin 2x - \sin 3x = 0$;

б) $\cos 3x - \cos 5x = \sin 4x$.

Представьте в виде произведения:

О22.12. а) $\frac{1}{2} - \cos t$; в) $1 + 2\cos t$;

б) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin t$; г) $\cos t + \sin t$.

О22.13. а) $\sin 5x + 2\sin 6x + \sin 7x$;

б) $2\cos x + \cos 2x + \cos 4x$.

О22.14. а) $\sin t + \sin 2t + \sin 3t + \sin 4t$;

б) $\cos 2t - \cos 4t - \cos 6t + \cos 8t$.

О22.15. Докажите, что верно равенство:

а) $\sin 20^\circ + \sin 40^\circ - \cos 10^\circ = 0$;

б) $\cos 85^\circ + \cos 35^\circ - \cos 25^\circ = 0$.

Решите уравнение:

О22.16. а) $\sin 3x = \cos 2x$;

б) $\sin(5\pi - x) = \cos(2x + 7\pi)$;

в) $\cos 5x = \sin 15x$;

г) $\sin(7\pi + x) = \cos(9\pi + 2x)$.

О22.17. а) $1 + \cos 6x = 2\sin^2 5x$;

б) $\cos^2 2x = \cos^2 4x$;

в) $\sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{7x}{2}$;

г) $\sin^2 x + \sin^2 3x = 1$.

О22.18. а) $2\sin^2 x + \cos 5x = 1$;

б) $2\sin^2 3x - 1 = \cos^2 4x - \sin^2 4x$.

О22.19. а) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 5x = 0$; в) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 4x$;

б) $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{ctg} x$; г) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \operatorname{ctg} \frac{3x}{2} = 0$.

О22.20. а) $\sin x + \sin 3x + \cos x + \cos 3x = 0$;

б) $\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x = 1$.

●**22.21.** Сколько корней имеет заданное уравнение на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

а) $\sin 2x + \sin 6x = \cos 2x$;

б) $2\cos^2 x - 1 = \sin 3x$?

●**22.22.** Найдите корни уравнения, принадлежащие интервалу $(0;\ 2{,}5)$:

а) $\cos 6x + \cos 8x = \cos 10x + \cos 12x$;

б) $\sin 2x + 5 \sin 4x + \sin 6x = 0$.

§ 23. Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы

Сравните название этого параграфа с названием § 22, в котором речь шла о преобразовании суммы (или разности) синусов или косинусов в произведение. Известно, что любая математическая формула на практике применяется как справа налево, так и слева направо. Поэтому неудивительно, что в тригонометрии приходится осуществлять и «движение в обратном направлении»: преобразовывать произведение тригонометрических функций в сумму. Об этом и пойдет речь в настоящем параграфе.

В § 22 мы видели, что $\sin(s + t) + \sin(s - t) = 2 \sin s \cos t$. Отсюда получаем

$$\boxed{\sin s \cos t = \frac{\sin(s + t) + \sin(s - t)}{2}.}$$

В § 22 мы видели, что $\cos(s + t) + \cos(s - t) = 2 \cos s \cos t$. Отсюда получаем

$$\boxed{\cos s \cos t = \frac{\cos(s + t) + \cos(s - t)}{2}.}$$

В § 22 мы видели, что $\cos(s + t) - \cos(s - t) = -2 \sin s \sin t$. Отсюда получаем

$$\boxed{\sin s \sin t = \frac{\cos(s - t) - \cos(s + t)}{2}.}$$

Таковы три формулы, позволяющие преобразовать произведение тригонометрических функций в сумму.

Пример 1. Преобразовать произведение в сумму:

а) $\sin 5x \cos 3x$; в) $\cos(3x + y)\cos(x - 3y)$;

б) $\sin 3x \cos 5x$; г) $\sin 27° \sin 57°$.

Решение.

а) $$\sin 5x \cos 3x = \frac{\sin(5x + 3x) + \sin(5x - 3x)}{2} = \frac{\sin 8x + \sin 2x}{2}.$$

б) $$\sin 3x \cos 5x = \frac{\sin(3x + 5x) + \sin(3x - 5x)}{2} =$$

$$= \frac{\sin 8x + \sin(-2x)}{2} = \frac{\sin 8x - \sin 2x}{2}.$$

в) $$\cos(3x + y)\cos(x - 3y) =$$

$$= \frac{\cos((3x + y) + (x - 3y)) + \cos((3x + y) - (x - 3y))}{2} =$$

$$= \frac{\cos(4x - 2y) + \cos(2x + 4y)}{2}.$$

г) $$\sin 27° \sin 57° = \frac{\cos(27° - 57°) - \cos(27° + 57°)}{2} =$$

$$= \frac{\cos(-30°) - \cos 84°}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos 84°\right).$$ ◀

Пример 2. Найти значение выражения $\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$, если известно, что $\cos x = \frac{2}{3}$.

Решение.

$$\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{x}{2}\right)}{2} = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos x).$$

Значение $\cos x$ дано в условии, значение $\cos 2x$ легко найти, воспользовавшись формулой $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, откуда получаем

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}.$$

Таким образом,

$$\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{9} + \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{18}.$$ ◀

Упражнения

Преобразуйте произведение в сумму:

○23.1. а) $\sin 23^\circ \sin 32^\circ$; в) $\sin 14^\circ \cos 16^\circ$;

б) $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{8}$; г) $2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{5}$.

○23.2. а) $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$; в) $\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right)$;

б) $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)$; г) $2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)$.

○23.3. а) $\cos \alpha \sin(\alpha + \beta)$;

б) $\sin(60^\circ + \alpha) \sin(60^\circ - \alpha)$;

в) $\sin \beta \cos(\alpha + \beta)$;

г) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

Решите уравнение:

○23.4. а) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 0{,}25 = 0$;

б) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$.

○23.5. а) $2 \sin x \cos 3x + \sin 4x = 0$;

б) $\sin \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2} = \frac{1}{2}$.

○23.6. Докажите тождество:

а) $2 \sin t \sin 2t + \cos 3t = \cos t$;

б) $\sin \alpha - 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} - 15^\circ\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} + 15^\circ\right) = \frac{1}{2}$.

●23.7. Преобразуйте произведение в сумму:

а) $\sin 10^\circ \cos 8^\circ \cos 6^\circ$; б) $4 \sin 25^\circ \cos 15^\circ \sin 5^\circ$.

●23.8. Вычислите:

а) $\cos^2 3^\circ + \cos^2 1^\circ - \cos 4^\circ \cos 2^\circ$;

б) $\sin^2 10^\circ + \cos 50^\circ \cos 70^\circ$.

●23.9. Вычислите:

а) $\frac{1}{2 \sin 10^\circ} - 2 \sin 70^\circ$; б) $\frac{\operatorname{tg} 60^\circ}{\sin 40^\circ} + 4 \cos 100^\circ$.

○23.10. Решите уравнение:

а) $\sin 3x \cos x = \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2}$;

б) $2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + x\right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin^2 x = 0$;

в) $\sin 2x \cos x = \sin x \cos 2x$;

г) $\cos 2x \cos x = \cos 2{,}5x \cos 0{,}5x$.

○23.11. Найдите наименьший положительный и наибольший отрицательный корни уравнения:

а) $\sin x \sin 3x = 0{,}5$; б) $\cos x \cos 3x + 0{,}5 = 0$.

○23.12. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$, если:

а) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{24}\right)$;

б) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

Завершая главу 4, соберем все основные формулы тригонометрии и расположим их так, чтобы ими было удобно пользоваться. Разумеется, все эти формулы применяются только при допустимых значениях аргументов.

1. *Формулы, связывающие тригонометрические функции одного и того же аргумента:*

1) $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$;

2) $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$;

3) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$;

4) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

5) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$;

6) $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$.

2. *Формулы, связывающие функции аргументов, из которых один вдвое больше другого:*

1) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$;

2) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$;

3) $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$;

4) $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$;

5) $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$.

3. *Формулы сложения аргументов:*

1) $\sin (x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$;

2) $\sin (x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$;

3) $\cos (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$;

4) $\cos (x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$;

5) $\operatorname{tg} (x + y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$;

6) $\operatorname{tg} (x - y) = \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$.

4. *Преобразование сумм тригонометрических функций в произведения:*

1) $\sin x + \sin y = 2 \sin \dfrac{x + y}{2} \cos \dfrac{x - y}{2}$;

2) $\sin x - \sin y = 2 \sin \dfrac{x - y}{2} \cos \dfrac{x + y}{2}$;

3) $\cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x + y}{2} \cos \dfrac{x - y}{2}$;

4) $\cos x - \cos y = -2 \sin \dfrac{x + y}{2} \sin \dfrac{x - y}{2}$.

5. *Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы:*

1) $\sin x \cos y = \dfrac{\sin (x + y) + \sin (x - y)}{2}$;

2) $\cos x \cos y = \dfrac{\cos (x + y) + \cos (x - y)}{2}$;

3) $\sin x \sin y = \dfrac{\cos (x - y) - \cos (x + y)}{2}$.

ГЛАВА 5

Производная

Мы приступаем к изучению раздела математики, который обычно называют «Математический анализ». Естественно, что в школе мы ограничимся изучением лишь отдельных элементов математического анализа. Это будет первое знакомство с серьезным разделом высшей математики, в котором исследуют, как ведет себя функция не только в целом, во всей своей области определения (глобальный подход), но и около конкретной точки (локальный подход). Такой анализ практически всегда связан с понятием *предела функции*, с которым мы познакомимся в § 26, а затем изучим *производную* — важную математическую модель, давшую название всей главе. Построение этой модели основано на понятии предела.

§ 24. Предел последовательности

Что такое числовая последовательность и как она задается, вам известно из курса алгебры 9-го класса. Напомним соответствующее определение.

Определение 1. Функцию вида $y = f(x)$, $x \in N$ называют **функцией натурального аргумента или числовой последовательностью** и обозначают $y = f(n)$ или $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$, или (y_n).

Последовательности можно задавать различными способами, например *словесно*, когда правило задания последовательности описано словами. Так, словесно задается последовательность простых чисел:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots .$$

Считают, что последовательность задана *аналитически*, если указана формула ее n-го члена.

Приведем три примера.

1) $y_n = n^2$. Это аналитическое задание последовательности

$$1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots .$$

Указав конкретное значение n, нетрудно найти член последовательности с соответствующим номером. Если, например, $n = 9$, то $y_9 = 9^2$, т. е. $y_9 = 81$; если $n = 27$, то $y_{27} = 27^2$, т. е. $y_{27} = 729$. Напротив, если взят определенный член последовательности, можно указать его номер. Например, если $y_n = 625$, то из уравнения $n^2 = 625$ находим, что $n = 25$. Это значит, что 25-й член заданной последовательности равен 625.

2) $y_n = C$. Здесь речь идет о последовательности

$$C, C, C, \dots , C, \dots .$$

Такую последовательность называют постоянной (или *стационарной*).

3) $y_n = 2^n$. Это аналитическое задание последовательности

$$2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^n, \dots .$$

Определение 2. Последовательность (y_n) называют **ограниченной сверху**, если все ее члены не больше некоторого числа.

Иными словами, последовательность (y_n) *ограничена сверху*, если существует число M такое, что для любого n выполняется неравенство $y_n \leqslant M$. Число M называют *верхней границей последовательности*.

Например, последовательность $-1, -4, -9, -16, \dots , -n^2, \dots$ ограничена сверху. В качестве верхней границы можно взять число -1 или любое число, которое больше -1, например 0.

Определение 3. Последовательность (y_n) называют **ограниченной снизу**, если все ее члены не меньше некоторого числа.

Иными словами, последовательность (y_n) *ограничена снизу*, если существует число m такое, что для любого n выполняется неравенство $y_n \geqslant m$. Число m называют *нижней границей последовательности*.

Например, последовательность $1, 4, 9, 16, \dots , n^2, \dots$ ограничена снизу. В качестве нижней границы можно взять число 1 или любое число, которое меньше 1.

Если последовательность ограничена и снизу и сверху, то ее называют **ограниченной последовательностью.**

Свойство ограниченности последовательности становится особенно наглядным, если члены последовательности отметить точками на числовой прямой. Ограниченность последовательности означает, что все члены последовательности (точнее, соответствующие им точки прямой) принадлежат некоторому отрезку. Так,

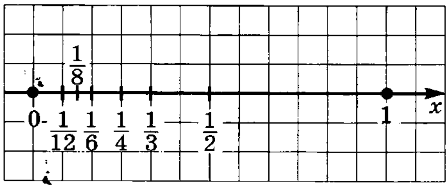


Рис. 130

изобразив члены последовательности $y_n = \frac{1}{n}$ точками на числовой прямой, замечаем, что все они принадлежат отрезку [0; 1] (рис. 130). Значит, $y_n = \frac{1}{n}$ — ограниченная последовательность.

Определение 4. Последовательность y_n называют **возрастающей**, если каждый ее член больше предыдущего:

$$y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < \ldots < y_n < y_{n+1} < \ \ldots .$$

Например, 1, 3, 5, 7, ... , $2n - 1$, ... — возрастающая последовательность.

Определение 5. Последовательность y_n называют **убывающей**, если каждый ее член меньше предыдущего:

$$y_1 > y_2 > y_3 > y_4 > \ldots > y_n > y_n > \ \ldots .$$

Например, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ — убывающая последовательность.

Возрастающие и убывающие последовательности объединяют общим термином — **монотонные последовательности.**

Приведем еще несколько примеров.

1) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, (-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \ldots$. Эта последовательность не является ни возрастающей, ни убывающей (немонотонная последовательность).

2) $y_n = 2^n$. Речь идет о последовательности 2, 4, 8, 16, 32, ... Это возрастающая последовательность.

Вообще *если $a > 1$, то последовательность $y_n = a^n$ возрастает.*

3) $y_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Речь идет о последовательности $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$. Это убывающая последовательность.

Вообще *если $0 < a < 1$, то последовательность $y_n = a^n$ убывает.*

Рассмотрим две числовые последовательности (y_n) и (x_n).

$$(y_n)\colon 1, 3, 5, 7, 9, \ldots, 2n - 1, \ldots;$$

$$(x_n)\colon 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots .$$

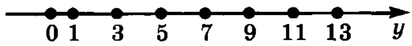


Рис. 131

Изобразим члены этих последовательностей точками на числовой прямой (рис. 131 для (y_n) и рис. 130 для (x_n)). Замечаем, что члены последовательности (x_n) как бы «сгущаются» около точки 0, а у последовательности (y_n) такой «точки сгущения» нет. В подобных случаях математики говорят так: последовательность (x_n) *сходится*, а последовательность (y_n) *расходится*.

Возникает естественный вопрос: как узнать, является ли конкретная точка, взятая на прямой, «точкой сгущения» для членов заданной последовательности?

Сразу уточним: математики не используют термин «точка сгущения для членов заданной последовательности», они предпочитают использовать термин «предел последовательности».

Определение 6. Число b называют **пределом последовательности** (y_n), если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

В этом случае пишут: $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = b$ (читают: *предел последовательности (y_n) при стремлении n к бесконечности равен b*; но обычно слова «при стремлении n к бесконечности» опускают).

Используют и такую запись: $y_n \to b$ (читают: y_n стремится к b, или y_n сходится к b).

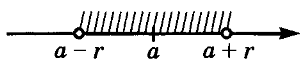


Рис. 132

Разъясним суть использованного выше термина «окрестность»: интервал $(a - r;\ a + r)$ будем называть **окрестностью точки** a (рис. 132), а положительное число r — **радиусом окрестности**. Например, (5,9; 6,1) — окрестность точки 6, причем радиус окрестности равен 0,1.

Для рассмотренной выше последовательности $x_n = \frac{1}{n}$ можно записать соотношение

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.}$$

Так же обстоит дело с последовательностью

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \ldots,\ \left(\frac{1}{2}\right)^n,\ \ldots .$$

Имеет место соотношение $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Вообще

$$\boxed{\textbf{если } |q| < 1, \textbf{ то } \lim_{n \to \infty} q^n = 0.}$$

А что будет с последовательностью q^n, если $|q| > 1$? Пусть, например, $q = 2$, т. е. речь идет о последовательности 2, 2^2, 2^3, 2^4, ... , 2^n, ... Эта последовательность явно не имеет предела (нет «точки сгущения»). Вообще справедливо утверждение:

если $|q| > 1$, *то последовательность* $y_n = q^n$ *расходится.*

Дадим несколько пояснений к определению 6.

Пусть $\lim_{n \to \infty} y_n = b$. Возьмем интервал $(b - r_1;\ b + r_1)$, т. е. окрестность точки b; r_1 — радиус этой окрестности ($r_1 > 0$). Существует номер n_1, начиная с которого вся последовательность содержится в указанной окрестности: $y_{n_1} \in (b - r_1;\ b + r_1)$, $y_{n_1+1} \in (b - r_1;\ b + r_1)$, $y_{n_1+2} \in (b - r_1;\ b + r_1)$ и т. д.

А что будет, если взять интервал $(b - r_2;\ b + r_2)$, где $0 < r_2 < r_1$, т. е. если уменьшить радиус окрестности? Опять найдется номер n_2, начиная с которого вся последовательность содержится в указанной окрестности, но этот номер будет больше, т. е. $n_2 > n_1$.

Если число b — предел последовательности, то, образно выражаясь, окрестность точки b — это «ловушка» для последовательности: начиная с некоторого номера n_0 эта ловушка «заглатывает» y_{n_0} и все последующие члены последовательности. Чем «тоньше» ловушка, т. е. чем меньшая выбирается окрестность, тем дольше «сопротивляется» последовательность, но потом все равно «подписывает акт о капитуляции» — попадает, начиная с некоторого номера, в выбранную окрестность.

Сходящиеся последовательности обладают рядом свойств. Мы дадим лишь формулировки этих свойств.

Свойство 1. *Если последовательность сходится, то только к одному пределу.*

Свойство 2. *Если последовательность сходится, то она ограничена.*

Заметим, что обратное утверждение неверно: например, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ... , 1, 2, 3, ... — ограниченная последовательность, но она не сходится.

Оказывается, если последовательность не только ограничена, но и монотонна (убывает или возрастает), то она обязательно сходится; это доказал в XIX в. немецкий математик Карл Вейерштрасс.

Свойство 3. *Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится* (теорема Вейерштрасса).

Приведем классический пример из геометрии, в котором используется теорема Вейерштрасса. Возьмем окружность и будем последовательно вписывать в нее правильные многоугольники: 4-угольник, 8-угольник, 16-угольник и т. д. Последовательность площадей (периметров) этих правильных многоугольников возрастает и ограничена (снизу числом 0, а сверху, например, числом, выражающим площадь (периметр) описанного около окружности квадрата). Значит, построенная последовательность сходится, ее предел принимается за площадь круга (за длину окружности). Именно с помощью таких рассуждений и получена в математике формула площади круга $S = \pi r^2$ (установлено, что πr^2 — предел последовательности площадей вписанных в окружность радиуса r правильных многоугольников) и формула длины окружности $l = 2\pi r$.

Выше мы отметили, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0; \quad \lim_{n \to \infty} q^n = 0, \quad \text{если } |q| < 1.$$

Добавим еще одно соотношение: $\lim\limits_{n \to \infty} C = C$.

Иными словами, *предел стационарной последовательности равен значению любого члена последовательности.*

Для вычисления пределов последовательностей в более сложных случаях используются указанные соотношения и следующая теорема, которую мы приводим без доказательства.

Теорема. **Если $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = b$, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = c$, то**

1) предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{n \to \infty} (x_n + y_n) = b + c;$$

2) предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{n \to \infty} (x_n y_n) = bc;$$

3) предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{b}{c}$$

(но, разумеется, при дополнительных условиях: $c \neq 0$ и $y_n \neq 0$ для любого n);

4) постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{n \to \infty} (kx_n) = kb.$$

Пример. Найти пределы последовательностей:

а) $x_n = \frac{1}{n^2}$; в) $t_n = \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} + 3$;

б) $z_n = \frac{k}{n^4}$; г) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 4}$.

Решение. а) Имеем $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$. Применив правило «предел произведения», получим

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0.$$

б) $$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{k}{n^4}\right) = \lim_{n \to \infty} \left(k \cdot \frac{1}{n^4}\right) = k \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} =$$
$$= k \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0.$$

Вообще для любого натурального показателя m и любого коэффициента k справедливо соотношение

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(\frac{k}{n^m}\right) = 0.}$$

в) Применив правило «предел суммы», получим

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} + 3\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n} - \lim_{n \to \infty} \frac{5}{n^2} + \lim_{n \to \infty} 3 = 0 - 0 + 3 = 3.$$

г) Разделим числитель и знаменатель дроби почленно на n^2:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{2n^2}{n^2} + \frac{3}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{4}{n^2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{2 + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{4}{n^2}}.$$

Теперь можно воспользоваться правилом «предел дроби (частного)». Предел числителя равен 2, предел знаменателя равен 1, предел дроби равен 2.

Ответ: а) 0; б) 0; в) 3; г) 2.

Упражнения

По заданной формуле n-го члена вычислите первые пять членов последовательности:

24.1. а) $y_n = 3 - 2n$; в) $y_n = n^3 - 1$;

б) $y_n = 2n^2 - n$; г) $y_n = \frac{3n - 1}{2n}$.

24.2. а) $y_n = (-1)^n$; в) $y_n = (-1)^n \frac{1}{10^n}$;

б) $y_n = \frac{(-2)^n}{n^2 + 1}$; г) $y_n = \frac{(-1)^n + 2}{3n - 2}$.

О24.3. а) $y_n = 3\cos\frac{2\pi}{n}$; в) $y_n = 1 - \cos^2\frac{\pi}{n}$;

б) $y_n = \operatorname{tg}\left((-1)^n \frac{\pi}{4}\right)$; г) $y_n = \sin \pi n - \cos \pi n$.

О24.4. Найдите сумму первых восьми членов возрастающей последовательности квадратов простых чисел.

Указание: число 1 не считается ни простым, ни составным.

Составьте одну из возможных формул n-го члена последовательности по первым пяти ее членам:

24.5. а) 0, 1, 2, 3, 4, ... ; в) 5, 6, 7, 8, 9, ... ;

б) −1, −2, −3, −4, −5, ... ; г) 10, 9, 8, 7, 6, ...

24.6. а) 5, 10, 15, 20, 25, ... ; в) 4, 8, 12, 16, 20, ... ;

б) 6, 12, 18, 24, 30, ... ; г) 3, 6, 9, 12, 15, ...

О24.7. а) 3, 9, 27, 81, 243, ... ; в) 1, 8, 27, 64, 125, ... ;

б) 9, 16, 25, 36, 49, ... ; г) 2, 9, 28, 65, 126, ...

О24.8. а) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$;

б) $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, \frac{11}{12}, \ldots$;

в) $1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{64}, \frac{1}{125}, \ldots$;

г) $\frac{1}{3 \cdot 5}, \frac{1}{5 \cdot 7}, \frac{1}{7 \cdot 9}, \frac{1}{9 \cdot 11}, \frac{1}{11 \cdot 13}, \ldots$.

24.9. Выпишите первые четыре члена последовательности десятичных приближений числа $\sqrt{2}$:

а) по недостатку; б) по избытку.

О24.10. Укажите номер члена последовательности $y_n = \dfrac{2 - n}{5n + 1}$, равного:

а) 0; б) $-\dfrac{3}{26}$; в) $-\dfrac{1}{6}$; г) $-\dfrac{43}{226}$.

О24.11. Последовательность задана формулой

$$a_n = (2n - 1)(3n + 2).$$

Является ли членом этой последовательности число:

а) 0; б) 24; в) 153; г) −2?

О24.12. Какие из заданных последовательностей ограничены снизу?

а) $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots;$

б) $-1, 2, -3, 4, -5, \ldots;$

в) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots;$

г) $5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, \ldots.$

О24.13. Какие из заданных последовательностей ограничены сверху?

а) $-3, -2, -1, 0, 1, \ldots;$

б) $1, -1, 1, -2, 1, -3, \ldots;$

в) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{6}, \ldots;$

г) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots.$

О24.14. Какие из заданных последовательностей являются ограниченными?

а) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots, \dfrac{1}{n + 1}, \ldots;$

б) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{6}, \ldots, \dfrac{2n - 1}{2n}, \ldots;$

в) $5, -5, 5, -5, \ldots, (-1)^{n-1} \cdot 5, \ldots;$

г) $-2, 3, -4, 5, \ldots, (-1)^n (n+1), \ldots.$

Выясните, какие из приведенных последовательностей являются монотонными. Укажите характер монотонности:

О24.15. а) $y_n = 2n - 1;$

б) $y_n = 5^{-n};$

в) $y_n = n^2 + 8;$

г) $y_n = \dfrac{2}{3n + 1}.$

○24.16. а) $x_n = (-2)^n$; в) $y_n = n^3 - 5$;

б) $y_n = \cos \dfrac{\pi}{n+5}$; г) $y_n = \sqrt{n+8}$.

24.17. Приведите примеры последовательностей:

а) возрастающих и ограниченных сверху;

б) возрастающих и не ограниченных сверху;

в) убывающих и ограниченных снизу;

г) убывающих и не ограниченных снизу.

Вычислите $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$, если:

24.18. а) $x_n = \dfrac{5}{n^2}$; в) $x_n = \dfrac{-15}{n^2}$;

б) $x_n = \dfrac{-17}{n^3}$; г) $x_n = \dfrac{3}{\sqrt{n}}$.

○24.19. а) $x_n = \dfrac{7}{n} + \dfrac{8}{\sqrt{n}} + \dfrac{9}{n^3}$;

б) $x_n = 6 - \dfrac{7}{n^2} - \dfrac{3}{n} - \dfrac{3}{\sqrt{n}}$;

в) $x_n = \dfrac{3}{n} + \dfrac{7}{n^2} - \dfrac{5}{n^3} + \dfrac{13}{n^4}$;

г) $x_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{\sqrt{n}} - 4 + \dfrac{7}{n^2}$.

○24.20. а) $x_n = \dfrac{5n+3}{n+1}$; в) $x_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$;

б) $x_n = \dfrac{7n-5}{n+2}$; г) $x_n = \dfrac{2n+1}{3n-1}$.

○24.21. а) $x_n = \dfrac{5}{2^n}$; в) $x_n = 7 \cdot 3^{-n}$;

б) $x_n = \dfrac{1}{2} \cdot 5^{-n}$; г) $x_n = \dfrac{4}{3^{n+1}}$.

○24.22. а) $x_n = \dfrac{2n^2 - 1}{n^2}$; в) $x_n = \dfrac{3 - n^2}{n^2}$;

б) $x_n = \dfrac{1 + 2n + n^2}{n^2}$; г) $x_n = \dfrac{3n - 4 - }{n^2}$

§ 25. Сумма бесконечной геометрической прогрессии

Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \dots,\ b_n,\ \dots,$$

т. е. последовательность (b_n), каждый член которой получается из предыдущего умножением на одно и то же отличное от нуля число (знаменатель прогрессии).

Будем последовательно вычислять суммы двух, трех, четырех и т. д. членов прогрессии:

$$\begin{gathered} S_1 = b_1; \\ S_2 = b_1 + b_2; \\ S_3 = b_1 + b_2 + b_3; \\ S_4 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4; \\ \dots \\ S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n. \\ \dots \end{gathered}$$

Получилась последовательность S_1, S_2, S_3, ... , S_n, ... Как всякая числовая последовательность, она может сходиться или расходиться. Если последовательность S_n сходится к пределу S, то число S называют *суммой геометрической прогрессии* (обратите внимание: не суммой n членов геометрической прогрессии, как мы говорили в 9-м классе, а суммой геометрической прогрессии). Если же эта последовательность расходится, то о сумме геометрической прогрессии не говорят, хотя о сумме первых n членов геометрической прогрессии можно, разумеется, говорить и в этом случае.

Напомним формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии: если $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$, то $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

Рассмотрим случай, когда знаменатель q геометрической прогрессии удовлетворяет неравенству $|q| < 1$. Докажем, что в этом случае $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \dfrac{b_1}{1 - q}$.

Прежде всего воспользуемся тем, что постоянный множитель $\dfrac{b_1}{q-1}$ можно вынести за знак предела. Получим

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{b_1}{q - 1}(q^n - 1) = \frac{b_1}{q - 1} \cdot \lim_{n \to \infty}(q^n - 1).$$

Далее воспользуемся тем, что $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$ (при $|q| < 1$), и, следовательно, $\lim\limits_{n \to \infty} (q^n - 1) = 0 - 1 = -1$. Тогда

$$\frac{b_1}{q-1} \cdot \lim_{n \to \infty} (q^n - 1) = \frac{b_1}{q-1} \cdot (-1) = \frac{b_1}{1-q}.$$

Но $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ по определению является суммой геометрической прогрессии. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Если знаменатель q геометрической прогрессии (b_n) удовлетворяет неравенству $|q| < 1$, то сумма S прогрессии вычисляется по формуле $S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

Пример 1. Найти сумму геометрической прогрессии

$$4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \dots .$$

Решение. Здесь $b_1 = 4$, $q = \frac{1}{2}$. Поскольку знаменатель прогрессии удовлетворяет неравенству $|q| < 1$, мы имеем право воспользоваться только что полученной формулой $S = \dfrac{b_1}{1-q}$. Значит, $S = \dfrac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$.

Ответ: $S = 8$.

Пример 2. Сумма геометрической прогрессии, у которой $|q| < 1$, равна 9, а сумма квадратов ее членов 40,5. Найти пятый член прогрессии.

Решение. Первый этап. *Составление математической модели.*

Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$ со знаменателем q, удовлетворяющим условию $|q| < 1$; ее сумма вычисляется по формуле $\dfrac{b_1}{1-q}$. По условию эта сумма равна 9. Таким образом, получаем уравнение $\dfrac{b_1}{1-q} = 9$.

Последовательность $b_1^2, b_2^2, b_3^2, \dots, b_n^2, \dots$ также является геометрической прогрессией: ее первый член равен b_1^2, знаменатель равен q^2, причем $q^2 < 1$. Сумма этой прогрессии вычисляется по формуле $\frac{b_1^2}{1-q^2}$.

По условию эта сумма равна 40,5. Таким образом, получаем уравнение $\frac{b_1^2}{1-q^2} = 40{,}5$.

В итоге задача сводится к решению системы уравнений относительно переменных b_1 и q:

$$\begin{cases} \dfrac{b_1}{1-q} = 9, \\ \dfrac{b_1^2}{1-q^2} = 40{,}5. \end{cases}$$

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Для решения системы используем метод подстановки: выразим из первого уравнения переменную b_1. Получим $b_1 = 9(1-q)$. Подставим это выражение вместо b_1 во второе уравнение системы:

$$\frac{81(1-q)^2}{1-q^2} = 40{,}5.$$

Далее последовательно находим:

$$\frac{2(1-q)}{1+q} = 1; \quad 2 - 2q = 1 + q; \quad q = \frac{1}{3};$$

$$b_1 = 9(1-q) = 9\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 6.$$

Итак, $\begin{cases} b_1 = 6, \\ q = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

По условию требуется найти b_5. Имеем $b_5 = b_1q^4 = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{2}{27}$.

Ответ: $b_5 = \frac{2}{27}$.

Пример 3. Представить в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную периодическую дробь: а) 0,(23); б) 1,4(23).

Решение. а) 0,(23) = 0,23 23 23 23... =

$$= \frac{23}{100} + \frac{23}{100^2} + \frac{23}{100^3} + \frac{23}{100^4} + \ldots .$$

Заметим, что фактически надо найти сумму S бесконечной геометрической прогрессии, у которой

$$b_1 = \frac{23}{100},\ q = \frac{1}{100}.\ \text{Имеем } S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{23}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{23}{99}.$$

Значит, $0,(23) = \frac{23}{99}$.

б) $1,4(23) = 1,4232323\ldots = 1 + \frac{4}{10} + \frac{23}{1000} + \frac{23}{100\,000} + \frac{23}{10\,000\,000} + \ldots = 1 + \frac{2}{5} + \frac{23}{1000}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \ldots\right) = 1 + \frac{2}{5} + \frac{23}{1000} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = 1 + \frac{2}{5} + \frac{23}{990} = 1\frac{419}{990}$.

Упражнения

25.1. Найдите сумму геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $b_1 = 3,\ q = \frac{1}{3}$;

б) $b_1 = -5,\ q = -0,1$;

в) $b_1 = -1,\ q = 0,2$;

г) $b_1 = 2,\ q = -\frac{1}{3}$.

25.2. Найдите сумму геометрической прогрессии:

а) 32, 16, 8, 4, 2, … ;

б) $24,\ -8,\ \frac{8}{3},\ -\frac{8}{9},\ \ldots$;

в) $27,\ 9,\ 3,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \ldots$;

г) $18,\ -6,\ 2,\ -\frac{2}{3},\ \ldots$.

Вычислите:

○25.3. а) $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$;

б) $49 + 7 + 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \ldots$;

в) $\frac{3}{2} - 1 + \frac{2}{3} - \frac{4}{9} + \ldots$;

г) $125 + 25 + 5 + 1 + \ldots$.

○25.4. а) $-6 + \frac{2}{3} - \frac{2}{27} + \frac{2}{243} - \ldots$;

б) $3 + \sqrt{3} + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots$;

в) $49 - 14 + 4 - \frac{8}{7} + \ldots$;

г) $4 + 2\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} + \ldots$.

25.5. Найдите знаменатель и сумму геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $b_1 = -2,\ b_2 = 1$;

б) $b_1 = 3,\ b_2 = \frac{1}{3}$;

в) $b_1 = 7,\ b_2 = -1$;

г) $b_1 = -20,\ b_2 = 4$.

25.6. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $S = 2,\ b_1 = 3$;

б) $S = -10,\ b_1 = -5$;

в) $S = -\frac{9}{4},\ b_1 = -3$;

г) $S = 1{,}5,\ b_1 = 2$.

25.7. Найдите первый член геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $S = 10,\ q = 0{,}1$;

б) $S = -3,\ q = -\frac{1}{3}$;

в) $S = 6,\ q = -0{,}5$;

г) $S = -21,\ q = \frac{1}{7}$.

○25.8. Найдите n-й член геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $S = 15,\ q = -\frac{1}{3},\ n = 3$;

б) $S = -20,\ b_1 = -16,\ n = 4$;

в) $S = 20,\ b_1 = 22,\ n = 4$;

г) $S = 21,\ q = \frac{2}{3},\ n = 3$.

○25.9. Найдите сумму геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $b_n = \frac{25}{3^n}$;

б) $b_n = (-1)^n \frac{13}{2^{n-1}}$;

в) $b_n = \frac{45}{6^n}$;

г) $b_n = (-1)^n \frac{7}{6^{n-2}}$.

○25.10. Найдите сумму геометрической прогрессии, если известно, что сумма первого и третьего ее членов равна 29, а второго и четвертого 11,6.

○25.11. Найдите геометрическую прогрессию, если ее сумма равна 24, а сумма первых трех членов равна 21.

○25.12. Составьте геометрическую прогрессию, если известно, что ее сумма равна 18, а сумма квадратов ее членов равна 162.

○25.13. Упростите выражение (при условии, что $x \neq \frac{\pi n}{2}$):

а) $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \ldots + \sin^n x + \ldots$;

б) $\cos x - \cos^2 x + \cos^3 x - \cos^4 x + \ldots$;

в) $\cos^2 x + \cos^4 x + \cos^6 x + \cos^8 x + \ldots$;

г) $1 - \sin^3 x + \sin^6 x - \sin^9 x + \ldots$.

O25.14. Решите уравнение, если известно, что $|x| < 1$.

а) $x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n + \ldots = 4$;

б) $2x - 4x^2 + 8x^3 - 16x^4 + \ldots = \frac{3}{8}$.

O25.15. Представьте в виде обыкновенной дроби:

а) 0,(15); б) 0,1(2); в) 0,(18); г) 0,2(34).

§ 26. Предел функции

1. Предел функции на бесконечности

Пусть дана функция $y = f(x)$, в области определения которой содержится луч $[a; +\infty)$, и пусть прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ (рис. 133). Для описания этой геометрической модели используют короткую запись:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

(читают: *предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к плюс бесконечности равен b*).

Если же дана функция $y = f(x)$, в области определения которой содержится луч $(-\infty; a]$, и прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ (рис. 134), то в этом случае используют запись:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

(читают: *предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к минус бесконечности равен b*).

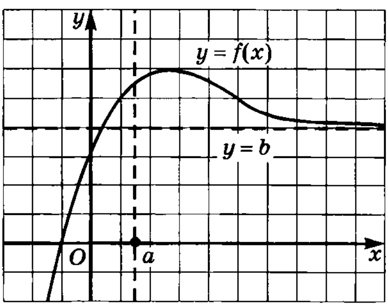


Рис. 133

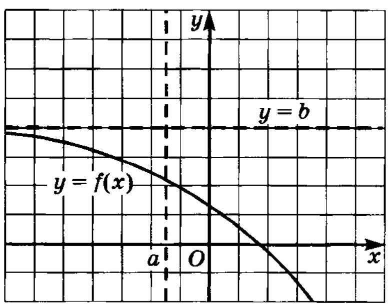


Рис. 134

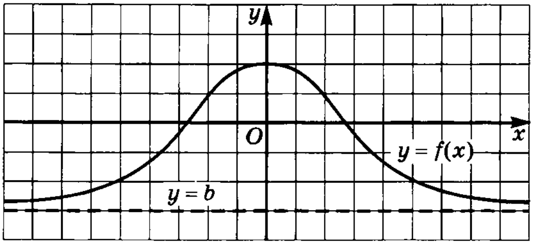


Рис. 135

Если одновременно выполняются соотношения

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \quad \text{и} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b \quad \text{(рис. 135),} —$$

то их можно объединить одной записью: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$. Но обычно используют более экономную запись:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

(читают: *предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к бесконечности равен b*).

Пример 1. Построить график функции $y = f(x)$, обладающей следующими свойствами:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
2) $y = f(x)$ — непрерывная функция;
3) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$;
4) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$.

Решение. Нам нужно построить график непрерывной функции, определенной на $(-\infty; +\infty)$, у которой есть две горизонтальные асимптоты: $y = 0$ при $x \to -\infty$ и $y = 4$ при $x \to +\infty$. Один из возможных вариантов такого графика представлен на рисунке 136, другой — на рисунке 137. ◼

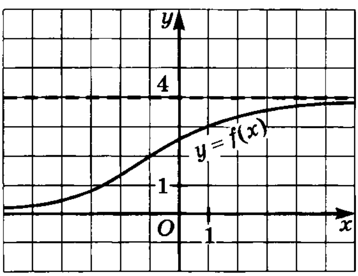


Рис. 136

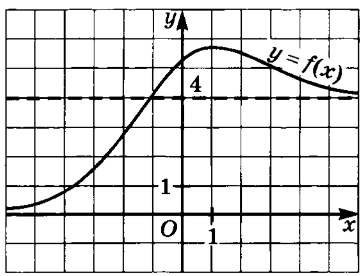


Рис. 137

Для вычисления предела функции на бесконечности используют несколько утверждений. Приведем их без доказательства.

1) ***Для любого натурального показателя m справедливо соотношение***

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x^m}\right) = 0.}$$

Это можно истолковать с геометрической точки зрения: график функции $y = \frac{1}{x^m}$ (рис. 138, 139) имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$.

2) ***Если*** $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = c$, ***то***

а) ***предел суммы равен сумме пределов***:

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) + g(x)) = b + c;$$

б) ***предел произведения равен произведению пределов***:

$$\lim_{x \to \infty} f(x)g(x) = bc;$$

в) ***предел частного равен частному пределов (разумеется, при условии, что*** $c \neq 0$***)***:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c};$$

г) ***постоянный множитель можно вынести за знак предела***:

$$\lim_{x \to \infty} kf(x) = kb.$$

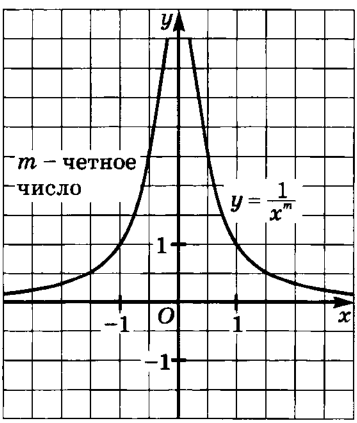


Рис. 138

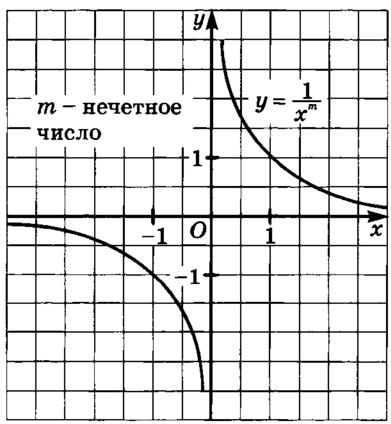


Рис. 139

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 + 3}{x^2 - 4}$.

Р е ш е н и е. Разделим числитель и знаменатель дроби почленно на x^2:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}}.$$

Поскольку предел числителя равен $2 + 0 = 2$, а предел знаменателя равен $1 - 0 = 1$, то предел дроби равен $\frac{2}{1} = 2$.

Ответ: 2.

2. Предел функции в точке

Рассмотрим функции, графики которых изображены на рисунках 140—142. Во всех трех случаях, казалось бы, изображена одна и та же кривая. Но разумеется, это три р а з н ы е ф у н к ц и и, они отличаются друг от друга своим поведением в точке $x = a$.

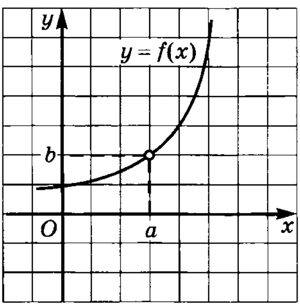


Рис. 140

Для функции $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке 140, значение $f(a)$ не существует, функция в указанной точке не определена. Для функции $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке 141, значение $f(a)$ существует, но оно «неудачное», так как отличается от, казалось бы, естественного значения b. Наконец, для функции $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке 142, значение $f(a)$ существует, и оно «удачное»

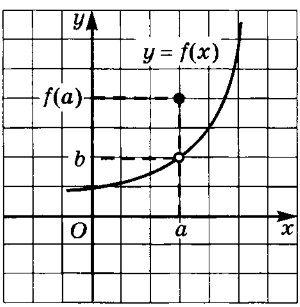


Рис. 141

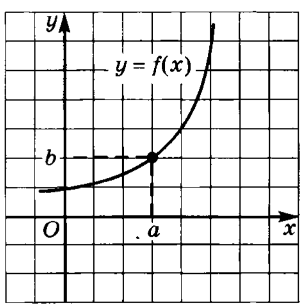


Рис. 142

$f(a) = b$. Итак, на рисунках 140—142 представлены графики трех различных функций. Если же точку $x = a$ исключить из рассмотрения, то функции совпадут: при $x < a$ и при $x > a$ графики одинаковы.

Для всех трех случаев используется одна и та же запись:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

(читают: *предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к a равен b*).

Содержательный смысл приведенной выше записи заключается в следующем: если значения аргумента выбирать все ближе и ближе к значению $x = a$, то соответствующие значения функции все меньше и меньше будут отличаться от предельного значения b. При этом, подчеркнем еще раз, *сама точка $x = a$ исключается из рассмотрения.*

Теперь ответьте на вопрос: какую из рассмотренных трех функций естественно считать непрерывной в точке $x = a$? Ответ очевиден: непрерывной естественно считать третью функцию (рис. 142), которая удовлетворяет условию $f(a) = b$, т. е.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

В каких случаях мы с вами до сих пор использовали понятие «непрерывная функция»? Мы говорили, что функция непрерывна, если видели, что ее график представляет собой сплошную линию. На самом деле график функции изображают в виде сплошной линии только тогда, когда установлена непрерывность функции.

Определение 1. Функцию $y = f(x)$ называют **непрерывной в точке $x = a$**, если выполняется соотношение

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a).}$$

Иными словами, функцию $y = f(x)$ называют *непрерывной в точке $x = a$*, если предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к a равен значению функции в точке $x = a$.

Функцию $y = f(x)$ называют **непрерывной на промежутке X**, если она непрерывна в каждой точке промежутка.

В курсе алгебры 7—9-го классов мы отмечали, что функции $y = C$, $y = kx + m$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = |x|$, $y = x^n$, где n — натуральное число, непрерывны на всей числовой прямой. Отмечали также, что функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна на луче $[0; +\infty)$, а функция

$y = x^{-n}$ (n — натуральное число) непрерывна на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, но претерпевает разрыв в точке $x = 0$. В главе 2, говоря о тригонометрических функциях, мы отмечали непрерывность функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ на всей числовой прямой, а также непрерывность функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ в каждом промежутке, принадлежащем области их определения. До сих пор мы опирались на наглядные представления и интуицию. В курсе высшей математики доказано, что все упомянутые утверждения верны, так что ими можно пользоваться, образно говоря, на законных основаниях.

Имеет место более сильное утверждение.

Если выражение $f(x)$ составлено из рациональных, иррациональных, тригонометрических выражений, то функция $y = f(x)$ непрерывна в любой точке, в которой определено выражение $f(x)$.

Рассмотрим несколько примеров на вычисление пределов функций.

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x \to 1} (x^3 - 2x^2 + 5x + 3)$.

Решение. Выражение $x^3 - 2x^2 + 5x + 3$ определено в любой точке x, в частности в точке $x = 1$. Следовательно, функция $y = x^3 - 2x^2 + 5x + 3$ непрерывна в точке $x = 1$, а потому предел функции при стремлении x к 1 равен значению функции в точке $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} (x^3 - 2x^2 + 5x + 3) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 = 7.$$

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x+4}}$.

Решение. Выражение $f(x) = \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x+4}}$ определено в любой точке $x \geqslant 0$, в частности в точке $x = 2$. Следовательно, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = 2$, а потому предел функции при стремлении x к 2 равен значению функции в точке $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x+4}} = \frac{\sin 2\pi}{\sqrt{2}+4} = \frac{0}{\sqrt{2}+4} = 0.$$

Вы заметили, наверное, что в рассмотренных примерах вычисление пределов не вызвало затруднений: достаточно было найти значение функции в точке, к которой стремится аргумент x. Но бывают случаи, когда этот прием не срабатывает.

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 9}{4x + 12}$.

Решение. Если подставить значение $x = -3$ в заданное выражение, то и в числителе, и в знаменателе получится 0, а на 0 делить нельзя. Но заданную алгебраическую дробь можно сократить:

$$\frac{x^2 - 9}{4x + 12} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{4(x + 3)} = \frac{x - 3}{4}.$$

Значит, функции $y = \dfrac{x^2 - 9}{4x + 12}$ и $y = \dfrac{x - 3}{4}$ совпадают при условии $x \neq -3$. Но напомним еще раз, что при вычислении предела функции при $x \to -3$ саму точку $x = -3$ исключают из рассмотрения. Значит,

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{4x + 12} = \lim_{x \to -3} \frac{x - 3}{4}.$$

Осталось вычислить $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x - 3}{4}$. Поскольку функция $y = \dfrac{x - 3}{4}$ непрерывна в точке $x = -3$, получаем

$$\lim_{x \to -3} \frac{x - 3}{4} = \frac{-3 - 3}{4} = -1{,}5.$$

Для вычисления предела функции в точке, как и для вычисления предела последовательности и предела функции на бесконечности, используется теорема об арифметических операциях над пределами, которую мы приводим без доказательства.

Теорема. **Если $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = c$, то:**

1) $\lim\limits_{x \to \alpha} (f(x) + g(x)) = b + c$;

2) $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)g(x) = bc$;

3) $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$ **(при условии, что $c \neq 0$);**

4) $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = kb$.

Пример 6. Построить график функции $y = f(x)$, обладающей следующими свойствами:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;

2) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 0$;

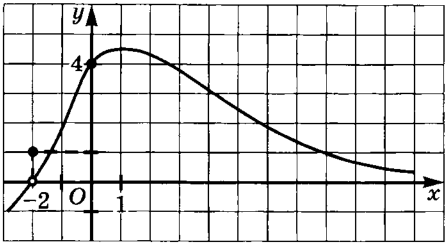


Рис. 143

3) $f(-2) = 1$, $f(0) = 4$;

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$;

5) $f(x) < 0$ при $x < -2$.

Решение. Один из возможных вариантов представлен на рисунке 143. ◁■

3. Приращение аргумента. Приращение функции

Изучая поведение функции $y = f(x)$ около конкретной точки x_0, важно знать, как меняется значение функции при изменении значения аргумента. Для этого используют понятия приращений аргумента и функции.

Определение 2. Пусть функция $y = f(x)$ определена в точках x_0 и x_1. Разность $x_1 - x_0$ называют **приращением аргумента** (при переходе от точки x_0 к x_1), а разность $f(x_1) - f(x_0)$ называют **приращением функции.**

Приращение аргумента обозначают Δx (читают: *дельта икс*; Δ — прописная буква греческого алфавита «дельта»; соответствующая строчная буква пишется так: δ). Приращение функции обозначают Δy или Δf.

Итак, $x_1 - x_0 = \Delta x$, значит, $x_1 = x_0 + \Delta x$.

$f(x_1) - f(x_0) = \Delta y$ (или Δf), значит,

$$\boxed{\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).}$$

Пример 7. Найти приращение функции $y = x^2$ при переходе от точки $x_0 = 1$ к точке:

а) $x = 1{,}1$; б) $x = 0{,}98$.

Решение. а) Введем обозначение $f(x) = x^2$.

Имеем $f(1) = 1^2 = 1$; $f(1{,}1) = 1{,}1^2 = 1{,}21$;

$$\Delta y = f(1{,}1) - f(1) = 1{,}21 - 1 = 0{,}21.$$

б) $f(1) = 1$; $f(0{,}98) = 0{,}98^2 = 0{,}9604$;

$$\Delta y = f(0{,}98) - f(1) = 0{,}9604 - 1 = -0{,}0396.$$ ◁■

Обратите внимание на полученный ответ: приращение функции (как, впрочем, и приращение аргумента) может быть и положительным и отрицательным числом, так что не истолковывайте термин «приращение» как «прирост».

А теперь посмотрим на определение непрерывной функции с точки зрения приращений аргумента и функции. Определение непрерывности функции в точке $x = a$ выглядит так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Здесь $x \to a$, значит, $(x - a) \to 0$, т. е. $\Delta x \to 0$. При этом $f(x) \to f(a)$, значит, $(f(x) - f(a)) \to 0$, т. е. $\Delta y \to 0$.

Получаем новое истолкование понятия непрерывности функции в точке.

Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, если в этой точке выполняется следующее условие:

$$\textit{если } \Delta x \to 0, \textit{ то } \Delta y \to 0.$$

Выше мы отметили, что функцию называют непрерывной на промежутке X, если она непрерывна в каждой точке промежутка. Уточним, что означает непрерывность функции в концевой точке промежутка, например, как понимать непрерывность функции в точках a и b отрезка $[a; b]$. Для точки a данное выше определение непрерывности в терминах приращений будет выглядеть так: если $\Delta x \to 0$, $\Delta x > 0$, то $\Delta y \to 0$. Для точки b определение непрерывности в терминах приращений будет выглядеть так: если $\Delta x \to 0$, $\Delta x < 0$, то $\Delta y \to 0$. В частности, функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна не только в любой точке $x > 0$, но и в точке $x = 0$ (в указанном выше смысле). Поэтому функцию $y = \sqrt{x}$ считают непрерывной на всем луче $[0; +\infty)$.

Пример 8. Для функции $y = kx + m$ найти:

а) приращение функции при переходе от фиксированной точки x к точке $x + \Delta x$;

б) предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

Решение. а) $f(x) = kx + m$;

$$f(x + \Delta x) = k(x + \Delta x) + m;$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (k(x + \Delta x) + m) - (kx + m) =$$
$$= (kx + k \cdot \Delta x + m) - (kx + m) = k \cdot \Delta x.$$

Итак, для заданной линейной функции $y = kx + m$ получили

$$\Delta y = k \cdot \Delta x.$$

б) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{k \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k = k.$

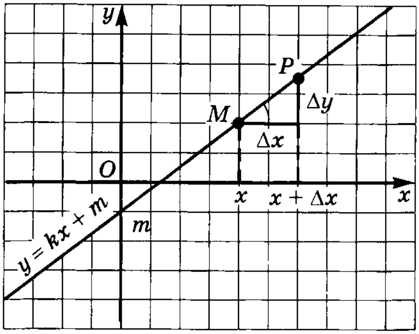


Рис. 144

Итак, для заданной линейной функции $y = kx + m$ получили

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k.$$

На рисунке 144 изображен график линейной функции $y = kx + m$, отмечены приращения аргумента и функции при переходе от точки x к точке $x + \Delta x$. Видим, что $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ — тангенс угла между прямой $y = kx + m$ и положительным направлением оси x, т. е. угловой коэффициент прямой. Значит, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = k$, что фактически и получено при решении примера 8, но с помощью формальных преобразований.

Пример 9. Для функции $y = x^2$ найти:

а) приращение функции при переходе от фиксированной точки x к точке $x + \Delta x$;

б) предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

Решение. а) $f(x) = x^2$;

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2;$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 =$$
$$= (x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2) - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Итак, $\Delta y = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$.

б) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$

При вычислении последнего предела мы учли, что x — фиксированная точка, т. е. постоянное число, а Δx — переменная; отсюда и следует, что если $\Delta x \to 0$, то $(2x + \Delta x) \to 2x$.

Итак, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x.$

Упражнения

26.1. Какая из функций, графики которых изображены на рисунках 145—148, имеет предел при $x \to +\infty$? При $x \to -\infty$? При $x \to \infty$?

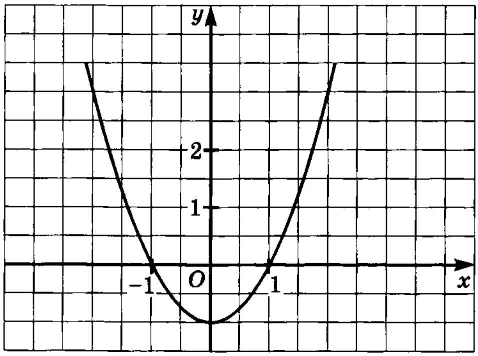


Рис. 145

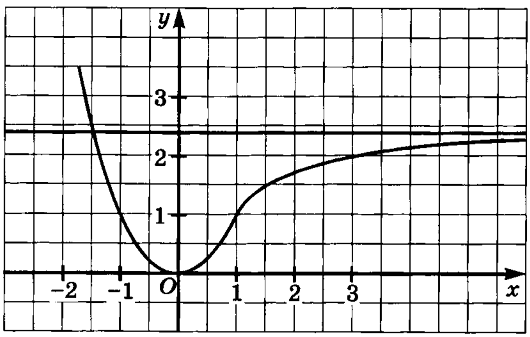


Рис. 146

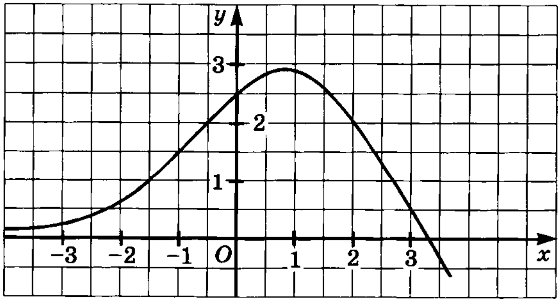


Рис. 147

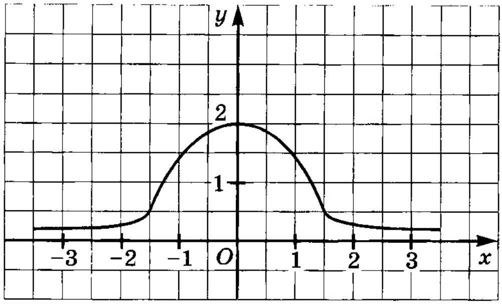


Рис. 148

26.2. Имеет ли функция $y = f(x)$ предел при $x \to +\infty$, при $x \to -\infty$, или при $x \to \infty$, и чему он равен, если:

а) прямая $y = 3$ является горизонтальной асимптотой графика функции на луче $(-\infty; 4]$;

б) прямая $y = -2$ является горизонтальной асимптотой графика функции на луче $[-6; +\infty)$;

в) прямая $y = -5$ является горизонтальной асимптотой графика функции на луче $(-\infty; 3]$;

г) прямая $y = 5$ является горизонтальной асимптотой графика функции на луче $[4; +\infty)$?

26.3. Постройте эскиз графика какой-нибудь функции $y = f(x)$, обладающей указанным свойством:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 5$;

б) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -2$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -5$;

г) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

О26.4. Постройте эскиз графика какой-нибудь функции $y = f(x)$, обладающей указанными свойствами:

а) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$ и $f(x) > 0$ на $(-\infty, +\infty)$;

б) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ и $f(x) < 0$ на $(-\infty, +\infty)$.

О26.5. Постройте эскиз графика какой-нибудь функции $y = h(x)$, обладающей указанными свойствами:

а) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 4$ и функция возрастает;

б) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 1$ и функция ограничена снизу;

в) $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 5$ и функция убывает;

г) $\lim\limits_{x \to \infty} h(x) = 1$ и функция ограничена.

26.6. Известно, что $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -3$. Вычислите:

а) $\lim\limits_{x \to +\infty} 6f(x)$;

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{3}$;

в) $\lim\limits_{x \to -\infty} 8f(x)$;

г) $\lim\limits_{x \to \infty} (0{,}4f(x))$.

26.7. Известно, что $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = -3$ и $\lim\limits_{x \to \infty} h(x) = 9$. Вычислите:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) + g(x))$;

б) $\lim\limits_{x \to \infty} (g(x) \cdot f(x))$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)g(x)}{h(x)}$;

г) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2h(x)}{3g(x)}$.

Вычислите:

○26.8. а) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right)$;

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{5}{x^3} + 1\right) \cdot \left(-\frac{8}{x^2} - 2\right)$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2}{x^2} + \frac{8}{x^3}\right)$;

г) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{7}{x^6} - 2\right) \cdot \left(-\frac{6}{x^{10}} - 3\right)$.

○26.9. а) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x + 1}{x - 2}$;

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x - 4}{2x + 7}$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x - 4}{x + 3}$;

г) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{7x + 9}{6x - 1}$.

○26.10. а) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x^2 + 9}{x^2 + 2}$;

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x - 1}{x^2 + 7x + 5}$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{-2x - 1}{3x^2 - 4x + 1}$;

г) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{10x^2 + 4x - 3}{5x^2 + 2x + 1}$.

26.11. Какая из функций, графики которых изображены на рисунках 149—156, имеет предел при $x \to 3$? Чему равен этот предел?

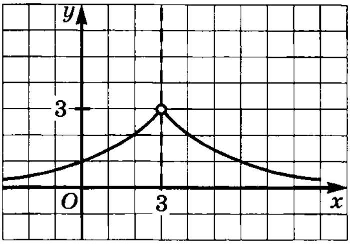


Рис. 149

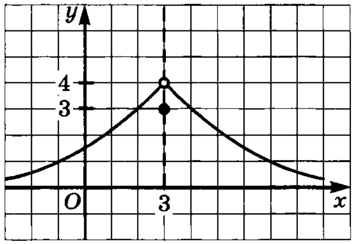


Рис. 150

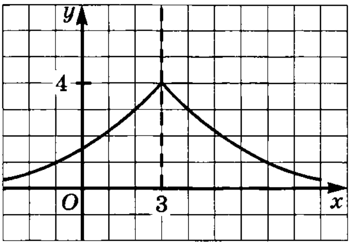


Рис. 151

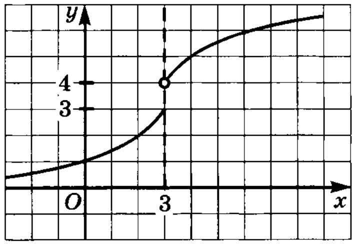


Рис. 152

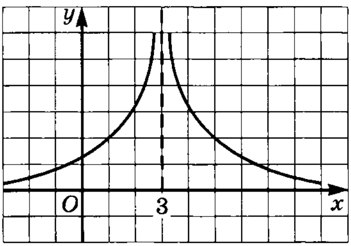


Рис. 153

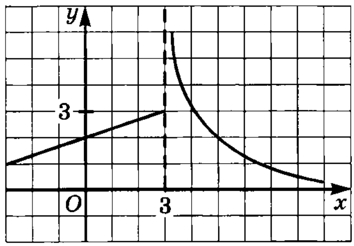


Рис. 154

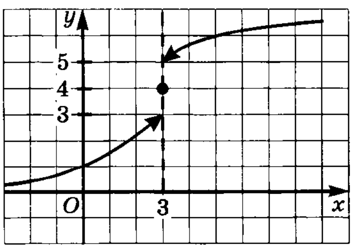


Рис. 155

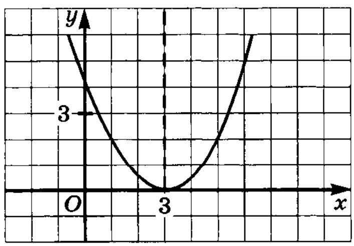


Рис. 156

26.12. Изобразите эскиз графика какой-нибудь функции $y = g(x)$, обладающей заданным свойством:

а) $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = 2$;   в) $\lim\limits_{x \to -7} g(x) = -4$;

б) $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = -3$;   г) $\lim\limits_{x \to 5} g(x) = 3{,}5$.

26.13. На рисунке 157 изображен график функции $y = f(x)$. Найдите:

а) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$;   в) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$;

б) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$;   г) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

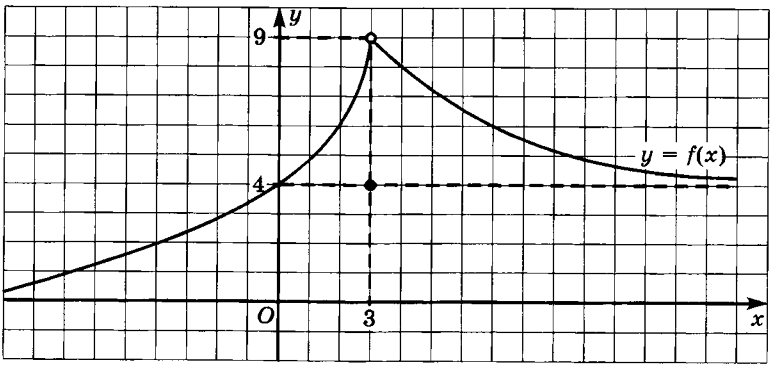


Рис. 157

Постройте эскиз графика какой-нибудь функции $y = f(x)$, обладающей заданными свойствами:

○26.14. а) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$;

б) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 10$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$;

в) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$;

г) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -4$.

○26.15. а) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$ и $f(2) = 3$;

б) $\lim\limits_{x \to -6} f(x) = 4$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$;

в) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 4$ и $f(-1)$ не существует;

г) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -1$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -5$.

Вычислите:

○26.16. а) $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 3x + 5)$;

в) $\lim\limits_{x \to -1} (x^2 + 6x - 8)$;

б) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2x + 3}{4x + 2}$;

г) $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} \frac{7x - 14}{21x + 2}$.

○26.17. а) $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x + 4}$;

в) $\lim\limits_{x \to 6} \sqrt{x + 3}$;

б) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{3 + 4x}{2x^2 + 6x - 3}$;

г) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{5 - 2x}{3x^2 - 2x + 4}$.

○26.18. а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2 - x}$;

в) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$;

б) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{2 + x}$;

г) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{3 + x}{x^2 - 9}$.

○26.19. а) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x + \sin x}{\cos 3x + \cos x}$;

б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin 5x + \sin 3x}$.

26.20. Найдите приращение функции $y = 2x - 3$ при переходе от точки $x_0 = 3$ к точке x_1, если:

а) $x_1 = 3{,}2$; б) $x_1 = 2{,}9$; в) $x_1 = 3{,}5$; г) $x_1 = 2{,}5$.

26.21. Найдите приращение функции $y = x^2 + 2x$ при переходе от точки $x_0 = -2$ к точке x_1, если:

а) $x_1 = -1{,}9$; б) $x_1 = -2{,}1$; в) $x_1 = -1{,}5$; г) $x_1 = -2{,}5$.

○26.22. Найдите приращение функции $y = \sqrt{x}$ при переходе от точки $x_0 = 1$ к точке $x_1 = x_0 + \Delta x$, если:

а) $\Delta x = 0{,}44$;

в) $\Delta x = 0{,}21$;

б) $\Delta x = -0{,}19$;

г) $\Delta x = 0{,}1025$.

26.23. По графикам функций, представленных на рисунках 158 и 159, найдите приращение аргумента и приращение функции при переходе от точки x_0 к точке x_1:

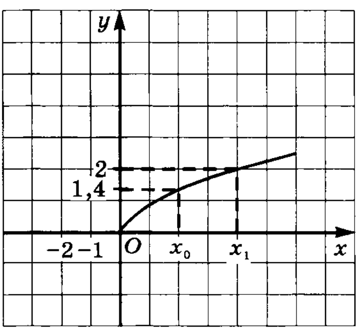


Рис. 158

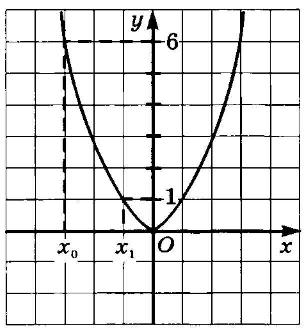


Рис. 159

О26.24. Найдите приращение функции $y = f(x)$ при переходе от точки x к точке $x + \Delta x$, если:

а) $f(x) = 3x + 5$;   в) $f(x) = 4 - 2x$;

б) $f(x) = -x^2$;   г) $f(x) = 2x^2$.

О26.25. Для функции $y = f(x)$ найдите Δf при переходе от точки x к точке $x + \Delta x$, если:

а) $f(x) = ax^2$;   б) $f(x) = \frac{1}{x}$.

§ 27. Определение производной

1. Задачи, приводящие к понятию производной

Часто бывает так, что, решая задачи, далекие друг от друга по содержанию, мы приходим к одной и той же математической модели. Сила математики состоит в том, что она разрабатывает способы оперирования той или иной математической моделью, которыми потом пользуются в различных областях знаний. Вы умеете работать со многими математическими моделями — уравнениями, неравенствами, системами уравнений и неравенств и др. В этом параграфе речь пойдет о принципиально новой для вас математической модели. Сначала рассмотрим две различные задачи, физическую и геометрическую, процесс решения которых как раз и приводит к возникновению новой математической модели.

Задача 1 (о скорости движения). По прямой, на которой заданы начало отсчета, единица измерения (метр) и направление, движется некоторое тело (материальная точка). Закон движения задан формулой $s = s(t)$, где t — время (в секундах), $s(t)$ — положение тела на прямой (координата движущейся материальной точки) в момент времени t по отношению к началу отсчета. Найти скорость движения тела в момент времени t (в м/с).

Решение. Предположим, что в момент времени t тело находилось в точке M (рис. 160): $OM = s(t)$. Дадим аргументу t приращение Δt и рассмотрим ситуацию в момент времени $t + \Delta t$. Координата материальной точки стала другой, тело в этот момент будет находиться в точке P: $OP = s(t + \Delta t)$.

Значит, за Δt секунд тело переместилось из точки M в точку P. Имеем $MP = OP - OM = s(t + \Delta t) - s(t) = \Delta s$. Итак, $MP = \Delta s$ (м), причем перемещение

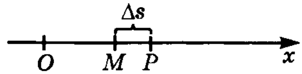


Рис. 160

из точки M в точку P произошло за Δt секунд. Нетрудно найти среднюю скорость $v_{ср}$ движения тела за промежуток времени $[t;\ t + \Delta t]$:

$$v_{ср} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \ (м/с).$$

А что такое скорость $v(t)$ в момент времени t (ее называют иногда *мгновенной скоростью*)? Можно сказать так: это предел средней скорости движения за промежуток времени $[t;\ t + \Delta t]$ при условии, что Δt выбирается все меньше и меньше; точнее: при условии, что $\Delta t \to 0$. Это значит, что $v(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{ср}$.

Подводя итог решению задачи 1, получаем

$$\boxed{v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.}$$

Прежде чем сформулировать вторую задачу и приступить к ее решению, выясним, что следует понимать под *касательной* к плоской кривой. Термином «касательная» мы уже пользовались (на интуитивном уровне) в курсе алгебры 7—9-го классов. Например, мы говорили, что парабола $y = x^2$ *касается* оси x в точке $x = 0$ или, что то же самое, ось x является *касательной* к параболе в точке $x = 0$ (рис. 161). И дело не в том, что ось x и парабола имеют только одну общую точку. Ведь ось y тоже имеет с параболой $y = x^2$ только одну общую точку, однако у вас не возникнет желания назвать ось y касательной к параболе. Обычно касательную определяют следующим образом.

Дана кривая L (рис. 162), на ней выбрана точка M. Возьмем еще одну точку на этой кривой — точку P. Проведем секущую MP. Далее будем приближать точку P по кривой L к точке M. Секущая MP будет изменять свое положение (MP, MP_1, MP_2 и т. д.), она как бы поворачивается вокруг точки M. Часто бывает так, что можно обнаружить в этом процессе прямую, представляющую

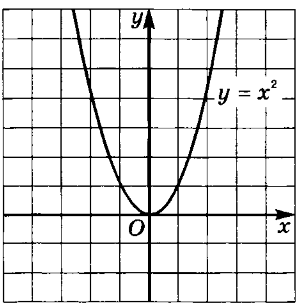


Рис. 161

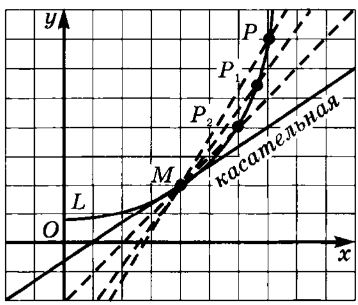


Рис. 162

собой некое предельное положение секущей; эту прямую — предельное положение секущей — называют **касательной к кривой L в точке M.**

Поставьте эксперимент: возьмите параболу $y = x^2$, проведите секущую OP, где O — вершина параболы, P — произвольная точка параболы. Возьмите точку P_1 поближе к O, проведите вторую секущую. Возьмите точку P_2 еще ближе к O, проведите третью секущую и т. д. Вы обнаружите, что предельным положением для построенных секущих будет ось x — это и есть касательная к параболе в ее вершине (что соответствует нашим интуитивным представлениям).

***Задача 2** (о касательной к графику функции).* Дан график функции $y = f(x)$. На нем выбрана точка $M(a;\ f(a))$, в этой точке к графику функции проведена касательная (мы предполагаем, что она существует). Найти угловой коэффициент касательной.

Решение. Дадим аргументу приращение Δx и рассмотрим на графике (рис. 163) точку P с абсциссой $a + \Delta x$. Ордината точки P равна $f(a + \Delta x)$. Угловой коэффициент секущей MP, т. е. тангенс угла между секущей и осью x, вычисляется по формуле $k_{\text{сек}} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Если мы теперь устремим Δx к нулю, то точка P начнет приближаться по кривой к точке M. Касательную мы охарактеризовали как предельное положение секущей при этом приближении. Значит, естественно считать, что угловой коэффициент касательной $k_{\text{кас}}$ будет вычисляться по формуле $k_{\text{кас}} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k_{\text{сек}}$.

Используя приведенную выше формулу для $k_{\text{сек}}$, получаем

$$\boxed{k_{\text{кас}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.}$$

Замечание. Приведенное решение неприменимо к случаю, когда касательная перпендикулярна оси абсцисс (см., например, рис. 164). Уравнение такой прямой имеет вид $x = a$, об угловом коэффициенте говорить в этом случае некорректно, поскольку он не существует.

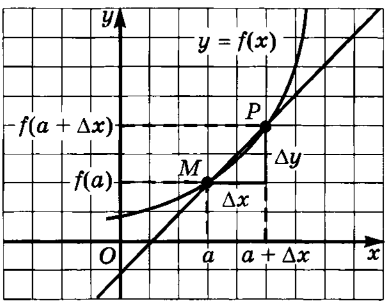


Рис. 163

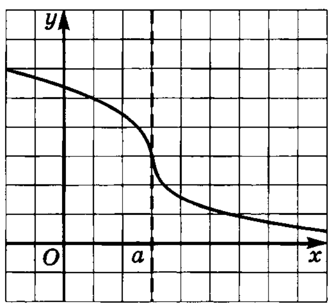


Рис. 164

Итак, две различные задачи привели к одной и той же математической модели — пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю. Многие задачи физики, химии, экономики и т. д. приводят в процессе решения к такой же модели. Значит, эту математическую модель надо специально изучить, т. е.:

а) дать ее формальное определение и присвоить ей новый термин;

б) ввести для нее обозначение;

в) исследовать свойства новой модели.

Этим мы и займемся.

2. Определение производной

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале, содержащем внутри себя точку x_0. Дадим аргументу приращение Δx такое, чтобы не выйти из этого интервала. Найдем соответствующее приращение функции Δy (при переходе от точки x_0 к точке $x_0 + \Delta x$) и составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если существует предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, то указанный предел называют **производной функции $y = f(x)$ в точке x_0** и обозначают $f'(x_0)$.

Итак,

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).}$$

Для обозначения производной часто используют символ y'.

Отметим, что $y' = f'(x)$ — это новая функция, но, естественно, связанная с функцией $y = f(x)$, определенная во всех точках x, в которых существует указанный выше предел. Эту функцию называют так: **производная функции $y = f(x)$.**

В примере 8 § 26 мы доказали, что для линейной функции $y = kx + m$ справедливо равенство $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$. Это означает, что $y' = k$, или, подробнее,

$$\boxed{(kx + m)' = k.}$$

В частности,

$$\boxed{(x)' = 1.}$$

В примере 9 § 26 мы доказали, что для функции $y = x^2$ справедливо равенство $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$. Это означает, что $y' = 2x$, или, подробнее,

$$\boxed{(x^2)' = 2x.}$$

Рассмотренные в пункте 1 задачи 1 и 2 позволяют истолковать производную с физической и геометрической точек зрения.

Физический (механический) смысл производной состоит в следующем. Если $s = s(t)$ — закон прямолинейного движения тела, то производная выражает *мгновенную скорость* в момент времени t:

$$\boxed{v(t) = s'(t).}$$

На практике во многих отраслях науки используется обобщение полученного равенства: если некоторый процесс протекает по закону $s = s(t)$, то производная $s'(t)$ выражает скорость протекания процесса в момент времени t.

Геометрический смысл производной состоит в следующем. Если к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$ можно провести касательную, непараллельную оси y, то $f'(a)$ выражает угловой коэффициент касательной:

$$\boxed{k = f'(a).}$$

Поскольку $k = \operatorname{tg} \alpha$, то верно равенство $f'(a) = \operatorname{tg} \alpha$ (рис. 165).

А теперь истолкуем определение производной с точки зрения приближенных равенств. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в конкретной точке x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Это означает, что около точки x выполняется приближенное равенство $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \approx$ $\approx f'(x)$, или $\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x$.

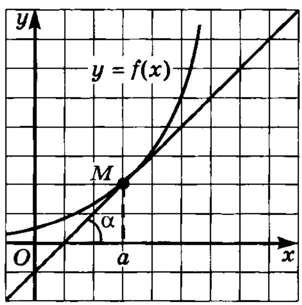


Рис. 165

Содержательный смысл полученного приближенного равенства заключается в следующем: приращение функции «почти пропорционально» приращению аргумента, причем коэффициентом пропорциональности является значение производной в заданной точке x. Например, для функции $y = x^2$ справедливо приближенное равенство $\Delta y \approx 2x \cdot \Delta x$.

Если внимательно проанализировать определение производной, то мы обнаружим, что в нем заложен алгоритм ее нахождения. Сформулируем его.

Алгоритм нахождения производной функции $y = f(x)$

1. Зафиксировать значение x, найти $f(x)$.
2. Дать аргументу x приращение Δx, перейти в новую точку $x + \Delta x$, найти $f(x + \Delta x)$.
3. Найти приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
4. Составить отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
5. Вычислить $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

   Этот предел и есть $f'(x)$.

Пример 1. Найти производную постоянной функции $y = C$.

Решение. Здесь $f(x) = C$. Воспользуемся алгоритмом нахождения производной.

1) Для фиксированного значения x имеем $f(x) = C$.

2) В точке $x + \Delta x$ имеем $f(x + \Delta x) = C$.

3) $\Delta y = C - C = 0$.

4) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$.

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$.

Ответ: $(C)' = 0$.

Пример 2. Найти производную функции $y = \dfrac{1}{x}$.

Решение. Здесь $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Воспользуемся алгоритмом нахождения производной.

1) Для фиксированного значения x (разумеется, мы полагаем, что $x \neq 0$) имеем $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

2) В точке $x + \Delta x$ имеем $f(x + \Delta x) = \dfrac{1}{x + \Delta x}$ (при этом предполагаем, что x и $x + \Delta x$ — числа одного знака, чтобы в промежутке между x и $x + \Delta x$ не оказалась точка 0).

3) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \dfrac{1}{x + \Delta x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)} = \dfrac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)}$.

4) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)\Delta x} = \dfrac{-1}{x(x + \Delta x)}$.

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-1}{x(x + \Delta x)} = -\dfrac{1}{x^2}$.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.

Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x, то ее называют *дифференцируемой в точке x*. Процедуру нахождения производной функции $y = f(x)$ называют *дифференцированием функции $y = f(x)$*.

Обсудим такой вопрос: как связаны между собой непрерывность и дифференцируемость функции в точке.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. Тогда к графику функции в точке $M(x; f(x))$ можно провести касательную, причем, напомним, угловой коэффициент касательной равен $f'(x)$. Такой график не может «разрываться» в точке M, т. е. функция обязана быть непрерывной в точке x.

Это были рассуждения «на пальцах». Приведем более строгое рассуждение. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то выполняется приближенное равенство $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$. Если в этом равенстве Δx устремить к нулю, то и Δy будет стремиться к нулю, а это и есть условие непрерывности функции в точке (см. пункт 3 в § 26).

Итак, *если функция дифференцируема в точке x, то она и непрерывна в этой точке.*

Обратное утверждение неверно. Например: функция $y = |x|$ непрерывна везде, в частности в точке $x = 0$ (рис. 166), но касательная к графику функции в «точке стыка» (0; 0) не существует. Если в некоторой точке к графику функции нельзя

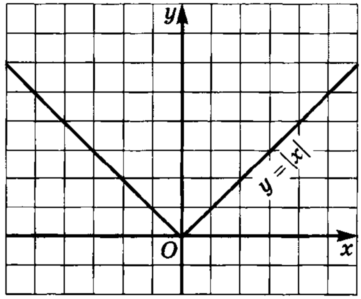


Рис. 166

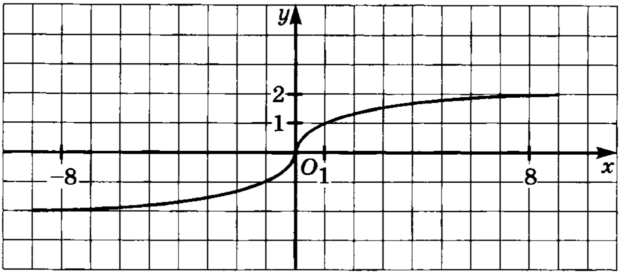


Рис. 167

провести касательную, то в этой точке не существует производная.

Еще один пример. На рисунке 167 изображен график функции $y = \sqrt[3]{x}$. Эта функция непрерывна на всей числовой прямой, в том числе в точке $x = 0$. И касательная к графику функции существует в любой точке, в том числе в точке $x = 0$. Но в этой точке касательная совпадает с осью y, т. е. перпендикулярна оси абсцисс, ее уравнение имеет вид $x = 0$. Углового коэффициента у такой прямой нет, значит, не существует и $f'(0)$.

Итак, мы познакомились с новым свойством функции — дифференцируемостью. А как по графику функции можно сделать вывод о ее дифференцируемости?

Ответ фактически получен выше. Если в некоторой точке к графику функции можно провести касательную, не перпендикулярную оси абсцисс, то в этой точке функция дифференцируема. Если в некоторой точке касательная к графику функции не существует или она перпендикулярна оси абсцисс, то в этой точке функция недифференцируема. Так, по графику функции, изображенному на рисунке 168, можно сделать вывод: функция непрерывна всюду, кроме точки $x = a$; функция дифференцируема всюду, кроме точек $x = a$, $x = b$, $x = c$; в первых двух точках касательная не существует, а в третьей точке касательная параллельна оси y.

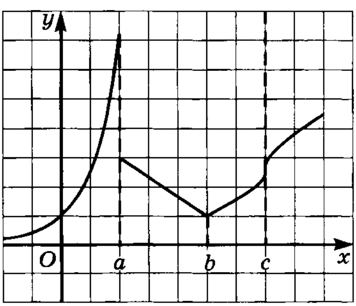


Рис. 168

Если же говорить о непрерывности функции не в локальном смысле (в точке), а в глобальном (на множестве), то делаем такой вывод: функция непрерывна на открытом луче $(-\infty; a)$ и на луче $[a; +\infty)$, хотя подчеркнем еще раз, в самой точке $x = a$ она не является непрерывной.

Упражнения

27.1. Закон движения точки по прямой задается формулой $s(t) = 2t + 1$, где t — время (в секундах), $s(t)$ — отклонение точки в момент времени t (в метрах) от начального положения. Найдите среднюю скорость движения точки с момента $t_1 = 2$ с до момента:

а) $t_2 = 3$ с;   в) $t_2 = 2{,}1$ с;
б) $t_2 = 2{,}5$ с;   г) $t_2 = 2{,}05$ с.

27.2. Закон движения точки по прямой задается формулой $s(t) = t^2$, где t — время (в секундах), $s(t)$ — отклонение точки в момент времени t (в метрах) от начального положения. Найдите среднюю скорость движения точки с момента $t_1 = 0$ с до момента:

а) $t_2 = 0{,}1$ с;   в) $t_2 = 0{,}2$ с;
б) $t_2 = 0{,}01$ с;   г) $t_2 = 0{,}02$ с.

27.3. Закон движения точки по прямой задается формулой $s = s(t)$, где t — время (в секундах), $s(t)$ — отклонение точки в момент времени t (в метрах) от начального положения. Найдите мгновенную скорость движения точки в момент времени t, если:

а) $s(t) = 4' + 1$;   в) $s(t) = 3t + 2$;
б) $s(t) = 6t - 2$;   г) $s(t) = 5t - 1$.

27.4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком. Определите значения $f'(x_1)$ и $f'(x_2)$, если график функции изображен:

а) на рис. 169;   в) на рис. 171;
б) на рис. 170;   г) на рис. 172.

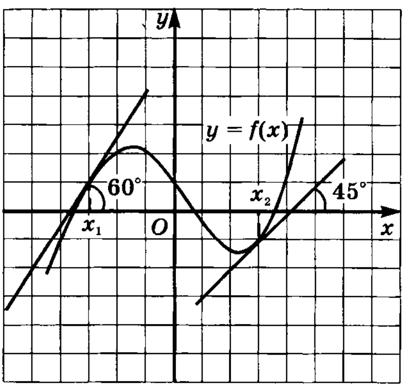


Рис. 169

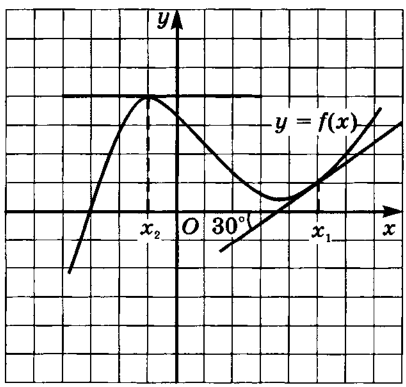


Рис. 170

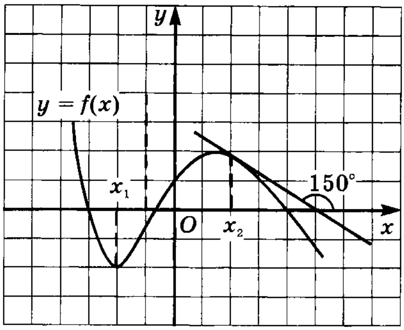


Рис. 171

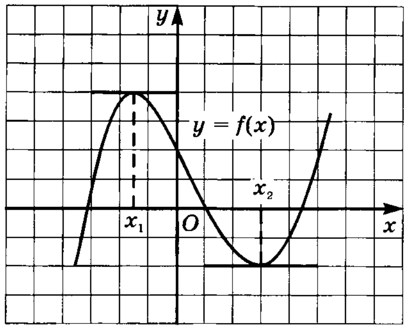


Рис. 172

27.5. Найдите скорость изменения функции в произвольной точке x:

а) $y = 9{,}5x - 3$; в) $y = 6{,}7x - 13$;

б) $y = -16x + 3$; г) $y = -9x + 4$.

Найдите скорость изменения функции $y = f(x)$ в указанной точке x_0:

27.6. а) $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$; в) $f(x) = x^2$, $x_0 = -2$;

б) $f(x) = x^2$, $x_0 = -1$; г) $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$.

27.7. а) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 2$; в) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 5$;

б) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -1$; г) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -0{,}5$.

○27.8. Закон движения точки по прямой задается формулой $s(t) = t^2$, где t — время (в секундах), $s(t)$ — отклонение точки в момент времени t (в метрах) от начального положения. Найдите скорость и ускорение в момент времени t, если:

а) $t = 1$ с; в) $t = 2$ с;

б) $t = 2{,}1$ с; г) $t = 3{,}5$ с.

Указание: ускорение — это скорость изменения скорости.

○27.9. На рисунке 173 изображен график движения туриста от базы и обратно. С какой скоростью он шел первые 2 часа? Последующие 2 часа? На какое максимальное расстояние удалился турист от базы? С какой скоростью он шел назад? Через сколько времени вернулся на базу? Сколько времени отдыхал в пути?

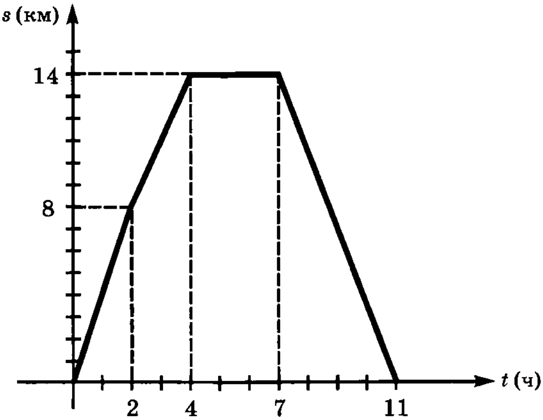


Рис. 173

О27.10. Закон движения точки по прямой задается формулой $s(t) = 2t^2 + t$, где t — время (в секундах), $s(t)$ — отклонение точки в момент времени t (в метрах) от начального положения. Найдите среднюю скорость движения точки с момента $t_1 = 0$ с до момента t_2, если:

а) $t_2 = 0{,}6$ с; в) $t_2 = 0{,}5$ с;

б) $t_2 = 0{,}2$ с; г) $t_2 = 0{,}1$ с.

О27.11. Закон движения точки по прямой задается формулой $s = s(t)$, где t — время, $s(t)$ — отклонение точки в момент времени t от начального положения. Найдите мгновенную скорость движения точки в момент времени t, если:

а) $s(t) = t^2 + 3$; в) $s(t) = t^2 + 4$;

б) $s(t) = t^2 - t$; г) $s(t) = t^2 - 2t$.

27.12. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 174). Укажите любые два значения аргумента x_1 и x_2, при которых:

а) $f'(x_1) > 0$; $f'(x_2) > 0$; в) $f'(x_1) < 0$; $f'(x_2) < 0$;

б) $f'(x_1) < 0$; $f'(x_2) > 0$; г) $f'(x_1) > 0$; $f'(x_2) < 0$.

О27.13. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (см. рис. 174). Сравните значения производной в указанных точках:

а) $f'(-7)$ и $f'(-2)$; в) $f'(-9)$ и $f'(0)$;

б) $f'(-4)$ и $f'(2)$; г) $f'(-1)$ и $f'(5)$.

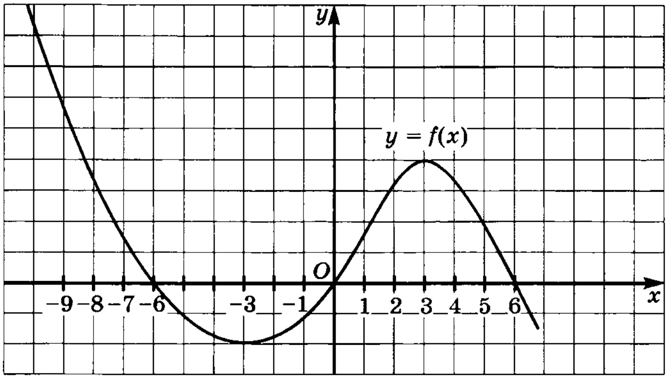


Рис. 174

27.14. Функция $y = \varphi(x)$ задана своим графиком (рис. 175). Укажите несколько значений аргумента, для которых:

а) $\varphi'(x) > 0$; в) $\varphi'(x) < 0$;

б) $\varphi'(x) < 0$ и $x > 0$; г) $\varphi'(x) > 0$ и $x < 0$.

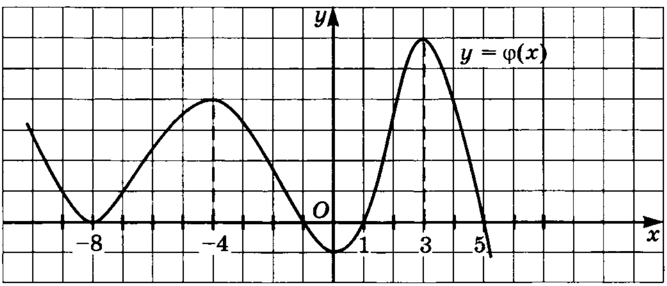


Рис. 175

§ 28. Вычисление производных

1. Формулы дифференцирования

Формулами дифференцирования обычно называют формулы для нахождения производных конкретных функций, например:

$$C' = 0;$$
$$x' = 1;$$
$$(kx + m)' = k;$$
$$(x^2)' = 2x;$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Вы, конечно, узнали эти формулы — они были получены в § 27.

Список формул дифференцирования будет постепенно пополняться. Вот еще три формулы (первую из них мы докажем в конце пункта 1, а вторую и третью приведем без доказательства):

$$\boxed{\begin{gathered}\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}};\\ (\sin x)' = \cos x;\\ (\cos x)' = -\sin x.\end{gathered}}$$

Пример 1. Найти значение производной данной функции в данной точке:

а) $y = 3x + 5$, $x = 4$;

б) $y = x^2$, $x = -1$;

в) $y = \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{2}$;

г) $y = \sqrt{x}$, $x = 4$;

д) $y = \sin x$, $x = 0$;

е) $y = \cos x$, $x = \frac{\pi}{6}$.

Решение. а) Пусть $f(x) = 3x + 5$. Имеем $(3x + 5)' = 3$; значит, производная равна 3 в любой точке x, в частности в заданной точке $x = 4$. Это можно записать так: $f'(4) = 3$.

б) Пусть $f(x) = x^2$. Имеем $(x^2)' = 2x$; значит, $f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$.

в) Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$. Имеем $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; значит, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -4$.

г) Пусть $f(x) = \sqrt{x}$. Имеем $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; значит, $f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$.

д) Пусть $f(x) = \sin x$. Имеем $(\sin x)' = \cos x$; значит, $f'(0) = \cos 0 = 1$.

е) Пусть $f(x) = \cos x$. Имеем $(\cos x)' = -\sin x$; значит, $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$. ◼

Когда в § 10 мы строили график функции $y = \sin x$, то обратили внимание на следующее обстоятельство: синусоида выходит из начала координат как бы под углом 45° (рис. 176). В то время мы не могли дать объяснения этому факту. Теперь «момент истины» наступил. Мы только что видели, что для функции $y = \sin x$ выполняется равенство $f'(0) = 1$. $f'(0)$ в данном случае — это угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \sin x$ в точке $x = 0$. Если угловой коэффициент прямой равен 1, то прямая образует с положительным направлением оси x угол 45°. Это обстоятельство и учитывается при построении графика функции $y = \sin x$.

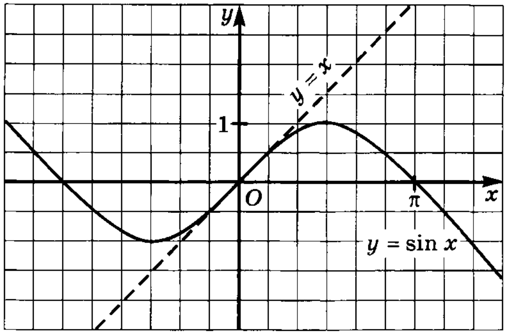


Рис. 176

Пример 2. Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^2$ в точке $x = 1$.

Р е ш е н и е. Пусть $f(x) = x^2$. Уравнение касательной, как уравнение всякой прямой, имеет вид $y = kx + m$. Найдем сначала k — это угловой коэффициент касательной, который равен $f'(1)$; здесь $f(x) = x^2$.

Имеем $(x^2)' = 2x$, значит, $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$. Итак, $k = 2$, т. е. уравнение касательной надо искать в виде $y = 2x + m$.

Осталось найти значение коэффициента m. Для этого воспользуемся тем, что касательная проходит через точку на параболе $y = x^2$ с абсциссой $x = 1$, т. е. через точку (1; 1). Подставим $x = 1$, $y = 1$ в уравнение $y = 2x + m$:

$$1 = 2 \cdot 1 + m,$$
$$m = -1.$$

Итак, уравнение касательной имеет вид $y = 2x - 1$. На рисунке 177 изображена парабола $y = x^2$ и построена прямая $y = 2x - 1$; чертеж иллюстрирует тот факт, что эта прямая касается параболы в точке (1; 1).

Ответ: $y = 2x - 1$.

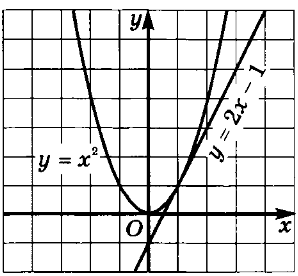


Рис. 177

Теперь, как было обещано в начале параграфа, выведем формулу дифференцирования функции $y = \sqrt{x}$. Воспользуемся алгоритмом из § 27, полагая, что $f(x) = \sqrt{x}$.

1) Для фиксированного значения x (разумеется, мы берем $x > 0$) имеем $f(x) = \sqrt{x}$;

2) $f(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x}$;

3) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$;

4) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$. Здесь полезно применить искусственный прием: домножить числитель и знаменатель дроби на выражение $\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}$. Что это даст? В числителе мы получим «разность квадратов»: $\left(\sqrt{x + \Delta x}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2$, т. е. $(x + \Delta x)$ — x, или Δx; сама дробь примет вид $\dfrac{\Delta x}{\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right) \cdot \Delta x}$, т. е. $\dfrac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$.

Итак, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$;

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Таким образом, $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

В процессе рассуждений мы воспользовались тем, что если $\Delta x \to 0$, то $x + \Delta x \to x$ и $\sqrt{x + \Delta x} \to \sqrt{x}$.

2. Правила дифференцирования

Здесь речь пойдет о нахождении производных суммы, произведения, частного функций.

Теорема 1. **Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x, то и их сумма имеет производную в точке x, причем производная суммы равна сумме производных:**

$$\boxed{(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).}$$

На практике эту теорему формулируют в виде следующего правила: *производная суммы равна сумме производных*. При этом речь может идти о дифференцировании суммы любого числа функций.

Например, $(x^2 + \sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x$.

Теорема 2. **Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x, то и функция $y = kf(x)$ имеет производную в точке x, причем**

$$\boxed{(kf(x))' = kf'(x).}$$

На практике эту теорему формулируют в виде следующего правила: *постоянный множитель можно вынести за знак производной*.

Например,

$$(5x^2)' = 5(x^2)' = 5 \cdot 2x = 10x;$$

$$\left(-\frac{\cos x}{3}\right)' = -\frac{1}{3}(\cos x)' = -\frac{1}{3}(-\sin x) = \frac{1}{3}\sin x.$$

Теорема 3. **Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x, то и их произведение имеет производную в точке x, причем**

$$\boxed{(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x).}$$

На практике эту теорему формулируют в виде следующего правила: *производная произведения двух функций равна сумме двух слагаемых; первое слагаемое есть произведение производной первой функции на вторую функцию, а второе слагаемое есть произведение первой функции на производную второй функции.*

Например,

$$((2x + 3)\sin x)' = (2x + 3)'\sin x + (2x + 3)(\sin x)' =$$
$$= 2\sin x + (2x + 3)\cos x.$$

Теорема 4. **Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x и в этой точке $g(x) \neq 0$, то функция $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ имеет производную в точке x, причем**

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.}$$

Например,

$$\left(\frac{x^2}{5 - 4x}\right)' = \frac{(x^2)' \cdot (5 - 4x) - x^2(5 - 4x)'}{(5 - 4x)^2} =$$

$$= \frac{2x(5 - 4x) - x^2(-4)}{(5 - 4x)^2} = \frac{10x - 4x^2}{(5 - 4x)^2}.$$

Дальнейший план изложения материала в этом пункте будет таким. Сначала мы выведем первые два правила дифференцирования — это сравнительно нетрудно. Затем рассмотрим ряд примеров на использование правил и формул дифференцирования, чтобы вы к ним привыкли. В самом конце пункта мы приведем доказательство третьего правила дифференцирования — для тех, кому это интересно.

Доказательство теоремы 1.

Воспользуемся алгоритмом нахождения производной.

1) Введем обозначение: $f(x) + g(x) = h(x)$. Для фиксированного значения x имеем $h(x) = f(x) + g(x)$.

2) В точке $x + \Delta x$ имеем $h(x + \Delta x) = f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)$.

3) $\Delta y = h(x + \Delta x) - h(x) = (f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)) - (f(x) + g(x)) = (f(x + \Delta x) - f(x)) + (g(x + \Delta x) - g(x)) = \Delta f + \Delta g$.

Итак, $\Delta y = \Delta f + \Delta g$.

4) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta f + \Delta g}{\Delta x} = \dfrac{\Delta f}{\Delta x} + \dfrac{\Delta g}{\Delta x}$.

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\dfrac{\Delta f}{\Delta x} + \dfrac{\Delta g}{\Delta x}\right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta g}{\Delta x} = f'(x) + g'(x)$.

Итак,

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Доказательство теоремы 2.

Воспользуемся алгоритмом нахождения производной.

1) Введем обозначение $kf(x) = h(x)$. Для фиксированного значения x имеем $h(x) = kf(x)$.

2) В точке $x + \Delta x$ имеем $h(x + \Delta x) = kf(x + \Delta x)$.

3) $\Delta y = h(x + \Delta x) - h(x) = kf(x + \Delta x) - kf(x) = k(f(x + \Delta x) - f(x)) = k\Delta f$.

Итак, $\Delta y = k\Delta f$.

4) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{k\Delta f}{\Delta x} = k\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = k \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = kf'(x)$.

Итак,

$$(kf(x))' = kf'(x).$$

Пример 3. Найти производную функции $y = 3x^2 - 4x + 2$.

Решение. $y' = (3x^2 - 4x + 2)' = (3x^2)' + (-4x + 2)' =$

$$= 3(x^2)' + (-4) = 3 \cdot 2x - 4 = 6x - 4.$$

Мы воспользовались первым и вторым правилами, а также формулами дифференцирования линейной функции $y = -4x + 2$ и функции $y = x^2$.

Ответ: $y' = 6x - 4$.

Пример 4. Найти производную функции:

а) $y = x^3$; б) $y = x^4$; в) $y = x^5$.

Решение. а) Представим x^3 в виде $x^2 \cdot x$ и применим правило дифференцирования произведения:

$$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x^2 \cdot (x)' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2.$$

Итак, $(x^3)' = 3x^2$.

б) Представим x^4 в виде $x^3 \cdot x$ и применим правило дифференцирования произведения:

$$(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = (x^3)' \cdot x + x^3 \cdot (x)' = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1 = 4x^3.$$

Итак, $(x^4)' = 4x^3$.

в) Представим x^5 в виде $x^4 \cdot x$ и применим правило дифференцирования произведения:

$$(x^5)' = (x^4 \cdot x)' = (x^4)' \cdot x + x^4 \cdot (x)' = 4x^3 \cdot x + x^4 \cdot 1 = 5x^4.$$

Итак, $(x^5)' = 5x^4$.

Ответ: а) $(x^3)' = 3x^2$; б) $(x^4)' = 4x^3$; в) $(x^5)' = 5x^4$.

Теперь сравним пять формул: две формулы, которые мы знали раньше, и те три формулы, которые вывели в примере 4:

$$x' = 1;$$
$$(x^2)' = 2x;$$
$$(x^3)' = 3x^2;$$
$$(x^4)' = 4x^3;$$
$$(x^5)' = 5x^4.$$

Возникает естественная гипотеза: для любого натурального показателя n справедлива формула дифференцирования

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}.} \qquad (1)$$

«Естественная гипотеза» — это стилистический оборот из области интуиции. Интуиция хороша для открытия новых фактов, но не для их обоснования. Формулу (1) мы «прочувствовали», но строго не обосновали. Приведем (для интересующихся) строгое доказательство.

Мы знаем, что $x' = 1$. Эту формулу можно переписать так: $(x^1)' = 1 \cdot x^{1-1}$. Значит, формула (1) верна для $n = 1$.

Предположим, что формула (1) верна для натурального числа $n = k$, т. е. предположим, что верно равенство $(x^k)' = kx^{k-1}$. Докажем, что тогда формула (1) верна и для следующего натурального числа $n = k + 1$, т. е. докажем, что $(x^{k+1})' = (k + 1)x^k$.

В самом деле,

$$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)' \cdot x + x^k \cdot (x)' = kx^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 = (k + 1)x^k.$$

Итак, для $n = 1$ формула (1) верна — мы это проверили. Далее мы доказали, что если формула (1) верна для $n = k$, то она верна и для $n = k + 1$.

Воспользуемся этим: формула (1) верна для $n = 1$, значит, она верна и для следующего числа $n = 2$; так как она верна для $n = 2$, то она верна и для следующего числа $n = 3$ и т. д. Значит, формула (1) верна для любого натурального числа n.

Использованный здесь метод рассуждений носит в математике название *метод математической индукции*.

Пример 5. Найти точки, в которых касательная к графику функции $y = x^3 - 3x + 2$ параллельна оси x.

Решение. $y' = (x^3 - 3x + 2)' = 3x^2 - 3$.

Если касательная параллельна оси x, то ее угловой коэффициент равен нулю. Но, с другой стороны, угловой коэффициент касательной равен значению производной в абсциссе точки касания. Значит, нужно найти точки, в которых производная, т. е. $3x^2 - 3$, обращается в нуль. Из уравнения $3x^2 - 3 = 0$ находим $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

Так как $y = x^3 - 3x + 2$, то находим соответственно

$$y_1 = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0;$$
$$y_2 = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 2 = 4.$$

Итак, касательная, проведенная к графику функции $y = x^3 - 3x + 2$ в точке (1; 0) или в точке (−1; 4), будет параллельна оси x (в точке (1; 0) она даже совпадает с осью x). На рисунке 178 дана геометрическая иллюстрация полученного результата — построен график функции $y = x^3 - 3x + 2$. При этом мы учли, что $y = 0$ при $x = -2$, т. е. график пересекает ось абсцисс в точке $x = -2$. ◁

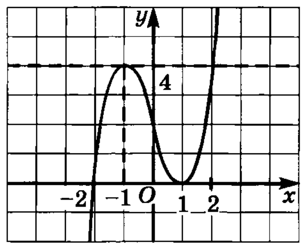


Рис. 178

Пример 6. Найти производную функции:

а) $y = \operatorname{tg} x$; б) $y = \operatorname{ctg} x$.

Решение. а) Воспользуемся тем, что $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, и правилом дифференцирования частного (теорема 4). Получим

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Итак, мы вывели еще одну формулу дифференцирования:

$$\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.}$$

Понятно, что эта формула справедлива лишь при допустимых значениях x, т. е. при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

б) Рассуждая аналогично (советуем провести соответствующие рассуждения), получим

$$\boxed{(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.}$$

Завершая этот пункт, выведем правило дифференцирования произведения, т. е. функции $y = f(x)\, g(x)$.

Доказательство теоремы 3.

Воспользуемся алгоритмом нахождения производной, а также тем, что равенство $f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f$ можно записать в виде $f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f$.

1) Введем обозначение $f(x)g(x) = h(x)$. Для фиксированного значения x имеем $h(x) = f(x)g(x)$.

2) В точке $x + \Delta x$ имеем

$$h(x + \Delta x) = f(x + \Delta x)\, g(x + \Delta x) = (f(x) + \Delta f)\, (g(x) + \Delta g) =$$
$$= f(x)\, g(x) + \Delta f\, g(x) + f(x)\, \Delta g + \Delta f \Delta g.$$

3) $\Delta y = h(x + \Delta x) - h(x) = (f(x)\, g(x) + \Delta f\, g(x) + f(x)\, \Delta g + \Delta f \Delta g) -$
$$- f(x)\, g(x) = \Delta f\, g(x) + f(x)\, \Delta g + \Delta f \Delta g.$$

4) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f g(x) + f(x)\Delta g + \Delta f \Delta g}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} g(x) + \frac{\Delta g}{\Delta x} f(x) + \frac{\Delta f\, \Delta g}{\Delta x\, \Delta x} \Delta x.$$

5) $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} g(x) + \frac{\Delta g}{\Delta x} f(x) + \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} \Delta x \right) =$$
$$= f'(x)\, g(x) + g'(x)\, f(x) + f'(x)\, g'(x) \cdot 0 = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x).$$

Итак,

$$(f(x)\, g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x).$$

3. Дифференцирование функции $y = f(kx + m)$

Мы знаем, чему равны производные функций $y = x^n$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \sqrt{x}$. Нередко на практике приходится находить производные функций $y = \sin 2x$, $y = \cos\left(3 - \frac{x}{2}\right)$ и т. д. Возникает вопрос: если мы знаем, чему равна производная функции $y = f(x)$, то как вычислить производную функции $y = f(kx + m)$?

С функцией $y = \sin 2x$ можно поступить так. Известно, что $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Тогда

$$(\sin 2x)' = (2 \sin x \cos x)' = 2\, ((\sin x)' \cos x + \sin x\, (\cos x)') =$$
$$= 2\, (\cos x \cos x + \sin x\, (-\sin x)) = 2\, (\cos^2 x - \sin^2 x) = 2 \cos 2x.$$

Итак, воспользовавшись правилом дифференцирования произведения и правилом вынесения постоянного множителя за знак производной, а также формулами синуса и косинуса двойного аргумента, мы доказали, что

$$(\sin 2x)' = 2\cos 2x.$$

А как быть с производной функции $y = \sin 3x$ или $y = \cos 4x$? Неужели каждый раз придется применять соответствующие формулы тригонометрии? Не придется. Обратим внимание на выведенную формулу. Чем она отличается от формулы дифференцирования функции $y = \sin x$? Только тем, что появился дополнительный множитель 2, а в роли аргумента выступает $2x$. Точно так же будет обстоять дело и в других аналогичных случаях: используется известная формула дифференцирования и появляется дополнительный множитель, равный коэффициенту при x. Например, справедливы следующие формулы:

$$(\cos 4x)' = -4 \cdot (-\sin 4x);$$

$$(\sin 3x)' = 3 \cdot \cos 3x;$$

$$\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}};$$

$$((2x+1)^5)' = 2 \cdot 5(2x+1)^4 = 10(2x+1)^4.$$

Вообще справедливо следующее утверждение (приведем его без доказательства):

Теорема 5. **Производная функции $y = f(kx + m)$ вычисляется по формуле**

$$\boxed{(f(kx+m))' = kf'(kx+m).}$$

Пример 7. Найти значение производной функции $y = f(x)$, где $f(x) = \sqrt{7 - 2{,}16x}$, в точке $x = 1$.

Решение. Сначала найдем производную в произвольной точке x. Известно, что $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. По этой формуле найдем интересующую нас производную, но при этом учтем два обстоятельства:

1) под знаком корня напишем не x, а $7 - 2{,}16x$;

2) укажем дополнительный множитель, равный $(-2{,}16)$ — это коэффициент при x. Таким образом,

$$\left(\sqrt{7 - 2{,}16x}\right)' = -2{,}16 \cdot \frac{1}{2\sqrt{7 - 2{,}16x}}.$$

Чтобы вычислить $f'(1)$, в полученное выражение подставим $x = 1$:

$$f'(1) = -2{,}16 \cdot \frac{1}{2\sqrt{7 - 2{,}16}} = -2{,}16 \cdot \frac{1}{2\sqrt{4{,}84}} = -\frac{2{,}16}{4{,}4} = -\frac{27}{55}.$$

Ответ: $f'(1) = -\frac{27}{55}$.

Упражнения

Найдите производную функции:

28.1. а) $y = 7x + 4$; в) $y = -6x + 1$;

б) $y = x^2$; г) $y = \frac{1}{x}$.

28.2. а) $y = \sin x$; б) $y = \sqrt{x}$; в) $y = \cos x$; г) $y = 10^{10}$.

Найдите значение производной функции $y = g(x)$ в точке x_0, если:

28.3. а) $g(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$; в) $g(x) = -3x - 11$, $x_0 = -3$;

б) $g(x) = x^2$, $x_0 = -7$; г) $g(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 0{,}5$.

28.4. а) $g(x) = \sin x$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$; в) $g(x) = \cos x$, $x_0 = -3\pi$;

б) $g(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$; г) $g(x) = \sin x$, $x_0 = 0$.

Найдите скорость изменения функции $y = h(x)$ в точке x_0, если:

28.5. а) $h(x) = 7x - 19$, $x_0 = -2$;

б) $h(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 16$;

в) $h(x) = -6x + 4$, $x_0 = 0{,}5$;

г) $h(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 9$.

28.6. а) $h(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -2$; в) $h(x) = x^2$, $x_0 = -0{,}1$;

б) $h(x) = \sin x$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$; г) $h(x) = \cos x$, $x_0 = \pi$.

Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

28.7. а) $f(x) = x^2$, $x_0 = -4$;
б) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -\frac{1}{3}$;
в) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = \frac{1}{2}$;
г) $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$.

28.8. а) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$;
б) $f(x) = \cos x$, $x_0 = -\frac{\pi}{4}$;
в) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$;
г) $f(x) = \sin x$, $x_0 = -\frac{\pi}{6}$.

28.9. Укажите, какой формулой можно задать функцию $y = f(x)$, если:
а) $f'(x) = 2x$;
б) $f'(x) = \cos x$;
в) $f'(x) = 3$;
г) $f'(x) = -\sin x$.

Найдите производную функции:

28.10. а) $y = x^2 - 7x$;
б) $y = \sqrt{x} - 9x^2$;
в) $y = 7x^2 + 3x$;
г) $y = \sqrt{x} - 5x^2$.

28.11. а) $y = \frac{1}{x} + 4x$;
б) $y = -2\sqrt{x} - \frac{1}{x}$;
в) $y = \frac{1}{x} - 6x$;
г) $y = 8\sqrt{x} + \frac{1}{x}$.

28.12. а) $y = \sin x + 3$;
б) $y = 4\cos x$;
в) $y = \cos x - 6$;
г) $y = -2\sin x$.

28.13. а) $y = \cos x + 2x$;
б) $y = 3\sin x + \cos x$;
в) $y = \sin x - 3x$;
г) $y = 2\cos x + \sin x$.

28.14. а) $x = x^9$; б) $y = x^{10}$; в) $x = x^{39}$; г) $y = x^{201}$.

28.15. а) $y = x^3 + 2x^5$;
б) $y = x^4 - x^9$;
в) $y = x^3 + 4x^{100}$;
г) $y = x^4 - 7x^9$.

Найдите производную функции:

28.16. а) $y = (x^2 - 1)(x^4 + 2)$; в) $y = (x^2 + 3)(x^4 - 1)$;

б) $y = (x^3 + 1)\sqrt{x}$; г) $y = \sqrt{x}(x^4 + 2)$.

28.17. а) $y = \left(\frac{1}{x} + 1\right)(2x - 3)$; в) $y = \left(\frac{1}{x} + 8\right)(5x - 2)$;

б) $y = \sqrt{x}\cos x$; г) $y = \sqrt{x}\sin x$.

○28.18. а) $y = \frac{x^3}{2x + 4}$; в) $y = \frac{x^2}{3 - 4x}$;

б) $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$; г) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$.

28.19. а) $y = 3\sin x + \operatorname{ctg} x$; в) $y = \cos x + \operatorname{tg} x$;

б) $y = \operatorname{tg} x - \cos x$; г) $y = 6\operatorname{tg} x - \sin x$.

28.20. а) $y = x\operatorname{tg} x$; в) $y = x\operatorname{ctg} x$;

б) $y = \sin x \operatorname{tg} x$; г) $y = \cos x \operatorname{ctg} x$.

Найдите значение производной функции в точке x_0:

28.21. а) $y = x^2 + 2x - 1,\ x_0 = 0$;

б) $y = x^3 - 3x + 2,\ x_0 = -1$;

в) $y = x^2 + 3x - 4,\ x_0 = 1$;

г) $y = x^3 - 9x^2 + 7,\ x_0 = 2$.

28.22. а) $y = \frac{2}{x} - 1,\ x_0 = 4$; в) $y = \frac{8}{x} - 6,\ x_0 = 1$;

б) $y = \sqrt{x} + 4,\ x_0 = 9$; г) $y = \sqrt{x} + 5,\ x_0 = 4$.

○28.23. Вычислите скорость изменения функции $y = g(x)$ в точке x_0:

а) $g(x) = x^3 + 2x,\ x_0 = 2$;

б) $g(x) = (\sqrt{x} + 1)\sqrt{x},\ x_0 = 1$;

в) $g(x) = x^2 + 4\sqrt{x} - 4x,\ x_0 = 4$;

г) $g(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{4}{x} - 2\right),\ x_0 = -0{,}5$.

○28.24. Вычислите скорость изменения данной функции в данной точке x_0:

а) $y = 2\sin x - 4x,\ x_0 = \frac{\pi}{3}$;

б) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{3},\ x_0 = -\frac{\pi}{3}$;

в) $y = -3\cos x + x,\ x_0 = -\frac{\pi}{6}$;

г) $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{5},\ x_0 = \frac{\pi}{3}$.

○28.25. Найдите тангенс угла между касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0 и осью x:

а) $h(x) = x^6 - 4x,\ x_0 = 1$;

б) $h(x) = \sqrt{x} - 3,\ x_0 = \frac{1}{4}$;

в) $h(x) = -x^5 - 2x^2 + 2,\ x_0 = -1$;

г) $h(x) = \frac{25}{x} + 2,\ x_0 = \frac{5}{4}$.

○28.26. а) $f(x) = x^2 \sin x$. Найдите $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

б) $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \frac{x^2}{\pi} + x \sin \frac{\pi}{6}$. Найдите $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

в) $f(x) = x(1 + \cos x)$. Найдите $f'(\pi)$.

г) $f(x) = \sqrt{3}\cos x - x\cos\frac{\pi}{6} + \frac{x^2}{\pi}$. Найдите $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

○28.27. а) При каких значениях x выполняется равенство $f'(x) = 2$, если известно, что $f(x) = 2\sqrt{x} - 5x + 3$?

б) При каких значениях x выполняется равенство $f'(x) = 1$, если известно, что $f(x) = 3x - \sqrt{x} + 13$?

28.28. Найдите производную функции:

а) $y = (4x - 9)^7$;

б) $y = \left(\frac{x}{3} + 2\right)^{12}$;

в) $y = (5x + 1)^9$;

г) $y = \left(\frac{x}{4} - 3\right)^{14}$.

Найдите производную функции:

28.29. а) $y = \sin(3x - 9)$; в) $y = \cos(9x - 10)$;

б) $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)$; г) $y = \sin(5 - 3x)$.

28.30. а) $y = \sqrt{15 - 7x}$; в) $y = \sqrt{4 + 9x}$;

б) $y = \sqrt{42 + 0{,}5x}$; г) $y = \sqrt{50 - 0{,}2x}$.

О28.31. Найдите значение производной функции в точке x_0:

а) $y = (3x - 2)^7$, $x_0 = 3$;

б) $y = \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{12}$;

в) $y = \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{12}$;

г) $y = \sqrt{25 - 9x}$, $x_0 = 1$.

Вычислите скорость изменения функции в точке x_0:

О28.32. а) $y = (2x + 1)^5$, $x_0 = -1$; в) $y = \frac{4}{12x - 5}$, $x_0 = 2$;

б) $y = \sqrt{7x - 3}$, $x_0 = 1$; г) $y = \sqrt{11 - 5x}$, $x_0 = -1$.

О28.33. а) $y = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

б) $y = \operatorname{tg} 6x$, $x_0 = \frac{\pi}{24}$;

в) $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$;

г) $y = \operatorname{ctg}\frac{x}{3}$, $x_0 = \pi$.

О28.34. Найдите тангенс угла между касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0 и осью x:

а) $h(x) = (0{,}5x + 3)^7$, $x_0 = -4$;

б) $h(x) = \sqrt{16x + 21}$, $x_0 = \frac{1}{4}$;

в) $h(x) = \frac{18}{4x + 1}$, $x_0 = 0{,}5$;

г) $h(x) = \sqrt{6 - 2x}$, $x_0 = 1$.

○28.35. Определите абсциссы точек, в которых угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ равен k, если:

а) $f(x) = \sqrt{x} - x$, $k = 1$;

б) $f(x) = \sin x \cos x$, $k = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $f(x) = \sqrt{x} + 3x$, $k = 4$;

г) $f(x) = \cos^2 x$, $k = \frac{1}{2}$.

Решите неравенство $f'(x) < 0$, если:

○28.36. а) $f(x) = x^3 - x^4$; б) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 6x$.

○28.37. а) $f(x) = \sin 2x$; б) $f(x) = -4\cos x + 2x$.

Решите неравенство $g'(x) > 0$, если:

○28.38. а) $g(x) = x^3 + x^4$; б) $g(x) = \frac{4}{2 - 5x}$.

○28.39. а) $g(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$; б) $g(x) = \sin^2 x$.

○28.40. Определите абсциссы точек, в которых касательная к графику функции $y = h(x)$ образует острый угол с положительным направлением оси x, если:

а) $h(x) = x^3 - 3x^2 + 1$; в) $h(x) = x^3 - x^4 - 19$;

б) $h(x) = 4\sqrt{x} - x$; г) $h(x) = \operatorname{tg} x - 4x$.

○28.41. Определите абсциссы точек, в которых касательная к графику функции $y = \varphi(x)$ образует тупой угол с положительным направлением оси x, если:

а) $\varphi(x) = \sin x + 3$;

б) $\varphi(x) = 0{,}2x^5 - 3\frac{1}{3}x^3 + 9x$.

○28.42. При каких значениях аргумента скорость изменения функции $y = f(x)$ равна скорости изменения функции $y = g(x)$:

а) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$, $g(x) = 7{,}5x^2 - 16x$;

б) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{-1}{x}$?

○28.43. При каких значениях аргумента скорость изменения функции $y = g(x)$ больше скорости изменения функции $y = h(x)$:

а) $g(x) = x^3 - 3x^2$, $h(x) = 1{,}5x^2 - 9$;

б) $g(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$, $h(x) = 6x - 12$;

в) $g(x) = \operatorname{tg} x$, $h(x) = 4x - 81$;

г) $g(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$, $h(x) = 3 - \sqrt{2}x$?

○28.44. Найдите значения аргумента, удовлетворяющие условию $f'(x) = g'(x)$, если:

а) $f(x) = \sin(2x - 3)$, $g(x) = \cos(2x - 3)$;

б) $f(x) = \frac{6}{5x - 9}$, $g(x) = \frac{3}{7 - 5x}$;

в) $f(x) = \sqrt{3x - 10}$, $g(x) = \sqrt{14 + 6x}$;

г) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $g(x) = 2x + 15$.

○28.45. Определите абсциссы точек, в которых касательные к графику функции $y = h(x)$ образуют с положительным направлением оси абсцисс заданный угол α:

а) $h(x) = x^2 - 3x + 19$, $\alpha = 45°$;

б) $h(x) = \frac{4}{x + 2}$, $\alpha = 135°$;

в) $h(x) = 2\sqrt{2x - 4}$, $\alpha = 60°$;

г) $h(x) = \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$, $\alpha = 0°$.

●28.46. а) При каких значениях параметра a касательные к графику функции $y = 4x^2 - |a|x$, проведенные в точках его пересечения с осью x, образуют между собой угол 60°?

б) При каких значениях параметра a касательные к графику функции $y = x^2 + |a|x$, проведенные в точках его пересечения с осью x, образуют между собой угол 45°?

§ 29. Уравнение касательной к графику функции

В § 27 говорилось о том, что если точка $M(a;\ f(a))$ принадлежит графику функции $y = f(x)$ и если в этой точке к графику функции можно провести касательную, не перпендикулярную оси абсцисс, то угловой коэффициент касательной равен $f'(a)$. Мы этим уже несколько раз пользовались. Например, в § 28 было установлено, что график функции $y = \sin x$ (синусоида) в начале координат образует с осью абсцисс угол 45° (точнее, касательная к графику в начале координат составляет с положительным направлением оси x угол 45°), а в примере 5 § 28 были найдены точки на графике заданной функции, в которых касательная параллельна оси абсцисс. В примере 2 § 28 было составлено уравнение касательной к графику функции $y = x^2$ в точке $x = 1$ (точнее, в точке (1; 1), но чаще указывают только значение абсциссы, полагая, что если значение абсциссы известно, то значение ординаты можно найти из уравнения $y = f(x)$). В этом параграфе мы выработаем алгоритм составления уравнения касательной к графику любой функции.

Пусть даны функция $y = f(x)$ и точка $M(a;\ f(a))$ на графике этой функции; пусть известно, что существует $f'(a)$. Составим уравнение касательной к графику заданной функции в заданной точке. Это уравнение, как уравнение любой прямой, не параллельной оси ординат, имеет вид $y = kx + m$, поэтому задача состоит в нахождении значений коэффициентов k и m.

С угловым коэффициентом k проблем нет: известно, что $k = f'(a)$. Для вычисления значения m воспользуемся тем, что искомая прямая проходит через точку $M(a;\ f(a))$. Это значит, что если подставить координаты точки M в уравнение прямой, получим верное равенство: $f(a) = ka + m$, т. е. $m = f(a) - ka$.

Осталось подставить найденные значения коэффициентов k и m в уравнение прямой:

$$y = kx + m;$$

$$y = kx + (f(a) - ka);$$

$$y = f(a) + k(x - a);$$

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x - a).} \qquad (1)$$

Нами получено *уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$.*

Например, если $f(x) = x^2$ и $x = 1$ (т. е. $a = 1$), то $f(a) = f(1) = 1^2 = 1$; $f'(x) = 2x$, значит, $f'(a) = f'(1) = 2$.

Подставив в уравнение (1) найденные значения $a = 1$, $f(a) = 1$, $f'(a) = 2$, получим $y = 1 + 2(x - 1)$, т. е. $y = 2x - 1$.

Сравним этот результат с тем, что был получен в примере 2 § 28. Естественно, получилось то же самое.

Составим уравнение касательной к графику функции $y = \operatorname{tg} x$ в начале координат; здесь $f(x) = \operatorname{tg} x$. Имеем $a = 0$, $f(0) = \operatorname{tg} 0 = 0$, $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, значит, $f'(0) = 1$. Подставив в уравнение (1) найденные значения $a = 0$, $f(a) = 0$, $f'(a) = 1$, получим $y = x$.

Именно поэтому мы и провели тангенсоиду в § 14 (см. рис. 112) через начало координат под углом 45° к оси абсцисс.

Решая эти достаточно простые примеры, мы фактически пользовались определенным алгоритмом, который заложен в формуле (1). Сделаем этот алгоритм явным.

Алгоритм составления уравнения касательной к графику функции $y = f(x)$

1. Обозначить абсциссу точки касания буквой a.
2. Вычислить $f(a)$.
3. Найти $f'(x)$ и вычислить $f'(a)$.
4. Подставить найденные числа a, $f(a)$, $f'(a)$ в формулу (1).

Пример 1. Составить уравнение касательной к графику функции $y = \frac{1}{x}$ в точке $x = 1$.

Решение. Воспользуемся алгоритмом, учитывая, что в данном примере $f(x) = \frac{1}{x}$.

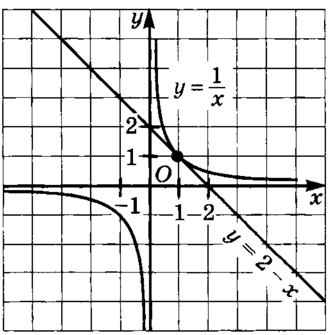


Рис. 179

1) $a = 1$.

2) $f(a) = f(1) = 1$.

3) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$; $f'(a) = f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$.

4) Подставим найденные числа $a = 1$, $f(a) = 1$, $f'(a) = -1$ в формулу (1). Получим

$y = 1 - (x - 1)$, т. е. $y = 2 - x$.

На рисунке 179 изображена гипербола $y = \frac{1}{x}$, построена прямая $y = 2 - x$.

Чертеж иллюстрирует приведенные выкладки: прямая $y = 2 - x$ касается гиперболы в точке (1; 1).

Ответ: $y = 2 - x$.

Пример 2. К графику функции $y = \frac{x^3}{3}$ провести касательную так, чтобы она была параллельна прямой $y = 4x - 5$.

Решение. Уточним формулировку задачи. Требование «провести касательную» обычно означает «составить уравнение касательной». Это логично, ведь если составлено уравнение касательной, то не будет затруднений с построением на координатной плоскости прямой по ее уравнению.

Воспользуемся алгоритмом составления уравнения касательной, учитывая, что в данном примере $f(x) = \frac{x^3}{3}$. Но, в отличие от предыдущего примера, здесь пока имеется неясность: не указана явно абсцисса точки касания.

Начнем рассуждать так. Искомая касательная должна быть параллельна прямой $y = 4x - 5$. Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда равны их угловые коэффициенты. Значит, угловой коэффициент касательной должен быть равен угловому коэффициенту заданной прямой: $k_{\text{кас}} = 4$. Но $k_{\text{кас}} = f'(a)$. Таким образом, значение a мы можем найти из уравнения $f'(a) = 4$.

Имеем $f'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$; $f'(a) = a^2$.

Из уравнения $f'(a) = 4$, т. е. $a^2 = 4$, находим $a_1 = 2$, $a_2 = -2$. Значит, имеются две касательные, удовлетворяющие условию задачи: одна в точке с абсциссой 2, другая в точке с абсциссой −2.

Теперь можно действовать по алгоритму.

1) $a_1 = 2$, $a_2 = -2$.

2) $f(a_1) = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3}$, $f(a_2) = \frac{(-2)^3}{3} = -\frac{8}{3}$.

3) $f'(a_1) = f'(a_2) = 4$.

4) Подставив значения $a_1 = 2$, $f(a_1) = \frac{8}{3}$, $f'(a_1) = 4$ в формулу (1), получим $y = \frac{8}{3} + 4(x - 2)$, т. е. $y = 4x - \frac{16}{3}$.

Подставив значения $a_2 = -2$, $f(a_2) = -\frac{8}{3}$, $f'(a_2) = 4$ в формулу (1), получим $y = -\frac{8}{3} + 4(x + 2)$, т. е. $y = 4x + \frac{16}{3}$.

Ответ: $y = 4x - \frac{16}{3}$; $y = 4x + \frac{16}{3}$.

В § 27 мы отметили, что для функции $y = f(x)$, имеющей производную в фиксированной точке x, справедливо приближенное равенство

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x,$$

или, подробнее,

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x.$$

Для удобства дальнейших рассуждений изменим обозначения: вместо x будем писать a, вместо $x + \Delta x$ будем писать x и соответственно вместо Δx будем писать $x - a$. Тогда написанное выше приближенное равенство примет вид

$$f(x) - f(a) \approx f'(a)(x - a),$$

или

$$\boxed{f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a).} \qquad (2)$$

А теперь рассмотрим рисунок 180. К графику функции $y = f(x)$ проведена касательная в точке $M(a;\ f(a))$. Отмечена точка x на оси абсцисс близко от a. Ясно, что $f(x)$ — ордината графика функции в указанной точке x. А что такое $f(a) + f'(a)(x - a)$? Это ордината касательной, соответствующая той же точке x — см. формулу (1). В чем же смысл приближенного равенства (2)? В том, что в качестве приближенного значения функции берут значение ординаты касательной.

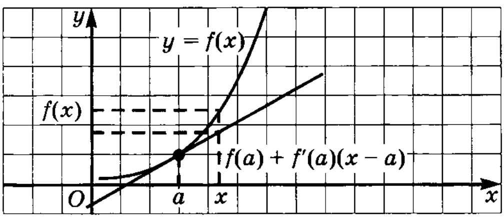


Рис. 180

Пример 3. Найти приближенное значение числового выражения $1{,}02^7$.

Решение. Речь идет о нахождении значения функции $y = x^7$ в точке $x = 1{,}02$. Воспользуемся формулой (2), учитывая, что в данном примере $f(x) = x^7$, $a = 1$, $f(a) = f(1) = 1$; $x = 1{,}02$, $f'(x) = 7x^6$, и, следовательно, $f'(a) = f'(1) = 7 \cdot 1^6 = 7$.

В итоге получаем

$$1{,}02^7 \approx 1 + 7 \cdot 0{,}02, \quad \text{т. е. } 1{,}02^7 \approx 1{,}14.$$

Если мы воспользуемся калькулятором, то получим

$$1{,}02^7 = 1{,}148685667\ldots .$$

Как видите, точность приближения вполне приемлема.

Ответ: $1{,}02^7 \approx 1{,}14$.

Упражнения

29.1. Определите знак углового коэффициента касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$, изображенному на заданном рисунке, в точках с абсциссами a, b, c:

а) рис. 181; б) рис. 182.

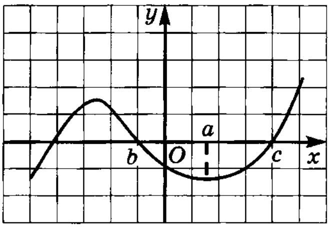


Рис. 181

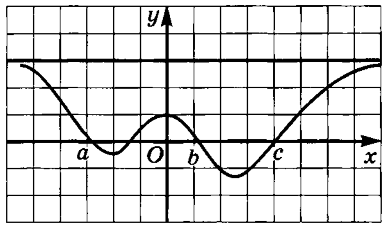


Рис. 182

29.2. Укажите точки, в которых производная равна нулю, и точки, в которых производная не существует, если график функции изображен на заданном рисунке:

а) рис. 183; б) рис. 184; в) рис. 185; г) рис. 186.

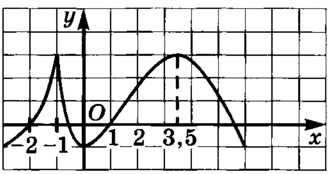


Рис. 183

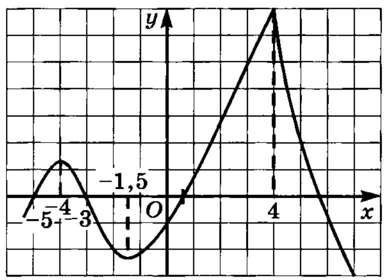


Рис. 184

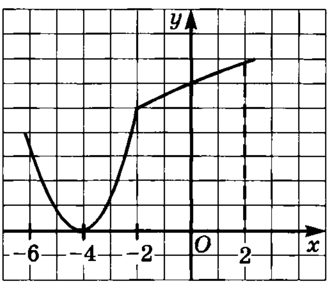


Рис. 185

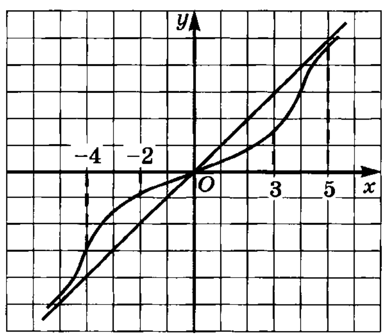


Рис. 186

29.3. Тупой или острый угол образует с положительным направлением оси x касательная к графику функции $y = f(x)$, проведенная в точке с абсциссой $x = a$, если:

а) $f(x) = 4 + x^2$, $a = 2$;
б) $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $a = 3$;
в) $f(x) = (1 - x)^3$, $a = -3$;
г) $f(x) = 2x - x^3$, $a = 1$?

29.4. Чему равен угловой коэффициент касательной к параболе $y = 1 - x^2$ в точке:

а) $A(0;\ 1)$;
б) $B(2;\ -3)$;
в) $B\left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{4}\right)$;
г) $D(-1;\ 0)$?

Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$, если:

29.5. а) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$, $a = -1$;
б) $f(x) = \sqrt{4 - 5x}$, $a = 0$;
в) $f(x) = x^4 - 7x^3 + 12x - 45$, $a = 0$;
г) $f(x) = \sqrt{10 + x}$, $a = -5$.

29.6. а) $f(x) = \sin x$, $a = 0$;
б) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$, $a = \frac{\pi}{8}$;
в) $f(x) = \cos 3x$, $a = \frac{\pi}{2}$;
г) $f(x) = \sin x$, $a = \frac{\pi}{3}$.

Определите, какой угол образует с осью x касательная, проведенная к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$, если:

29.7. а) $f(x) = x^2$, $a = 0{,}5$;
б) $f(x) = -3x^3$, $a = \frac{1}{3}$;
в) $f(x) = 0{,}2x^5$, $a = -1$;
г) $f(x) = -0{,}25x^4$, $a = 0$.

○29.8. а) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 7$, $a = 1$;
б) $f(x) = -7x^3 + 10x^2 + x - 12$, $a = 0$.

○29.9. а) $f(x) = \frac{2x - 1}{3 - 2x}$, $a = \frac{1}{2}$;
б) $f(x) = \frac{x - 1}{x - 2}$, $a = 1$.

Определите, какой угол образует с осью x касательная, проведенная к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$, если:

O29.10. а) $f(x) = \sqrt{6x + 7}$, $a = 3\frac{1}{3}$; б) $f(x) = \sqrt{5 - 2x}$, $a = 2$.

O29.11. а) $f(x) = \sqrt{3} \cos \frac{x}{3}$, $a = \frac{3\pi}{2}$; б) $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$, $a = \frac{\pi}{2}$.

Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$, если:

O29.12. а) $f(x) = x^2$, $a = 3$;

б) $f(x) = 2 - x - x^3$, $a = 0$;

в) $f(x) = x^3$, $a = 1$;

г) $f(x) = x^3 - 3x + 5$, $a = -1$.

O29.13. а) $f(x) = \frac{3x - 2}{3 - x}$, $a = 2$; б) $f(x) = \frac{2x - 5}{5 - x}$, $a = 4$.

O29.14. а) $f(x) = 2\sqrt{3x - 5}$, $a = 2$;

б) $f(x) = \sqrt{7 - 2x}$, $a = 3$.

O29.15. а) $f(x) = \cos \frac{x}{3}$, $a = 0$; б) $f(x) = \sin 2x$, $a = \frac{\pi}{4}$.

O29.16. а) $f(x) = \operatorname{ctg} 2x$, $a = \frac{\pi}{4}$; б) $f(x) = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{3}$, $a = 0$.

O24.17. Напишите уравнения касательных к графику функции $y = 9 - x^2$ в точках его пересечения с осью абсцисс.

O29.18. Напишите уравнения касательных к параболе $y = x^2 - 3x$ в точках с ординатой 4.

O29.19. На графике функции $y = x^3 - 3x^2 + x + 1$ найдите точки, в которых касательная образует с положительным направлением оси абсцисс угол 45°. Составьте уравнение каждой из этих касательных.

○29.20. В какой точке касательная к графику функции $y = x^2$ параллельна заданной прямой:

а) $y = 2x + 1$;

б) $y = -\frac{1}{2}x + 5$;

в) $y = \frac{3}{4}x - 2$;

г) $y = -x + 5$?

В каких точках касательная к графику заданной функции $y = f(x)$ параллельна заданной прямой $y = kx + m$:

○29.21. а) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 10x - 4$; $y = 3 + x$;

б) $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + 8$, $y = 0$;

в) $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x - 7$, $y = x - 3$;

г) $f(x) = \frac{5}{4}x^4 - x^3 + 6$, $y = 2$?

○29.22. а) $f(x) = \sin x$, $y = -x$;

б) $f(x) = \cos 3x$, $y = 0$;

в) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $y = x$;

г) $f(x) = \sin \frac{x}{3}$, $y = -1$?

○29.23. Напишите уравнения тех касательных к графику функции $y = \frac{x^3}{3} - 2$, которые параллельны заданной прямой:

а) $y = x - 3$;

б) $y = 9x - 5$.

○29.24. С помощью формулы $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$ вычислите приближенно:

а) $0{,}998^5$;

б) $\sqrt{1{,}05}$;

в) $1{,}03^7$;

г) $\sqrt{3{,}99}$.

●29.25. Через точку B проведите касательную к графику функции $y = f(x)$, если:

а) $f(x) = \sqrt{3 - x}$, $B(-2; 3)$;

б) $f(x) = \sqrt{3 - x}$, $B(4; 0)$.

●29.26. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \frac{1}{x^2}$, $x < 0$, отсекающей от осей координат треугольник, площадь которого равна $\frac{9}{8}$.

●29.27. Составьте уравнения тех касательных к графику функции $y = \frac{\sqrt{3}}{6}(1 - x^2)$, которые пересекаются под углом 120° в точке, лежащей на оси y.

§ 30. Применение производной для исследования функций на монотонность и экстремумы

1. Исследование функций на монотонность

На рисунке 187 представлен график некоторой возрастающей дифференцируемой функции $y = f(x)$. Проведем касательные к графику в точках $x = x_1$ и $x = x_2$. Что общего у построенных прямых? Общее то, что обе они составляют с осью x острый угол, а значит, у обеих прямых положительный угловой коэффициент. Но угловой коэффициент касательной равен значению производной в абсциссе точки касания. Таким образом, $f'(x_1) > 0$ и $f'(x_2) > 0$. А в точке $x = 0$ касательная совпала с осью x, в этой точке выполняется равенство $f'(0) = 0$. Вообще в любой точке x из области определения *возрастающей* дифференцируемой функции выполняется неравенство

$$f'(x) \geqslant 0.$$

На рисунке 188 представлен график некоторой убывающей дифференцируемой функции $y = f(x)$. Проведем касательные к графику в точках $x = x_1$ и $x = x_2$. Что общего у построенных прямых? Общее то, что обе они составляют с осью x тупой угол, а значит, у обеих прямых отрицательный угловой коэффициент. Но угловой коэффициент касательной равен значению производной в абсциссе точки касания. Таким образом, $f'(x_1) < 0$ и $f'(x_2) < 0$. А в точке $x = x_3$ касательная параллельна оси x, в этой точке выполняется равенство $f'(x_3) = 0$. Вообще в любой точке x из области определения *убывающей* дифференцируемой функции выполняется неравенство

$$f'(x) \leqslant 0.$$

Эти рассуждения показывают, что между характером монотонности функции и знаком ее производной есть определенная связь:

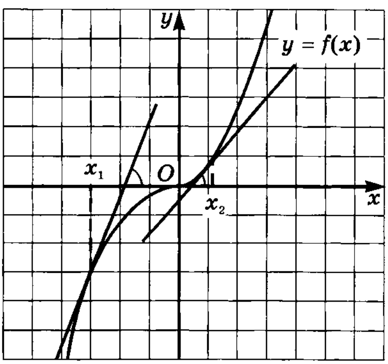


Рис. 187

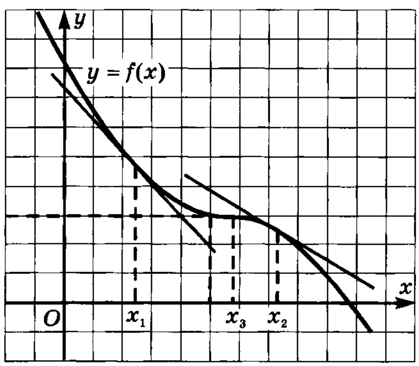


Рис. 188

если функция возрастает на промежутке и имеет на нем производную, то производная неотрицательна; если функция убывает на промежутке и имеет на нем производную, то производная неположительна.

Но гораздо важнее то, что верны и обратные утверждения, показывающие, как по знаку производной можно установить характер монотонности функции на промежутке. При этом, во избежание недоразумений, берут только открытые промежутки, т. е. интервалы или открытые лучи. Дело в том, что для функции, определенной на отрезке $[a; b]$, не очень корректно ставить вопрос о существовании и о значении производной в концевой точке (в точке $x = a$ или в точке $x = b$), поскольку в точке $x = a$ приращение аргумента может быть только положительным, а в точке $x = b$ — только отрицательным. В определении производной такие ограничения не предусмотрены.

Теорема 1. **Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \geqslant 0$ (причем равенство $f'(x) = 0$ выполняется лишь в изолированных точках), то функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке X.**

Теорема 2. **Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \leqslant 0$ (причем равенство $f'(x) = 0$ выполняется лишь в изолированных точках), то функция $y = f(x)$ убывает на промежутке X.**

Доказательства этих теорем обычно проводят в курсе высшей математики. Мы ограничимся проведенными выше рассуждениями «на пальцах» и для большей убедительности дадим еще физическое истолкование сформулированных теорем.

Пусть по прямой движется материальная точка, $s = s(t)$ — закон движения. Если скорость все время положительна, то точка постоянно удаляется от начала отсчета, т. е. функция $s = s(t)$ возрастает. Если же скорость все время отрицательна, то точка постоянно приближается к началу отсчета, т. е. функция $s = s(t)$ убывает. Если скорость движения была положительна, затем в какой-то отдельный момент времени обратилась в нуль, а потом снова стала положительной, то движущееся тело в указанный момент времени как бы притормаживает, а потом продолжает удаляться от начальной точки. Так что и в этом случае функция $s = s(t)$ возрастает. А что такое скорость точки? Это производная пути по времени. Значит, от знака производной (скорости) зависит характер монотонности функции — в данном случае функции $s = s(t)$. Об этом как раз и говорят обе сформулированные теоремы.

Пример 1. Доказать, что функция $y = x^5 + 2x^3 - 4$ возрастает на всей числовой прямой.

Решение. Найдем производную заданной функции:

$$f'(x) = 5x^4 + 6x^2.$$

Очевидно, что при всех x выполняется неравенство $5x^4 + 6x^2 \geqslant 0$, причем $f'(x) = 0$ лишь в точке $x = 0$. Значит, по теореме 1, функция возрастает на всей числовой прямой. ⊲■

Пример 2. а) Исследовать на монотонность функцию

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 1;$$

б) построить график этой функции.

Решение. а) Исследовать функцию на монотонность — это значит выяснить, на каких промежутках области определения функция возрастает, а на каких — убывает. Согласно теоремам 1 и 2, это связано со знаком производной.

Найдем производную данной функции:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x + 1).$$

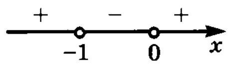


Рис. 189

На рисунке 189 схематически указаны знаки производной по промежуткам области определения: на открытом луче $(-\infty; -1)$ производная положительна, на интервале $(-1; 0)$ — отрицательна, на открытом луче $(0; +\infty)$ — положительна. Значит, на первом из указанных промежутков функция возрастает, на втором — убывает, на третьем — возрастает.

Если функция непрерывна не только на открытом промежутке, но и в его концевых точках (именно так обстоит дело для заданной функции), эти концевые точки включают в промежуток монотонности функции.

Таким образом, заданная функция возрастает на луче $(-\infty; -1]$, возрастает на луче $[0; +\infty)$, убывает на отрезке $[-1; 0]$.

б) Графики функций строят «по точкам». Для этого надо составить таблицу значений функции $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$, куда обязательно следует включить значения функции в концевых точках промежутков монотонности ($x = -1$ и $x = 0$) и еще несколько значений:

x	-1	0	1	-2
y	0	-1	4	-5

Отметим эти точки на координатной плоскости. Учтем найденные в пункте а) промежутки возрастания и убывания функции, а также то, что в точках $x = -1$ и $x = 0$ производная функции равна

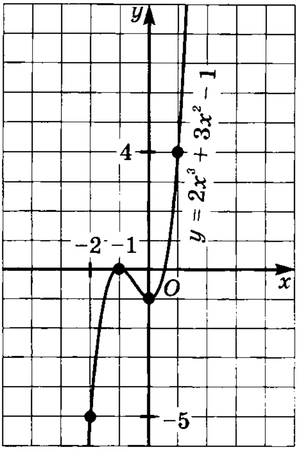


Рис. 190

нулю, т. е. касательная к графику функции в каждой из указанных точек параллельна оси абсцисс; точнее, в точке (−1; 0) она совпадает с осью абсцисс. Учтем, наконец, то, что функция непрерывна, т. е. ее графиком является сплошная линия. График заданной функции изображен на рисунке 190. ◁■

Завершая рассуждения об исследовании функций на монотонность, обратим внимание на одно обстоятельство. Мы говорили, что если на промежутке X выполняется неравенство $f'(x) > 0$, то функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке X; если же на промежутке X выполняется неравенство $f'(x) < 0$, то функция убывает на этом промежутке. А что будет, если на всем промежутке выполняется тождество $f'(x) = 0$? Видимо, функция не должна ни возрастать, ни убывать. Что же это за функция? Ответ очевиден — это постоянная функция $y = C$ (буква C — первая буква слова *constanta*, что означает «постоянная»). Справедлива следующая теорема, формальное доказательство которой мы не даем, ограничиваясь приведенными выше правдоподобными рассуждениями.

Теорема 3. **Если во всех точках открытого промежутка X выполняется равенство $f'(x) = 0$, то функция $y = f(x)$ постоянна на промежутке X.**

2. Точки экстремума функции и их нахождение

Вернемся к графику функции $y = f(x)$, где $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$ (рис. 190). На графике есть две уникальные точки, по сути дела определяющие вид графика, — это точки (−1; 0) и (0; −1). В этих точках:

1) происходит изменение характера монотонности функции (слева от точки $x = -1$ функция возрастает, справа от нее, но только до точки $x = 0$, функция убывает; слева от точки $x = 0$ функция убывает, справа от нее — возрастает);

2) касательная к графику функции параллельна оси x (или даже совпадает с осью x), т. е. производная функции в каждой из указанных точек равна нулю;

3) $f(-1)$ — наибольшее значение функции, но не во всей области определения, а в локальном смысле, т. е. по сравнению со значениями функции из некоторой окрестности точки $x = -1$. Точно

так же $f(0)$ — наименьшее значение функции, но не во всей области определения, а в локальном смысле, т. е. по сравнению со значениями функции из некоторой окрестности точки $x = 0$.

А теперь рассмотрим рисунок 191, где изображен график другой функции. Не правда ли, он похож на предыдущий график? На нем те же две уникальные точки, но одна из указанных выше трех особенностей этих точек изменилась: нельзя сказать, что касательные к графику в этих точках параллельны оси x.

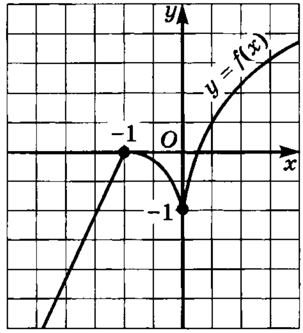


Рис. 191

В точке $x = -1$ касательная вообще не существует, а в точке $x = 0$ она перпендикулярна оси x (точнее, она совпадает с осью y).

Определение 1. Точку $x = x_0$ называют **точкой минимума функции** $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки $x = x_0$) выполняется неравенство

$$f(x) > f(x_0).$$

Так, функции, графики которых изображены на рисунках 190 и 191, имеют точкv минимума $x = 0$. Почему? Потому что у этой точки существует окрестность, например $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ или $(-0{,}2; 0{,}2)$, для всех точек которой, кроме точки $x = 0$, выполняется неравенство $f(x) > f(0)$. Это верно для обеих функций.

Значение функции в точке минимума обычно обозначают $y_{\min}$. Не путайте это значение (наименьшее, но в локальном смысле) с $y_{\text{наим}}$, т. е. с наименьшим значением функции во всей рассматриваемой области определения (в глобальном смысле). Посмотрите еще раз на рисунки 190 и 191. Вы видите, что наименьшего значения нет ни у той, ни у другой функции, а $y_{\min}$ существует.

Определение 2. Точку $x = x_0$ называют **точкой максимума функции** $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой, кроме самой точки $x = x_0$, выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0).$$

Так, функции, графики которых изображены на рисунках 190 и 191, имеют точку максимума $x = -1$. Почему? Потому что у этой точки существует окрестность, например $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, для всех точек которой, кроме $x = -1$, выполняется неравенство $f(x) < f(-1)$. Это верно для обеих функций.

Значение функции в точке максимума обычно обозначают y_{max}. Не путайте это значение (наибольшее, но в локальном смысле) с $y_{наиб}$, т. е. с наибольшим значением функции во всей рассматриваемой области определения (в глобальном смысле). Посмотрите еще раз на рисунки 190 и 191. Вы видите, что наибольшего значения нет ни у той, ни у другой функции, а y_{max} существует.

Точки минимума и максимума функции объединяют общим термином — *точки экстремума* (от латинского слова *extremum* — «крайний»).

Если функция $y = f(x)$ достигает в точке x_0 минимума (максимума), то наименование «точка минимума (максимума)» используют как для значения $x = x_0$, так и для точки $(x_0, f(x_0))$.

Как искать точки экстремума функции? Ответ на этот вопрос мы сможем получить, еще раз проанализировав графические модели, представленные на рисунках 190 и 191.

Обратите внимание: для функции, график которой изображен на рисунке 190, в обеих точках экстремума производная обращается в нуль. А для функции, график которой изображен на рисунке 191, в обеих точках экстремума производная не существует. Это не случайно, поскольку, как доказано в курсе математического анализа, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. **Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = x_0$, то в этой точке производная функции либо равна нулю, либо не существует.**

Для удобства условимся внутренние точки области определения функции, в которых производная функции равна нулю, называть *стационарными*, а внутренние точки области определения функции, в которых функция непрерывна, но производная не существует, — *критическими*.

Пример 3. Построить график функции $y = 2x^2 - 6x + 3$.

Решение. Графиком заданной квадратичной функции является парабола, причем ветви параболы направлены вверх, поскольку коэффициент при x^2 положителен. Но в таком случае вершина параболы является точкой минимума функции, касательная к параболе в ее вершине параллельна оси x, значит, в вершине параболы должно выполняться условие $y' = 0$.

Имеем $y' = (2x^2 - 6x + 3)' = 4x - 6$.

Приравняв производную нулю, получим

$$4x - 6 = 0; \quad x = 1{,}5.$$

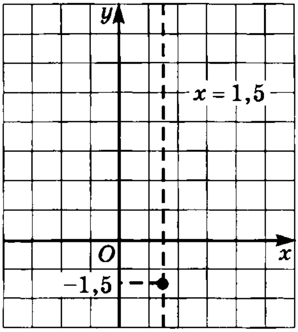


Рис. 192

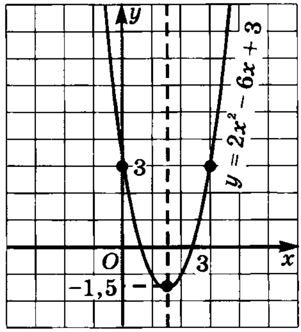


Рис. 193

Подставив найденное значение x в уравнение параболы, получим

$$y = 2 \cdot 1{,}5^2 - 6 \cdot 1{,}5 + 3 = -1{,}5.$$

Итак, вершиной параболы служит точка (1,5; −1,5), а осью параболы — прямая $x = 1{,}5$ (рис. 192). В качестве контрольных точек удобно взять точку (0; 3) и симметричную ей относительно оси параболы точку (3; 3). На рисунке 193 по найденным трем точкам построена парабола — график заданной квадратичной функции. ◁■

Помните ли вы, как мы строили график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ в 8—9-м классах? Практически так же, только ось параболы находили не с помощью производной, а по формуле $x = -\frac{b}{2a}$, которую приходилось запоминать. Решение, показанное в примере 3, освобождает от необходимости помнить эту формулу. Чтобы найти абсциссу вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$ или уравнение ее оси симметрии, достаточно приравнять нулю производную квадратичной функции.

Теперь вернемся к теореме 4, в которой говорится, что если в точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ имеет экстремум, то $x = x_0$ — стационарная или критическая точка функции. Возникает естественный вопрос: верна ли обратная теорема, т. е. верно ли, что если $x = x_0$ — стационарная или критическая точка, то в этой точке функция имеет экстремум? Ответ отрицательный. Рассмотрим рисунок 194, где изображен график возрастающей функции, не имеющей точек экстремума. У этой функции есть стационарная точка

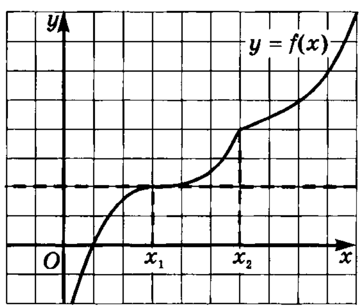


Рис. 194

$x = x_1$, в которой производная обращается в нуль (в этой точке график функции имеет касательную, параллельную оси x), но это не точка экстремума. И есть критическая точка $x = x_2$, в которой производная не существует, но это также не точка экстремума. Значит, теорема 4 дает только *необходимое условие экстремума* (справедлива прямая теорема), но оно не является *достаточным условием* (обратная теорема не выполняется).

А как же быть с достаточным условием? Как узнать, есть ли в стационарной или в критической точке экстремум? Для ответа на этот вопрос снова рассмотрим графики функций, представленные на рисунках 190, 191, 193, 194.

Обратим внимание, что при переходе через точку максимума (речь идет о точке $x = -1$ на рисунках 190 и 191) изменяется характер монотонности функции: слева от точки максимума функция возрастает, справа — убывает. Соответственно изменяются знаки производной: слева от точки максимума производная положительна, справа — отрицательна.

Аналогично при переходе через точку минимума (речь идет о точке $x = 0$ на рисунках 190 и 191 и о точке $x = 1{,}5$ на рисунке 193) характер монотонности функции также изменяется: слева от точки минимума функция убывает, справа — возрастает. Соответственно изменяются знаки производной: слева от точки минимума производная отрицательна, справа — положительна.

Если же и слева и справа от стационарной или критической точки производная имеет один и тот же знак, то в этой точке экстремума нет. Именно так обстоит дело с функцией, график которой изображен на рисунке 194: и слева и справа от стационарной точки x_1 и от критической точки x_2 производная положительна.

Наши рассуждения могут служить подтверждением (но, конечно, не доказательством — строгие доказательства проводятся в курсе математического анализа) справедливости следующей теоремы.

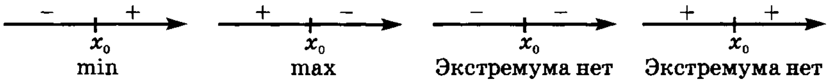
Теорема 5 (достаточные условия экстремума). **Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри промежутка стационарную или критическую точку $x = x_0$. Тогда:**

а) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ — неравенство $f'(x) > 0$, то $x = x_0$ — точка минимума функции $y = f(x)$;

б) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ — неравенство $f'(x) < 0$, то $x = x_0$ — точка максимума функции $y = f(x)$;

в) если у этой точки существует такая окрестность, что в ней и слева и справа от точки x_0 знаки производной одинаковы, то в точке x_0 экстремума нет.

Этой длинной формулировкой на практике пользоваться неудобно, советуем применять следующую условную схему:



Пример 4. а) Найти точки экстремума функции

$$y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11;$$

б) построить график этой функции.

Р е ш е н и е. а) Здесь $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11$. Найдем производную данной функции:

$$f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 48x;$$
$$f'(x) = 12x(x^2 - 4x + 4);$$
$$f'(x) = 12x(x - 2)^2.$$

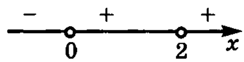


Рис. 195

Производная всюду существует, значит, критических точек у функции нет. Производная обращается в нуль в точках $x = 0$ и $x = 2$ — это две стационарные точки заданной функции. На рисунке 195 схематически указаны знаки производной по промежуткам области определения: на промежутке $(-\infty; 0)$ производная отрицательна, на промежутке $(0; 2)$ — положительна, на промежутке $(2; +\infty)$ — положительна. Значит, $x = 0$ — точка минимума функции, а $x = 2$ точкой экстремума не является. На первом из указанных выше промежутков функция убывает, на втором и третьем — возрастает.

В точке минимума $x = 0$ имеем $f(0) = -11$ (подставили значение $x = 0$ в выражение $f(x)$), значит, $y_{min} = -11$.

б) Чтобы построить график функции, нужно знать особо важные точки графика. К таковым относятся:

— найденная точка минимума $(0; -11)$;

— стационарная точка $x = 2$; в этой точке

$$f(2) = 3 \cdot 2^4 - 16 \cdot 2^3 + 24 \cdot 2^2 - 11 = 5;$$

— точки пересечения графика с осями координат; в данном примере это уже найденная точка $(0; -11)$ — точка пересечения графика с осью y. Кроме того, можно заметить, что $f(1) = 0$, т. е. найдена точка пересечения графика с осью x — это точка $(1; 0)$.

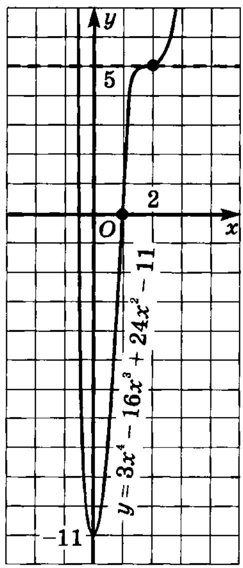


Рис. 196

Итак, мы имеем точку минимума (0; −11), точку пересечения графика с осью x — точку (1; 0) и стационарную точку (2; 5). В точке (2; 5) касательная к графику функции параллельна оси x, но это не точка экстремума, а так называемая *точка перегиба*.

График функции схематически изображен на рисунке 196. Заметим, что есть еще одна точка пересечения графика с осью абсцисс, но найти ее нам не удалось. ◁■

Завершая этот пункт, заметим, что мы фактически выработали алгоритм исследования функции на монотонность и экстремумы.

Алгоритм исследования непрерывной функции $y = f(x)$ на монотонность и экстремумы

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти стационарные ($f'(x) = 0$) и критические ($f'(x)$ не существует) точки функции $y = f(x)$.
3. Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой и определить знаки производной на получившихся промежутках.
4. На основании теорем 1, 2 и 5 сделать выводы о монотонности функции и о ее точках экстремума.

Заметим, что если заданная функция имеет вид $y = \frac{p(x)}{q(x)}$, где $p(x)$, $q(x)$ — многочлены, то также можно пользоваться этим алгоритмом, но с одним добавлением: *полюсы функции*, т. е. точки, в которых знаменатель $q(x)$ обращается в нуль, тоже отмечают на числовой прямой, причем делают это до определения знаков производной. Разумеется, полюсы не могут быть точками экстремума.

Пример 5. Исследовать функцию $y = \frac{x^4 + 16}{x^2}$ на монотонность и экстремумы.

Решение. Заметим, что функция всюду непрерывна, кроме точки $x = 0$. Воспользуемся указанным выше алгоритмом.

1) Найдем производную заданной функции:

$$y' = \frac{(x^4 + 16)' \cdot x^2 - (x^2)' \cdot (x^4 + 16)}{(x^2)^2} = \frac{4x^3 \cdot x^2 - 2x(x^4 + 16)}{x^4} =$$

$$= \frac{2x^5 - 32x}{x^4} = \frac{2x(x^4 - 16)}{x^4} = \frac{2(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)}{x^3}.$$

2) Производная обращается в нуль в точках $x = 2$ и $x = -2$ — это стационарные точки. Производная не существует в точке $x = 0$, но это не критическая точка, это точка разрыва функции (полюс).

3) Отметим точки −2, 0 и 2 на числовой прямой и расставим знаки производной на получившихся промежутках (рис. 197).

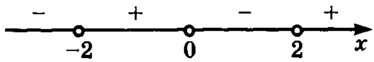


Рис. 197

4) Делаем выводы: на луче $(-\infty; -2]$ функция убывает, на полуинтервале $[-2; 0)$ функция возрастает, на полуинтервале $(0; 2]$ функция убывает, на луче $[2; +\infty)$ функция возрастает.

Далее, $x = -2$ — точка минимума, причем $y_{\min} = 8$ (подставили значение $x = -2$ в формулу $y = \frac{x^4 + 16}{x^2}$).

Аналогично устанавливаем, что и $x = 2$ — точка минимума, причем $y_{\min} = 8$. ◁■

Упражнения

30.1. Определите, какой знак имеет производная функции $y = f(x)$ в точках с абсциссами a, b, c, d, если график функции изображен на заданном рисунке:

а) рис. 198; б) рис. 199.

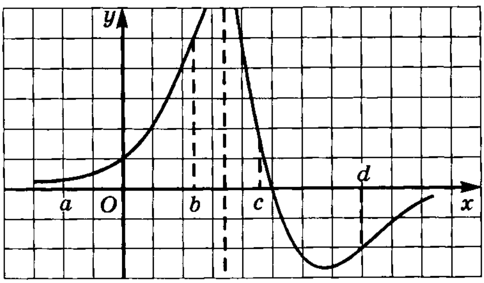


Рис. 198

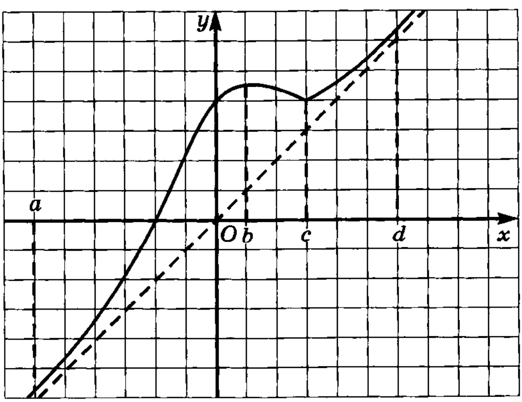


Рис. 199

30.2. Определите промежутки возрастания и убывания функции, график которой изображен на заданном рисунке:

а) рис. 198; б) рис. 199.

30.3. По графику производной, изображенному на заданном рисунке, определите, на каких промежутках функция $y = f(x)$ возрастает, а на каких — убывает:

а) рис. 200; в) рис. 202;

б) рис. 201; г) рис. 203.

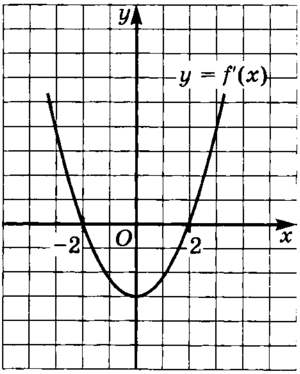


Рис. 200

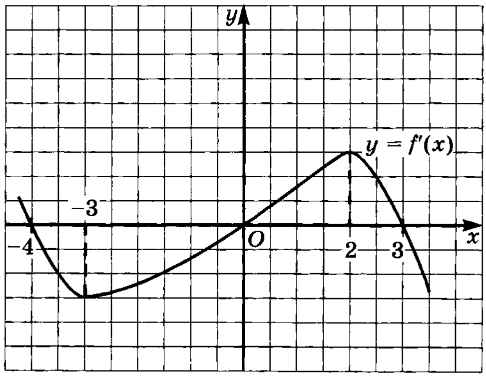


Рис. 201

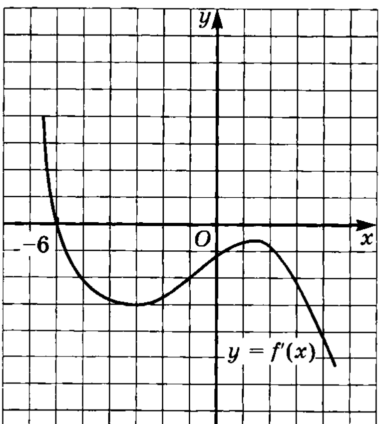


Рис. 202

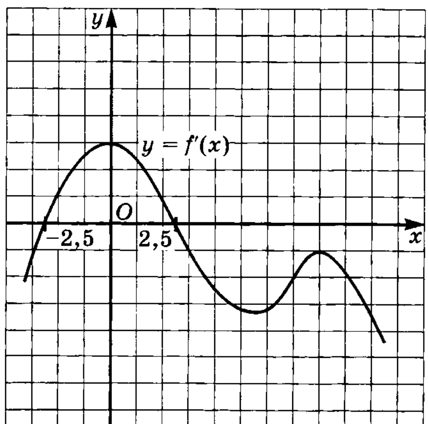


Рис. 203

30.4. На каком из указанных промежутков функция $y = f(x)$ убывает, если график ее производной представлен на рисунке 204:

а) $(-2;\ 1)$; б) $(-\infty;\ 4)$; в) $(4;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ -2)$?

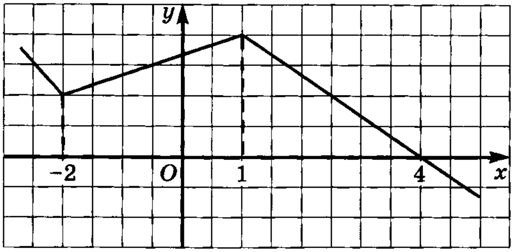


Рис. 204

30.5. Определите, для какой из функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$ отрезок $[-1;\ 1]$ является промежутком возрастания, если на рисунках 205—207 изображены графики производных этих функций.

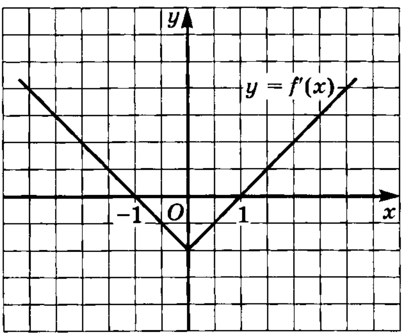


Рис. 205

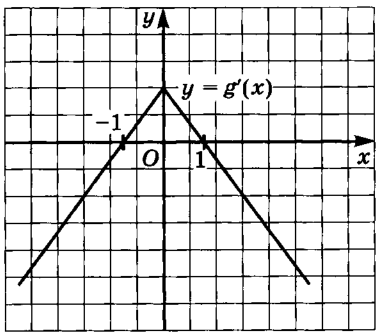


Рис. 206

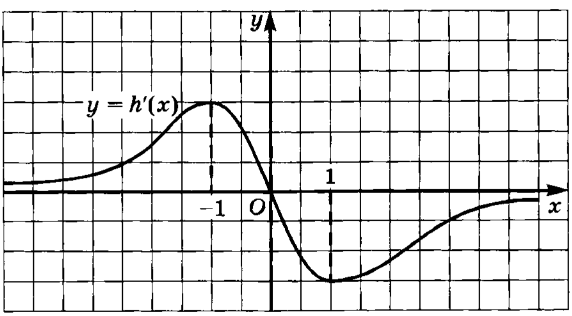


Рис. 207

30.6. На рисунках 208—210 изображены графики производных функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$. Определите, какая из функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$:

а) возрастает на $\boldsymbol{R}$; б) убывает на $\boldsymbol{R}$.

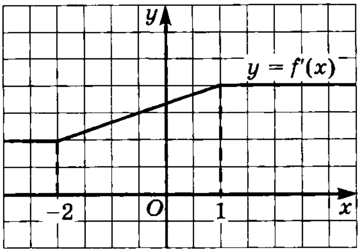


Рис. 208

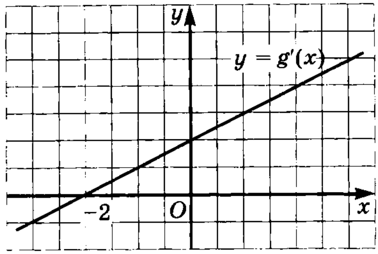


Рис. 209

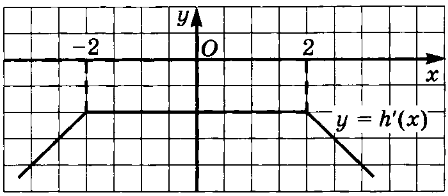


Рис. 210

30.7. Изобразите эскиз графика производной функции $y = f(x)$, если известно, что функция $y = f(x)$ возрастает на луче $(-\infty; 1]$ и убывает на луче $[1; +\infty)$.

30.8. Изобразите эскиз графика функции $y = f(x)$, если промежутки постоянства знака производной $f'(x)$ представлены на заданной схеме:

а) рис. 211; б) рис. 212; б) рис. 213; г) рис. 214.

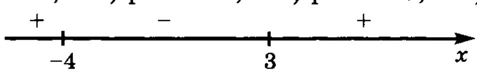


Рис. 211

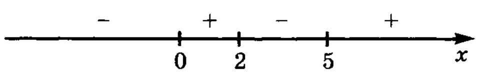


Рис. 212

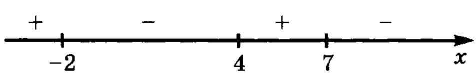


Рис. 213

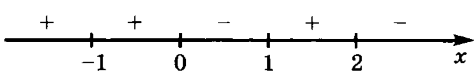


Рис. 214

○30.9. Докажите, что заданная функция возрастает:

а) $y = \cos x + 2x$;
в) $y = \sin x + x^3 + x$;

б) $y = x^5 + 3x^3 + 7x + 4$;
г) $y = x^5 + 4x^3 + 8x - 8$.

○30.10. Докажите, что заданная функция убывает:

а) $y = \sin 2x - 3x$;
б) $y = \cos 3x - 4x$.

○30.11. Докажите, что функция монотонна на всей числовой прямой; укажите характер монотонности:

а) $y = x^5 + 6x^3 - 7$;
в) $y = x - \cos x + 8$;

б) $y = \sin x - 2x - 15$;
г) $y = 11 - 5x - x^3$.

Определите промежутки монотонности функции:

○30.12. а) $y = x^2 - 5x + 4$;
в) $y = -x^2 + 8x - 7$;

б) $y = 5x^2 + 15x - 1$;
г) $y = x^2 - x$.

○30.13. а) $y = x^3 + 2x$;

б) $y = 60 + 45x - 3x^2 - x^3$;

в) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$;

г) $y = -x^5 + 5x$.

Исследуйте функцию на монотонность:

○30.14. а) $y = x^4 - 2x^2 - 3$;
в) $y = -3x^4 + 4x^3 - 15$;

б) $y = -x^5 - x$;
г) $y = 5x^5 - 1$.

○30.15. а) $y = \dfrac{1}{x + 3}$;
в) $y = \dfrac{2}{x} + 1$;

б) $y = \dfrac{3x - 1}{3x + 1}$;
г) $y = \dfrac{1 - 2x}{3 + 2x}$.

○30.16. а) $y = \sqrt{3x - 1}$;
в) $y = \sqrt{1 - 2x}$;

б) $y = \sqrt{1 - x} + 2x$;
г) $y = \sqrt{2x - 1} - x$.

30.17. По графику функции $y = f(x)$, изображенному на заданном рисунке, определите точки, в которых ее производная обращается в 0:

а) рис. 215; в) рис. 217;

б) рис. 216; г) рис. 218.

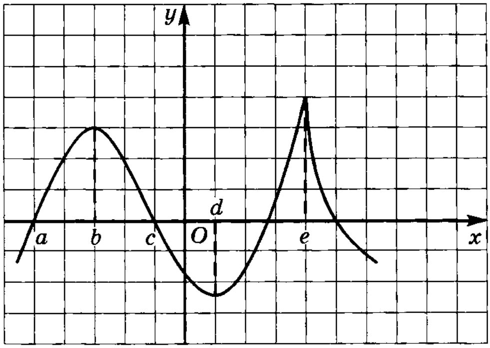


Рис. 215

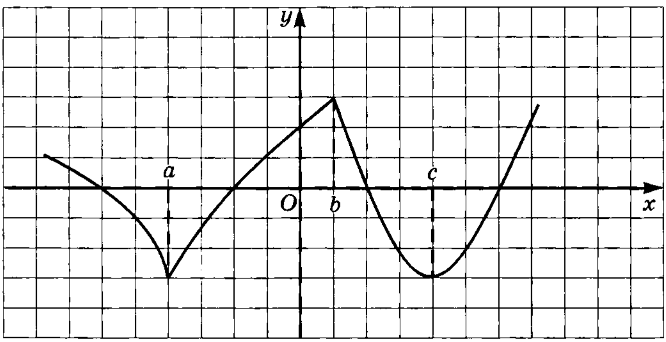


Рис. 216

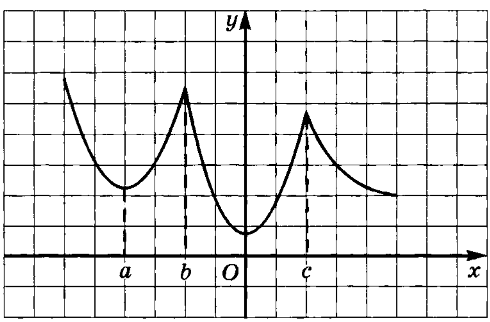


Рис. 217

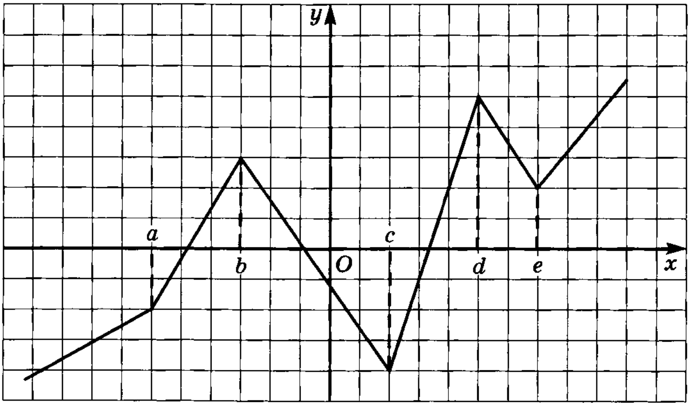


Рис. 218

30.18. По графику функции $y = f(x)$, изображенному на заданном рисунке, определите точки, в которых $f'(x)$ не существует:

а) рис. 215; в) рис. 217;

б) рис. 216; г) рис. 218.

30.19. Сколько точек минимума имеет функция $y = f(x)$, график которой изображен на заданном рисунке:

а) рис. 215; в) рис. 217;

б) рис. 216; г) рис. 218.

30.20. Сколько точек максимума имеет функция $y = f(x)$, график которой изображен на заданном рисунке:

а) рис. 215; в) рис. 217;

б) рис. 216; г) рис. 218.

30.21. Используя данные о производной $f'(x)$, приведенные в таблице, укажите:

а) промежутки возрастания функции $y = f(x)$;

б) промежутки убывания функции $y = f(x)$;

в) точки максимума функции $y = f(x)$;

г) точки минимума функции $y = f(x)$.

x	$(-\infty; 5)$	-5	$(-5; -2)$	-2	$(-2; 8)$	8	$(8; +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

30.22. а) Постройте эскиз графика функции, дифференцируемой на интервале $(a; b)$, имеющей на этом интервале одну точку минимума, две точки максимума и не имеющей наименьшего значения.

б) Постройте эскиз графика функции, дифференцируемой на интервале $(a; b)$, имеющей на нем две точки минимума, две точки максимума, но не имеющей ни наименьшего, ни наибольшего значений.

30.23. Может ли иметь только одну точку экстремума:

а) четная функция;

б) нечетная функция;

в) периодическая функция;

г) монотонная функция?

О30.24. При каких значениях параметра a заданная функция имеет одну стационарную точку:

а) $y = x^3 - 3ax^2 + 27x - 5$;

б) $y = x^3 - 3ax^2 + 75x - 10$?

30.25. По графику производной, изображенному на заданном рисунке (см. с. 276), определите, имеет ли функция $y = f(x)$ точки экстремума; если да, то указажите характер точек экстремума:

а) рис. 200;　　　в) рис. 202;

б) рис. 201;　　　г) рис. 203.

Найдите точки экстремума заданной функции и определите их характер:

О30.26. а) $y = 7 + 12x - x^3$;　　　в) $y = 3x^3 + 2x^2 - 7$;

б) $y = 8 + 2x^2 - x^4$;　　　г) $y = x^4 - 8x^2$.

О30.27. а) $y = 2x + \dfrac{8}{x}$;　　　в) $y = \dfrac{x}{5} + \dfrac{5}{x}$;

б) $y = \sqrt{2x - 1}$;　　　г) $y = (x - 3)^4$.

О30.28. а) $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5}{2}x^2 + 6x - 1$;

б) $y = x^3 - 27x + 26$;

в) $y = x^3 - 7x^2 - 5x + 11$;

г) $y = -2x^3 + 21x^2 + 19$.

О30.29. а) $y = -5x^5 + 3x^3$;

б) $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 13$;

в) $y = x^4 - 50x^2$;

г) $y = 2x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 3$.

О30.30. а) $y = x + \frac{4}{x}$; б) $y = \frac{x^2 + 9}{x}$.

О30.31. а) $y = x - 2\sqrt{x - 2}$; б) $y = 4\sqrt{2x - 1} - x$.

О30.32. а) $y = x - 2\cos x, \quad x \in [-\pi; \pi]$;

б) $y = 2\sin x - x, \quad x \in [\pi; 3\pi]$.

§ 31. Построение графиков функций

За годы изучения курса алгебры в школе вы накопили достаточно большой опыт построения графиков функций. В основном вы строили графики «по точкам», т. е. для заданной функции $y = f(x)$ находили контрольные точки $(x_1; f(x_1))$, $(x_2; f(x_2))$, $(x_3; f(x_3))$, $(x_4; f(x_4))$ и т. д., отмечали их на координатной плоскости и, полагаясь на интуицию, соединяли найденные точки плавной кривой. Как выбирались эти контрольные точки? Иногда обдуманно, например, находили вершину параболы $y = ax^2 + bx + c$ или специально искали точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осями координат. Но чаще выбор контрольных точек был случайным.

Заметим, что графики любых функций строят по точкам. Но в тех случаях, когда вид графика заранее неизвестен, эти точки надо выбирать со смыслом — уметь выделять особо важные точки графика, которые определяют его вид. Об этом мы уже говорили выше, когда строили графики функций $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$ (см. рис. 190) и $y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11$ (см. рис. 196). К особо важным точкам графика функции $y = f(x)$ относят:

— стационарные и критические точки;

— точки экстремума;

— точки пересечения графика с осями координат;

— точки разрыва функции.

В тех случаях, когда речь идет о построении графика незнакомой функции, когда заранее невозможно представить вид графика, полезно применять определенную схему исследования свойств функции, которая помогает составить представление о ее графике. После этого можно приступать к построению графика по точкам.

В курсе математического анализа разработана универсальная схема исследования свойств функции и построения ее графика. Мы будем использовать упрощенные варианты указанной схемы.

1) Если функция $y = f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой, то достаточно найти стационарные и критические точки, точки экстремума, промежутки монотонности, точки пересечения графика с осями координат и при необходимости выбрать еще несколько контрольных точек. Именно так мы поступали в § 30, когда строили графики следующих функций:

$$y = 2x^2 - 6x + 3 \quad (\text{см. рис. } 193);$$
$$y = 2x^3 + 3x^2 - 1 \quad (\text{см. рис. } 190);$$
$$y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11 \quad (\text{см. рис. } 196).$$

2) Если функция $y = f(x)$ определена не на всей числовой прямой, то начинать следует с нахождения области определения функции (если область не задана) и с указания ее точек разрыва.

3) Полезно исследовать функцию на четность, поскольку график четной или нечетной функции обладает симметрией (соответственно относительно оси y или относительно начала координат), и, следовательно, можно сначала построить только ветвь графика при $x \geqslant 0$, а затем достроить симметричную ветвь.

4) Если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$, то (см. § 26) прямая $y = b$ является *горизонтальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$. Асимптота дает своеобразный ориентир для графика.

5) Если $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ и при $x = a$ знаменатель обращается в нуль, а числитель отличен от нуля, то $x = a$ — *вертикальная асимптота* графика функции $y = f(x)$.

Например, для функции $y = \dfrac{1}{x-1}$ — ее график (гипербола) изображен на рисунке 219 — вертикальной асимптотой является прямая $x = 1$.

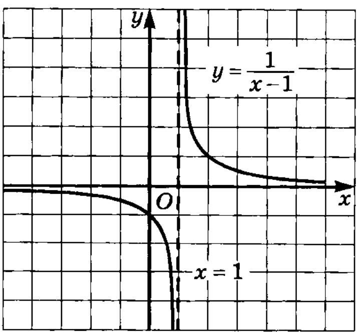


Рис. 219

Пример 1. Построить график функции $y = \dfrac{x}{1+x^2}$.

Решение 1. Введем обозначение $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Найдем область определения функции

$$D(f) = (-\infty; +\infty).$$

2. Исследуем функцию на четность:

$$f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = -\frac{x}{1+x^2} = -f(x).$$

Значит, заданная функция нечетна, ее график симметричен относительно начала координат, а потому начнем с построения ветви графика при $x \geqslant 0$.

3. Найдем асимптоты. Вертикальной асимптоты нет. Для нахождения горизонтальной асимптоты надо вычислить $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$. Имеем

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + 1} = \frac{0}{0+1} = 0.$$

Значит, $y = 0$ — горизонтальная асимптота графика функции.

4. Найдем стационарные и критические точки, точки экстремума и промежутки монотонности функции. Имеем

$$y' = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{(x)' \cdot (1+x^2) - x \cdot (1+x^2)'}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Производная всюду существует, значит, критических точек у функции нет.

Стационарные точки найдем из соотношения $y' = 0$. Получаем $1 - x^2 = 0$, откуда находим, что $x = 1$ или $x = -1$. Поскольку мы договорились рассматривать лишь случай, когда $x \geqslant 0$, выберем значение $x = 1$. При $x < 1$ $y' > 0$, а при $x > 1$ $y' < 0$. Значит, $x = 1$ — точка максимума функции, причем

$$y_{\max} = f(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}.$$

На промежутке $[0; 1]$ функция возрастает, на промежутке $[1; +\infty)$ функция убывает.

5. Составим таблицу значений функции $y = \frac{x}{1+x^2}$ при $x \geqslant 0$:

x	0	1	2	3
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$

6. Отметив найденные точки на координатной плоскости, соединив их плавной кривой и учтя при этом, что $\left(1; \frac{1}{2}\right)$ — точка максимума и что $y = 0$ — горизонтальная асимптота, построим ветвь искомого графика при $x \geqslant 0$ (рис. 220). Добавив ветвь,

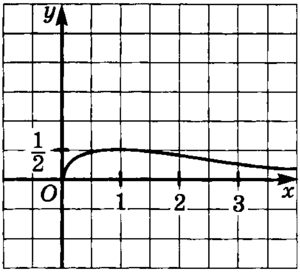


Рис. 220

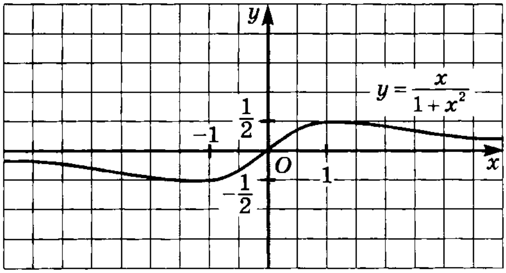


Рис. 221

симметричную построенной относительно начала координат, получим весь график (рис. 221).

Пример 2. Построить график функции $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$.

Решение. 1. Введем обозначение $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$. Найдем область определения функции. Она задается условиями $x \neq 1$, $x \neq -1$ (при значениях $x = 1$, $x = -1$ знаменатель дроби обращается в нуль). Итак,

$$D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty).$$

2. Исследуем функцию на четность:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1} = \frac{x^2+1}{x^2-1} = f(x).$$

Значит, заданная функция четна, ее график симметричен относительно оси ординат, а потому можно для начала ограничиться построением ветвей графика при $x \geqslant 0$.

3. Найдем асимптоты. Вертикальной асимптотой является прямая $x = 1$, поскольку при этом значении x знаменатель дроби обращается в нуль, а числитель отличен от нуля. Для отыскания горизонтальной асимптоты надо вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = 1.$$

Значит, $y = 1$ — горизонтальная асимптота графика функции.

4. Найдем стационарные и критические точки, точки экстремума и промежутки монотонности функции

$$y' = \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)' = \frac{(x^2+1)'\cdot(x^2-1)-(x^2+1)\cdot(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{2x\cdot(x^2-1)-(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}.$$

Производная существует всюду в области определения функции, значит, критических точек у функции нет.

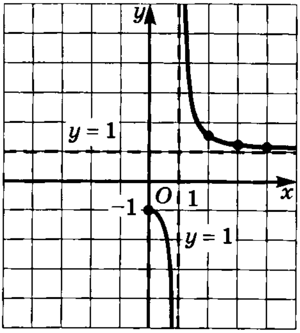


Рис. 222

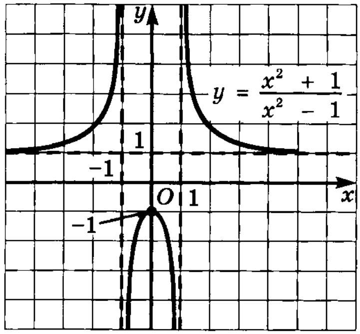


Рис. 223

Стационарные точки найдем из соотношения $y' = 0$. Получаем $-4x = 0$, откуда находим, что $x = 0$. При $x < 0$ имеем $y' > 0$; при $x > 0$ имеем $y' < 0$. Значит, $x = 0$ — точка максимума функции, причем $y_{max} = f(0) = \frac{0^2 + 1}{0^2 - 1} = -1$.

При $x > 0$ имеем $y' < 0$; но следует учесть наличие точки разрыва $x = 1$. Значит, вывод о промежутках монотонности будет выглядеть так: на промежутке $[0; 1)$ функция убывает, на промежутке $(1; +\infty)$ функция также убывает.

5. Составим таблицу значений функции $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ при $x \geqslant 0$:

x	0	$\frac{1}{2}$	2	3	4
y	-1	$-\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{17}{15}$

6. Отметив найденные точки на координатной плоскости, учтя при этом, что $(0; -1)$ — точка максимума, что $y = 1$ — горизонтальная асимптота, что $x = 1$ — вертикальная асимптота, построим ветви искомого графика при $x \geqslant 0$ (рис. 222). Добавив ветви, симметричные построенным относительно оси ординат, получим весь график (рис. 223).

Упражнения

31.1. Постройте эскиз графика какой-нибудь функции, обладающей указанными свойствами:

а) Функция имеет две точки максимума, одну точку минимума и является ограниченной;

б) функция возрастает при $x \leqslant 1$ и при $x \geqslant 5$ и убывает на промежутке $[1; 5]$; точка $x = 1$ является критической, а точка $x = 5$ — стационарной.

31.2. Постройте эскиз графика какой-нибудь функции, обладающей указанными свойствами:

а) Функция имеет разрыв в точке $x = -2$, максимум в точке $x = -1$ и минимум в точке $x = 1$;

б) функция имеет горизонтальную асимптоту $y = 3$ при $x \to \infty$, одну точку максимума и одну точку минимума.

Исследуйте функцию и постройте ее график:

○31.3. а) $y = 3x^2 - 4x + 5$; в) $y = 7 - x - 2x^2$;

б) $y = 3 + 2x - x^2$; г) $y = 5x^2 - 15x - 4$.

○31.4. а) $y = 3x^2 - x^3$; в) $y = x^3 + 3x^2$;

б) $y = -9x + x^3$; г) $y = 3x - x^3$.

○31.5. а) $y = x^3 - 3x^2 + 2$; в) $y = -x^3 + 6x^2 - 5$;

б) $y = -x^3 + 3x - 2$; г) $y = x^3 - 3x + 2$.

○31.6. а) $y = 2x^3 + x^2 - 8x - 7$; в) $y = x^3 + x^2 - x - 1$;

б) $y = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x - \frac{11}{3}$; г) $y = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + \frac{5}{3}$.

○31.7. а) $y = -x^4 + 5x^2 - 4$; в) $y = 2x^4 - 9x^2 + 7$;

б) $y = x^5 - 5x$; г) $y = 5x^3 - 3x^5$.

○31.8. а) $y = (x - 1)^2(x + 2)$; в) $y = (x + 2)^2(x - 3)$;

б) $y = \frac{256}{9}x(x - 1)^3$; г) $y = x^3(2 - x)$.

○31.9. а) $y = \frac{x + 2}{x - 3}$; в) $y = \frac{x - 3}{x + 1}$;

б) $y = \frac{3x - 4}{x - 2}$; г) $y = \frac{2x + 1}{x + 2}$.

○31.10. а) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$; б) $y = \frac{-2}{x^2 + 4}$.

●31.11. а) $y = \frac{2x + 1}{x^2 + 2}$; б) $y = \frac{x - 2}{x^2 + 5}$.

●31.12. а) $y = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$; б) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

●31.13. а) Постройте график функции $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

б) При каких значениях параметра a уравнение $x^4 - 2x^2 + 3 = a$ имеет три корня?

●**31.14.** а) Постройте график функции $y = -x^4 + 2x^2 + 8$.

б) При каких значениях параметра a уравнение $-x^4 + 2x^2 + 8 = a$ не имеет корней?

●**31.15.** При каких значениях параметра a:

а) уравнение $x^3 - 3x = a$ имеет один корень;

б) уравнение $3x - x^3 = a$ имеет два корня?

§ 32. Применение производной для нахождения наибольших и наименьших значений величин

1. Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на промежутке

Вы уже накопили некоторый опыт нахождения наибольшего и наименьшего значений функции. Чаще всего мы использовали для этого график функции. Пусть, например, дана функция $y = \frac{x}{1+x^2}$. Построив ее график (см. рис. 221), легко сделать вывод о том, что $y_{\text{наим}} = -\frac{1}{2}$, а $y_{\text{наиб}} = \frac{1}{2}$.

В некоторых случаях легко найти наибольшее и наименьшее значения функции и без помощи графика. Например, для функции $y = \sqrt{9-x^2}$ можно рассуждать так: ясно, что $\sqrt{9-x^2} \leqslant 3$, значит, $y_{\text{наиб}} = 3$ (это значение достигается функцией в точке $x = 0$). С другой стороны, ясно, что $\sqrt{9-x^2} \geqslant 0$, значит, $y_{\text{наим}} = 0$ (это значение достигается функцией при $x = 3$ или при $x = -3$).

В более сложных случаях для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции используется производная.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ — несколько графиков таких функций представлено на рисунках 224—226. Анализируя указанные геометрические модели, можно прийти к следующим выводам.

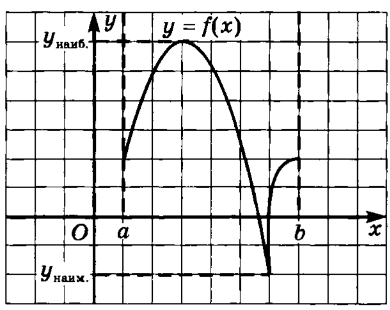


Рис. 224

1. *Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на нем и своего наибольшего, и своего наименьшего значений* (эта теорема доказывается в курсе высшей математики).

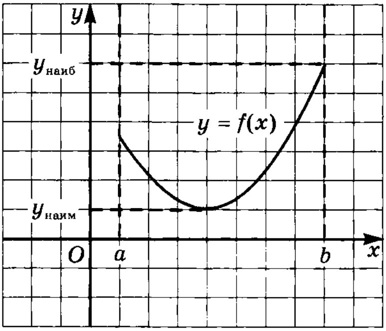


Рис. 225

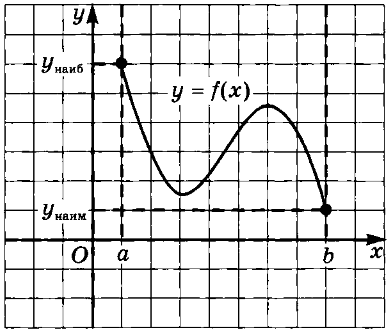


Рис. 226

2. *Наибольшего и наименьшего значений непрерывная функция может достигать как на концах отрезка, так и внутри него.*

Здесь возможны варианты — некоторые из них представлены на рисунках 224—226. На рисунке 224 и наибольшее и наименьшее значения достигаются внутри отрезка. На рисунке 225 наименьшее значение достигается внутри отрезка, а наибольшее — в правом конце. На рисунке 226 и наибольшее и наименьшее значения достигаются на концах отрезка.

3. *Если наибольшее (или наименьшее) значение достигается внутри отрезка, то только в стационарной или критической точке.*

В этом нет ничего удивительного, поскольку в этом случае наибольшее (или наименьшее) значение функции одновременно является экстремумом, а экстремум достигается только в стационарной или критической точке.

Подведем итог сказанному в виде алгоритма.

Алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти стационарные и критические точки функции, лежащие внутри отрезка $[a; b]$.
3. Вычислить значения функции $y = f(x)$ в точках, отобранных на втором шаге, и в точках a и b; выбрать среди этих значений наименьшее (это будет $y_{наим}$) и наибольшее (это будет $y_{наиб}$).

Пример 1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 1$:

а) на отрезке $[-4; 6]$;   в) на отрезке $[-2; 2]$.

б) на отрезке $[0; 6]$;

Решение. Воспользуемся алгоритмом.

1) $y' = 3x^2 - 6x - 45$.

2) Производная существует при всех x, значит, критических точек у функции нет. Стационарные точки найдем из условия $y' = 0$. Имеем

$$3x^2 - 6x - 45 = 0;$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0;$$

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 5.$$

Дальнейшие рассуждения зависят от указанного в условии отрезка.

а) Обе стационарные точки (и $x = -3$, и $x = 5$) принадлежат заданному отрезку $[-4; 6]$. Значит, на третьем шаге мы составим такую таблицу значений функции $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 1$:

x	-4	-3	5	6
y	69	82	-174	-161

Таким образом, $y_{наим} = -174$ (достигается в точке $x = 5$); $y_{наиб} = 82$ (достигается в точке $x = -3$).

б) Отрезку $[0; 6]$ принадлежит лишь одна из двух найденных стационарных точек, а именно точка $x = 5$. Значит, составим такую таблицу значений функции $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 1$:

x	0	5	6
y	1	-174	-161

Таким образом, $y_{наим} = -174$ (достигается в точке $x = 5$); $y_{наиб} = 1$ (достигается в точке $x = 0$).

в) Отрезку $[-2; 2]$ не принадлежит ни одна из найденных стационарных точек, значит, достаточно вычислить значения функции в концевых точках: если $x = -2$, то $y = 71$; если $x = 2$, то $y = -93$.

Таким образом, в этом случае $y_{наим} = -93$, $y_{наиб} = 71$. ◼

Пример 2. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = 5x^3 - x|x - 1|$ на отрезке $[0; 2]$.

Р е ш е н и е. Если $x \geqslant 1$, то $|x-1| = x-1$, и функция принимает вид $y = 5x^3 - x^2 + x$; если $x < 1$, то $|x-1| = 1-x$, и функция принимает вид $y = 5x^3 + x^2 - x$. Таким образом, речь идет о кусочной функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 5x^3 - x^2 + x, \text{ если } x \geqslant 1; \\ 5x^3 + x^2 - x, \text{ если } x < 1. \end{cases}$$

1) Вычисляя $f'(x)$, мы должны учесть, что при $x > 1$ следует пользоваться формулой $f(x) = 5x^3 - x^2 + x$. Получим $f'(x) = 15x^2 - 2x + 1$.

При $x < 1$ следует пользоваться формулой $f(x) = 5x^3 + x^2 - x$. Получим $f'(x) = 15x^2 + 2x - 1$.

В «точке стыка» $x = 1$ производная не существует, это критическая точка функции.

Итак, $f'(x) = \begin{cases} 15x^2 - 2x + 1, \text{ если } x > 1; \\ 15x^2 + 2x - 1, \text{ если } x < 1. \end{cases}$

2) Критическую точку мы уже нашли — это точка $x = 1$. Найдем стационарные точки, решив уравнение $f'(x) = 0$.

Если $x > 1$, то $f'(x) = 15x^2 - 2x + 1$; уравнение $15x^2 - 2x + 1 = 0$ не имеет действительных корней.

Если $x < 1$, то $f'(x) = 15x^2 + 2x - 1$; из уравнения $15x^2 + 2x - 1 = 0$ находим $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = -\frac{1}{3}$. Из этих двух значений заданному отрезку [0; 2] принадлежит только точка $x = \frac{1}{5}$.

3) Составим таблицу значений функции $y = 5x^3 - x|x-1|$, включив в нее точки $x = 0$, $x = 2$, $x = 1$, $x = \frac{1}{5}$ — концы заданного отрезка и лежащие внутри отрезка критическую и стационарную точки:

x	0	$\frac{1}{5}$	1	2
y	0	$-\frac{3}{25}$	5	38

Из имеющихся в таблице значений наименьшим является $-\frac{3}{25}$, наибольшим — 38.

Ответ: $y_{\text{наим}} = -\frac{3}{25}$; $y_{\text{наиб}} = 38$.

А как быть, если речь идет о нахождении наибольшего или наименьшего значения функции, непрерывной на незамкнутом промежутке, например на интервале? Можно построить график функции и снять информацию с полученной графической модели. Но чаще оказывается более удобным использовать следующую теорему (приводим ее без доказательства).

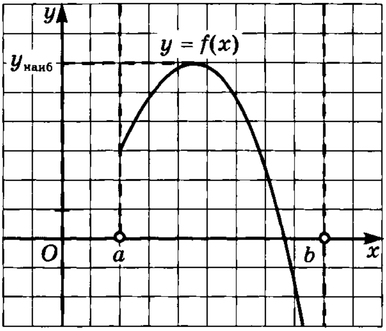


Рис. 227

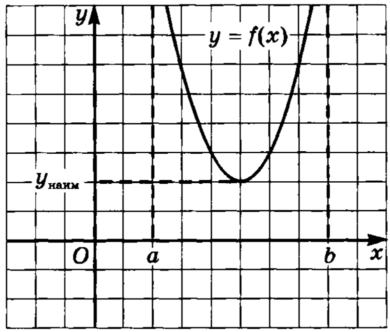


Рис. 228

Теорема. **Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри него единственную стационарную или критическую точку $x = x_0$. Тогда:**

а) если $x = x_0$ — точка максимума, то $y_{наиб} = f(x_0)$;

б) если $x = x_0$ — точка минимума, то $y_{наим} = f(x_0)$.

На рисунках 227 и 228 приведены соответствующие геометрические иллюстрации.

Пример 3. Найти наибольшее значение функции $y = \frac{x}{1 + x^2}$ на луче $[0; +\infty)$.

Решение. $y' = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$ (см. пример 1 из § 31).

Производная всюду существует, значит, критических точек у функции нет.

Стационарные точки найдем из соотношения $y' = 0$. Получаем $1 - x^2 = 0$, откуда находим, что $x = 1$ или $x = -1$. Заданному лучу $[0; +\infty)$ принадлежит лишь точка $x = 1$. При $x < 1$ $y' > 0$, а при $x > 1$ $y' < 0$. Значит, $x = 1$ — точка максимума функции, причем $y_{max} = \frac{1}{1 + 1^2} = \frac{1}{2}$.

Поскольку $x = 1$ — единственная стационарная точка функции на заданном промежутке, причем точка максимума, то по теореме

$$y_{наиб} = y_{max} = \frac{1}{2}.$$

Ранее (см. рис. 220) был построен график функции на заданном луче — он хорошо иллюстрирует полученный результат.

Ответ: $y_{наиб} = \frac{1}{2}$.

2. Задачи на нахождение наибольших и наименьших значений величин

На практике всем нам часто приходится решать так называемые *задачи на оптимизацию* (*optimum* — наилучший). Инженеры-технологи стараются так организовать производство, чтобы выпускалось как можно больше продукции; конструкторы пытаются разработать прибор для космического корабля так, чтобы масса прибора была наименьшей; экономисты стараются спланировать связи завода с источниками сырья так, чтобы транспортные расходы оказались минимальными, и т. д.

В самых простых задачах на оптимизацию мы имеем дело с двумя величинами, одна из которых зависит от другой, причем надо найти такое значение второй величины, при котором первая принимает свое наименьшее или наибольшее (наилучшее в данных условиях) значение.

Задачи на оптимизацию решают по обычной схеме из трех этапов математического моделирования: 1) составление математической модели; 2) работа с моделью; 3) ответ на вопрос задачи. Прежде чем переходить к конкретному примеру решения задачи на оптимизацию, дадим некоторые рекомендации методического плана.

Первый этап. *Составление математической модели.*

1) Проанализировав условия задачи, выделите *оптимизируемую величину* (О. В.), т. е. величину, о наибольшем или наименьшем значении которой идет речь. Обозначьте ее буквой y (или S, V, R, t — в зависимости от фабулы).

2) Одну из участвующих в задаче неизвестных величин, через которую сравнительно нетрудно выразить О. В., примите за *независимую переменную* (Н. П.) и обозначьте ее буквой x (или какой-либо иной буквой). Установите *реальные границы* изменения Н. П. (в соответствии с условиями задачи), т. е. область определения для искомой О. В.

3) Исходя из условий задачи, выразите y через x. Математическая модель задачи представляет собой функцию $y = f(x)$ с областью определения X, которую нашли на втором шаге.

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

На этом этапе для функции $y = f(x)$, $x \in X$ найдите $y_{\text{наим}}$ или $y_{\text{наиб}}$ в зависимости от того, что требуется в условии задачи. При этом используются теоретические установки, которые были даны в пункте 1 данного параграфа.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Здесь следует дать конкретный ответ на вопрос задачи, опираясь на результаты, полученные на этапе работы с моделью.

Пример 4. Бак, имеющий вид прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, должен вмещать 500 литров воды. При какой стороне основания площадь поверхности бака (без крышки) будет наименьшей?

Решение. Первый этап. *Составление математической модели.*

1) Оптимизируемая величина (О. В.) — площадь поверхности бака, поскольку в задаче требуется выяснить, когда эта площадь будет наименьшей. Обозначим О. В. буквой S.

2) Площадь поверхности зависит от измерений прямоугольного параллелепипеда. Объявим независимой переменной (Н. П.) сторону квадрата, служащего основанием бака; обозначим ее буквой x. Ясно, что $x > 0$. Других ограничений нет, значит, $0 < x < +\infty$. Таковы реальные границы изменения независимой переменной: $X = (0; +\infty)$.

3) Если бак вмещает 500 л воды, то объем V бака равен 500 дм^3. Если h — высота бака, то $V = x^2h$, откуда находим $h = \frac{V}{x^2}$.

На рисунке 229 изображен прямоугольный параллелепипед, указаны его измерения. Поверхность бака состоит из квадрата со стороной x и четырех прямоугольников со сторонами x и $\frac{V}{x^2}$. Значит,

$$S = x^2 + 4 \cdot \frac{V}{x^2} \cdot x = x^2 + \frac{4V}{x}.$$

Итак,

$S = x^2 + \frac{2000}{x}$, где $x \in (0; +\infty)$ (мы учли, что $V = 500$).

Математическая модель задачи составлена.

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

На этом этапе для функции $S = x^2 + \frac{2000}{x}$, $x \in (0; +\infty)$ надо найти $y_{\text{наим}}$. Для этого нужна производная функции:

$$S' = 2x - \frac{2000}{x^2};$$

$$S' = \frac{2(x^3 - 1000)}{x^2}.$$

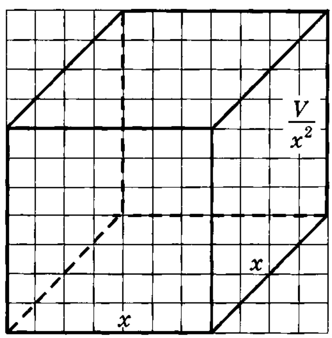


Рис. 229

На промежутке $(0; +\infty)$ критических точек нет, а стационарная точка только одна: $S' = 0$ при $x = 10$.

Заметим, что при $x < 10$ выполняется неравенство $S' < 0$, а при $x > 10$ выполняется неравенство $S' > 0$. Значит, $x = 10$ — единственная стационарная точка, причем точка минимума функции на заданном промежутке, а потому, согласно теореме из пункта 1, в этой точке функция достигает своего наименьшего значения.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

В задаче спрашивается, какой должна быть сторона основания, чтобы бак имел наименьшую поверхность. Мы выяснили, что сторона квадрата, служащего основанием такого бака, равна 10 дм.

Ответ: 10 дм.

Упражнения

Найдите наибольшее и наименьшее значения заданной функции на заданном отрезке:

32.1. а) $y = 3x - 6$, $[-1; 4]$;

б) $y = -\dfrac{8}{x}$, $\left[\dfrac{1}{4}; 8\right]$;

в) $y = -0{,}5x + 4$, $[-2; 6]$;

г) $y = \dfrac{3}{x}$, $[0{,}3; 2]$.

32.2. а) $y = 2\sin x$, $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$;

б) $y = -2\cos x$, $\left[-2\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right]$;

в) $y = 6\cos x$, $\left[-\dfrac{\pi}{2}; 0\right]$;

г) $y = -0{,}5\sin x$, $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

32.3. а) $y = \operatorname{tg} x$, $\left[-\dfrac{\pi}{3}; -\dfrac{\pi}{6}\right]$;

б) $y = -3\operatorname{tg} x$, $\left[\pi; \dfrac{4\pi}{3}\right]$;

в) $y = -2\operatorname{tg} x$, $\left[0; \dfrac{\pi}{6}\right]$;

г) $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg} x$, $\left[-\pi; -\dfrac{3\pi}{4}\right]$.

32.4. а) $y = \sqrt{x}$, $[0; 9]$;

б) $y = \sqrt{-x}$, $[-4; 0]$;

в) $y = -\sqrt{x}$, $[4; 16]$;

г) $y = -\sqrt{-x}$, $[-9; -4]$.

32.5. а) $y = 12x^4$, $[-1;\ 2]$;

б) $y = -6x^5$, $[0{,}1;\ 2]$;

в) $y = -3x^7$, $[0;\ 1]$;

г) $y = \frac{1}{9}x^4$, $[-1;\ 3]$.

○32.6. а) $y = x^2 - 8x + 19$, $[-1; 5]$;

б) $y = x^2 + 4x - 3$, $[0; 2]$;

в) $y = 2x^2 - 8x + 6$, $[-1; 4]$;

г) $y = -3x^2 + 6x - 10$, $[-2; 9]$.

32.7. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sin x$ на отрезке:

а) $\left[0;\ \frac{2\pi}{3}\right]$;

б) $\left[2\pi;\ \frac{8\pi}{3}\right]$;

в) $\left[-2\pi;\ -\frac{4\pi}{3}\right]$;

г) $\left[6\pi;\ \frac{26\pi}{3}\right]$.

○32.8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 1$ на отрезке:

а) $[-1;\ 3]$; б) $[3;\ 6]$; в) $[-2;\ 3]$; г) $[3;\ 5]$.

○32.9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 + 3x^2 - 45x - 2$ на отрезке:

а) $[-6;\ 0]$; б) $[1;\ 2]$; в) $[-6;\ -1]$; г) $[0;\ 2]$.

○32.10. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$ на отрезке:

а) $[0;\ 2]$; б) $[3;\ 6]$; в) $[-1;\ 3]$; г) $[2;\ 7]$.

○32.11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^4 - 8x^3 + 10x^2 + 1$ на отрезке:

а) $[-1;\ 2]$; б) $[1;\ 6]$; в) $[-2;\ 3]$; г) $[-1;\ 7]$.

○32.12. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x + \frac{4}{x-1}$ на отрезке:

а) $[2;\ 4]$; б) $[-2;\ 0]$.

Найдите наибольшее и наименьшее значения заданной функции на заданном промежутке:

○32.13. а) $y = \operatorname{ctg} x + x,\ \ x \in \left[\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right]$;

б) $y = 2\sin x - x,\ \ x \in [0;\ \pi]$;

в) $y = 2\cos x + x,\ \ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$;

г) $y = \operatorname{tg} x - x,\ \ x \in \left[0;\ \frac{\pi}{3}\right]$.

○32.14. а) $y = x^3 - 2x^2 + 1$, $[0{,}5;\ +\infty)$;

б) $y = x - 2\sqrt{x}$, $[0;\ +\infty)$;

в) $y = \frac{1}{5}x^5 - x^2$, $(-\infty;\ 1]$;

г) $y = \frac{x^4}{x^4 + 1}$, $(-\infty;\ +\infty)$.

○32.15. а) $y = x + \frac{1}{x}$, $(-\infty;\ 0)$;

б) $y = \frac{3x}{x^2 + 3}$, $[0;\ +\infty)$;

в) $y = -2x - \frac{1}{2x}$, $(0;\ +\infty)$;

г) $y = \sqrt{2x + 6} - x$, $[-3;\ +\infty)$.

●32.16. а) $y = x^2 - 4x + 5 + |1 - x|$, $[0;\ 4]$;

б) $y = |x^3 - 1| - 3x$, $[-1;\ 3]$.

●32.17. Найдите область значений функции:

а) $y = 2x - \sqrt{16x - 4},\ x \in \left[\frac{1}{4};\ \frac{17}{4}\right]$;

б) $y = 2\sqrt{x - 1} - 0{,}5x,\ x \in [1;\ 10]$.

Найдите область значений функции:

●32.18. а) $y = x\sqrt{x + 2}$;

б) $y = x\sqrt{1 - 2x}$.

●32.19. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + \sqrt{16 - x^4} + \left|\sqrt{16 - x^4} - 5\right|$.

○32.20. Сумма двух целых чисел равна 24. Найдите эти числа, если известно, что их произведение принимает наибольшее значение.

○32.21. Произведение двух положительных чисел равно 484. Найдите эти числа, если известно, что их сумма принимает наименьшее значение.

○32.22. Разность двух чисел равна 98. Найдите эти числа, если известно, что их произведение принимает наименьшее значение.

○32.23. Представьте число 3 в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма утроенного первого слагаемого и куба второго слагаемого была наименьшей.

○32.24. Представьте число 5 в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы произведение первого слагаемого и куба второго слагаемого было наибольшим.

○32.25. Периметр прямоугольника составляет 56 см. Каковы его стороны, если этот прямоугольник имеет наибольшую площадь?

○32.26. Нужно огородить участок прямоугольной формы забором длиной 200 м. Каковы должны быть размеры этого прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

○32.27. Площадь прямоугольника составляет 16 см^2. Каковы должны быть его размеры, чтобы периметр прямоугольника был наименьшим?

○32.28. Огораживают спортивную площадку прямоугольной формы площадью 2500 м^2. Каковы должны быть ее размеры, чтобы на забор ушло наименьшее количество сетки «рабицы»?

●32.28. Сторона квадрата $ABCD$ равна 8 см. На сторонах AB и BC взяты соответственно точки P и E так, что $BP = BE = 3$ см. На сторонах AD и CD берутся точки соответственно K и M так, что четырехугольник $KPEM$ — трапеция. Чему равна наибольшая площадь такой трапеции?

●32.30. На графике функции $y = x^2$ найдите точку M, ближайшую к точке A (0; 1,5).

●32.31. На графике функции $y = \sqrt{x}$ найдите точку M, ближайшую к точке A (4,5; 0).

○32.32. Открытый металлический бак с квадратным основанием должен вмещать 32 л воды. При каких размерах на его изготовление уйдет наименьшее количество материала?

○32.33. Закрытый металлический бак с квадратным дном должен иметь объем 343 м^3. При каких размерах на его изготовление пойдет наименьшее количество материала?

○32.34. Для перевозки груза требуется изготовить закрытый короб в форме прямоугольного параллелепипеда, стороны основания которого относились бы как $2 : 3$, а объем составлял 576 м^3. Каковы должны быть измерения параллелепипеда, чтобы его полная поверхность была наименьшей?

○32.35. Диагональ боковой грани правильной четырехугольной призмы равна d. При какой длине бокового ребра объем призмы будет наибольшим?

●32.36. Боковые стороны и одно из оснований трапеции равны 15 см. При какой длине второго основания площадь трапеции будет наибольшей?

●32.37. Из прямоугольной трапеции с основаниями a и b и высотой h вырезают прямоугольник наибольшей площади. Чему равна эта площадь, если:
а) $a = 80$, $b = 60$, $h = 100$;
б) $a = 24$, $b = 8$, $h = 12$?

●32.38. У пятиугольника $ABCDE$ углы A, B и C — прямые, $AB = a$, $BC = b$, $AE = c$, $DE = m$. Впишите в пятиугольник прямоугольник наибольшей площади и вычислите эту площадь, если:
а) $a = 7$, $b = 9$, $c = 3$, $m = 5$;
б) $a = 7$, $b = 18$, $c = 3$, $m = 1$.

●32.39. Памятник состоит из статуи и постамента. К памятнику подошел человек. Верхняя точка памятника находится выше уровня глаз человека на a м, а верхняя точка постамента — на b м. На каком расстоянии от памятника должен стать человек, чтобы видеть статую под наибольшим углом?

●32.40. База находится в лесу в 5 км от дороги, а в 13 км от базы на этой дороге есть железнодорожная станция. Пешеход по дороге идет со скоростью 5 км/ч, а по лесу — 3 км/ч. За какое минимальное время пешеход может добраться от базы до станции?

ГЛАВА 6 Начала стереометрии

В этой главе мы начинаем изучать один из самых увлекательных и важных разделов математики — стереометрию. Зачем же она нужна? Во-первых, именно она формирует необходимые пространственные представления, знакомит с разнообразием пространственных форм, законами восприятия и изображения пространственных фигур, что позволяет правильно ориентироваться в окружающем нас мире.

Во-вторых, стереометрия дает метод научного познания, способствует развитию логического мышления. По выражению выдающегося российского математика, академика А. Д. Александрова, геометрия в своей сущности и есть такое соединение строгой логики и живого воображения, в котором они взаимно организуют и направляют друг друга, как «лед и пламень».

Кроме того, изучение стереометрии способствует приобретению необходимых практических навыков в изображении, моделировании и конструировании пространственных фигур, в измерении основных геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов).

Наконец, стереометрия и сама по себе очень интересна. Она имеет яркую историю, связанную с именами знаменитых ученых: Пифагора, Евклида, Архимеда, И. Кеплера, Р. Декарта, Л. Эйлера, Н. И. Лобачевского и многих других.

Зачастую математические объекты, которые изучаются в стереометрии, очень красивы. Многие из них придумал не сам человек, их создала природа. Например, кристаллы — природные многогранники. Свойства кристаллов, которые вы изучали на уроках физики и химии, определяются их геометрическим строением, в частности симметричным расположением атомов в кристаллической решетке.

Формы правильных, полуправильных и звездчатых многогранников находят широкое применение в живописи, скульптуре, архитектуре, строительстве. Выдающийся архитектор XX столетия Ле Корбюзье писал: «Только неотступно следуя законам геометрии, архитекторы древности могли создать свои шедевры. Не случайно говорят, что пирамида Хеопса — немой трактат по геометрии, а греческая архитектура — внешнее выражение геометрии

Евклида. Прошли века, но роль геометрии не изменилась. Она по-прежнему остается грамматикой архитектора».

Стереометрия является основой многих таких современных научных разделов, как топология, кристаллография, линейное программирование и др. Фундаментальные результаты в этих областях получены российскими учеными: А. Д. Александровым, П. С. Александровым, Б. Н. Делоне, Л. В. Канторовичем, А. В. Погореловым, Е. С. Федоровым и другими.

Вот с какой замечательной наукой нам предстоит познакомиться. Начнем с ее истории.

§ 33. *История возникновения и развития геометрии*

Стереометрия, или геометрия в пространстве, это раздел геометрии, изучающий положение, форму, размеры и свойства различных пространственных фигур.

Стереометрия — греческое слово. Оно произошло от слов «стерео» — тело и «метрео» — измерять, т. е. буквально означает «теломерие».

Стереометрия, как и планиметрия, возникла и развивалась в связи с потребностями практической деятельности человека. О зарождении геометрии в Древнем Египте около 2000 лет до н. э. древнегреческий ученый Геродот (V в. до н. э.) писал следующее: «Сеозоострис, египетский фараон, разделил землю, дав каждому египтянину участок по жребию, и взимал соответствующим образом налог с каждого участка. Случалось, что Нил заливал тот или иной участок, тогда пострадавший обращался к царю, а царь посылал землемеров, чтобы установить, на сколько уменьшился участок, и соответствующим образом уменьшить налог. Так возникла геометрия в Египте, а оттуда перешла в Грецию».

При строительстве сооружений необходимо было рассчитать, сколько материала требуется для постройки, уметь вычислять расстояния между точками в пространстве и углы между прямыми и плоскостями, знать свойства простейших геометрических фигур. Так, египетские пирамиды, сооруженные за 2, 3 и 4 тысячи лет до н. э., поражают точностью своих метрических соотношений, свидетельствующей, что их строители уже знали многие стереометрические положения и расчеты.

Развитие торговли и мореплавания требовало умений ориентироваться во времени и пространстве: знать сроки смены времен года, уметь определять свое местонахождение по карте, измерять расстояния и находить направления движения. Наблюдения за Солнцем, Луной, звездами и изучение законов взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве позволило решить эти задачи и дать начало новой науке — астрономии.

Начиная с VII в. до н. э., в Древней Греции создаются философские школы, в которых происходит постепенный переход от практической к теоретической геометрии. Все большее значение в этих школах приобретают рассуждения, с помощью которых удавалось выводить новые геометрические свойства.

Одной из самых первых и самых известных школ была пифагорейская (VI—V вв. до н. э.), названная так в честь своего основателя — Пифагора.

Для обоснования своих философских теорий пифагорейцы использовали правильные многогранники, формы которых придавали элементам первооснов бытия, а именно: огонь — тетраэдр (его гранями являются четыре правильных треугольника, рис. 230, *а*); земля — гексаэдр (куб — многогранник, гранями которого являются шесть квадратов, рис. 230, *б*); воздух — октаэдр (его гранями являются восемь правильных треугольников, рис. 230, *в*); вода — икосаэдр (его гранями являются двадцать правильных треугольников, рис. 230, *г*); вся Вселенная, по мнению древних, имела форму додекаэдра (его гранями являются двенадцать правильных пятиугольников, рис. 230, *д*).

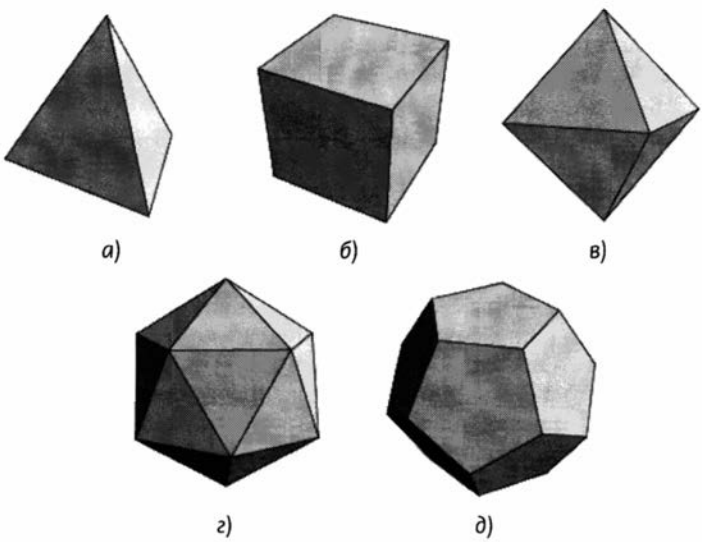


Рис. 230

Названия многогранников тоже имеют древнегреческое происхождение. В переводе с греческого «тетра» — четыре; «гекса» — шесть; «окто» — восемь; «икоси» — двадцать; «додека» — двенадцать; «эдра» — грань.

Более поздняя философская школа — Александрийская — интересна тем, что дала миру знаменитого ученого — Евклида, который жил около 300 г. до н. э. К сожалению, о его жизни известно мало. В одном из своих сочинений математик Папп (III век н. э.) изображает Евклида как человека исключительно честного, тихого и скромного, которому были чужды гордость и эгоизм.

Славу Евклиду создала его книга «Начала», в которой впервые было дано научное изложение и стройное аксиоматическое строение геометрии. На протяжении более двух тысячелетий этот труд являлся основой изучения систематического курса геометрии.

В одном из рассказов о Евклиде говорится: «Царь Птолемей спросил у Евклида, нельзя ли найти более короткий и менее утомительный путь к изучению геометрии, чем его "Начала". Евклид на это ответил: "В геометрии нет царского пути"».

В последние столетия в геометрии появились новые методы, в том числе координатный и векторный, позволившие переводить геометрические задачи на язык алгебры и наоборот. Возникли и развиваются новые направления геометрических исследований: геометрия Лобачевского, проективная геометрия, топология, компьютерная геометрия и т. д. Геометрические методы широко используются в других науках, например теории относительности, квантовой механике, кристаллографии и др.

§ 34. Основные понятия стереометрии

Основными понятиями стереометрии являются *точка*, *прямая* и *плоскость*, которые являются идеализациями объектов реального пространства.

Точка является идеализацией очень маленьких объектов, т. е. таких, размерами которых можно пренебречь. Евклид в своей книге «Начала» определял точку как то, что не имеет частей.

Прямая является идеализацией тонкой натянутой нити, края стола прямоугольной формы. По прямой распространяется луч света.

Плоскость является идеализацией ровной поверхности воды, поверхности стола, доски, зеркала и т. п.

Точки будем обозначать прописными латинскими буквами A, B, C, ..., прямые — строчными латинскими буквами a, b, c, ..., плоскости — греческими буквами α, β, γ, ...

Точки, прямые и плоскости будем изображать, как показано на рисунке 231.

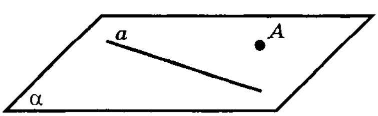


Рис. 231

Обратите внимание на то, что прямая является бесконечной, а мы изображаем лишь конечный участок прямой. Плоскость также является бесконечной, мы же изображаем лишь ее конечный участок.

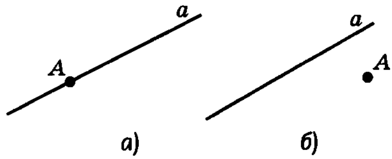


Рис. 232

Точка может принадлежать (рис. 232, *а*) или не принадлежать данной прямой (рис. 232, *б*). Если точка принадлежит прямой, говорят также, что прямая проходит через точку.

Аналогично, точка может принадлежать (рис. 233, *а*) или не принадлежать данной плоскости (рис. 233, *б*). Если точка принадлежит плоскости, говорят также, что плоскость проходит через точку.

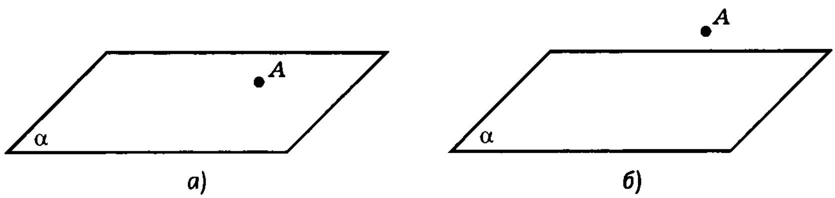


Рис. 233

Будем говорить, что прямая лежит в плоскости или что плоскость проходит через прямую, если каждая точка этой прямой принадлежит плоскости (рис. 234, *а*).

Если прямая и плоскость имеют только одну общую точку, то будем говорить, что прямая пересекает плоскость (рис. 234, *б*).

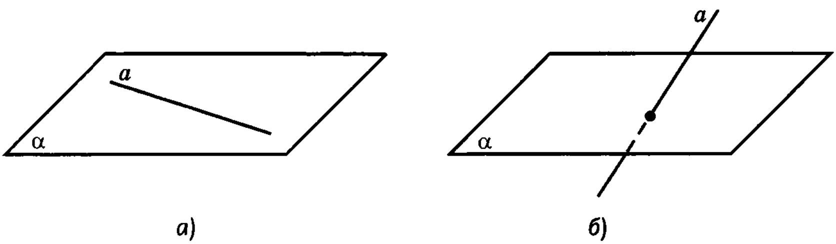


Рис. 234

Будем говорить, что две плоскости пересекаются по прямой, если их общими точками являются точки этой прямой и только они (рис. 235).

Так же как в планиметрии, некоторые свойства точек, прямых и плоскостей в пространстве принимаются без доказательства и называются *аксиомами*. В переводе с греческого «аксиома» означает

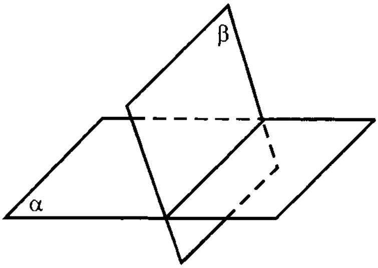


Рис. 235

утверждение, «достойное признания», т. е. бесспорное, не требующее доказательства, безусловное.

Сформулируем следующие аксиомы стереометрии:

1. *Через любые две точки пространства проходит единственная прямая.*

2. *Через любые три точки пространства, не принадлежащие одной прямой, проходит единственная плоскость.*

3. *Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.*

4. *Существуют по крайней мере четыре точки, не принадлежащие одной плоскости.*

5. *Для прямых и плоскостей в пространстве выполняются аксиомы планиметрии.*

Поскольку две точки определяют прямую, через них проходящую, то для обозначения прямой указывают какие-нибудь две точки, принадлежащие этой прямой. Например, прямая AB, прямая C_1D_1 и т. д.

Аналогично, поскольку три точки пространства, не принадлежащие одной прямой, определяют плоскость, через них проходящую, то для обозначения плоскости указывают какие-нибудь три точки этой плоскости, не принадлежащие одной прямой. Например, плоскость ABC, плоскость $D_1E_1F_1$ и т. д.

Используя аксиомы стереометрии, с помощью логических рассуждений устанавливают справедливость других свойств. Рассмотрим некоторые из них, которые называются *следствиями* из аксиом.

Следствие 1. Если прямая имеет с плоскостью две общие точки, то она лежит в этой плоскости.

Доказательство. Пусть прямая a имеет с плоскостью α две общие точки — A_1 и A_2 (рис. 236). Так как в плоскости α выполняются аксиомы планиметрии, то в этой плоскости через точки A_1, A_2 проходит единственная прямая. Если бы она не совпадала с прямой a, то мы получили бы две прямые, проходящие через две данные точки, а это противоречит аксиоме 1. Следовательно, эти прямые совпадают, и, значит, прямая a лежит в плоскости α. ◁■

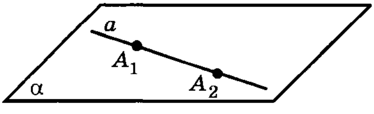


Рис. 236

Следствие 2. Через прямую и не принадлежащую ей точку проходит единственная плоскость.

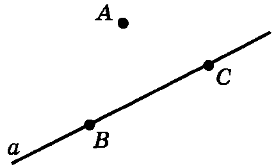


Рис. 237

Доказательство. Пусть точка A не принадлежит прямой a. Так как на прямой a выполняются аксиомы планиметрии, то на ней найдутся точки B, C (рис. 237). В силу аксиомы 2, через точки A, B, C проходит единственная плоскость α. По следствию 1, прямая a лежит в плоскости α. Значит, плоскость α проходит через прямую a и точку A.

Докажем, что эта плоскость единственна. Действительно, всякая плоскость, проходящая через прямую a и точку A, будет проходить также через точки A, B, C. По аксиоме 2, она должна совпадать с плоскостью α. ◁■

Следствие 3. Через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость.

Докажите это следствие самостоятельно, используя рисунок 238.

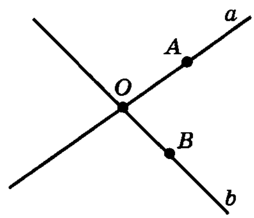


Рис. 238

Пример 1. Даны три точки, не принадлежащие одной прямой. Доказать, что все прямые, пересекающие два из трех отрезков, соединяющих заданные точки, лежат в одной плоскости.

Решение. Пусть даны три точки — A, B и C, не принадлежащие одной прямой. Они определяют плоскость α (аксиома 2). Возьмем произвольную прямую a, которая пересекает отрезки AB и BC соответственно в точках E и F. Значит, точки E и F принадлежат плоскости α. Тогда вся прямая a лежит в плоскости α (следствие 1 из аксиом стереометрии). ◁■

Пример 2. Плоскость γ задана прямой c и не принадлежащей ей точкой C. Построить в этой плоскости прямую, отличную от данной прямой и не проходящую через данную точку.

Замечание. Обратите внимание на то, что задачи на построение в пространстве решаются в воображении, мы не выполняем фактического построения, а, опираясь на известные факты, устанавливаем и обосновываем существование искомой фигуры.

Решение. На прямой c возьмем произвольную точку D и построим прямую DC. Она лежит в плоскости γ (следствие 1). Возьмем точки: K на прямой DC, например, принадлежащую отрезку DC и отличную от его концов; L на прямой c, отличную от D. Проведем прямую KL, она лежит в плоскости γ (следствие 1). KL — искомая прямая. ◁■

Пример 3. Найти наибольшее число прямых, проходящих через различные пары из четырех точек.

Решение. Наибольшее число прямых получится в случае, если никакие три из данных точек не принадлежат одной прямой. Каждую данную точку мы можем соединить прямыми с тремя другими точками. Учитывая, что дано четыре точки и каждую прямую мы подсчитываем дважды, окончательно получим $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ (прямых). ◁■

Упражнения

34.1. Представляя себе стены класса как участки плоскостей, укажите:

а) пары пересекающихся прямых;
б) пары пересекающихся плоскостей;
в) три прямые, пересекающиеся в одной точке;
г) три пересекающиеся плоскости;
д) пару непересекающихся прямых.

34.2. Сколько прямых проходит через две данные точки?

34.3. Сколько плоскостей может проходить через три данные точки? При каком расположении трех точек через них можно провести бесконечно много плоскостей?

34.4. Сколько плоскостей можно провести через одну прямую?

34.5. Даны четыре точки, не принадлежащие одной плоскости. Могут ли три из них принадлежать одной прямой?

34.6. Могут ли две плоскости иметь только: а) одну общую точку; б) две общие точки?

34.7. Могут ли пересекающиеся плоскости иметь общую точку, не принадлежащую линии пересечения этих плоскостей?

34.8. Могут ли две плоскости иметь две общие прямые?

34.9. Как расположены две плоскости, если в каждой из них лежит один и тот же треугольник?

34.10. Даны плоскость α и прямоугольник $ABCD$. Может ли плоскости α принадлежать только: а) одна вершина прямоугольника; б) две его вершины; в) три вершины?

34.11. Каждая ли точка дуги окружности принадлежит плоскости, если известно, что этой плоскости принадлежат: а) две точки дуги; б) три точки дуги?

34.12. Две вершины треугольника принадлежат плоскости. Принадлежит ли ей третья вершина, если известно, что данной плоскости принадлежит: а) центр вписанной в треугольник окружности; б) центр описанной около него окружности?

○ **34.13.** Изобразите:

а) три прямые, пересекающиеся в одной точке;
б) две непересекающиеся прямые;
в) плоскость и непересекающую ее прямую;
г) плоскость и лежащие в ней две пересекающиеся прямые;
д) три плоскости, пересекающиеся по общей прямой;
е) три плоскости, попарно пересекающиеся по прямым, которые пересекаются в одной точке.

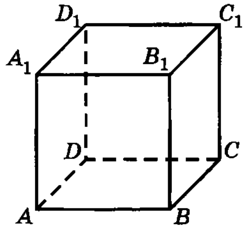


Рис. 239

○ **34.14.** Из прямых и плоскостей, проходящих через вершины куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($A...D_1$) (рис. 239), выберите:

а) пары пересекающихся прямых;
б) тройки прямых, пересекающихся в одной точке;
в) пары пересекающихся плоскостей;
г) тройки плоскостей, пересекающихся в одной точке.

○ **34.15.** Плоскость задана двумя прямыми m и n, пересекающимися в точке O. Постройте в этой плоскости прямую k, отличную от данных прямых и не проходящую через точку O.

○ **34.16.** Докажите, что для любой плоскости существуют точки, ей не принадлежащие.

○ **34.17.** Даны прямая и не принадлежащая ей точка. Докажите, что все прямые, пересекающие данную прямую и проходящие через данную точку, лежат в одной плоскости.

○ **34.18.** Даны две пересекающиеся прямые. Докажите, что все прямые, пересекающие обе данные прямые и не проходящие через их точку пересечения, лежат в одной плоскости.

○ **34.19.** Три плоскости имеют общую точку. Верно ли утверждение, что эти плоскости имеют общую прямую? Сколько прямых может получиться при попарном пересечении этих плоскостей?

○ **34.20.** Сколько прямых можно провести через различные пары: а) из трех точек; б) четырех точек; в) пяти точек; • г) n точек, никакие три из которых не принадлежат одной прямой?

○ **34.21.** Сколько плоскостей можно провести через различные тройки:

а) из четырех точек;

б) пяти точек;

•в) n точек, никакие четыре из которых не принадлежат одной плоскости?

○ **34.22.** Какое наибольшее число прямых может получиться при попарных пересечениях:

а) трех плоскостей;

б) четырех плоскостей;

•в) n плоскостей?

○ **34.23.** На какое наибольшее число частей могут разбивать пространство:

а) две плоскости;

б) три плоскости;

в) четыре плоскости?

● **34.24.** Докажите, что если имеется конечное число прямых, каждые две из которых пересекаются, то или все они лежат в одной плоскости, или все проходят через одну точку.

§ 35. Пространственные фигуры

Среди пространственных фигур выделяются *многогранники* — тела, поверхности которых состоят из конечного числа многоугольников, называемых *гранями* многогранника. Стороны и вершины этих многоугольников называются соответственно *ребрами* и *вершинами* многогранника.

Отрезки, соединяющие вершины многогранника, не принадлежащие одной грани, называются *диагоналями* многогранника.

Примерами многогранников являются следующие пространственные фигуры.

Куб — многогранник, поверхность которого состоит из шести квадратов (рис. 240).

Параллелепипед — многогранник, поверхность которого состоит из шести параллелограммов (рис. 241).

Параллелепипед, у которого все грани — прямоугольники, называется *прямоугольным* (рис. 242).

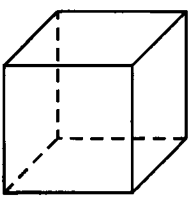


Рис. 240

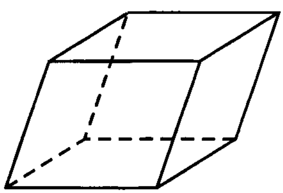


Рис. 241

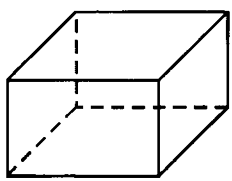


Рис. 242

Призма — многогранник, поверхность которого состоит из двух равных многоугольников, называемых *основаниями* призмы, и параллелограммов, имеющих общие стороны с каждым из оснований и называемых *боковыми гранями* призмы (рис. 243). Ребра, не лежащие в основаниях призмы, называются *боковыми ребрами*.

Призма, боковыми гранями которой являются прямоугольники (рис. 244), называется *прямой*. В противном случае призма называется *наклонной* (рис. 243).

Прямая призма, основаниями которой являются правильные многоугольники, называется *правильной* (рис. 245).

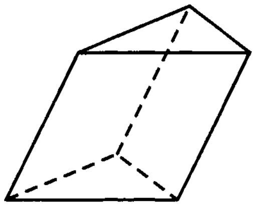


Рис. 243

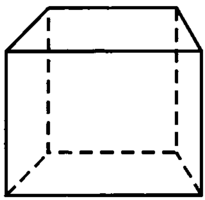


Рис. 244

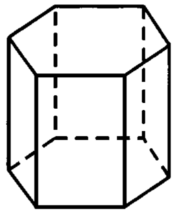


Рис. 245

Призмы бывают треугольные, четырехугольные, пятиугольные и т. д. в зависимости от того, какие многоугольники лежат в их основаниях: треугольники, четырехугольники, пятиугольники и т. д. соответственно. Например, на рисунке 243 изображена наклонная треугольная призма, на рисунке 244 — прямая четырехугольная призма, на рисунке 245 — правильная шестиугольная призма.

Пирамида — многогранник, поверхность которого состоит из многоугольника, называемого *основанием* пирамиды, и треугольников, имеющих общую вершину, называемых *боковыми гранями* пирамиды. Общая вершина боковых граней называется *вершиной* пирамиды. Ребра, сходящиеся в вершине пирамиды, называются *боковыми ребрами* (рис. 246).

Пирамида, в основании которой правильный многоугольник и все боковые ребра которой равны, называется *правильной* (рис. 247).

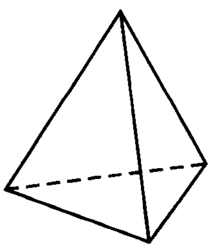


Рис. 246

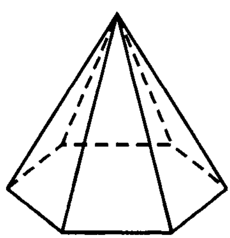


Рис. 247

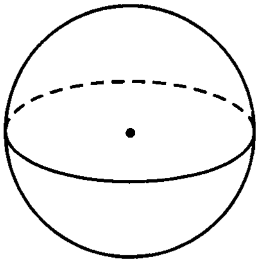


Рис. 248

Пирамиды бывают треугольные, четырехугольные, пятиугольные и т. д. в зависимости от того, какие многоугольники лежат в их основаниях: треугольники, четырехугольники, пятиугольники и т. д. соответственно. На рисунке 246 изображена треугольная пирамида, называемая также *тетраэдром*, на рисунке 247 — правильная шестиугольная пирамида.

Среди пространственных фигур, не являющихся многогранниками, отметим сферу и шар.

Сфера — фигура, состоящая из всех точек пространства, удаленных от данной точки, называемой *центром*, на данное расстояние, называемое *радиусом* (рис. 248).

Шар — фигура, состоящая из всех точек пространства, удаленных от данной точки, называемой *центром*, на расстояние, не превосходящее данное, называемое *радиусом*.

Сфера с тем же центром и того же радиуса, что и данный шар, называется *поверхностью* шара.

Примерами пространственных фигур также являются *цилиндр* (рис. 249), *конус* (рис. 250).

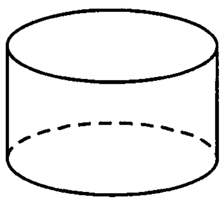


Рис. 249

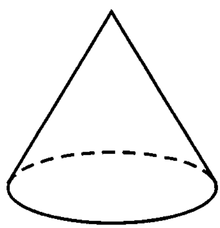


Рис. 250

В дальнейшем мы рассмотрим и другие пространственные фигуры, в том числе правильные, полуправильные и звездчатые многогранники.

Так же как и на плоскости, в пространстве определяются понятия движения, равенства и подобия. *Движением* называется преобразование пространства, сохраняющее расстояния между точками, т. е. переводящее любые две точки — A, B — в точки A', B' так, что $A'B' = AB$. Две фигуры — F и F' — в пространстве называются *равными*, если существует движение, переводящее одну из них в другую.

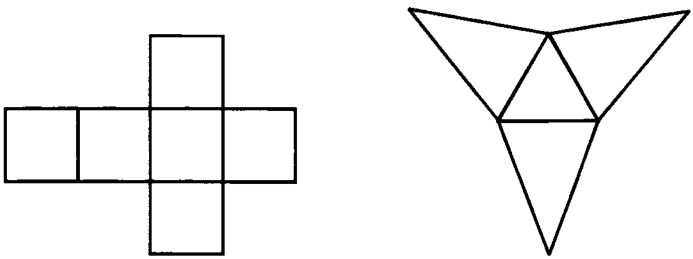
Подобием называется преобразование пространства, при котором расстояния между точками умножаются на одно и то же положительное число, т. е. переводящее любые две точки — A, B —

в точки A', B' так, что $A'B' = kAB$, где k — некоторое положительное число, называемое *коэффициентом подобия*. Две фигуры — F и F' — в пространстве называются *подобными*, если существует подобие, переводящее одну из них в другую.

Моделирование многогранников

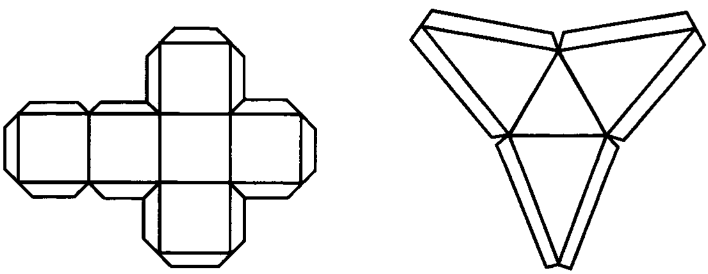
Если поверхность многогранника разрезать по некоторым ребрам и развернуть ее на плоскость так, чтобы все многоугольники, входящие в эту поверхность, лежали в данной плоскости, то получится фигура, называемая *разверткой* многогранника. Например, на рисунке 251 изображены развертки куба и треугольной пирамиды.

Для изготовления модели многогранника из плотной бумаги, картона или другого материала достаточно изготовить его развертку и затем склеить соответствующие ребра. Для удобства развертку многогранника изготавливают с клапанами, по которым и производится склеивание. На рисунке 252 изображены такие развертки куба и тетраэдра.



а) б)

Рис. 251



а) б)

Рис. 252

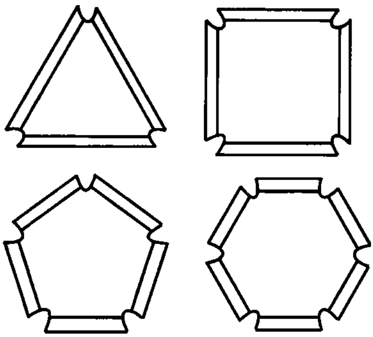
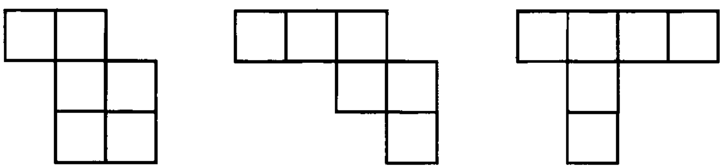


Рис. 253

Другим способом моделирования многогранников является изготовление моделей с помощью конструктора, состоящего из многоугольников, сделанных из плотного материала с отгибающимися клапанами (рис. 253) и резиновых колечек — основной крепежной детали конструктора. Подбирая соответствующим образом многоугольники в качестве граней многогранника и скрепляя их резиновыми колечками, можно получать модели различных многогранников. Для того чтобы колечки лучше держались и не мешали друг другу, уголки многоугольников в конструкторе можно немного обрезать, как показано на рисунке 253.

Пример 1. Нарисовать несколько плоских фигур, состоящих из шести равных квадратов, не являющихся развертками куба.

Решение показано на рисунке 254.



а) б) в)

Рис. 254

Пример 2. Может ли многогранник иметь 21 плоский угол?

Решение. Общее число плоских углов многогранника определяется числом углов в его гранях. В каждом многоугольнике число углов равно числу его сторон. Так как каждое ребро многогранника лежит в двух гранях, то общее число плоских углов многогранника в два раза больше числа его ребер. Таким образом, П = 2 · Р, где П — число плоских углов, Р — число ребер многогранника.

Видим, что П всегда четное число, следовательно, у многогранника не может быть 21 плоского угла. ◁■

Пример 3. Найти число вершин (В), ребер (Р), граней (Г) и плоских углов (П):

а) четырехугольной призмы;
б) пятиугольной пирамиды;
в) n-угольной призмы;
г) n-угольной пирамиды.

Ответ.
а) В = 8, Р = 12, Г = 6, П = 24;
б) В = 6, Р = 10, Г = 6, П = 20;
в) В = $2n$, Р = $3n$, Г = $n + 2$, П = $6n$;
г) В = $n + 1$, Р = $2n$, Г = $n + 1$, П = $4n$.

Упражнения

35.1. Верно ли, что плоскости, проходящие через вершины S, A, B и S, C, D пирамиды $SABCD$ пересекаются в одной точке S?

35.2. Может ли призма иметь:

а) 9 вершин;

б) 16 вершин?

35.3. Какой многоугольник лежит в основании призмы, которая имеет 15 ребер?

35.4. Определите вид призмы, которая имеет:

а) 10 вершин;

б) 18 ребер;

в) 8 граней.

35.5. Может ли пирамида иметь:

а) 3 вершины;

б) 7 вершин?

35.6. Существует ли пирамида, которая имеет:

а) 20 ребер;

б) 21 ребро?

35.7. Какой многоугольник лежит в основании пирамиды, которая имеет 32 ребра?

35.8. Определите вид пирамиды, которая имеет:

а) 6 вершин;

б) 22 ребра;

в) 10 граней.

35.9. Какие из изображенных на рисунке 255 фигур являются развертками куба?

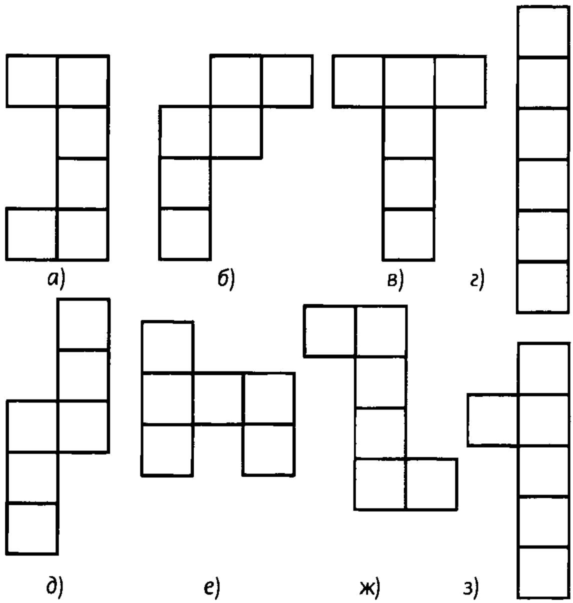


Рис. 255

35.10. На рисунке 256 найдите фигуры, которые являются развертками призм. Определите вид этих призм.

35.11. Среди данных на рисунке 257 разверток найдите развертки пирамид. Выясните их вид.

● **35.12.** Может ли разверткой пирамиды быть: а) квадрат; б) прямоугольник; в) ромб; г) параллелограмм?

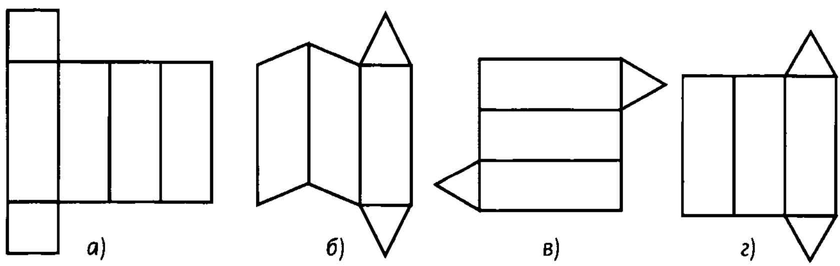


Рис. 256

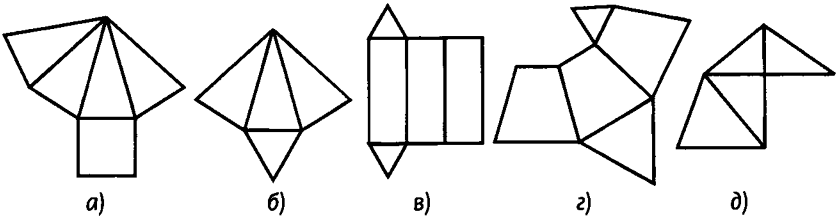


Рис. 257

○ **35.13.** Изобразите:
а) параллелепипед;
б) четырехугольную призму;
в) четырехугольную пирамиду.

○ **35.14.** Докажите, что число вершин произвольной призмы четно.

○ **35.15.** Существует ли призма, которая имеет:
а) 14 ребер;
б) 15 ребер?

○ **35.16.** Докажите, что число ребер произвольной призмы делится на три.

○ **35.17.** Докажите, что любая пирамида имеет четное число ребер.

○ **35.18.** Найдите число диагоналей:
а) куба;
б) параллелепипеда;
в) 5-угольной пирамиды;
•г) n-угольной призмы;
•д) n-угольной пирамиды.

○ **35.19.** Разделите куб на шесть четырехугольных пирамид.

○ **35.20.** Нарисуйте развертки прямоугольного параллелепипеда и правильной четырехугольной пирамиды.

○ **35.21.** Изготовьте развертки и склейте из них модели куба и правильного тетраэдра.

○ **35.22.** Изготовьте конструктор, состоящий из правильных треугольников, четырехугольников, пятиугольников и шестиугольников с равными сторонами. Сделайте с помощью этого конструктора несколько моделей многогранников.

○ **35.23.** Сделайте из конструктора модели правильных многогранников (тетраэдр, октаэдр, куб, икосаэдр, додекаэдр).

○ **35.24.** Составьте модель многогранника из двух квадратных и восьми треугольных граней конструктора.

● **35.25.** Составьте модель многогранника из четырех шестиугольных и четырех треугольных граней конструктора.

● **35.26.** Составьте модель многогранника (кубооктаэдр) из восьми треугольных и шести квадратных граней конструктора.

● **35.27.** Можно ли окрасить грани куба тремя красками так, чтобы соседние грани были окрашены в различные цвета? Сделайте соответствующую модель.

● **35.28.** Окраска граней многогранника называется правильной, если соседние грани имеют разные цвета. Какое минимальное число красок потребуется для правильной окраски граней: а) тетраэдра; б) октаэдра; в) икосаэдра; г) додекаэдра?

● **35.29.** Найдите самый короткий путь по поверхности куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ из вершины A в вершину C_1. Ребро куба равно a.

ГЛАВА 7

Параллельность в пространстве

§ 36. Параллельность прямых в пространстве

Напомним, что две прямые на плоскости называются параллельными, если они не пересекаются. Дадим теперь определение параллельности прямых в пространстве.

Определение. Две прямые в пространстве называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются (рис. 258).

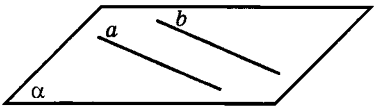


Рис. 258

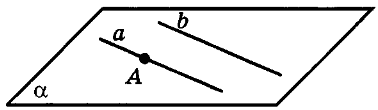


Рис. 259

Параллельность прямых a и b обозначается $a \parallel b$.

Заметим, что для параллельности прямых в пространстве кроме требования, чтобы прямые не пересекались, нужно, чтобы эти прямые лежали в одной плоскости.

Будем также говорить, что два отрезка параллельны, если они лежат на параллельных прямых.

Например, в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребра AB и A_1B_1 параллельны.

***Теорема.* Через точку в пространстве, не принадлежащую данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной прямой.**

Доказательство. Пусть точка A не принадлежит прямой b. Проведем через эту прямую и точку A плоскость α (рис. 259). Эта плоскость единственна. В плоскости α через точку A проходит единственная прямая, назовем ее a, параллельная прямой b. Она и будет искомой прямой, параллельной данной. ◀

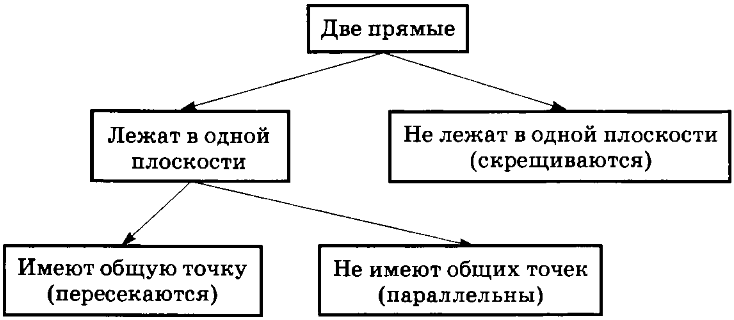
Прямые в пространстве могут не пересекаться, но не быть параллельными.

Определение. Две прямые в пространстве называются *скрещивающимися*, если через них нельзя провести плоскость.

Будем также говорить, что два отрезка скрещиваются, если они лежат на скрещивающихся прямых.

Например, в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребра AB и A_1D_1 скрещиваются.

Представим случаи взаимного расположения двух прямых в пространстве в виде следующей схемы.



ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Вопрос о количестве прямых, проходящих через данную точку и параллельных данной прямой, имеет давнюю и интересную историю. Среди аксиом в «Началах» Евклида пятый по счету постулат по своему содержанию совпадает с аксиомой параллельности, с которой вы познакомились в 7-м классе: «Через точку, взятую вне данной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной этой прямой».

На протяжении двух тысячелетий после Евклида математики пытались доказать этот постулат, однако все их попытки заканчивались неудачей, рано или поздно в их рассуждениях обнаруживались ошибки. Лишь в 1826 году великий русский математик Н. И. Лобачевский (1792—1856), профессор Казанского университета, предположил, что этот постулат нельзя логически вывести из других постулатов (аксиом) Евклида, т. е. нельзя доказать. Поэтому или его можно взять в качестве аксиомы, или в качестве аксиомы может быть взято утверждение о существовании нескольких прямых, проходящих через данную точку и параллельных данной прямой. Положив в основу геометрии эту новую аксиому параллельности, Лобачевский создал совершенно новую, неевклидову геометрию, которая была названа геометрией Лобачевского.

Идеи Лобачевского были настолько оригинальны и настолько противоречили так называемому здравому смыслу, что их не поняли даже крупные математики того времени. Несмотря на это, Лобачевский не отказался от своей теории. Он не только был убежден в логической непротиворечивости новой геометрии, но и твердо верил в ее применимость к исследованию реального физического пространства. С этой целью он проводил сложнейшие астрономические наблюдения и измерения, однако недостаточная точность измерительных приборов не позволила ему подтвердить свою гипотезу.

Признание геометрии Лобачевского пришло только после его смерти. Работы Лобачевского были переведены на многие языки и изучались математиками всего мира. В настоящее время геометрия Лобачевского является неотъемлемой частью современной математики и находит применение во многих областях человеческого знания, способствует более глубокому пониманию окружающего нас мира.

Пример 1. Сколько плоскостей можно провести через различные пары: а) из трех; б) четырех; ● в) n попарно параллельных прямых, никакие три из которых не лежат в одной плоскости?

Решение. Через каждые две параллельные прямые можно провести плоскость. Таким образом, если имеются три параллельные прямые, не лежащие в одной плоскости, то через них можно провести 3 плоскости, если 4 прямые, то 6 плоскостей, если n прямых, то через каждую можно провести $n - 1$ плоскость. Учитывая, что при общем подсчете каждая плоскость будет считаться дважды, получаем общее число плоскостей: $\frac{n(n-1)}{2}$. ◁■

Пример 2. (Признак скрещивающихся прямых.) Доказать, что если одна прямая лежит в данной плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти две прямые скрещиваются.

Решение. Пусть прямая a лежит в плоскости α, а прямая b пересекает плоскость α в точке B, не принадлежащей прямой a (рис. 260).

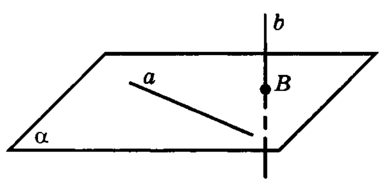


Рис. 260

Если бы прямые a и b лежали в одной плоскости, то в этой плоскости лежали бы прямая a и точка B. Поскольку через прямую и точку вне этой прямой проходит единственная плоскость, то этой плоскостью будет плоскость α. Но тогда прямая b лежала бы в плоскости α, что противоречит условию. Следовательно, a и b не лежат в одной плоскости, т. е. они скрещиваются. ◁■

Упражнения

36.1. Как могут быть расположены относительно друг друга две прямые в пространстве?

36.2. Будут ли противоположные ребра AB и CD тетраэдра $ABCD$ параллельны?

36.3. В каких пирамидах имеются параллельные ребра?

36.4. Используя модели правильных многогранников, установите, имеются ли параллельные ребра (если имеются, то сколько пар):

а) в тетраэдре; б) кубе; в) октаэдре; г) икосаэдре; д) додекаэдре.

36.5. Сформулируйте, какие две прямые в пространстве являются непараллельными?

36.6. Известно, что в плоскости прямая, пересекающая одну из параллельных прямых, пересекает и вторую прямую. Будет ли это утверждение верно для пространства?

36.7. В пространстве даны прямая и не принадлежащая ей точка. Сколько прямых проходит через эту точку:

а) параллельных данной прямой;
б) не пересекающих данную прямую?

36.8. Пусть a и b — пересекающиеся или параллельные прямые. Точки A_1, A_2 принадлежат прямой a, точки B_1, B_2 — прямой b. Что можно сказать о взаимном расположении прямых A_1B_1, A_2B_2?

36.9. Имеются ли скрещивающиеся ребра (если имеются, то сколько пар):

а) у октаэдра; • б) икосаэдра; • в) додекаэдра?

36.10. Верно ли, что если две прямые лежат в разных плоскостях, то они скрещиваются?

36.11. Прямая лежит в плоскости. Сколько прямых, скрещивающихся с этой прямой, проходит через точку, взятую в той же плоскости?

36.12. Прямая a скрещивается с прямой b, а прямая b скрещивается с прямой c. Следует ли отсюда, что прямые a и c скрещиваются?

○ **36.13.** Запишите пары параллельных ребер: а) в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$; б) призме $ABCA_1B_1C_1$.

○ **36.14.** Запишите пары скрещивающихся ребер:

а) в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$;
б) призме $ABCA_1B_1C_1$;

в) тетраэдре $ABCD$;

г) пирамиде $SABCD$.

○ **36.15.** Докажите, что через две параллельные прямые проходит единственная плоскость.

○ **36.16.** Седьмое свойство стереометрии в «Началах» Евклида формулируется так:

«Если будут две параллельные прямые и на каждой из них взято по произвольной точке, то соединяющая эти точки прямая будет в одной и той же плоскости с параллельными». Докажите.

○ **36.17.** Даны две пересекающиеся плоскости. В каждой из них лежит прямая, пересекающая линию пересечения плоскостей. Определите расположение этих прямых относительно друг друга.

○ **36.18.** Пусть a и b — скрещивающиеся прямые. Точка A принадлежит прямой a, B — прямой b. Через прямую a и точку C на прямой AB проведена плоскость α; через прямую b и эту же точку C проведена плоскость β. Какая прямая будет линией пересечения плоскостей α и β?

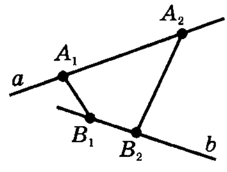


Рис. 261

○ **36.19.** Пусть a и b — скрещивающиеся прямые (рис. 261). Точки A_1, A_2 принадлежат прямой a, точки B_1, B_2 принадлежат прямой b. Могут ли прямые A_1B_1 и A_2B_2 быть пересекающимися или параллельными?

○ **36.20.** Каково взаимное расположение прямых EF и GH (рис. 262, a)?

○ **36.21.** Пересекаются ли отрезки EH и FG (рис. 262, $б$)?

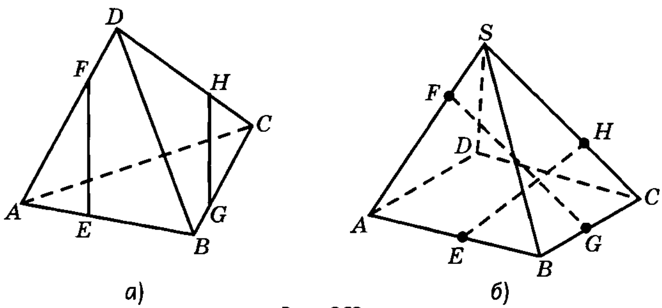


Рис. 262

○ **36.22.** Даны скрещивающиеся прямые a и b, прямая c пересекает каждую из них. Докажите, что любая прямая, параллельная c, скрещивается по крайней мере с одной из данных прямых.

○ **36.23.** Даны скрещивающиеся прямые a и b. Точка C принадлежит прямой a. Докажите, что плоскость, проходящая через b и C, пересекает прямую a.

○ **36.24.** Даны две прямые — a и b. Через данную точку K, не принадлежащую данным прямым, проведите прямую, скрещивающуюся с каждой из них, если известно, что прямые a и b:

а) пересекаются;

б) скрещиваются.

○ **36.25.** Даны две скрещивающиеся прямые — m и n. Через точку M, принадлежащую прямой m, проведите прямую, скрещивающуюся с n.

● **36.26.** Докажите, что два отрезка, соединяющих середины скрещивающихся сторон пространственного четырехугольника $ABCD$ (вершины ломаной $ABCD$ не принадлежат одной плоскости), пересекаются.

● **36.27.** Сколько пар скрещивающихся прямых определяется различными парами:

а) из четырех точек;

б) пяти точек;

• в) n точек, никакие четыре из которых не принадлежат одной плоскости?

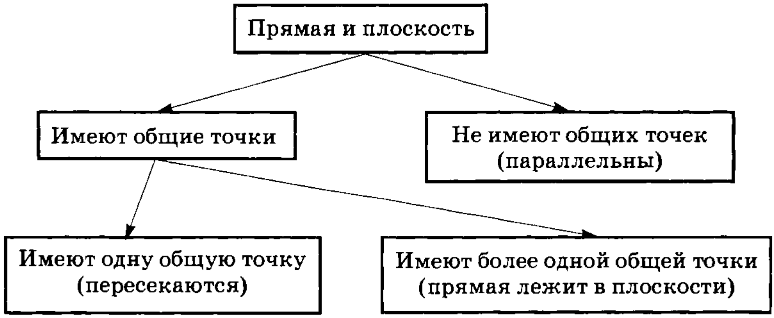
§ 37. Параллельность прямой и плоскости

Рассмотрим вопрос о том, как могут располагаться прямая и плоскость относительно друг друга.

Прямая может лежать в плоскости, в этом случае все точки прямой принадлежат плоскости. Прямая может пересекать плоскость, т. е. иметь с плоскостью только одну общую точку. Наконец, прямая может не иметь с плоскостью ни одной общей точки.

Определение. Прямая называется *параллельной плоскости*, если она не имеет с ней ни одной общей точки.

Представим случаи взаимного расположения прямой и плоскости с помощью следующей схемы.

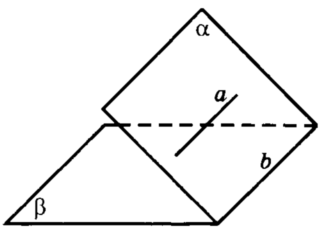


Следующая теорема связывает понятие параллельности прямой и плоскости с понятием параллельности двух прямых и дает достаточное условие параллельности двух прямых в пространстве.

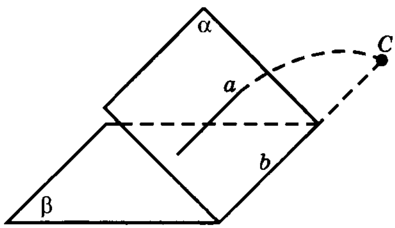
Теорема. **(Признак параллельности двух прямых.) Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия их пересечения параллельна данной прямой.**

Доказательство. Пусть плоскость α проходит через прямую a, параллельную плоскости β, и прямая b является линией пересечения этих плоскостей (рис. 263, *а*). Докажем, что прямые a и b параллельны.

Действительно, они лежат в одной плоскости α. Кроме этого, прямая b лежит в плоскости β, а прямая a не пересекается с этой плоскостью. Следовательно, прямая a и подавно не пересекается с прямой b (рис. 263, *б*). Таким образом, прямые a и b лежат в одной плоскости и не пересекаются. Значит, они параллельны. ◁■



а)



б)

Рис. 263

Рассмотрим достаточное условие параллельности прямой и плоскости.

Теорема. **(Признак параллельности прямой и плоскости.) Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна некоторой прямой, лежащей в этой плоскости, то эта прямая параллельна самой плоскости.**

Доказательство. Пусть прямая a не лежит в плоскости β и параллельна прямой b, лежащей в этой плоскости (рис. 264).

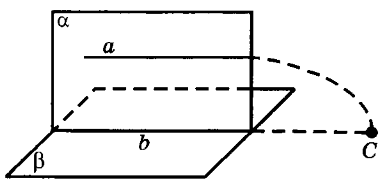


Рис. 264

Докажем, что прямая a параллельна плоскости β. Предположим противное, т. е. что прямая a

пересекает плоскость β в некоторой точке C. Рассмотрим плоскость α, проходящую через прямые a и b ($a \parallel b$, по условию). Точка C принадлежит как плоскости β, так и плоскости α, т. е. принадлежит линии их пересечения — прямой b. Следовательно, прямые a и b пересекаются, что противоречит условию. Таким образом, $a \parallel \beta$. ◁■

Будем говорить, что ребро многогранника параллельно его грани, если оно лежит на прямой, параллельной плоскости этой грани.

Пример 1. Доказать, что ребра одного основания призмы параллельны другому основанию этой призмы.

Решение. Боковыми гранями призмы являются параллелограммы. Поэтому каждое ребро одного основания призмы параллельно ребру другого ее основания. Следовательно, каждое ребро одного основания призмы параллельно другому ее основанию (по признаку параллельности прямой и плоскости). ◁■

Пример 2. Через точку, не принадлежащую данной плоскости, провести прямую, параллельную этой плоскости. Сколько можно построить таких прямых?

Решение. В данной плоскости, назовем ее α, проведем произвольную прямую a. Через проведенную прямую a и данную точку B проведем плоскость β (следствие 2 из аксиом стереометрии). В плоскости β через точку B проведем прямую b, параллельную прямой a. Прямая b — искомая прямая, она параллельна плоскости α (по признаку параллельности прямой и плоскости). Можно построить бесконечно много таких прямых. ◁■

Пример 3. Доказать, что если прямые a и c параллельны третьей прямой b, то они параллельны между собой.

Решение. Случай, когда прямые лежат в одной плоскости, рассматривался в курсе планиметрии. Здесь мы рассмотрим случай, когда прямые не лежат в одной плоскости. Пусть прямые a и b лежат в плоскости α, b и c — в плоскости β (рис. 265). На прямой c возьмем произвольную точку C и проведем через C и прямую a плоскость γ. Если γ пересекает β по прямой c, то a параллельна c (по признаку параллельности двух прямых). Допустим, что это не так, т. е. γ пересекает β по прямой c', отличной от c. Докажем, что c' параллельна b. Действительно, прямая b параллельна плоскости γ (по признаку параллельности прямой и плоскости, так как b параллельна a), тогда линия пересечения плоскостей γ и β, т. е. c', будет параллельна b. Значит,

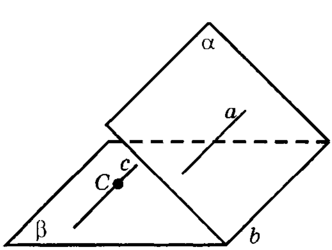


Рис. 265

в плоскости β через точку C проходит две прямые — c и c', параллельные прямой b. Это противоречит аксиоме параллельных (через точку вне прямой можно провести только одну прямую, параллельную данной). Следовательно, плоскости β и γ пересекаются по прямой c и прямая a параллельна c. ◁■

Это свойство называется свойством *транзитивности* параллельных прямых.

Упражнения

37.1. Каковы случаи взаимного расположения прямой и плоскости?

37.2. Верно ли утверждение о том, что две прямые, параллельные одной и той же плоскости, параллельны между собой?

37.3. Верно ли утверждение: «Прямая, параллельная плоскости, параллельна любой прямой, лежащей в этой плоскости»?

37.4. Одна из двух параллельных прямых параллельна плоскости. Верно ли утверждение о том, что и вторая прямая параллельна этой плоскости?

37.5. Даны две параллельные прямые. Через каждую из них проведена плоскость. Эти две плоскости пересекаются. Как расположена их линия пересечения относительно данных прямых?

37.6. Даны две пересекающиеся плоскости. Существует ли плоскость, пересекающая две данные плоскости по параллельным прямым?

37.7. Верна ли следующая формулировка признака параллельности прямой и плоскости: «Прямая, параллельная какой-нибудь прямой плоскости, параллельна и самой плоскости»?

● **37.8.** Возможно ли такое расположение карандашей, как изображено на рисунке 266?

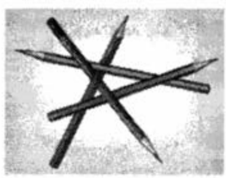


Рис. 266

○ **37.9.** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите параллельные ребра и грани.

○ **37.10.** В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ найдите параллельные ребра и грани.

○ **37.11.** Дан параллелограмм $ABCD$. Через сторону AB проведена плоскость α, не совпадающая с плоскостью параллелограмма. Докажите, что $CD \parallel \alpha$.

○ **37.12.** Сторона AF правильного шестиугольника $ABCDEF$ лежит в плоскости α, не совпадающей с плоскостью шестиугольника. Как расположены прямые, на которых лежат остальные стороны $ABCDEF$, относительно плоскости α?

○ **37.13.** Плоскость проходит через середины двух сторон треугольника и не совпадает с плоскостью этого треугольника. Докажите, что данная плоскость параллельна третьей стороне треугольника.

○ **37.14.** Дана прямая, параллельная некоторой плоскости. Докажите, что через любую точку этой плоскости проходит прямая, параллельная данной прямой.

○ **37.15.** Докажите, что если две прямые параллельны, то через одну из них проходит плоскость, параллельная другой. Сколько таких плоскостей?

○ **37.16.** Даны две скрещивающиеся прямые. Через одну из них проведите плоскость, параллельную другой.

○ **37.17.** В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм. Каково взаимное расположение прямой пересечения плоскостей граней SAB и SCD и плоскости основания $ABCD$?

○ **37.18.** Точки A и B принадлежат смежным боковым граням призмы. Проведите в этих гранях через данные точки два отрезка, параллельные между собой.

○ **37.19.** Докажите, что через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит единственная плоскость, параллельная другой прямой.

○ **37.20.** Докажите, что все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

○ **37.21.** В пространственном четырехугольнике $ABCD$ (вершины четырехугольника не принадлежат одной плоскости) середины сторон соединены последовательно отрезками. Докажите, что полученный четырехугольник является параллелограммом.

○ **37.22.** Каково взаимное расположение диагоналей пространственного четырехугольника?

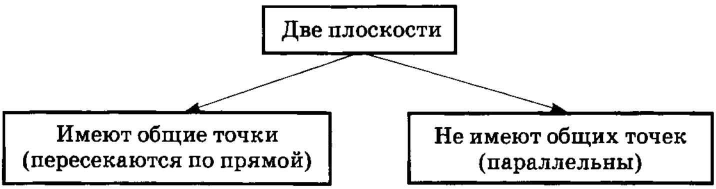
● **37.23.** Докажите, что если прямая параллельна прямой, пересекающей данную плоскость, то она также пересекает эту плоскость.

§ 38. Параллельность двух плоскостей

Рассмотрим вопрос о взаимном расположении двух плоскостей. Согласно аксиоме 3, если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой. Отсюда следует, что две плоскости либо пересекаются по прямой, либо не пересекаются, т. е. не имеют ни одной общей точки.

Определение. Две плоскости называются *параллельными*, если они не имеют общих точек.

Представим различные случаи взаимного расположения двух плоскостей в виде схемы.



Следующая теорема связывает понятие параллельности двух плоскостей с понятием параллельности двух прямых.

Теорема. **Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.**

Доказательство. Пусть плоскость γ пересекает параллельные плоскости α и β по прямым a и b соответственно (рис. 267).

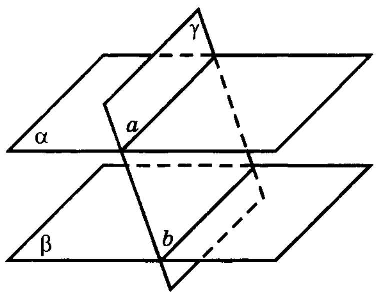


Рис. 267

Докажем, что прямые a и b параллельны. Действительно, они лежат в одной плоскости — плоскости γ. Кроме этого, они лежат в непересекающихся плоскостях, следовательно, и подавно не пересекаются. Значит, они параллельны. ◁■

Следующая теорема дает достаточное условие параллельности двух плоскостей.

Теорема. **(Признак параллельности двух плоскостей.) Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.**

Доказательство. Пусть пересекающиеся прямые a_1, a_2 плоскости α соответственно параллельны прямым b_1, b_2 плоскости β.

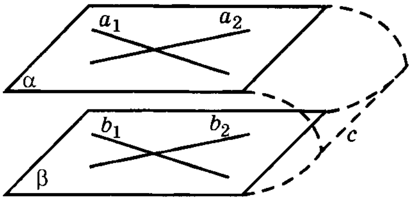


Рис. 268

Покажем, что плоскости α и β параллельны. Предположим противное, т. е. что плоскости α и β пересекаются, и пусть c — линия их пересечения (рис. 268).

По признаку параллельности прямой и плоскости прямая a_1 параллельна плоскости β, а по свойству параллельности прямой и плоскости она параллельна прямой c. Аналогично прямая a_2 также параллельна прямой c. Таким образом, в плоскости α мы имеем две пересекающиеся прямые, параллельные одной прямой, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что неверным было наше начальное предположение о том, что плоскости α и β пересекаются, и, следовательно, они параллельны. ◁■

Будем говорить, что две грани многогранника параллельны, если они лежат в параллельных плоскостях.

Пример 1. Доказать, что основания призмы параллельны.

Решение. Боковыми гранями призмы являются параллелограммы. Поэтому два смежных ребра одного основания призмы соответственно параллельны двум смежным ребрам другого ее основания. Следовательно, основания призмы параллельны (по признаку параллельности двух плоскостей). ◁■

Пример 2. Через точку, не принадлежащую данной плоскости, провести плоскость, параллельную данной.

Решение. Пусть дана точка B, не принадлежащая плоскости α. В плоскости α проведем две пересекающиеся прямые — a и a_1. Через точку B проведем прямые b и b_1, параллельные соответственно прямым a и a_1 (см. теорему из параграфа 36). Через пересекающиеся прямые b и b_1 проведем плоскость β (следствие 3 из аксиом стереометрии). Тогда плоскость β будет параллельна плоскости α (по признаку параллельности двух плоскостей). ◁■

Пример 3. Даны две плоскости — α и β. В плоскости α лежат две пересекающиеся прямые — a и a_1. В плоскости β лежат две прямые — b и b_1, причем a параллельна b, a_1 параллельна b_1. Доказать, что b и b_1 тоже пересекающиеся прямые.

Решение. Будем доказывать методом от противного. Предположим, что b и b_1 параллельны. Тогда, так как a параллельна b и b параллельна b_1, a параллельна b_1 (по свойству транзитивности параллельных прямых, см. пример 3 из параграфа 37). Далее, a параллельна b_1, b_1 параллельна a_1, значит, a параллельна a_1, что противоречит условию, так как дано, что a и a_1 — пересекающиеся прямые. Получили противоречие, значит, наше предположение неверно. Следовательно, b и b_1 — пересекающиеся прямые. ◁■

Упражнения

38.1. Каковы возможные случаи взаимного расположения двух плоскостей?

38.2. Укажите параллельные грани:

а) параллелепипеда $A...D_1$;

б) призмы $ABCA_1B_1C_1$.

38.3. Имеются ли параллельные грани (если имеются, то сколько пар):

а) у правильного тетраэдра;

б) гексаэдра;

в) октаэдра?

38.4. Могут ли быть параллельными:

а) две боковые грани призмы;

● б) три боковые грани призмы?

38.5. Какие две плоскости считаются непараллельными?

38.6. Верно ли утверждение: «Если прямая, лежащая в одной плоскости, параллельна прямой, лежащей в другой плоскости, то эти плоскости параллельны»?

38.7. Верно ли утверждение: «Если две прямые, лежащие в одной плоскости, параллельны двум прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны»?

38.8. Могут ли быть параллельными две плоскости, проходящие через непараллельные прямые?

38.9. Могут ли пересекаться плоскости, параллельные одной и той же прямой?

38.10. Через всякую ли прямую можно провести плоскость, параллельную данной плоскости?

38.11. Через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость. Верно ли утверждение, что эти плоскости параллельны?

38.12. Даны две параллельные плоскости и прямая, параллельная одной из них. Будет ли эта прямая параллельна второй плоскости?

○ **38.13.** В кубе $A...D_1$ проведите плоскость, параллельную грани $ABCD$.

○ **38.14.** В треугольной пирамиде $SABC$ проведите плоскость, параллельную ее основанию ABC.

○ **38.15.** Докажите, что плоскость, проведенная через вершины A, D_1 и C куба $A...D_1$, параллельна плоскости, проведенной через вершины A_1, B и C_1.

○ **38.16.** Докажите первую теорему этого параграфа методом от противного.

○ **38.17.** Докажите, что через точку, не принадлежащую данной плоскости, проходит единственная плоскость, параллельная исходной плоскости.

○ **38.18.** Плоскость α пересекает плоскости β и γ по параллельным прямым соответственно b и c. Будут ли плоскости β и γ параллельны? Ответ обоснуйте. Сделайте соответствующий чертеж.

○ **38.19.** Из точки M, находящейся вне параллельных плоскостей α и β (не между ними), проведены три прямые, которые пересекают плоскости соответственно в точках A, B, C и A_1, B_1, C_1. Известно, что $MA = a$, $AA_1 = b$, $B_1C_1 = c$. Найдите BC.

○ **38.20.** Докажите, что если две плоскости параллельны третьей, то они параллельны между собой.

● **38.21.** Докажите, что если плоскость пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую.

● **38.22.** Докажите, что через две скрещивающиеся прямые проходит единственная пара параллельных плоскостей.

● **38.23.** Каковы возможные случаи взаимного расположения трех плоскостей в пространстве, если две из них параллельны?

● **38.24.** Каковы возможные случаи взаимного расположения трех плоскостей в пространстве, если они попарно пересекаются?

§ 39. Параллельное проектирование

В стереометрии изучаются пространственные фигуры, однако на чертеже они изображаются в виде плоских фигур. Каким же образом следует изображать пространственную фигуру на плоскости? Обычно для этого используется параллельное проектирование пространственной фигуры на плоскость.

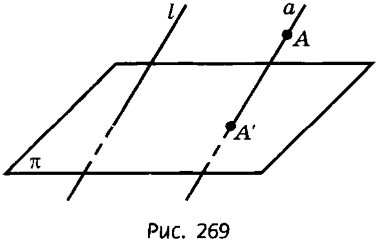


Рис. 269

Пусть π — некоторая плоскость, l — пересекающая ее прямая (рис. 269). Через произвольную точку A, не принадлежащую прямой l, проведем прямую, параллельную прямой l. Точка пересечения этой прямой с плоскостью π называется *параллельной проекцией* точки A на плоскость π в направлении прямой l. Обозначим ее A'. Если точка A принадлежит прямой l, то параллельной проекцией A на плоскость π считается точка пересечения прямой l с плоскостью π.

Таким образом, каждой точке A пространства сопоставляется ее проекция A' на плоскость π. Это соответствие называется *параллельным проектированием* на плоскость π в направлении прямой l.

Пусть Φ — некоторая фигура в пространстве. Проекции ее точек на плоскость π образуют фигуру Φ', которая называется *параллельной проекцией* фигуры Φ на плоскость π в направлении прямой l. Говорят также, что фигура Φ' получена из фигуры Φ параллельным проектированием.

Примеры параллельных проекций дают, например, тени предметов под воздействием пучка параллельных солнечных лучей.

Рассмотрим свойства параллельного проектирования.

Свойство 1. Если прямая параллельна или совпадает с прямой l, то ее проекцией в направлении этой прямой является точка. Если прямая не параллельна и не совпадает с прямой l, то ее проекцией является прямая.

Доказательство. Пусть прямая k не параллельна и не совпадает с прямой l (рис. 270). Возьмем какую-нибудь точку A на прямой k и проведем через нее прямую a, параллельную l. Ее пересечение с плоскостью проектирования π даст точку A', являющуюся проекцией точки A. Через прямые a и k проведем плоскость α. Ее пересечением с плоскостью π будет искомая прямая k', являющаяся проекцией прямой k. ◀

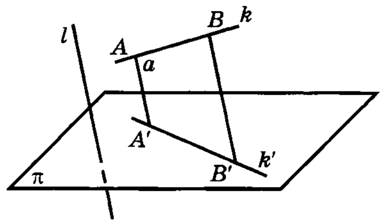


Рис. 270

Свойство 2. Проекция отрезка при параллельном проектировании есть точка или отрезок, в зависимости от того, лежит он на прямой, параллельной или совпадающей с прямой l, или нет. Отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой, сохраняется. В частности, середина отрезка при параллельном проектировании переходит в середину соответствующего отрезка.

Доказательство. Пусть k' является проекцией прямой k на плоскость π в направлении прямой l. A, B, C — точки прямой k; A', B', C' — их проекции; a, b, c — соответствующие прямые,

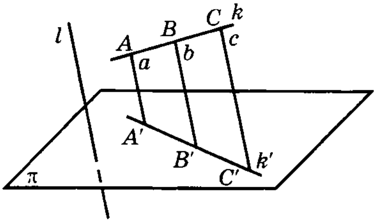


Рис. 271

проходящие через эти точки и параллельные прямой l (рис. 271). Тогда из обобщенной теоремы Фалеса планиметрии следует равенство отношений $AB : BC = A'B' : B'C'$. В частности, если точка B — середина отрезка AC, то B' — середина отрезка $A'C'$. ◀

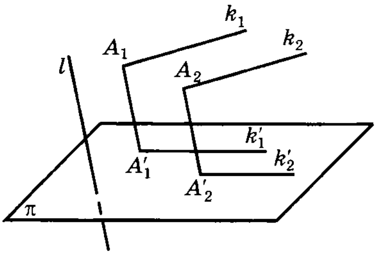


Рис. 272

Свойство 3. Если две параллельные прямые не параллельны прямой l, то их проекции в направлении l могут быть или параллельными прямыми, или одной прямой.

Доказательство. Пусть k_1, k_2 — параллельные прямые, не параллельные прямой l. Так же как и при доказательстве первого свойства, рассмотрим плоскости α_1, α_2, линии пересечения которых с плоскостью π дают проекции k_1', k_2' прямых k_1, k_2 соответственно (рис. 272).

Если плоскости α_1 и α_2 совпадают, то проекции прямых k_1 и k_2 также совпадают. Если эти плоскости различны, то они параллельны между собой по признаку параллельности двух плоскостей (прямая k_1 параллельна прямой k_2, прямая A_1A_1' параллельна прямой A_2A_2'). В силу свойства параллельных плоскостей линии пересечения этих плоскостей с плоскостью π параллельны. ◀

Пример 1. Как должны быть расположены две прямые, чтобы они проектировались на плоскость в прямую и точку, не принадлежащую этой прямой? Сделать чертеж.

Решение. Рассмотрим все возможные случаи. Если прямые пересекаются и ни одна из них не параллельна направлению проектирования, то они проектируются в пересекающиеся прямые; если же одна из них параллельна направлению проектирования, то плоскость, которая определяется этими прямыми, проектируется в одну прямую (в этом случае плоскость параллельна направлению проектирования).

Если прямые параллельны, то они проектируются или в две параллельные прямые (их плоскость не параллельна направлению проектирования), или в одну прямую (их плоскость параллельна направлению проектирования, но сами они не параллельны направлению проектирования), или в две точки (прямые параллельны направлению проектирования).

Если прямые скрещиваются и одна из них параллельна направлению проектирования, то они проектируются соответственно в прямую и не принадлежащую ей точку. ◁■

Пример 2. Отрезок AB, равный a, параллелен плоскости проектирования. Найти длину его параллельной проекции.

Решение. Пусть параллельными проекциями точек A, B будут соответственно точки A', B'. Тогда четырехугольник $ABB'A'$ будет параллелограммом (AA' параллельна BB', AB параллельна $A'B'$). Следовательно, $AB = A'B' = a$. ◁■

Таким образом, длина параллельной проекции отрезка, лежащего в плоскости, параллельной плоскости проектирования, равна длине отрезка.

Упражнения

39.1. В каком случае параллельной проекцией прямой будет точка?

39.2. Справедливо ли утверждение: «Параллельные прямые, не параллельные направлению проектирования, проектируются в параллельные прямые»?

39.3. Справедливо ли утверждение: «Параллельные прямые проектируются в параллельные прямые или в одну прямую»?

39.4. В пространстве задана прямая. Может ли ее параллельная проекция быть параллельной этой прямой?

39.5. Можно ли по проекции точки на плоскость определить положение самой точки в пространстве?

39.6. В каких случаях положение прямой в пространстве определяется заданием ее проекции на плоскость?

39.7. Сохраняются ли при параллельном проектировании величины углов?

39.8. Сохраняются ли при параллельном проектировании длины отрезков?

○ **39.9.** Сколько точек может получиться при проектировании двух различных точек пространства? Сделайте чертеж.

○ **39.10.** Сколько точек может получиться при проектировании трех различных точек пространства? Сделайте чертеж.

○ **39.11.** Какие фигуры могут служить параллельными проекциями двух пересекающихся прямых? Сделайте чертеж.

○ **39.12.** В каком случае параллельной проекцией двух параллельных прямых является одна прямая? Сделайте чертеж.

○ **39.13.** В каком случае параллельной проекцией двух параллельных прямых являются две точки? Сделайте чертеж.

○ **39.14.** Какие фигуры могут быть параллельными проекциями двух скрещивающихся прямых? Сделайте чертеж.

○ **39.15.** Как должны быть расположены прямая и точка, чтобы они проектировались на плоскость в прямую и точку, принадлежащую этой прямой? Сделайте чертеж.

○ **39.16.** Как должны быть расположены две прямые, чтобы они проектировались на плоскость в прямую и точку, принадлежащую этой прямой? Сделайте чертеж.

○ **39.17.** Может ли параллельная проекции отрезка быть больше (меньше) самого отрезка? Ответ обоснуйте.

○ **39.18.** Верно ли, что если длина отрезка равна длине его параллельной проекции, то отрезок параллелен плоскости проектирования? Ответ обоснуйте.

● **39.19.** Докажите, что при параллельном проектировании сохраняется отношение отрезков, лежащих на параллельных прямых.

● **39.20.** Точки A', B' являются параллельными проекциями точек A, B. $AA' = a$, $BB' = b$. Точка C делит отрезок AB в отношении $m : n$. Найдите расстояние между точкой C и ее проекцией C'.

§ 40. Параллельные проекции плоских фигур

При изображении пространственных фигур на плоскости особенно важно уметь правильно изображать плоские фигуры, поскольку они входят в поверхности основных пространственных фигур. Например, плоские многоугольники являются гранями многогранников, круги — основаниями цилиндров и конусов.

Теорема. **Если плоская фигура F лежит в плоскости, параллельной плоскости проектирования π, то ее параллельная проекция F' на эту плоскость будет равна фигуре F.**

Доказательство. Определим преобразование фигуры F в фигуру F', сопоставляя точкам фигуры F их проекции. Тогда если A и B — точки фигуры F и A', B' — их проекции, то $ABB'A'$ — параллелограмм (рис. 273). Следовательно, $A'B' = AB$. Таким образом, это преобразование сохраняет расстояние между точками, т. е. является движением, и, значит, фигуры F и F' равны. ◁■

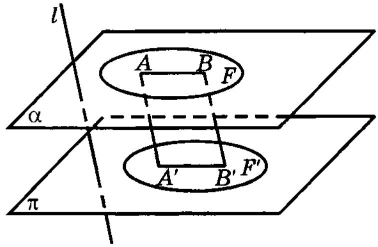


Рис. 273

Если фигура F лежит в плоскости, не параллельной плоскости проектирования π, то ее проекция F', вообще говоря, не равна фигуре F.

Из свойств параллельного проектирования следует, что параллельной проекцией многоугольника является или многоугольник с тем же числом сторон, или отрезок. Причем если в многоугольнике какие-нибудь две стороны параллельны, то их проекции также будут параллельны. Однако поскольку при параллельном проектировании длины отрезков и углы, вообще говоря, не сохраняются, то проекцией равностороннего треугольника может быть треугольник с разной длиной сторон, проекцией прямоугольного треугольника может быть не прямоугольный треугольник. Аналогично, хотя проекцией параллелограмма является параллелограмм, проекцией прямоугольника может не быть прямоугольник, проекцией ромба не обязательно является ромб, проекцией правильного многоугольника может быть неправильный многоугольник.

Простейшим многоугольником является треугольник. Параллельной проекцией треугольника, как следует из свойств параллельного проектирования, является треугольник или отрезок. При этом если плоскость треугольника параллельна плоскости проектирования, то, как мы выяснили, его проекцией будет треугольник, равный исходному. Докажем, что в общем случае треугольник любой формы может служить параллельной проекцией равностороннего треугольника.

Действительно, пусть дан произвольный треугольник ABC в плоскости π (рис. 274). Построим на одной из его сторон, например AC, равносторонний треугольник AB_1C так, чтобы точка B_1 не принадлежала плоскости π. Обозначим через l прямую, проходящую через точки B_1 и B. Тогда ясно, что треугольник ABC является параллельной проекцией треугольника AB_1C на плоскость π в направлении прямой l.

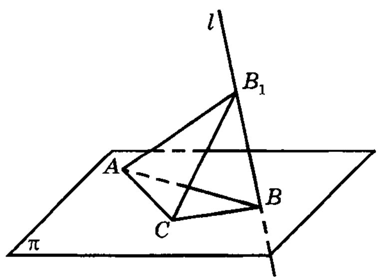


Рис. 274

Пример 1. Построить параллельную проекцию правильного шестиугольника $ABCDEF$ с центром в точке O (рис. 275).

Решение. Выберем какой-нибудь треугольник, например AOB. Его проекцией может быть произвольный треугольник $A'O'B'$ на плоскости π (рис. 276).

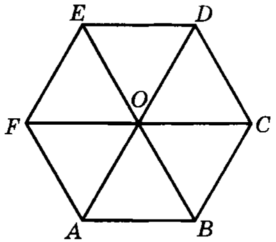


Рис. 275

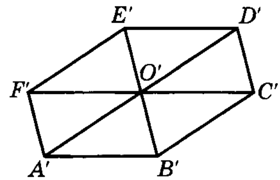


Рис. 276

Далее отложим $O'D' = A'O'$ и $O'E' = B'O'$. Теперь из точек A' и D' проведем прямые, параллельные прямой $B'O'$; из точек B' и E' проведем прямые, параллельные прямой $A'O'$. Точки пересечения соответствующих прямых обозначим F' и C'. Шестиугольник $A'B'C'D'E'F'$ и будет искомой проекцией правильного шестиугольника $ABCDEF$.

Пример 2. Выяснить, какая фигура является параллельной проекцией окружности.

Решение. Пусть F — окружность в пространстве, F' — ее проекция на плоскость π в направлении прямой l. Если прямая l параллельна плоскости окружности или лежит в ней, то проекцией окружности является отрезок, равный диаметру окружности. Рассмотрим случай, когда прямая l пересекает плоскость окружности (рис. 277).

Пусть AB — диаметр окружности, параллельный плоскости π, и $A'B'$ его проекция на эту плоскость. Тогда $AB = A'B'$. Возьмем какой-нибудь другой диаметр — CD, и пусть $C'D'$ — его проекция. Обозначим отношение $C'D' : CD$ через k. Так как при параллельном проектировании сохраняются параллельность и отношение длин параллельных отрезков, то для произвольной хорды C_1D_1, параллельной диаметру CD, ее проекция $C_1'D_1'$ будет параллельна $C'D'$ и отношение $C_1'D_1' : C_1D_1$ будет равно k.

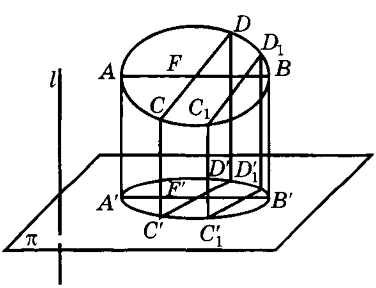


Рис. 277

Таким образом, проекция окружности получается сжатием или растяжением окружности в направлении какого-нибудь ее диаметра в одно и то же число раз. Такая фигура на плоскости называется *эллипсом*. ◁■

Например, на рисунке 278 изображен эллипс, полученный из окружности сжатием в направлении диаметра CD в два раза.

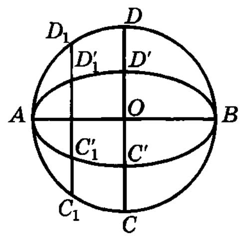


Рис. 278

Упражнения

40.1. Какие фигуры могут служить параллельными проекциями треугольника?

40.2. Может ли параллельной проекцией равностороннего треугольника быть:

а) прямоугольный треугольник;
б) равнобедренный треугольник;
в) разносторонний треугольник?

40.3. Может ли параллельной проекцией квадрата быть отрезок?

40.4. Какой фигурой может быть параллельная проекция прямоугольника?

40.5. Может ли параллельной проекцией прямоугольника быть:

а) квадрат; в) ромб;
б) параллелограмм; г) трапеция?

40.6. Верно ли, что проекцией ромба, если он не проектируется в отрезок, будет ромб?

40.7. Параллельной проекцией каких фигур может быть квадрат?

40.8. Верно ли, что при параллельном проектировании треугольника:

а) медианы проектируются в медианы;
б) высоты проектируются в высоты;
в) биссектрисы проектируются в биссектрисы?

○ **40.9.** Изобразите параллельную проекцию равностороннего треугольника. При каком условии равносторонний треугольник проектируется:

а) в равносторонний треугольник;
б) равнобедренный треугольник?

○ **40.10.** Плоскость параллелограмма не параллельна направлению проектирования. Какой фигурой при этом является его проекция? Сделайте чертеж.

○ **40.11.** В какую фигуру может проектироваться трапеция? Сделайте чертеж.

○ **40.12.** Изобразите параллельную проекцию:

а) прямоугольника;

б) ромба.

○ **40.13.** Изобразите параллельную проекцию равностороннего треугольника, лежащего в плоскости, параллельной плоскости проектирования.

○ **40.14.** Изобразите параллельную проекцию правильного шестиугольника $ABCDEF$, взяв за исходную фигуру прямоугольник $ABDE$.

● **40.15.** Изобразите параллельную проекцию правильного восьмиугольника.

○ **40.16.** Нарисуйте эллипсы, полученные из окружности сжатием и растяжением в:

а) 1,5 раза; б) 2 раза; в) 3 раза.

● **40.17.** Используя изображение окружности в параллельной проекции, постройте изображения двух ее перпендикулярных диаметров.

● **40.18.** Используя изображение окружности в параллельной проекции, постройте изображение касательной:

а) параллельной данной хорде;

б) проходящей через данную точку.

● **40.19.** Изобразите параллельную проекцию квадрата:

а) с вписанной в него окружностью;

б) с описанной около него окружностью.

● **40.20.** Дано изображение окружности. Постройте изображение правильного треугольника:

а) вписанного в данную окружность;

б) описанного около нее.

● **40.21.** Постройте изображение прямоугольного треугольника:

а) вписанного в окружность;

б) описанного около окружности.

● **40.22.** Изобразите параллельную проекцию правильного шестиугольника:

а) с вписанной в него окружностью;

б) описанной около него окружностью.

● **40.23.** Треугольник $A'B'C'$ является параллельной проекцией треугольника ABC. Расстояния между соответствующими вершинами этих треугольников равны a, b, c. Найдите расстояние между точками пересечения медиан треугольников.

§ 41. Изображение пространственных фигур

Как говорилось выше, для изображения пространственных фигур используют параллельное проектирование. Плоскость, на которую проектируется фигура, называется *плоскостью изображений*, а сама проекция фигуры — *изображением*.

Приведем примеры изображений пространственных фигур на плоскости.

Пример 1. Изображение параллелепипеда строится, исходя из того, что все его грани — параллелограммы и, следовательно, изображаются параллелограммами (рис. 241).

Пример 2. При изображении куба плоскость изображений обычно выбирается параллельной одной из его граней. В этом случае две грани куба, параллельные плоскости изображений (передняя и задняя), изображаются равными квадратами. Остальные грани куба изображаются параллелограммами (рис. 240). Аналогичным образом изображается прямоугольный параллелепипед (рис. 242).

Пример 3. Для того чтобы построить изображение призмы, достаточно построить многоугольник, изображающий ее основание. Затем из вершин многоугольника провести прямые, параллельные некоторой фиксированной прямой, и отложить на них равные

Рис. 279

Рис. 280

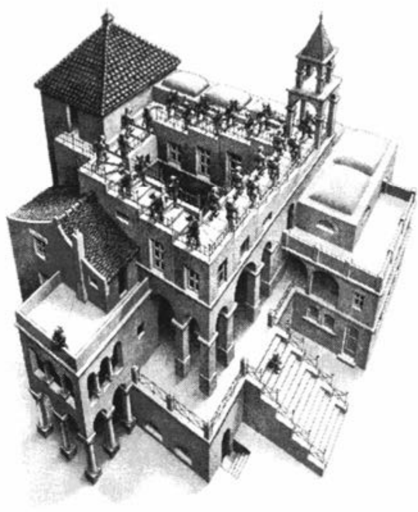


Рис. 281

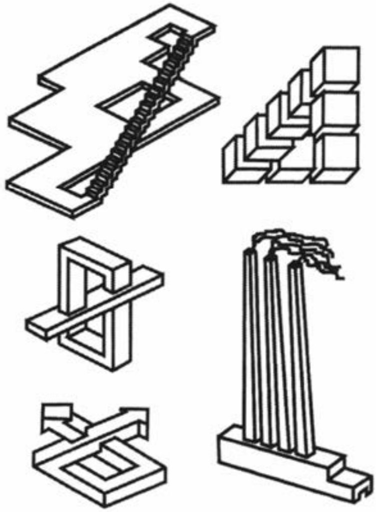


Рис. 282

отрезки. Соединяя концы этих отрезков, получим многоугольник, являющийся изображением второго основания призмы (рис. 243).

Пример 4. Для того чтобы построить изображение пирамиды, достаточно построить многоугольник, изображающий ее основание. Затем выбрать какую-нибудь точку, которая будет изображать вершину пирамиды, и соединить ее с вершинами многоугольника (рис. 246). Полученные отрезки будут изображать боковые ребра пирамиды.

Обратим внимание на тот факт, что плоское изображение, подчиняясь определенным законам, способно передать впечатление о трехмерном предмете. Однако при этом могут возникать иллюзии.

В живописи существует целое направление, которое называется «*импоссибилизм*» (*impossibility* — невозможность) — изображение невозможных фигур, парадоксов. Известный голландский художник М. Эшер (1898—1972) в гравюрах «Бельведер» (рис. 279), «Водопад» (рис. 280), «Поднимаясь и опускаясь» (рис. 281) изобразил невозможные объекты.

Современный шведский архитектор О. Рутерсвард посвятил невозможным объектам серию своих художественных работ. Некоторые из них представлены на рисунке 282.

Упражнения

41.1. На рисунке 242 изображен прямоугольный параллелепипед. Верно ли утверждение о том, что какие-то его ребра параллельны плоскости проектирования?

41.2. На рисунке 241 изображен наклонный параллелепипед. Верно ли утверждение о том, что какие-то его ребра параллельны плоскости проектирования?

41.3. На рисунке 243 изображена треугольная призма. Верно ли утверждение о том, что какие-то ее ребра параллельны плоскости проектирования.

41.4. Изображением какого многогранника можно считать четырехугольник с проведенными диагоналями? Какая неточность в этом изображении?

41.5. Параллельными проекциями каких многогранников являются фигуры, изображенные на рисунке 283?

● **41.6.** Возможен ли многогранник, изображение которого показано на рисунке 284?

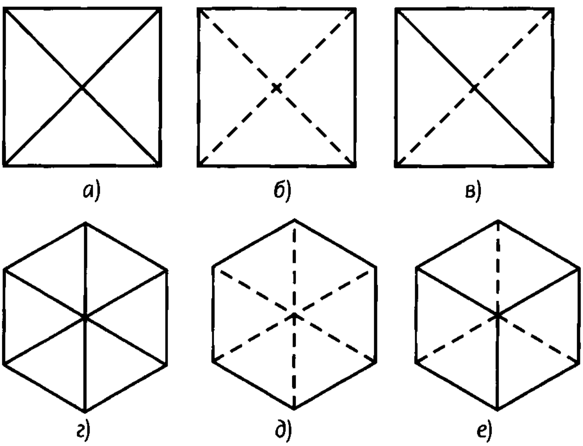


Рис. 283

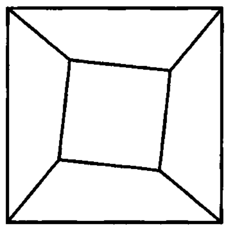


Рис. 284

○ **41.7.** Постройте изображение куба, две грани которого параллельны плоскости изображений.

○ **41.8.** Постройте изображение куба, ребро которого параллельно плоскости проектирования, а грани — нет.

○ **41.9.** Постройте изображения прямого и наклонного параллелепипедов.

○ **41.10.** Постройте изображение правильной шестиугольной призмы.

○ **41.11.** Постройте изображение правильного тетраэдра $ABCD$, грань ABD которого параллельна плоскости проектирования. Каким будет изображение треугольника ABD?

○ **41.12.** Изобразите в параллельной проекции правильную четырехугольную пирамиду.

○ **41.13.** Изобразите октаэдр $SABCDS'$, две диагонали — AC и SS' — которого параллельны плоскости проектирования. Каким будет изображение четырехугольника $ASCS'$?

○ **41.14.** Дан тетраэдр $ABCD$. Площадь грани ABC равна S. Найдите площадь проекции грани ADB на грань ABC в направлении прямой DC.

§ 42. Сечения многогранников

Если многогранник лежит по одну сторону от данной плоскости, то он может: а) не иметь с плоскостью ни одной общей точки (рис. 285); б) иметь одну общую точку — вершину многогранника (рис. 286);

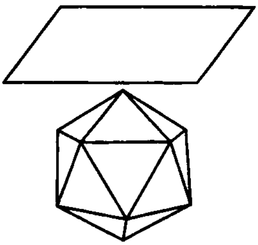


Рис. 285

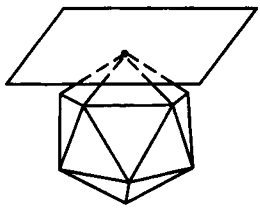


Рис. 286

в) иметь общий отрезок — ребро многогранника (рис. 287); г) иметь общий многоугольник — грань многогранника (рис. 288).

Если у многогранника имеются точки, лежащие по разные стороны от данной плоскости, то общей частью многогранника и плоскости будет многоугольник, называемый *сечением* многогранника плоскостью (рис. 289).

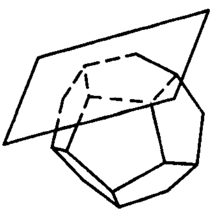


Рис. 287

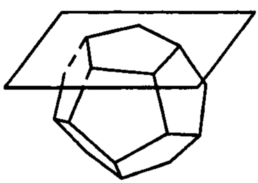


Рис. 288

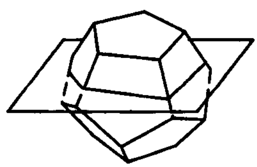


Рис. 289

Сечение призмы плоскостью, проходящей через диагональ основания и прилежащие к ней боковые ребра, называется *диагональным сечением* (рис. 290).

Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания и вершину, называется *диагональным сечением* (рис. 291).

Пусть плоскость пересекает пирамиду и параллельна ее основанию (рис. 292). Часть пирамиды, заключенная между этой плоскостью и основанием, называется *усеченной пирамидой*. Сечение пирамиды также называется *основанием* усеченной пирамиды.

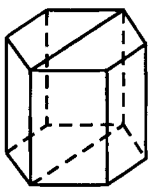


Рис. 290

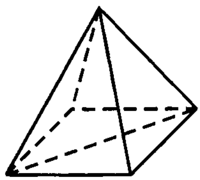


Рис. 291

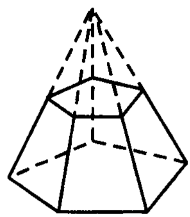


Рис. 292

Рассмотрим вопрос о построении сечений многогранника плоскостью.

Пусть дано изображение куба и три точки — A, B, C, принадлежащие ребрам этого куба, выходящим из одной вершины.

Тогда, для того чтобы построить сечение куба плоскостью, проходящей через данные точки, достаточно просто соединить эти точки отрезками. Полученный треугольник ABC и будет искомым изображением сечения куба (рис. 293).

Для построения более сложных сечений используют метод нахождения точки пересечения прямой и плоскости по заданным двум точкам этой прямой и их проекциям на плоскость. А именно, пусть прямая k проходит через точки A, B и известны параллельные проекции A', B' этих точек на плоскость π. Тогда пересечение прямой k с прямой k', проходящей через точки A', B', и будет искомым пересечением прямой k с плоскостью π (рис. 294).

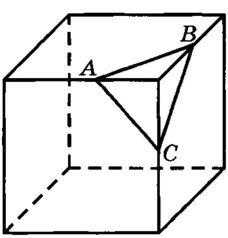


Рис. 293

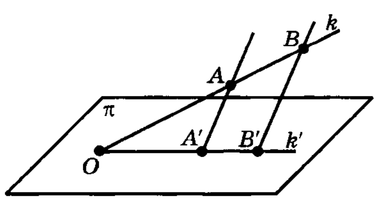


Рис. 294

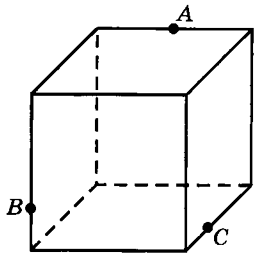


Рис. 295

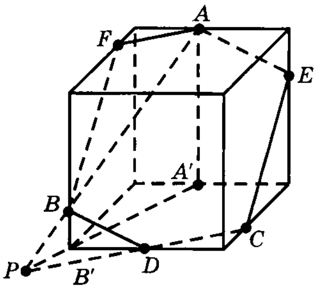


Рис. 296

Пример 1. Построить изображение сечения куба, проходящего через три точки — A, B, C, принадлежащие попарно скрещивающимся ребрам этого куба (рис. 295).

Решение. Найдем пересечение прямой AB, лежащей в плоскости сечения, с плоскостью основания куба. Для этого построим параллельные проекции A', B' точек A, B на основание куба в направлении его бокового ребра (рис. 296). Пересечение прямых AB и $A'B'$ будет искомой точкой P. Она принадлежит плоскости сечения и плоскости основания куба. Следовательно, плоскость сечения пересекает основание куба по прямой CP. Точка пересечения этой прямой с ребром основания куба даст еще одну точку — D — сечения куба. Соединим точки C и D, B и D отрезками. Через точку A проведем прямую, параллельную BD, и точку ее пересечения с ребром куба обозначим E. Соединим точки E и C отрезком. Через точку A проведем прямую, параллельную CD, и точку ее пересечения с ребром куба обозначим F. Соединим точки A и F, B и F отрезками. Многоугольник $AECDBF$ и будет искомым изображением сечения куба плоскостью (рис. 296). ◼

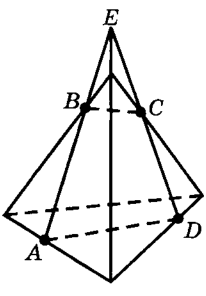


Рис. 297

Пример 2. Построить изображение сечения треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через три точки — A, B, C, принадлежащие ее ребрам (рис. 297).

Решение. Проведем прямую AB и ее точку пересечения с боковым ребром пирамиды обозначим через E. Проведем прямую EC и ее точку пересечения с ребром основания пирамиды обозначим через D. Соединим отрезками точки B и C, A и D. Четырехугольник $ABCD$ будет искомым изображением сечения пирамиды плоскостью. ◼

Упражнения

42.1. Какой фигурой является сечение многогранника плоскостью?

42.2. Сколько диагональных сечений имеет n-угольная:

а) призма;

б) пирамида?

42.3. Сколько вершин, ребер и граней имеет n-угольная усеченная пирамида?

42.4. Может ли в сечении куба плоскостью получиться:
а) треугольник;
б) правильный треугольник;
в) равнобедренный треугольник;
г) прямоугольный треугольник;
д) тупоугольный треугольник?

42.5. Может ли в сечении куба плоскостью получиться:
а) четырехугольник;
б) квадрат;
в) прямоугольник;
г) неравнобедренная трапеция;
д) прямоугольная трапеция?

42.6. Может ли в сечении куба плоскостью получиться:
а) пятиугольник;
б) правильный пятиугольник?

42.7. Может ли в сечении куба плоскостью получиться:
а) шестиугольник;
б) правильный шестиугольник;
в) многоугольник с числом сторон больше шести?

42.8. Какие многоугольники можно получить в сечении четырехугольной пирамиды плоскостью?

42.9. Может ли в сечении правильного тетраэдра плоскостью получиться квадрат?

42.10. Может ли в сечении тетраэдра плоскостью получиться четырехугольник, изображенный на рисунке 298?

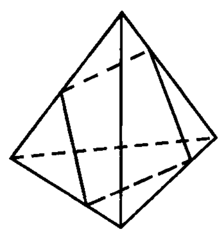


Рис. 298

○ **42.11.** Постройте сечение куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершины B_1, D и точку K — середину ребра CC_1. Какой фигурой является полученное сечение?

○ **42.12.** Постройте сечение куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через точки E, F, G — середины соответственно ребер AD, A_1B_1, B_1C_1. Какой фигурой является полученное сечение?

○ **42.13.** Дан куб $A...D_1$. Проведите сечение через вершины A, C и точку M, взятую на ребре A_1B_1. Определите вид сечения.

○ **42.14.** Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через три точки, расположенные так, как показано на рисунках 299, 300.

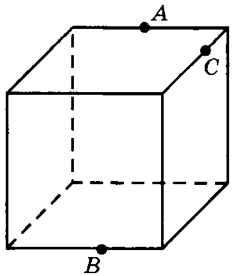


Рис. 299

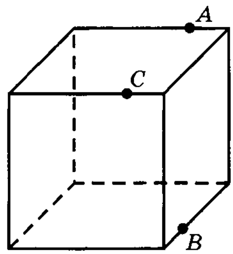


Рис. 300

○ **42.15.** Постройте сечение куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершины B_1, D и точку H, принадлежащую ребру CC_1.

○ **42.16.** Какой фигурой является сечение куба плоскостью, которая проходит через две противоположные вершины нижнего основания и середину одного из ребер верхнего основания? Найдите его периметр, если длина ребра куба равна 1.

○ **42.17.** Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через точки, указанные на рисунке 301.

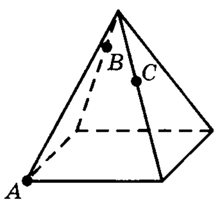


Рис. 301

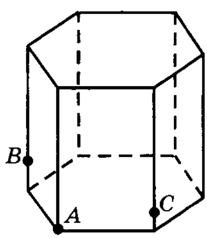


Рис. 302

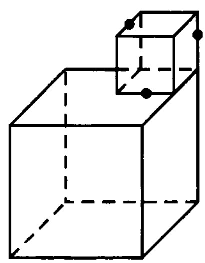


Рис. 303

○ **42.18.** Постройте сечение правильного тетраэдра $ABCD$ плоскостью, проходящей через вершину B и точки M, N — середины соответственно ребер AD, CD. Какой фигурой является полученное сечение?

○ **42.19.** Постройте сечение правильного тетраэдра $ABCD$ плоскостью, параллельной грани BDC и проходящей через точку K — середину ребра AD?

○ **42.20.** Проведите плоскость, пересекающую тетраэдр по параллелограмму.

○ **42.21.** Постройте сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через точки, указанные на рисунке 302.

○ **42.22.** Определите вид сечения правильной треугольной призмы плоскостью, проходящей через сторону нижнего основания и середину скрещивающейся с ней стороны верхнего основания.

○ **42.23.** Верно ли утверждение о том, что в сечении правильной шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через середины двух соседних боковых ребер и вершину верхнего основания, принадлежащей смежной боковой грани, получается равнобедренная трапеция?

● **42.24.** Как пересечь правильную треугольную призму тремя плоскостями таким образом, чтобы получилась правильная шестиугольная призма? Сделайте соответствующее построение.

● **42.25.** Меньший куб поставлен на больший таким образом, что они имеют общую вершину и их грани попарно параллельны (рис. 303). Постройте сечение полученной фигуры плоскостью, проходящей через три точки, которые принадлежат скрещивающимся ребрам меньшего куба.

● **42.26.** Найдите сечение куба плоскостью, имеющее наибольшую площадь.

ГЛАВА 8 Перпендикулярность в пространстве

§ 43. Угол между прямыми в пространстве. Перпендикулярность прямых

Определение угла в пространстве аналогично определению угла на плоскости.

Определение. *Углом* в пространстве называется фигура, образованная двумя лучами с общей вершиной и одной из частей плоскости (в которой лежат лучи), ограниченной этими лучами.

Определение. *Углом между двумя пересекающимися прямыми* в пространстве называется наименьший из углов, образованных лучами этих прямых с вершиной в их точке пересечения.

Определение. Две пересекающиеся прямые в пространстве называются *перпендикулярными*, если они пересекаются под прямым углом.

Будем также говорить, что два пересекающихся отрезка перпендикулярны, если они лежат на перпендикулярных прямых. Углом между двумя пересекающимися отрезками будем называть угол между соответствующими прямыми.

Например, в кубе пересекающиеся ребра перпендикулярны, диагональ грани куба образует с ребрами этой грани углы 45°.

Так же как и для плоскости, два луча в пространстве называются *одинаково направленными (сонаправленными)*, если один из них содержит другой или они лежат на параллельных прямых по одну сторону от прямой, соединяющей их вершины.

Используя свойства параллельного проектирования, докажем следующую теорему.

Теорема. Углы с сонаправленными сторонами равны.

Доказательство. Пусть лучи a_1, b_1 с вершиной в точке C_1 соответственно сонаправлены лучам a_2, b_2 с вершиной в точке C_2.

Предположим, что лучи лежат в разных плоскостях γ_1, γ_2 (рис. 304).

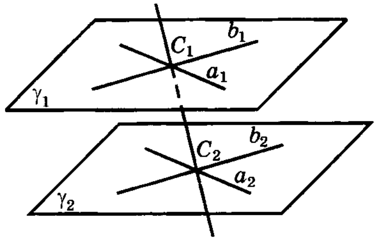


Рис. 304

Случай, когда лучи лежат в одной плоскости, рассматривался в планиметрии. Заметим, что по признаку параллельности двух плоскостей плоскости γ_1 и γ_2 параллельны. Параллельное проектирование в направлении прямой C_1C_2 на плоскость γ_2 переводит лучи a_1, b_1 в лучи a_2, b_2 соответственно. Следовательно, углы, образованные этими лучами, равны. ◁■

Следствие. Углы, образованные соответственно параллельными прямыми, равны.

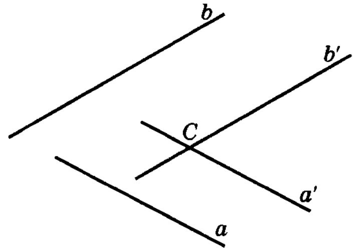


Рис. 305

Определим теперь понятие угла между скрещивающимися прямыми.

Пусть a и b — скрещивающиеся прямые (рис. 305). Рассмотрим какую-нибудь точку C в пространстве и проведем через нее прямые a', b', параллельные прямым a и b соответственно. *Углом между скрещивающимися прямыми* называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным.

Поскольку углы с параллельными сторонами равны, то это определение не зависит от выбора точки C. В частности, точка C может принадлежать прямой a или b. В этом случае в качестве прямой a' или b' следует взять саму прямую a или b соответственно.

Две *скрещивающиеся прямые* называются *перпендикулярными*, если угол между ними прямой.

Два отрезка будем называть перпендикулярными, если они лежат на перпендикулярных прямых.

Углом между двумя отрезками будем называть угол между прямыми, на которых лежат эти отрезки.

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Проблема измерения углов между прямыми в пространстве восходит к глубокой древности. Астрономические наблюдения, необходимость определения положения солнца и звезд на небе потребовали создания специальных приборов для определения углов, под которыми видны эти светила.

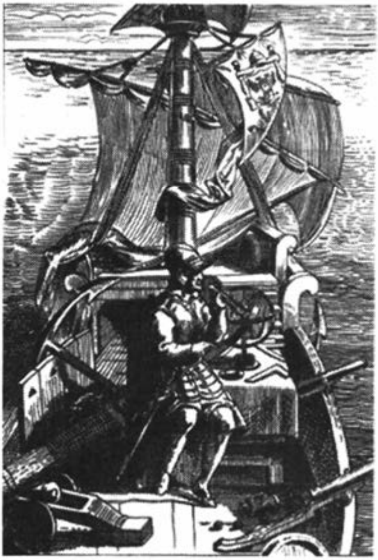


Рис. 306

Рис. 307

Рис. 308

На старинной гравюре (рис. 306) художник изобразил моряка эпохи Великих географических открытий, прокладывающего курс корабля с помощью измерительных инструментов. Одним из первых угломерных инструментов была *астролябия*, изобретенная еще Гиппархом (180—125 гг. до н. э.) и усовершенствованная впоследствии немецким ученым Региомонтаном (1436—1476). Она состояла из тяжелого медного диска — лимба, который подвешивался за кольцо так, чтобы он висел вертикально и линия $Г_1Г_2$ принимала горизонтальное положение (рис. 307). По краю лимба наносилась шкала, разделенная на градусы.

Кроме этого, на лимбе имелась полоса A_1A_2, называемая алидадой, которая могла вращаться вокруг центра лимба и имела на концах поперечные пластинки с отверстиями — диоптрами.

Для определения высоты звезды над горизонтом наблюдатель прикладывал глаз к нижнему диоптру и поворачивал алидаду так, чтобы звезда была видна через другой диоптр. Деление на шкале, около которого останавливался край алидады, и показывало высоту звезды в градусах над горизонтом, измеряя фактически градусную величину дуги $Г_1A_1$.

Располагая плоскость лимба горизонтально, как на школьной астролябии (рис. 308), можно измерять углы и в горизонтальной плоскости. Для этого после установки астролябии алидаду наводят сначала на один объект наблюдения и засекают угол на шкале

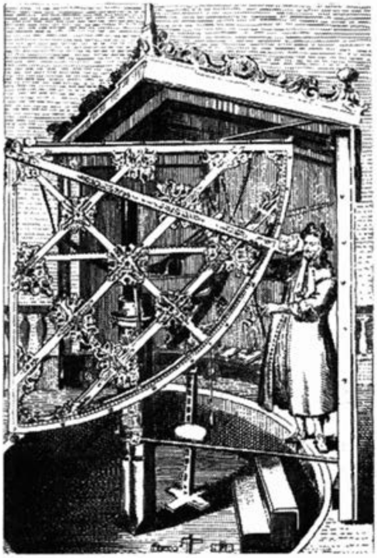


Рис. 309

Рис. 310

лимба, а затем на другой объект и также засекают угол. Разность между этими углами и есть искомый угол, под которым видны данные объекты.

Другим инструментом для измерения углов был *квадрант*, представляющий собой одну четвертую часть астролябии (рис. 309). Квадрант имел то преимущество перед астролябией, что его можно было сделать значительно больших размеров и тем самым увеличить точность измерения углов.

Существенные усовершенствования в конструкции астролябии и квадранта были сделаны французским ученым Жаном Пикаром в середине XVII в. Пикар заменил диоптры зрительной трубой, изобретенной незадолго до этого Галилеем. Перед линзой трубы он установил сетку из перекрещивающихся волосков, а для плавного вращения алидады использовал микрометрический винт, что значительно повысило точность измерения.

Наиболее совершенным угловым инструментом, применяющимся в настоящее время для выполнения геодезических работ, является *теодолит* (рис. 310), состоящий из двух лимбов, расположенных в вертикальной и горизонтальной плоскостях, что позволяет измерять вертикальные и горизонтальные углы одновременно. На вертикальном лимбе имеется зрительная труба, с помощью которой алидады вертикального и горизонтального лимбов наводятся на объект наблюдения. Точность измерения углов при этом составляет доли минуты.

Существует много способов приближенного измерения углов. Например, измерение с помощью ногтя указательного пальца. Ширина ногтя указательного пальца приближенно равна 1 см, а расстояние от глаза до ногтя вытянутой руки — 60 см. Поэтому угол, под которым виден ноготь, приближенно равен 1°. Это следует из решения простой геометрической задачи, в которой нужно найти угол φ при вершине равнобедренного треугольника, у которого основание (ширина ногтя) равно 1 см, а высота (расстояние от глаза до ногтя вытянутой руки), опущенная на него, равна 60 см.

Пример 1. Прямые a и b параллельны. Прямые a и c пересекаются под углом 45°. Указать взаимное расположение прямых b и c и угол между ними.

Решение. Если прямая a параллельна b и прямая c пересекает b, то в этом случае угол между b и c равен углу между a и c (их можно считать как углы с соответственно параллельными сторонами), т. е. равен 45°.

Если c не лежит в плоскости параллельных прямых a и b, то c скрещивается с b, но угол между b и c также равен 45° (из любой точки b проведем прямую, параллельную c, полученный угол равен углу между a и c — углы с соответственно параллельными сторонами). ◁■

Ответ: 45°.

Пример 2. Концы отрезка AB принадлежат двум плоскостям — α и β соответственно, которые пересекаются по прямой MN. В плоскости β проведена прямая BC, параллельная прямой MN. Прямая BC образует с прямой AB угол в 30°. Найти углы между прямыми: а) AB и MN; б) AH и AB, где AH перпендикулярна BC.

Решение.

а) Угол между прямыми AB и MN равен углу между прямыми AB и BC (MN параллельна BC), т. е. равен 30°;

б) пусть H принадлежит BC, тогда треугольник ABH прямоугольный, в нем $\angle B = 30°$, значит, искомый угол ($\angle A$ между прямыми AB и AH) равен $90° - 30° = 60°$. ◁■

Упражнения

43.1. Дана прямая в пространстве, на ней взята точка. Сколько можно построить прямых, проходящих через эту точку и перпендикулярных данной прямой?

43.2. Дана прямая и точка вне ее. Сколько можно построить прямых, проходящих через эту точку и перпендикулярных данной прямой?

43.3. Даны плоскость и параллельная ей прямая. Сколько прямых, перпендикулярных этой прямой, можно провести в данной плоскости?

43.4. Из планиметрии известно, что две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны. Верно ли это утверждение для стереометрии?

○ **43.5.** Измерьте ширину ногтя своего указательного пальца и расстояние от глаза до ногтя вытянутой руки. Рассчитайте угол, под которым виден ноготь.

○ **43.6.** Среди окружающих предметов найдите те, которые видны под углом $1°$.

○ **43.7.** Измерьте ширину двух, трех и четырех пальцев руки и найдите углы, под которыми они видны на вытянутой руке.

○ **43.8.** Измерьте углы, под которыми видны какие-нибудь окружающие вас предметы.

○ **43.9.** В кубе $A...D_1$ докажите перпендикулярность прямых:
а) AD и A_1B_1; б) AC и B_1D_1; в) AC и DD_1.

○ **43.10.** Чему равен угол между пересекающимися ребрами:
а) куба; б) правильного тетраэдра?

○ **43.11.** Найдите угол между диагональю грани куба и пересекающимся с ней ребром.

○ **43.12.** Найдите угол между диагональю куба и скрещивающейся с ней диагональю основания.

○ **43.13.** Найдите угол между пересекающимися диагоналями двух различных граней куба.

○ **43.14.** Найдите угол между диагональю куба и пересекающим ее ребром куба.

○ **43.15.** Дан куб $A...D_1$. Найдите углы, которые образуют прямые:
а) AA_1 и B_1C_1; б) AA_1 и CD.

○ **43.16.** В кубе $A...D_1$ найдите углы между скрещивающимися прямыми:
а) AD и A_1C_1; б) AC_1 и DD_1; в) AB_1 и BC_1.

○ **43.17.** В пирамиде, все грани которой правильные треугольники, найдите угол между высотами этих треугольников, проведенными к общему ребру.

○ **43.18.** В треугольной призме, боковыми гранями которой являются квадраты, найдите угол между пересекающимися диагоналями боковых граней.

● **43.19.** Найдите угол между двумя непересекающимися ребрами правильной треугольной пирамиды.

○ **43.20.** В правильной четырехугольной пирамиде со стороной основания, равной боковому ребру, найдите угол между стороной основания и скрещивающимся с ней боковым ребром.

○ **43.21.** Могут ли быть перпендикулярными прямые OB и OC, если углы AOB и AOC равны каждый $60°$?

○ **43.22.** A, B, C — точки на попарно перпендикулярных лучах OA, OB, OC. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $OA = OB = OC$.

○ **43.23.** В прямоугольном параллелепипеде угол между диагоналями одного из диагональных сечений равен $90°$. Может ли угол между диагоналями разных диагональных сечений равняться $90°$?

○ **43.24.** Диагональ прямоугольного параллелепипеда, основанием которого является квадрат, вдвое больше стороны основания. Найдите углы между диагоналями параллелепипеда.

○ **43.25.** Прямые a и b параллельны. Прямые a и c пересекаются под прямым углом. Укажите взаимное расположение прямых b и c и угол между ними.

● **43.26.** Дан куб $A...D_1$. Найдите углы, образуемые:

а) радиусами OK и O_1K_1 окружностей, вписанных в грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, проведенными в точки касания с ребрами DC и A_1D_1;

б) прямыми BD и O_1K_1 (O_1K_1 из a).

§ 44. Перпендикулярность прямой и плоскости. Ортогональное проектирование

Помимо определения перпендикулярности прямых в пространстве можно определить понятие перпендикулярности прямой и плоскости.

Определение. Прямая называется *перпендикулярной* плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Отрезок будем называть перпендикулярным плоскости, если он лежит на прямой, перпендикулярной этой плоскости.

Заметим, что прямая, перпендикулярная плоскости, пересекает эту плоскость. Действительно, если бы прямая лежала в плоскости или была ей параллельна, то в этой плоскости нашлась бы прямая, ей параллельная, и, значит, исходная прямая не была бы перпендикулярна данной плоскости.

Следующая теорема дает достаточное условие перпендикулярности прямой и плоскости.

***Теорема.* (Признак перпендикулярности прямой и плоскости.) Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна и самой плоскости.**

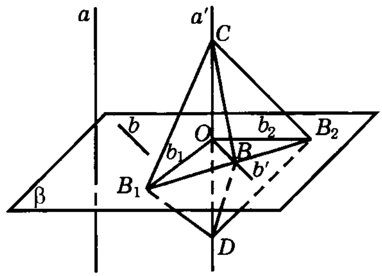


Рис. 311

Доказательство. Пусть прямая a перпендикулярна прямым b_1, b_2 плоскости β, пересекающимся в точке O (рис. 311). Рассмотрим произвольную прямую b плоскости β. Проведем через точку O прямые a', b', соответственно параллельные прямым a, b. Для доказательства перпендикулярности прямых a, b достаточно доказать перпендикулярность прямых a', b'. Для этого в плоскости β проведем прямую, пересекающую прямые b_1, b_2, b' в точках B_1, B_2, B соответственно. Отложим на прямой a' от точки O равные отрезки OC, OD и соединим точки C, D с точками B_1, B_2, B. Прямоугольные треугольники OB_1C и OB_1D равны (по катетам). Следовательно, $B_1C = B_1D$. Аналогично из равенства треугольников OB_2C и OB_2D следует, что $B_2C = B_2D$. Треугольники B_1B_2C и B_1B_2D равны (по третьему признаку равенства треугольников). Следовательно, $\angle CB_1B = \angle DB_1B$. Треугольники B_1BC и B_1BD равны (по первому признаку равенства треугольников). Таким образом, $BC = BD$. Треугольники OBC и OBD равны (по третьему признаку равенства треугольников), следовательно, $\angle BOC = \angle BOD = 90°$, т. е. прямые a' и b' перпендикулярны. Значит, прямая a перпендикулярна плоскости β. ⌫

Пример 1. Доказать, что боковые ребра прямой призмы перпендикулярны ее основаниям.

Решение. Действительно, боковыми гранями прямой призмы являются прямоугольники. Поэтому каждое боковое ребро перпендикулярно двум прилежащим сторонам основания призмы и, следовательно, перпендикулярно основанию (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). ⌫

Определение. Параллельное проектирование в направлении прямой, перпендикулярной плоскости проектирования, называется *ортогональным проектированием*.

Так как ортогональное проектирование является частным случаем параллельного проектирования, то оно обладает всеми его свойствами.

Ортогональное проектирование обычно используется для изображения сферы, шара, цилиндра, конуса и т. п.

Пример 2. Доказать, что в прямоугольном параллелепипеде диагональ основания перпендикулярна пересекающему ее боковому ребру.

Решение. Пусть дан прямоугольный параллелепипед $A...D_1$. Докажем, что его боковое ребро, например AA_1, перпендикулярно диагонали AC грани $ABCD$. Действительно, AA_1 перпендикулярно плоскости грани $ABCD$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости: $AA_1 \perp AB$ и $AA_1 \perp AD$, так как все грани — прямоугольники). Отсюда следует, что AA_1 перпендикулярно любой прямой, лежащей в плоскости грани $ABCD$, значит, $AA_1 \perp AC$. ◁■

Пример 3. В правильном тетраэдре провести плоскость, перпендикулярную его ребру.

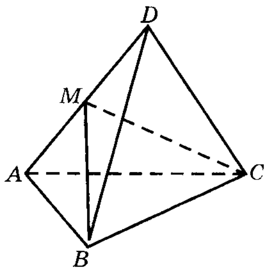


Рис. 312

Решение. Пусть дан правильный тетраэдр $ABCD$. Проведем плоскость, перпендикулярную ребру AD. Для этого в треугольниках ABD и ACD опустим высоты на сторону AD — BM и CM соответственно, где M — середина AD (рис. 312). Плоскость BMC перпендикулярна AD (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости: AD перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости BMC). ◁■

Пример 4. Провести через произвольную точку пространства плоскость, перпендикулярную данной прямой.

Решение. Пусть через точку A нужно провести плоскость α, перпендикулярную прямой a. Рассмотрим два случая.

1. A принадлежит a. Через прямую a проводим две произвольные плоскости β и γ и в них через точку A проводим соответственно $AB \perp a$ и $AC \perp a$. Через пересекающиеся прямые AB и AC проводим плоскость α. Она будет искомой (A принадлежит α и $a \perp \alpha$, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

2. A не принадлежит a. Через прямую a и точку A проводим плоскость β. В ней проводим $AB \perp a$. Проводим произвольную плоскость γ через прямую a и в ней проводим $BC \perp a$. Как и в первом случае, через пересекающиеся прямые AB и BC проводим искомую плоскость α. ◁■

Упражнения

44.1. Верно ли, что если прямая перпендикулярна каким-нибудь двум прямым плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости?

44.2. Прямая параллельна плоскости. Может ли она быть перпендикулярной какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости?

44.3. Верно ли, что прямая, пересекающая круг в центре и перпендикулярная:

а) его диаметру;

б) двум его диаметрам, перпендикулярна плоскости круга?

44.4. Справедливо ли утверждение, что прямая, пересекающая круг в центре и перпендикулярная:

а) радиусу;

б) двум радиусам, перпендикулярна плоскости круга?

44.5. Как расположена относительно плоскости круга прямая, перпендикулярная к двум его хордам?

44.6. Прямая и плоскость параллельны. Верно ли, что прямая, перпендикулярная данной прямой:

а) перпендикулярна данной плоскости;

б) параллельна данной плоскости?

44.7. Прямая и плоскость параллельны. Верно ли утверждение, что прямая, перпендикулярная данной плоскости, перпендикулярна данной прямой?

44.8. При каком взаимном расположении двух прямых через одну из них можно провести плоскость, перпендикулярную другой?

44.9. Что представляет собой геометрическое место точек, расположенных на прямых, проходящих через данную точку на прямой и перпендикулярных этой прямой?

44.10. Как расположена относительно плоскости треугольника прямая, перпендикулярная двум его сторонам?

44.11. Может ли ортогональная проекция отрезка быть:

а) меньше отрезка; в) больше отрезка?

б) равна отрезку;

● **44.12.** Может ли ортогональная проекция угла быть:

а) меньше угла; б) равна углу; в) больше угла?

○ **44.13.** Докажите, что в правильной призме боковые ребра перпендикулярны плоскости основания.

○ **44.14.** Докажите, что в кубе каждое ребро перпендикулярно двум его граням.

○ **44.15.** Боковое ребро параллелепипеда перпендикулярно диагоналям основания. Докажите, что этот параллелепипед является прямым.

○ **44.16.** В кубе $A...D_1$ докажите перпендикулярность прямых AC и B_1D.

○ **44.17.** Докажите, что в правильной треугольной пирамиде сторона основания перпендикулярна скрещивающемуся с ней ребру.

○ **44.18.** Прямая a пересекает плоскость α и не перпендикулярна этой плоскости. Существуют ли в плоскости α прямые, перпендикулярные a?

○ **44.19.** Определите вид треугольника, если через одну из его сторон можно провести плоскость, перпендикулярную другой стороне.

○ **44.20.** Прямая AB пересекает плоскость α. В плоскости α расположен треугольник CDE; AB перпендикулярна CD и AB перпендикулярна DE. Каково взаимное расположение прямых AB и CE?

○ **44.21.** Два прямоугольных треугольника — ABC и DBC, плоскости которых не совпадают, имеют общий катет, а через два других катета — AC и CD — проведена плоскость α.

1) Докажите, что общий катет перпендикулярен любой прямой c плоскости α, проведенной через точку C.
2) Можно ли опустить условие о несовпадении плоскостей данных треугольников?
3) Можно ли опустить условие о том, что c проходит через точку C?

○ **44.22.** Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, ребра которого равны a, b, c.

○ **44.23.** Докажите, что если прямая a перпендикулярна плоскости α и прямая b параллельна прямой a, то прямая b также перпендикулярна плоскости α.

○ **44.24.** Докажите, что если прямая a перпендикулярна плоскости α и плоскость β параллельна α, то прямая a перпендикулярна плоскости β.

○ **44.25.** Проведите через произвольную точку пространства прямую, перпендикулярную данной плоскости.

○ **44.26.** Может ли ортогональная проекция квадрата быть:

а) прямоугольником;
б) параллелограммом;
в) трапецией?

● **44.27.** Какой фигурой является ортогональная проекция куба на плоскость, перпендикулярную диагонали куба?

§ 45. Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью

Пусть точка A не принадлежит плоскости π. Проведем прямую a, проходящую через эту точку и перпендикулярную π. Точку пересечения прямой a с плоскостью π обозначим O. Отрезок AO называется *перпендикуляром*, опущенным из точки A на плоскость π.

Длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость, называется *расстоянием от этой точки до плоскости*.

Перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость ее основания, называется *высотой пирамиды*.

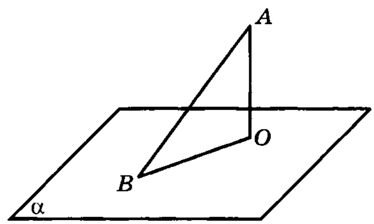
Перпендикуляр, опущенный из точки одного основания призмы на плоскость другого ее основания, называется *высотой призмы*.

Наклонной к плоскости называется прямая, пересекающая эту плоскость и не перпендикулярная ей. Наклонной также называют отрезок, соединяющий точку, не принадлежащую плоскости, с точкой плоскости и не являющийся перпендикуляром.

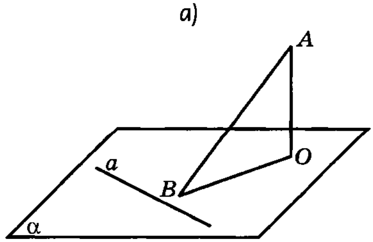
Теорема. **Перпендикуляр, опущенный из точки на плоскость, короче всякой наклонной, проведенной из той же точки к той же плоскости.**

Доказательство. Пусть AB — наклонная к плоскости α, AO — перпендикуляр, опущенный на эту плоскость (рис. 313, *а*). Соединим отрезком точки O и B. Треугольник AOB прямоугольный, AB — гипотенуза, AO — катет. Следовательно, $AO < AB$. ◁■

Из этой теоремы следует, что расстояние от точки до плоскости является наименьшим из расстояний от этой точки до всевозможных точек плоскости.



а)



б)

Рис. 313

Теорема. **(О трех перпендикулярах.) Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна ортогональной проекции наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и самой наклонной.**

Доказательство. Пусть прямая a плоскости α перпендикулярна ортогональной проекции OB наклонной AB (рис. 313, *б*). Тогда она будет перпендикулярна двум пересекающимся прямым OB

и AO. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая a перпендикулярна плоскости AOB, и, следовательно, она будет перпендикулярна наклонной AB.

Пример 1. Доказать, что диагональ AC_1 куба $A...D_1$ перпендикулярна прямой BD.

Решение. Действительно, ортогональной проекцией прямой AC_1 на плоскость грани $ABCD$ будет прямая AC. Прямые AC и BD перпендикулярны. По теореме о трех перпендикулярах прямые AC_1 и BD также будут перпендикулярны.

Определим теперь понятие угла между прямой и плоскостью.

Определение. *Углом между наклонной и плоскостью* называется угол между этой наклонной и ее ортогональной проекцией на эту плоскость. Считают также, что прямая, перпендикулярная плоскости, образует с этой плоскостью прямой угол.

Углом между отрезком и плоскостью будем называть угол между прямой, содержащей отрезок, и этой плоскостью.

Пример 2. Найти угол φ между ребром AD правильного тетраэдра и не содержащей его гранью ABC.

Решение. Пусть ребро тетраэдра равно a, E — середина ребра BC. Тогда прямая AE является ортогональной проекцией прямой AD на плоскость ABC. Поэтому искомый угол φ равен углу DAE. Из равностороннего треугольника ABC находим $AE = a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Из равнобедренного треугольника ADE ($AE = DE$) находим $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Пример 3. Отрезок BC длиной 12 см является ортогональной проекцией отрезка AC на плоскость α. Точка D принадлежит отрезку AC, и $AD : DC = 2 : 3$. Найти отрезок AD и его ортогональную проекцию на плоскость α, если известно, что $AB = 9$ см.

Решение. Из точки D в прямоугольном треугольнике ACB ($\angle B = 90°$) проведем DH перпендикулярно CB (H принадлежит CB). $AC = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$ (см); $AD = 2x$, $DC = 3x$, $5x = 15$, $x = 3$. Значит, $AD = 6$ см. Теперь найдем отрезок BH, который является ортогональной проекцией отрезка AD на данную плоскость. $BH : HC = AD : DC$, следовательно, $BH = 4{,}8$ см.

Пример 4. Из вершины A квадрата $ABCD$ перпендикулярно его плоскости проведен отрезок AK, равный 3. Из точки K опущены перпендикуляры на стороны BC и CD. Перпендикуляр из точки K к стороне BC равен 6. Найти углы, которые образуют эти перпендикуляры с плоскостью квадрата.

Решение. Обратимся к рисунку 314. AB и AD — ортогональные проекции соответственно отрезков KB и KD на плоскость α. Поскольку $AB \perp BC$ и $AD \perp DC$, $KB \perp BC$ и $KD \perp DC$ (по теореме о трех перпендикулярах). Искомые углы — это $\angle KBA$ и $\angle KDA$. Они равны. Это следует из равенства прямоугольных треугольников KAB и KAD (по катетам). Из прямоугольного треугольника KBA $\sin \angle KBA = KA : KB = 0{,}5$, $\angle KBA = 30°$. Таким образом, $\angle KBA = \angle KDA = 30°$. ◁

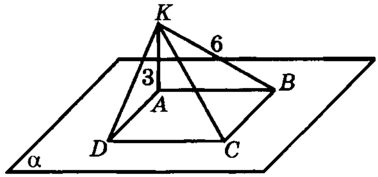


Рис. 314

Упражнения

45.1. Можно ли угол между наклонной и ее ортогональной проекцией на плоскость считать углом между наклонной и плоскостью?

45.2. С какими прямыми, лежащими в плоскости, наклонная образует углы, равные углу между этой наклонной и плоскостью?

45.3. Даны две параллельные наклонные, проведенные к одной и той же плоскости. Что можно сказать о величинах углов, которые они образуют с плоскостью?

45.4. Прямые a и b образуют с плоскостью α равные углы. Будут ли эти прямые параллельны?

45.5. Как найти угол наклона бокового ребра правильного тетраэдра к плоскости основания?

45.6. Будут ли в пирамиде боковые ребра равны, если они образуют равные углы с плоскостью основания? Сформулируйте обратное утверждение. Верно ли оно?

45.7. Прямая a пересекает плоскость α и не перпендикулярна этой плоскости. Существуют ли в плоскости α прямые, перпендикулярные a?

45.8. Две плоскости образуют с данной прямой равные углы. Как расположены относительно друг друга эти плоскости?

45.9. Какую фигуру на плоскости α образуют основания наклонных, проведенных к плоскости α из точки вне плоскости и образующих равные углы с плоскостью α?

● **45.10.** Какая точка является одинаково удаленной от четырех данных точек, не принадлежащих одной плоскости?

45.11. Прямая пересекает две параллельные плоскости. Что можно сказать об углах, которые она образует с этими плоскостями?

45.12. Даны две параллельные прямые, пересекающие одну плоскость. Что можно сказать об углах, которые они образуют с этой плоскостью?

○ **45.13.** Основание $ABCD$ пирамиды $SABCD$ — прямоугольник, $AB < BC$. Ребро SD перпендикулярно плоскости основания. Среди отрезков SA, SB, SC найдите наименьший и наибольший.

○ **45.14.** Из точки A, не принадлежащей плоскости α, проведена наклонная к этой плоскости. Определите угол между этой наклонной и плоскостью α, если расстояние от точки A до плоскости α:

а) равно ортогональной проекции наклонной;

б) в два раза меньше самой наклонной.

○ **45.15.** Из точки A к данной плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, пересекающие плоскость соответственно в точках B и C. Найдите отрезок AC, если $AB = 6$ см, $\angle BAC = 60°$.

○ **45.16.** Из точки A к данной плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, пересекающие плоскость соответственно в точках B и C. Найдите отрезок AB, если $AC = 2\sqrt{10}$ см, $BC = 3AB$.

○ **45.17.** Отрезки двух наклонных, проведенных из одной точки к плоскости, равны 15 см и 20 см. Ортогональная проекция одного из этих отрезков равна 16 см. Найдите ортогональную проекцию другого отрезка.

○ **45.18.** Дан прямоугольный треугольник ABC, катеты которого AC и BC равны соответственно 20 см и 15 см. Через вершину A проведена плоскость α, параллельная прямой BC. Ортогональная проекция одного из катетов на эту плоскость равна 12 см. Найдите ортогональную проекцию гипотенузы.

○ **45.19.** Сторона ромба равна a, острый угол — 60°. Через одну из сторон ромба проведена плоскость. Ортогональная проекция другой стороны на эту плоскость равна b. Найдите ортогональные проекции диагоналей.

○ **45.20.** Докажите, что в правильной четырехугольной пирамиде диагональ основания перпендикулярна скрещивающемуся с ней боковому ребру.

○ **45.21.** Докажите, что равные наклонные, проведенные из одной точки к плоскости, имеют равные ортогональные проекции на эту плоскость. Сформулируйте обратное утверждение. Докажите его справедливость.

○ **45.22.** Докажите, что в правильной пирамиде высота проходит через центр основания.

○ **45.23.** В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, а боковое ребро — b. Найдите угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

○ **45.24.** Под каким углом к плоскости нужно провести отрезок, чтобы его ортогональная проекция на эту плоскость была вдвое меньше самого отрезка?

○ **45.25.** Дан треугольник ABC и точка K, которая не принадлежит его плоскости. KE, KD, KF — расстояния от точки K до сторон треугольника. Эти отрезки одинаково наклонены к плоскости треугольника. Докажите, что точка K ортогонально проектируется в центр вписанной в треугольник окружности.

○ **45.26.** Через сторону квадрата проведена плоскость, составляющая с диагональю квадрата угол 30°. Найдите углы, которые образуют с плоскостью стороны квадрата, наклонные к ней.

○ **45.27.** Докажите, что ортогональная проекция наклонной равна произведению этой наклонной на косинус угла, который она образует с плоскостью проектирования.

○ **45.28.** Докажите теорему, обратную теореме о трех перпендикулярах: «Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна ортогональной проекции этой наклонной на данную плоскость».

§ 46. Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей

Полуплоскость можно считать пространственным аналогом луча на плоскости. Тогда пространственным аналогом угла на плоскости будет фигура, называемая двугранным углом.

Определение. *Двугранным углом* называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей граничной прямой и одной из частей пространства, ограниченной этими полуплоскостями (рис. 315, *а*). Полуплоскости называются *гранями* двугранного угла, а их общая граничная прямая — *ребром* двугранного угла.

Пусть α и β — полуплоскости с общей граничной прямой c (рис. 315, *б*). Рассмотрим плоскость γ, перпендикулярную прямой c, и обозначим линии ее пересечения с полуплоскостями α и β через a и b соответственно. Угол между этими лучами называется *линейным углом* данного двугранного угла.

Докажем, что величина линейного угла не зависит от выбора плоскости γ.

Действительно, пусть γ_1, γ_2 — плоскости, перпендикулярные прямой c и пересекающие полуплоскости α и β по лучам a_1, a_2 и b_1, b_2 соответственно (рис. 315, *в*). Лучи a_1 и a_2, b_1 и b_2 сонаправлены, так как они перпендикулярны одной и той же прямой c. Следовательно, углы, образованные этими лучами, равны.

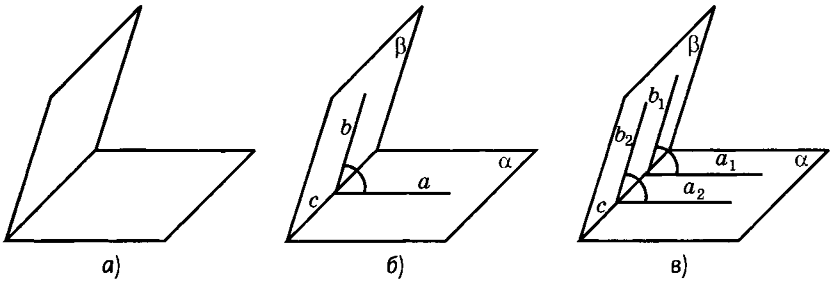


Рис. 315

Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла. Двугранный угол называется *прямым*, если его линейный угол прямой.

Определение. *Углом между двумя пересекающимися плоскостями* называется наименьший из двугранных углов, образованных соответствующими полуплоскостями.

Углом между двумя соседними гранями многогранника будем называть двугранный угол между соответствующими полуплоскостями.

Определение. Две плоскости называются *перпендикулярными*, если они образуют прямые двугранные углы.

Следующая теорема дает достаточное условие перпендикулярности двух плоскостей.

Теорема. **(Признак перпендикулярности двух плоскостей.) Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.**

Доказательство. Пусть плоскость α проходит через прямую a, перпендикулярную плоскости β, c — линия пересечения плоскостей α и β (рис. 316). Докажем, что плоскости α и β перпендикулярны. В плоскости β через точку пересечения прямой a с плоскостью β проведем прямую b, перпендикулярную прямой c. Через прямые a и b проведем плоскость γ. Прямая c будет перпендикулярна плоскости γ, так как она перпендикулярна двум пересекающимся прямым — a и b — в этой плоскости. Поскольку прямая a перпендикулярна плоскости β, то угол, образованный a и b, прямой. Он является линейным углом соответствующего двугранного угла. Следовательно, плоскости α и β перпендикулярны.

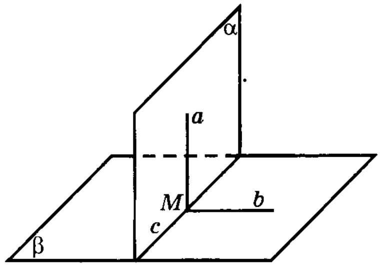


Рис. 316

Пример 1. Доказать, что боковые грани прямой призмы перпендикулярны ее основаниям.

Решение. Действительно, как было доказано ранее, боковые ребра прямой призмы перпендикулярны основаниям. Боковые грани проходят через боковые ребра и, следовательно, также перпендикулярны основаниям прямой призмы.

Пример 2. В кубе $A...D_1$ найти угол наклона плоскости ABC_1 к плоскости ABC.

Решение. В плоскости ABC лежит квадрат $ABCD$, в плоскости ABC_1 — прямоугольник ABC_1D_1. Искомым углом является $\angle DAD_1$ (или $\angle CBC_1$). Действительно, $DA \perp AB$ (смежные стороны квадрата) и $D_1A \perp AB$ (AB перпендикулярна плоскости A_1AD по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, так как $AB \perp AA_1$ и $AB \perp AD$). $\angle DAD_1 = 45°$ (угол между диагональю и стороной квадрата).

Пример 3. Провести через произвольную точку пространства плоскость, перпендикулярную данной плоскости. Сколько таких плоскостей можно провести?

Решение. Через произвольную точку A (A может принадлежать или не принадлежать данной плоскости) проведем прямую, перпендикулярную данной плоскости. Через эту прямую проведем произвольную плоскость. Она и будет искомой. Таких плоскостей можно провести бесконечно много.

Пример 4. Доказать, что если прямая лежит в одной из двух перпендикулярных плоскостей и перпендикулярна линии их пересечения, то она будет перпендикулярна и другой плоскости.

Решение. Пусть $\alpha \cap \beta = c$, $\alpha \perp \beta$, $a \subset \alpha$ и $a \perp c$ (рис. 316). Пусть $a \cap c = M$. Через точку M в плоскости β проведем прямую b перпендикулярно c. Тогда угол между a и b будет линейным углом между плоскостями α и β, значит, равен $90°$, т. е. $a \perp b$. Следовательно, $a \perp \beta$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, a перпендикулярна двум пересекающимся прямым c и b плоскости β). ◁■

Упражнения

46.1. Что можно сказать о взаимном расположении плоскости линейного угла некоторого двугранного угла и ребра этого двугранного угла?

46.2. Какой угол образует ребро двугранного угла с любой прямой, лежащей в плоскости его линейного угла?

46.3. Плоскости двух равнобедренных треугольников с общим основанием образуют двугранный угол. Верно ли утверждение о том, что высоты, проведенные к общему основанию треугольников, образуют линейный угол двугранного угла?

46.4. Треугольник MAB и квадрат $ABCD$ заданы таким образом, что MB — перпендикуляр к плоскости квадрата. Какой угол можно считать углом между плоскостями AMD и ABC?

46.5. Тот же вопрос, что и в предыдущей задаче, с той лишь разницей, что $ABCD$ — параллелограмм и угол BAD острый.

46.6. Верно ли, что две плоскости, перпендикулярные третьей, параллельны?

46.7. Верно ли, что прямая и плоскость, перпендикулярные другой плоскости, параллельны между собой?

46.8. Сколько плоскостей, перпендикулярных данной плоскости, можно провести через данную прямую?

46.9. Плоскость α перпендикулярна плоскости β. Будет ли всякая прямая плоскости α перпендикулярна плоскости β?

46.10. Две плоскости перпендикулярны. Укажите возможные случаи взаимного расположения прямой, лежащей в одной из этих плоскостей, относительно прямой, лежащей в другой плоскости. Проиллюстрируйте свой ответ на модели.

46.11. Плоскость и прямая параллельны. Верно ли утверждение о том, что плоскость, перпендикулярная данной плоскости, перпендикулярна и данной прямой?

46.12. Плоскость и прямая параллельны. Верно ли утверждение о том, что плоскость, перпендикулярная данной прямой, перпендикулярна и данной плоскости?

46.13. Верно ли, что плоскость, проходящая через наклонную к другой плоскости, не перпендикулярна этой плоскости?

○ **46.14.** Треугольник ABC и параллелограмм $BCDE$ заданы таким образом, что AD перпендикулярна плоскости параллелограмма, угол BCD тупой. Можно ли считать угол ACD углом между плоскостями треугольника ABC и параллелограмма $BCDE$? Постройте линейный угол двугранного угла, образованного этими плоскостями, так, чтобы одна его сторона проходила через точку A.

○ **46.15.** В правильной треугольной призме найдите угол между боковыми гранями.

○ **46.16.** Найдите угол между гранями правильного тетраэдра.

○ **46.17.** Дан квадрат $ABCD$, через вершину D параллельно диагонали AC проведена плоскость α, образующая с диагональю BD угол 60°. Чему равен угол между плоскостью квадрата и плоскостью α?

○ **46.18.** Основанием высоты четырехугольной пирамиды является точка пересечения диагоналей основания пирамиды. Верно ли, что двугранные углы, образованные боковыми гранями пирамиды с плоскостью основания, равны, если основанием пирамиды является:

а) квадрат; в) ромб;
б) параллелограмм; г) равнобедренная трапеция?

○ **46.19.** Докажите, что если основанием высоты пирамиды является центр вписанной в основание окружности, то двугранные углы, образованные боковыми гранями пирамиды с плоскостью основания, равны.

○ **46.20.** Основанием прямой призмы является параллелограмм со сторонами 4 дм и 5 дм. Угол между ними 30°. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, если известно, что она пересекает все боковые ребра и образует с плоскостью основания угол 45°.

○ **46.21.** Боковое ребро прямой призмы равно 6 см. Ее основание — прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 2 см. Найдите площади сечений призмы плоскостями, проходящими через каждый из данных катетов и образующими углы 60° с плоскостью основания.

○ **46.22.** Сторона основания правильной треугольной призмы равна 4 см. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины двух сторон основания и образующей угол 45° с его плоскостью, если известно, что плоскость пересекает:

а) только одно боковое ребро призмы;

б) два ее боковых ребра.

○ **46.23.** Ребро куба равно a. Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через сторону основания, если угол между этой плоскостью и плоскостью основания равен:

а) 30°; б) φ.

○ **46.24.** Через середины двух смежных сторон основания правильной четырехугольной призмы проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол φ и пересекающая три боковых ребра призмы. Найдите сторону основания, если площадь сечения равна Q.

○ **46.25.** Докажите, что пересекающиеся грани прямоугольного параллелепипеда перпендикулярны.

○ **46.26.** Докажите, что если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей плоскости, то линия пересечения первых двух плоскостей будет перпендикулярна третьей плоскости.

○ **46.27.** Равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$) перегнули по высоте CD таким образом, что плоскости ACD и BCD образовали прямой угол. Найдите углы ADB и ACB.

● **46.28.** Существует ли треугольная пирамида, у которой три грани попарно перпендикулярны?

● **46.29.** Существует ли четырехугольная пирамида, у которой две противоположные боковые грани перпендикулярны основанию?

● **46.30.** Существует ли пирамида, у которой три боковые грани перпендикулярны основанию?

● **46.31.** Могут ли боковыми гранями наклонной призмы быть:

а) 2 прямоугольника;

б) 3 прямоугольника;

в) 4 прямоугольника?

§ 47*. Центральное проектирование. Перспектива

Наряду с параллельным проектированием, применяемым в геометрии для изображения пространственных фигур, большое значение имеет так называемое центральное проектирование, используемое в живописи, фотографии и т. д. Восприятие человеком окружающих предметов посредством зрения осуществляется по законам центрального проектирования.

Пусть π — некоторая плоскость, S — не принадлежащая ей точка, *центр проектирования* (рис. 317). Для точки A пространства проведем прямую a, соединяющую эту точку с точкой S. Точка пересечения этой прямой с плоскостью π называется *центральной проекцией* точки A на плоскость π. Обозначим ее A'. Соответствие, при котором точкам A пространства сопоставляются их центральные проекции A', называется *центральным проектированием* или *перспективой*.

Заметим, что не для каждой точки пространства определена ее центральная проекция. В случае, если прямая a параллельна плоскости π, точка A не имеет проекции на эту плоскость.

Если Φ — фигура в пространстве, то проекции ее точек на плоскость π образуют фигуру Φ', которая называется *центральной проекцией* фигуры Φ на плоскость π. Говорят также, что фигура Φ' является перспективой фигуры Φ.

На рисунке 318 показано центральное проектирование в случае, когда плоскость проектирования расположена между фигурой Φ и центром проектирования S. Если центр проектирования представлять себе как глаз наблюдателя, то впечатление, производимое на него изображением Φ', будет таким же, как и от самой фигуры Φ. Отсюда ясно, что центральное проектирование дает наиболее наглядное изображение пространственных фигур.

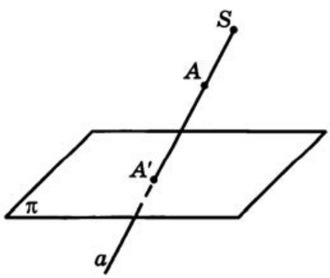


Рис. 317

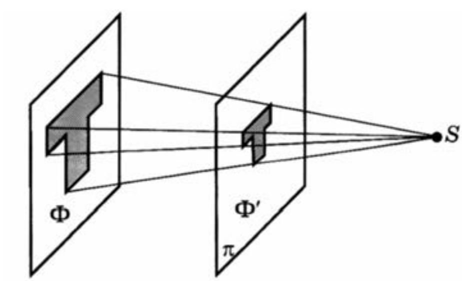


Рис. 318

На рисунке 319, *а* показано центральное проектирование в случае, когда центр проектирования расположен между фигурой Φ и плоскостью проектирования. Такое перевернутое изображение получается на пленке фотоаппарата, объектив которого помещен в центр проектирования.

На рисунке 319, *б* показано центральное проектирование в случае, когда фигура Φ расположена между плоскостью проектирования и центром проектирования. Такие проекции дают тени предметов от близко расположенного точечного источника света. Они получаются на экране при показе кинофильмов, диафильмов и т. д.

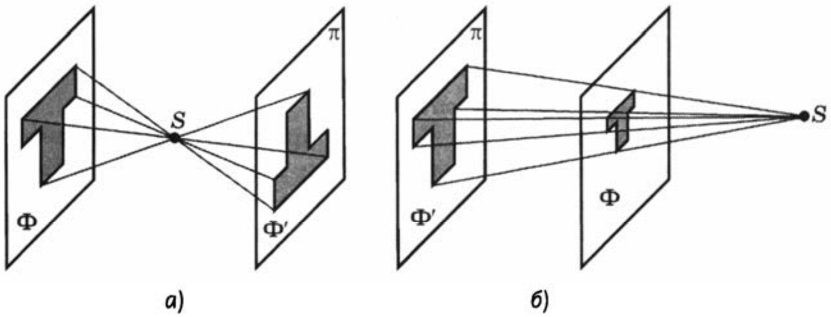


Рис. 319

Теорема. **Если плоская фигура F расположена на плоскости α, параллельной плоскости проектирования π, то ее центральной проекцией будет фигура F', подобная F, причем коэффициент подобия k будет равен отношению расстояний от центра S до плоскостей π и α (рис. 320).**

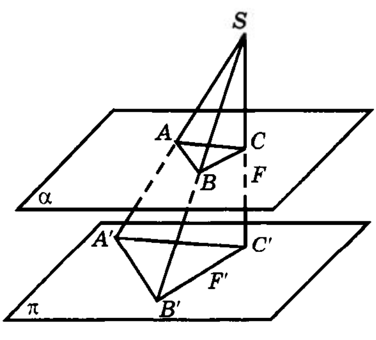


Рис. 320

Доказательство. Определим преобразование фигуры F в фигуру F', сопоставляя точкам фигуры F их центральные проекции. Через центр S проведем прямую, перпендикулярную плоскости π. Так как плоскости α и π параллельны, то эта прямая будет перпендикулярна и плоскости α. Точки пересечения этой прямой с плоскостями α и π обозначим C и C' соответственно. Для точек A

и B фигуры F на плоскости α рассмотрим их проекции A', B' и треугольники ABS, $A'B'S$ и ACS, $A'C'S$. Они подобны, и коэффициент подобия k равен отношению $SC : SC'$. Таким образом, определенное преобразование фигуры F в фигуру F' изменяет расстояние между точками в одно и то же число раз. Следовательно, фигуры F и F' подобны. ◀■

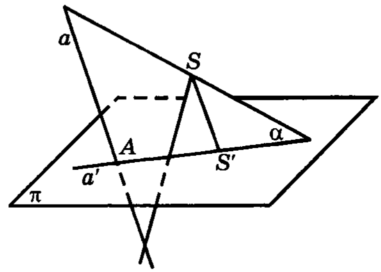


Рис. 321

Выясним, в какую фигуру при центральном проектировании переходит прямая.

Пусть прямая a пересекает плоскость проектирования π и центр проектирования S не принадлежит прямой a. Найдем проекцию этой прямой на плоскость π. Для этого через прямую a и центр проектирования S проведем плоскость α и линию ее пересечения с плоскостью π обозначим a' (рис. 321).

В плоскости α через точку S проведем прямую s, параллельную a, и точку ее пересечения с прямой a' обозначим S'. Легко видеть, что прямая a' без точки S' и является искомой проекцией прямой a на плоскость π.

Выясним, в какие фигуры при центральном проектировании переходят параллельные прямые. Как мы знаем, при параллельном проектировании параллельные прямые переходят или в параллельные прямые, или в одну прямую, или в две точки, в зависимости от расположения этих прямых. Оказывается, что при центральном проектировании параллельные прямые могут переходить и в пересекающиеся прямые.

Пусть прямые a и b параллельны и пересекают плоскость π, а центр проектирования не принадлежит плоскости этих прямых (рис. 322). Тогда, выполняя предыдущие построения для прямых a и b, получим, что их проекциями будут пересекающиеся прямые a' и b', за исключением их общей точки S'. Впечатление, что параллельные прямые пересекаются, возникает, когда мы смотрим на уходящую вдаль дорогу, железнодорожные рельсы, провода и т. п.

Приведем примеры изображения простейших пространственных фигур в центральной проекции.

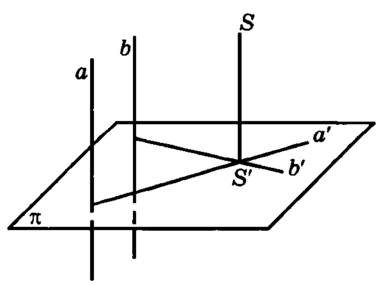


Рис. 322

Пример 1. На рисунке 323 изображен куб в центральной проекции на плоскость, параллельную грани ABB_1A_1.

Пример 2. На рисунке 324 изображен куб в центральной проекции на плоскость, параллельную ребру BB_1, но не параллельную его граням.

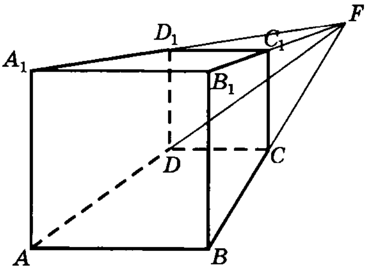


Рис. 323

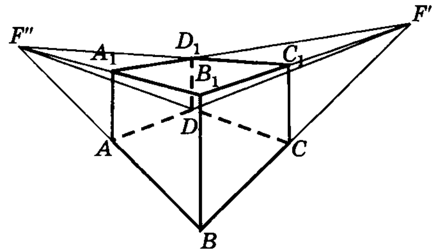


Рис. 324

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Центральное проектирование, или перспектива, как наука возникло еще в Древней Греции. Первые упоминания о нем встречаются в работах Эсхила (525—456 гг. до н. э.). Значительное место изображению пространственных фигур с использованием перспективы уделено в трактате «О геометрии» известного мыслителя и ученого Демокрита (ок. 460—370 гг. до н. э.).

Следующее упоминание о перспективе находим в работах Евклида. Помимо своих знаменитых «Начал» он написал много других сочинений. В том числе, в работе «Оптика» Евклид с позиций геометрии подробно изложил природу человеческого зрения, того, как получается изображение различных предметов на сетчатке глаза. Евклид писал, что мы ощущаем предметы, когда исходящие от них прямолинейные лучи сходятся в нашем глазу. Поэтому всю систему лучей зрения можно представить себе в виде пирамиды, вершина которой находится в глазу, а основанием ее служит рассматриваемый нами предмет. Евклид ввел также постулат о том, что кажущиеся размеры предмета зависят от угла, под которым он виден.

Самыми значительными работами по перспективе древнегреческого периода считаются произведения римского архитектора и инженера Марка Витрувия Поллиона (точные даты его жизни не установлены, умер ок. 25 г. до н. э.). Способы построения изображений в перспективе изложены ученым в труде «Об архитектуре», состоящем из десяти книг.

Рис. 325

Следующим важным этапом в развитии теории перспективы стала эпоха Возрождения. При этом теоретиком перспективы считается итальянский архитектор Филиппо Брунеллески (1377—1446), а практиками, воплотившими ее достижения в своих полотнах, — великие Леонардо да Винчи (1452—1519), Альбрехт Дюрер (1471—1528) и многие другие художники, скульпторы и архитекторы Возрождения.

А. Дюрер предложил в своих книгах несколько устройств, позволяющих получать перспективу, некоторые из которых он изобразил на своих гравюрах.

Например, на рисунке 325 изображена гравюра, на которой показано, что для получения перспективного изображения предмета между глазом наблюдателя и предметом помещается рамка, разделенная на небольшие квадраты сеткой. С помощью натянутой нити сначала копируются контуры модели, а затем полученное изображение переносится на бумагу.

Леонардо да Винчи в своем произведении «Трактат о живописи» делит перспективу на три основные части:

1. Линейная перспектива, которая изучает законы уменьшения фигур по мере удаления их от наблюдателя.

2. Воздушная и цветовая перспектива, которая трактует изменение цвета предметов в зависимости от их расстояния до наблюдателя и влияния слоя воздуха на насыщенность и локальность цвета.

3. Перспектива четкости очертания формы предмета, в которой анализируется изменение степени отчетливости границ фигур и контраста света и тени на них по мере удаления их в глубину пространства, изображаемого на картине.

Два последних раздела не получили дальнейшего теоретического развития из-за сложности исследования проблемы. Первый же раздел развился в точную науку — линейную перспективу, которая позднее вошла как составная часть в начертательную геометрию.

Основателем этого раздела геометрии считают французского ученого, геометра, инженера и активного общественного деятеля Великой французской революции Гаспара Монжа (1746—1818). Его книга «Начертательная геометрия», изданная в 1795 году, явилась первым систематизированным изложением методов изображения пространственных фигур на плоскости.

Русские художники XVII—XIX вв. хорошо владели теорией перспективы и применяли ее в своих картинах. Крупнейшим представителем русской академической школы, лучшим рисовальщиком своего времени был А. П. Лосенко (1737—1773). Он требовал от своих учеников тщательного изучения теории перспективы и применения ее законов в академическом рисунке.

Более 20 лет вел поиск способа овладеть видением натуры на основе законов перспективы известный русский художник А. Г. Венецианов (1780—1847). Он считал, что обучение художественным навыкам необходимо начинать с изучения законов перспективы, которую художник рассматривал как метод изображения реальных предметов в конкретной обстановке.

Большое значение придавал изучению перспективы замечательный русский художник и педагог Н. Н. Ге (1831—1894). Обращаясь к своим ученикам, он говорил: «Учите перспективу, и когда овладеете ею, внесите ее в работу, в рисование. Никогда не отделяйте ее от рисования, как это делают многие, т. е. рисуют по чувству, а потом поправляют правилами перспективы — напротив, пусть перспектива у вас будет всегдашним спутником вашей работы и стражем верности».

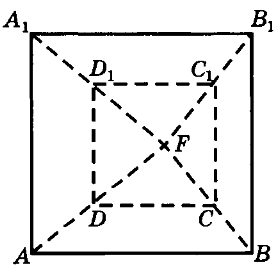


Рис. 326

Пример 3. Найти геометрическое место точек в пространстве, для которых не существует центральных проекций на плоскость π с центром проектирования S.

Р е ш е н и е. Для точки M не существует центральной проекции на плоскость π с центром S, если прямая SM параллельна π. Все прямые, параллельные плоскости π и проходящие через S, лежат в плоскости, параллельной π и проходящей через S. ◁■

Пример 4. Построить центральную проекцию куба, аналогичную изображенной на рисунке 323, так, чтобы точка F лежала внутри изображения грани ABB_1A_1.

Решение представлено на рисунке 326.

Упражнения

47.1. Для всех ли точек пространства существует центральная проекция? Для каких точек она не существует?

47.2. Приведите примеры из окружающей нас действительности, когда создается впечатление, что параллельные прямые пересекаются.

47.3. Могут ли при центральном проектировании параллельные прямые перейти в пересекающиеся?

47.4. В каком случае центральной проекцией двух прямых будут две параллельные прямые?

47.5. Какое изображение фигуры получится в центральной проекции, если плоскость проектирования расположена между фигурой и центром проектирования?

47.6. Какое изображение фигуры получится в центральной проекции, если центр проектирования находится между фигурой и плоскостью проектирования? Где используется такое изображение?

47.7. Какое изображение фигуры получится в центральной проекции, если она расположена между плоскостью проектирования и центром проектирования? Где используется такое изображение?

47.8. Что можно сказать о центральной проекции плоской фигуры, которая расположена в плоскости, параллельной плоскости проектирования?

○ **47.9.** Сделайте рисунки, аналогичные рисункам 318 и 319, *а* и *б* для центральных проекций фигуры, изображенной на рисунке 327.

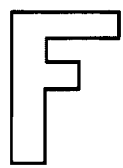


Рис. 327

○ **47.10.** Пусть прямая пересекает плоскость проектирования и не проходит через центр проектирования (рис. 321). Определите, куда при центральном проектировании переходит часть этой прямой, расположенная выше плоскости проектирования. Куда переходит часть этой прямой, расположенная ниже плоскости проектирования?

○ **47.11.** Постройте центральную проекцию цилиндра на плоскость, параллельную его основаниям.

○ **44.12.** Постройте центральную проекцию куба на плоскость, не параллельную никакому ребру этого куба.

○ **47.13.** Постройте центральную проекцию правильной четырехугольной пирамиды на плоскость, не параллельную ее основанию.

○ **47.14.** В пирамиде с высотой 3 м на расстоянии 2 м от вершины проведена плоскость, параллельная основанию. Найдите коэффициент подобия сечения к основанию пирамиды.

○ **47.15.** В треугольной пирамиде $ABCD$ проведите сечение, проходящее через точки M, N и K, принадлежащие соответственно граням ADB, BDC и ABC.

○ **47.16.** Постройте сечение треугольной пирамиды $ABCD$ плоскостью, проходящей через точки M и N соответственно граней ABD и BDC и параллельной ребру AC.

ГЛАВА 9 Многогранники

§ 48. Многогранные углы

Пусть в плоскости π дан многоугольник M и точка S вне этой плоскости (рис. 328).

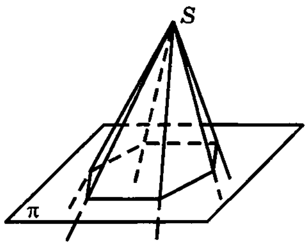


Рис. 328

Фигура в пространстве, образованная лучами с вершиной в точке S, пересекающими данный многоугольник, называется *многогранным углом*. Точка S называется *вершиной* многогранного угла, а лучи, проходящие через вершины многоугольника — *ребрами* многогранного угла. Углы, образованные соседними ребрами, называются *плоскими углами* многогранного угла, а также *гранями* многогранного угла.

Многогранный угол обозначается буквами $SABC...$, указывающими его вершину S и вершины A, B, C, ... многоугольника.

В зависимости от числа граней многогранные углы называются трехгранными (рис. 329, *а*), четырехгранными (рис. 329, *б*), пятигранными (рис. 329, *в*) и т. д. Для плоских углов трехгранного угла имеет место неравенство, аналогичное неравенству треугольника.

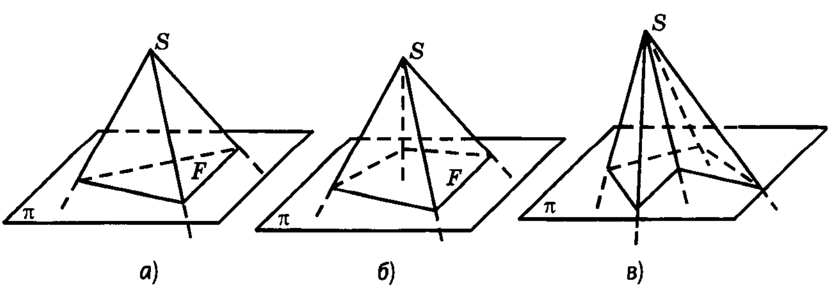


Рис. 329

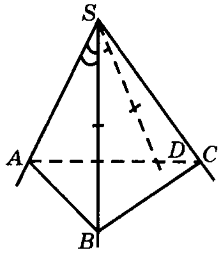


Рис. 330

Теорема*. **Каждый плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов.**

Доказательство. Пусть в трехгранном угле $SABC$ наибольший из плоских углов есть угол ASC (рис. 330). Тогда выполняются неравенства $\angle ASB \leqslant \angle ASC < \angle ASC + \angle BSC$; $\angle BSC \leqslant \angle ASC < \angle ASC + \angle ASB$. Таким образом, остается доказать неравенство $\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$.

Отложим на грани ASC угол ASD, равный углу ASB, и точку B выберем так, чтобы $SB = SD$. Тогда треугольники ASB и ASD равны (по двум сторонам и углу между ними), и, следовательно, $AB = AD$. Воспользуемся неравенством треугольника $AC < AB + BC$. Вычитая из обеих его частей $AD = AB$, получим неравенство $DC < BC$. В треугольниках DSC и BSC одна сторона общая (SC), $SD = SB$ и $DC < BC$. В этом случае против большей стороны лежит больший угол, и, следовательно, $\angle DSC < \angle BSC$. Прибавляя к обеим частям этого неравенства угол ASD, равный углу ASB, получим требуемое неравенство $\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$. ◁■

Пример 1. Найти число многогранных углов 20-угольной призмы, определить их вид.

Решение. Число многогранных углов многогранника равно числу его вершин. У 20-угольной призмы 40 вершин, следовательно, 40 многогранных углов. Все они трехгранные. ◁■

Пример 2. В трехгранном угле все плоские углы прямые. На его ребрах от вершины S отложены отрезки $SA = 4$ см, $SB = 4$ см и $SC = 2\sqrt{6}$ см. Через их концы проведена плоскость. Найти площадь получившегося сечения.

Решение. В сечении получился треугольник ABC, у которого стороны являются гипотенузами прямоугольных треугольников соответственно ABS, BCS и ACS: $AB = \sqrt{SA^2 + SB^2} = 4\sqrt{2}$ (см); $BC = \sqrt{SB^2 + SC^2} = 2\sqrt{10}$ (см); $AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = 2\sqrt{10}$ (см). Таким образом, треугольник ABC равнобедренный. Его высота CD, опущенная на основание AB, равна $\sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ (см). Следовательно, площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}AB \cdot CD = 16$ (см^2). ◁■

Упражнения

48.1. Приведите примеры многогранников, у которых грани, пересекаясь в вершинах, образуют только:

а) трехгранные углы;
б) четырехгранные углы;
в) пятигранные углы.

48.2. Определите виды многогранных углов:

а) у четырехугольной призмы;
б) пятиугольной пирамиды.

48.3. По скольким прямым попарно пересекаются плоскости граней:

а) трехгранного;
б) четырехгранного;
в) пятигранного угла?

48.4. Сколько многогранных углов:

а) в 4-угольной пирамиде;
б) 7-угольной призме;
в) 10-угольной усеченной пирамиде?

○ **48.5.** Может ли быть трехгранный угол с плоскими углами:

а) 30°, 60°, 20°; б) 45°, 45°, 90°; в) 30°, 45°, 60°?

● **48.6.** Два плоских угла трехгранного угла равны 70° и 80°. В каких границах находится третий плоский угол?

○ **48.7.** Докажите, что если в трехгранном угле два плоских угла прямые, то и противоположные им двугранные углы прямые.

○ **48.8.** Плоские углы трехгранного угла равны 45°, 45° и 60°. Найдите величину угла между плоскостями плоских углов в 45°.

○ **48.9.** В трехгранном угле два плоских угла равны по 45°; двугранный угол между ними прямой. Найдите третий плоский угол.

○ **48.10.** Плоские углы трехгранного угла равны 60°, 60° и 90°. На его ребрах от вершины отложены равные отрезки OA, OB, OC. Найдите двугранный угол между плоскостью угла в 90° и плоскостью ABC.

○ **48.11.** Каждый плоский угол трехгранного угла равен 60°. На одном из его ребер от вершины отложен отрезок, равный 3 см, и из его конца опущен перпендикуляр на противоположную грань. Найдите длину этого перпендикуляра.

● **48.12.** Докажите, что каждый плоский угол трехгранного угла больше разности двух других его плоских углов.

● **48.13.** Докажите, что сумма углов пространственного четырехугольника не превосходит 360°.

● **48.14.** Докажите, что сечением трехгранного угла с прямыми плоскими углами плоскостью является остроугольный треугольник.

§ 49. Выпуклые многогранники

Среди плоских и пространственных фигур выделяют так называемые *выпуклые фигуры*. Это такие фигуры, которые вместе с любыми двумя своими точками целиком содержат и соединяющий их отрезок.

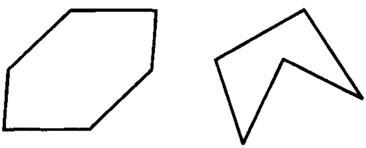
Определение. Многогранник называется *выпуклым*, если он является выпуклой фигурой, т. е. вместе с любыми двумя своими точками целиком содержит и соединяющий их отрезок.

Все многогранники, которые мы до сих пор изучали, были выпуклыми (куб, параллелепипед, призма, пирамида и др.).

На рисунке 331, *а*, *б* показаны выпуклый и невыпуклый многоугольники.

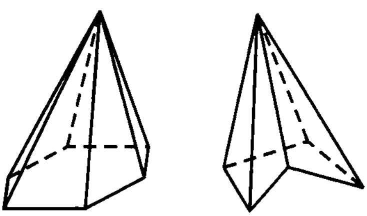
На рисунке 332, *а*, *б* показаны выпуклый и невыпуклый многогранники.

Рассмотрим некоторые свойства выпуклых многогранников.



а) б)

Рис. 331



а) б)

Рис. 332

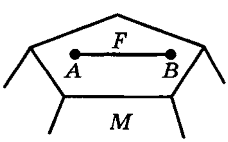


Рис. 333

Свойство 1. В выпуклом многограннике все грани являются выпуклыми многоугольниками.

Действительно, пусть F — какая-нибудь грань многогранника M, и точки A, B принадлежат грани F (рис. 333).

Из условия выпуклости многогранника M следует, что отрезок AB целиком содержится в многограннике M. Поскольку этот отрезок лежит в плоскости многоугольника F, он будет целиком содержаться и в этом многоугольнике, т. е. F — выпуклый многоугольник. ◁■

Свойство 2. Всякий выпуклый многогранник может быть составлен из пирамид с общей вершиной, основания которых образуют поверхность многогранника.

Действительно, пусть M — выпуклый многогранник. Возьмем какую-нибудь внутреннюю точку S

многогранника M, т. е. такую его точку, которая не принадлежит ни одной грани многогранника M. Соединим точку S с вершинами многогранника M отрезками. Заметим, что в силу выпуклости многогранника M все эти отрезки содержатся в M. Рассмотрим пирамиды с вершиной S, основаниями которых являются грани многогранника M. Эти пирамиды целиком содержатся в M, и все вместе составляют многогранник M. ◁■

Пример 1. Сколько диагоналей имеет: а) 4-угольная; б) 5-угольная; в) 6-угольная; •г) n-угольная призма?

Решение. а) Пусть дана четырехугольная призма $A...D_1$. Из каждой вершины нижнего основания $ABCD$ можно провести всего одну диагональ. Учитывая, что всего вершин 4, окончательно получим 4 диагонали; б) аналогично из каждой вершины нижнего основания 5-угольной призмы можно провести 2 диагонали, значит, всего получится 10 диагоналей; в) 18 диагоналей; •г) из каждой вершины нижнего основания можно провести $n - 3$ диагоналей. Таким образом, всего диагоналей $n(n - 3)$. ◁■

Пример 2. Боковое ребро правильной пирамиды вдвое больше ее высоты. Найти угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

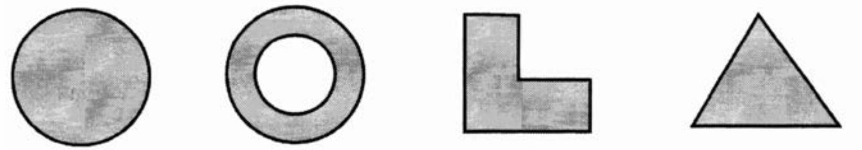
Решение. Пусть боковое ребро SA вдвое больше высоты SO пирамиды. Тогда в прямоугольном треугольнике SAO $\sin \angle SAO = 0{,}5$, где $\angle SAO$ — угол между боковым ребром и основанием пирамиды. Таким образом, $\angle SAO = 30°$. ◁■

Пример 3. Гранями выпуклого многогранника являются только треугольники. Можно ли определить число его граней (Г), если он имеет 12 ребер (Р)?

Решение. Г · 3 = 2 · Р, Р = 12, значит, Г = 8. Например, 8 граней, являющихся треугольниками, имеет октаэдр. ◁■

Упражнения

49.1. На рисунке 334 укажите выпуклые и невыпуклые плоские фигуры.



а) б) в) г)

Рис. 334

49.2. Всегда ли пересечение выпуклых фигур является выпуклой фигурой?

49.3. Всегда ли объединение выпуклых фигур является выпуклой фигурой?

49.4. На рисунке 335 укажите выпуклые и невыпуклые многогранники.

49.5. Может ли невыпуклый многоугольник быть гранью выпуклого многогранника?

49.6. Приведите пример невыпуклого многогранника, у которого все грани являются выпуклыми многоугольниками.

● **49.7.** Как связано число ребер выпуклого многогранника с числом его плоских углов?

● **49.8.** Может ли в выпуклом многограннике быть 21 плоский угол?

49.9. Назовите выпуклый многогранник с 5 вершинами.

49.10. Назовите выпуклый многогранник, у которого 7 вершин.

49.11. Приведите пример выпуклого многогранника, у которого вершин столько же, сколько граней.

49.12. Назовите выпуклый многогранник с 5 гранями.

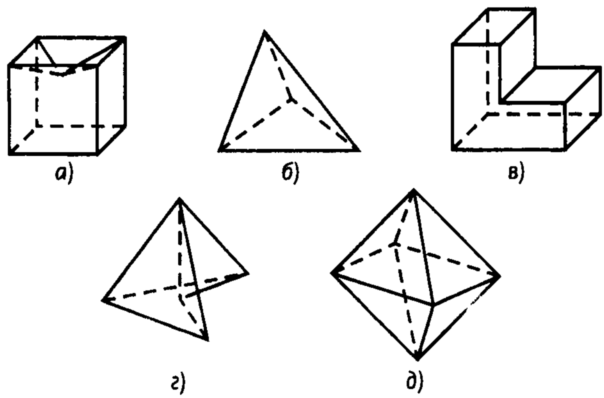


Рис. 335

○ **49.13.** Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 2 дм, 3 дм и 6 дм. Найдите длины его диагоналей.

○ **49.14.** Сколько диагональных сечений имеет призма:

а) четырехугольная; в) шестиугольная;
б) пятиугольная; • г) n-угольная?

○ **49.15.** Верно ли, что если высота призмы равна высоте боковой грани, то призма прямая?

○ **49.16.** Как изменится число вершин, ребер и граней выпуклого многогранника, если к одной из его граней пристроить пирамиду?

○ **49.17.** Как изменится число вершин, ребер и граней выпуклого многогранника, если от него отсечь один из многогранных углов?

○ **49.18.** Докажите, что пересечение двух выпуклых фигур является выпуклой фигурой. Верно ли, что пересечением выпуклых многогранников является выпуклый многогранник?

○ **49.19.** Докажите, что в сечении выпуклого многогранника плоскостью всегда получается выпуклая фигура.

○ **49.20.** Докажите, что призма является выпуклым многогранником тогда и только тогда, когда ее основаниями являются выпуклые многоугольники.

○ **49.21.** Докажите, что пирамида является выпуклым многогранником тогда и только тогда, когда ее основание является выпуклым многоугольником.

○ **49.22.** В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 7 см и 24 см, боковое ребро равно 8 см. Найдите площадь диагонального сечения.

○ **49.23.** В правильной 4-угольной призме площадь основания равна 144 $см^2$, высота равна 14 см. Найдите диагональ призмы.

○ **49.24.** Основанием пирамиды является параллелограмм со сторонами 7 см и 3 см, одна из его диагоналей равна 6 см. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 4 см. Найдите боковые ребра пирамиды.

● **49.25.** Докажите, что для числа вершин В, числа ребер Р и числа граней Г выпуклого многогранника выполняются неравенства: $2Р \geqslant 3В$, $2Р \geqslant 3Г$.

● **49.26.** Докажите, что выпуклый многогранник лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани.

● **49.27.** Докажите, что любой выпуклый многогранник можно разбить на конечное число треугольных пирамид.

● **49.28.** Может ли выпуклая наклонная призма иметь среди боковых граней:

а) 2 прямоугольника;
б) 3 прямоугольника?

● **49.29.** Может ли выпуклая пирамида иметь:

а) 2 боковые грани;
б) 3 боковые грани, перпендикулярные ее основанию?

§ 50. Правильные многогранники

С правильными многогранниками мы познакомились в начале изучения стереометрии. Теперь дадим их определение.

Определение. Выпуклый многогранник называется *правильным*, если его гранями являются равные правильные многоугольники и в каждой вершине сходится одинаковое число граней.

Выясним, сколько и какие правильные многоугольники могут сходиться в вершинах правильного многогранника. Для этого воспользуемся тем, что сумма плоских углов при каждой вершине выпуклого многогранника меньше 360°.

Наиболее простым таким правильным многогранником является треугольная пирамида, грани которой представляют собой правильные треугольники (рис. 336, *а*). В каждой ее вершине сходится по три грани. Этот многогранник, имеющий всего четыре грани, называется также *тетраэдром*, что в переводе с греческого языка означает четырехгранник.

Иногда тетраэдром называют произвольную треугольную пирамиду. Поэтому в случае, когда речь идет о правильном многограннике, будем говорить: правильный тетраэдр.

Многогранник, гранями которого являются правильные треугольники и в каждой вершине сходится четыре грани, изображен на рисунке 336, *б*. Его поверхность состоит из восьми правильных треугольников, поэтому он называется *октаэдром*.

Многогранник, в каждой вершине которого сходится пять правильных треугольников, изображен на рисунке 336, *в*. Его поверхность состоит из двадцати правильных треугольников, поэтому он называется *икосаэдром*.

Заметим, что поскольку в вершинах выпуклого многогранника не может сходиться более пяти правильных треугольников, то других правильных многогранников, гранями которых являются правильные треугольники, не существует.

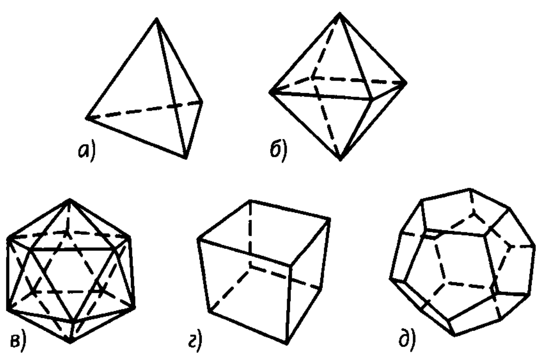


Рис. 336

Аналогично, поскольку в вершинах выпуклого многогранника может сходиться только три квадрата, то, кроме куба (рис. 336, *г*), других правильных многогранников, гранями которых являются квадраты, не существует. Куб имеет шесть граней и поэтому называется также *гексаэдром*.

Многогранник, гранями которого являются правильные пятиугольники и в каждой вершине сходится три грани, изображен на рисунке 336, *д*. Его поверхность состоит из двенадцати правильных пятиугольников, поэтому он называется *додекаэдром*.

Поскольку в вершинах выпуклого многогранника не могут сходиться правильные многоугольники с числом сторон больше пяти, то других правильных многогранников не существует и, таким образом, имеется только пять правильных многогранников: правильный тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, додекаэдр и икосаэдр.

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Правильные многогранники с древних времен привлекали к себе внимание ученых, строителей, архитекторов и многих других. Их поражала красота, совершенство, гармония этих многогранников. Пифагорейцы считали эти тела божественными и использовали их в своих философских сочинениях о существе мира. Подробно описал свойства правильных многогранников древнегреческий ученый Платон (429—348 гг. до н. э.). Именно поэтому правильные многогранники называются *телами Платона*. Правильным многогранникам посвящена последняя, XIII книга знаменитых «Начал» Евклида.

В эпоху Возрождения большой интерес к формам правильных многогранников проявили скульпторы, архитекторы, художники. Леонардо да Винчи, например, увлекался теорией многогранников и часто изображал их на своих полотнах. Он проиллюстрировал изображениями правильных и полуправильных многогранников книгу своего друга монаха Луки Пачоли (1445—1514) «О божественной пропорции».

Рис. 337

Другим знаменитым художником эпохи Возрождения, увлекавшимся геометрией, был Альбрехт Дюрер. В его известной гравюре «Меланхолия» (рис. 337)

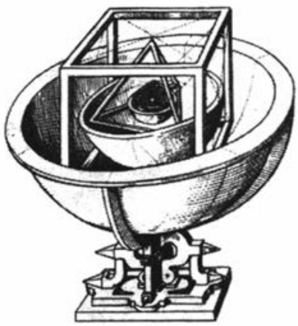


Рис. 338

изображен большой каменный многогранник. В 1525 году Дюрер написал трактат, в котором представил пять правильных многогранников, поверхности которых служат хорошими моделями перспективы.

Иоганн Кеплер (1571—1630) в своей работе «Тайна мироздания» в 1596 году, используя правильные многогранники, вывел принцип, которому подчиняются формы и размеры орбит планет Солнечной системы. Геометрия Солнечной системы, по Кеплеру, заключалась в следующем: «Земля (имеется в виду орбита Земли) есть мера всех орбит. Вокруг нее опишем додекаэдр. Описанная вокруг додекаэдра сфера есть сфера Марса. Вокруг сферы Марса опишем тетраэдр. Описанная вокруг тетраэдра сфера есть сфера Юпитера. Вокруг сферы Юпитера опишем куб. Описанная вокруг куба сфера есть сфера Сатурна. В сферу Земли вложим икосаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Венеры. В сферу Венеры вложим октаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Меркурия». Такая модель Солнечной системы получила название «Космического кубка» Кеплера (рис. 338).

Пример 1. Построить с помощью куба правильный тетраэдр. Найти его ребро, если ребро куба равно 1.

Р е ш е н и е. Пусть дан куб $A...D_1$. Его вершины A, C, B_1 и D_1 являются вершинами тетраэдра (остальные вершины — A_1, C_1, B и D — образуют вершины также тетраэдра). Все четыре грани тетраэдра ACB_1D_1 являются правильными треугольниками со стороной $\sqrt{2}$ (диагональ единичного квадрата). Таким образом, тетраэдр является правильным и его ребро равно $\sqrt{2}$.

Пример 2. Построить сечение октаэдра плоскостью, проходящей через одну из его вершин и середины двух параллельных ребер, которым не принадлежит данная вершина. Определить вид сечения.

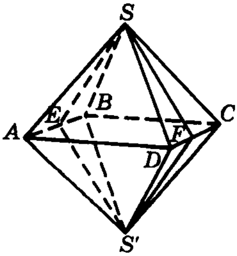


Рис. 339

Р е ш е н и е. Дан октаэдр $SABCDS'$ (рис. 339). Построим сечение, проходящее через его вершину S и точки E, F — середины параллельных ребер AB и CD соответственно. Сечением является четырехугольник $ESFS'$: $SF \parallel S'E$ и $SE \parallel S'F$ (линии пересечения с параллельными плоскостями соответственно SDC, $S'AB$ и SAB, $S'DC$). Значит, $ESFS'$ — параллелограмм (по определению параллелограмма). Кроме этого, все его стороны равны (высоты в равных равносторонних треугольниках). Таким образом, $ESFS'$ — ромб. ◁■

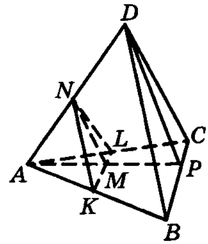


Рис. 340

Пример 3. В тетраэдре $ABCD$ провести сечение плоскостью, проходящей через точку M, принадлежащую грани ABC, параллельно грани BCD. Определить вид сечения.

Решение. В плоскости ABC через точку M проведем прямую $KL \parallel BC$ (рис. 340). В плоскости APD, где $P = AM \cap BC$, проведем $MN \parallel DP$. Треугольник KLN — искомое сечение, так как плоскость KLN параллельна плоскости BCD (по признаку параллельности двух плоскостей: по построению, $KL \parallel BC$ и $MN \parallel DP$). В сечении получился треугольник, подобный треугольнику BCD. ◁■

Упражнения

50.1. Перечислите правильные многогранники и объясните, почему они так названы.

50.2. Почему правильные многогранники называются также телами Платона?

50.3. Из каких фигур состоит развертка полной поверхности тетраэдра?

50.4. Сколько вершин (В), ребер (Р) и граней (Г) имеет каждый правильный многогранник?

50.5. Почему гранями правильного многогранника не могут быть правильные шестиугольники?

50.6. Представьте многогранник — бипирамиду, сложенную из двух равных тетраэдров совмещением каких-нибудь их граней. Будет ли он правильным многогранником? Почему?

50.7. Является ли пространственный крест (фигура, составленная из семи равных кубов) (рис. 341) правильным многогранником? Сколько квадратов ограничивает его поверхность? Сколько у него вершин и ребер?

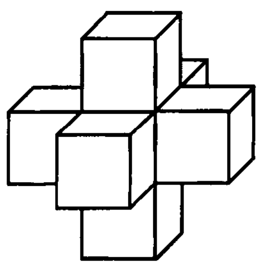


Рис. 341

50.8. Какие из представленных на рисунке 342 фигур можно считать развертками октаэдра?

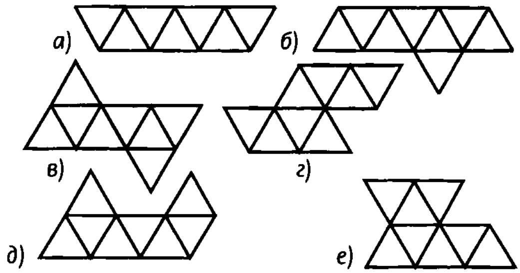


Рис. 342

○ **50.9.** Докажите, что центры граней куба являются вершинами октаэдра, а центры граней октаэдра — вершинами куба. Такие два многогранника называются *взаимно двойственными.*

○ **50.10.** Докажите, что додекаэдр и икосаэдр также являются взаимно двойственными многогранниками.

○ **50.11.** Какой многогранник является двойственным тетраэдру? Изобразите тетраэдр и двойственный к нему многогранник.

○ **50.12.** Ребро октаэдра равно 1. Определите расстояние между его противоположными вершинами *(ось октаэдра).*

○ **50.13.** От каждой вершины тетраэдра с ребром 2 см отсекается тетраэдр с ребром 1 см. Какой многогранник останется?

○ **50.14.** Чему равно ребро наибольшего тетраэдра, который можно поместить в куб с ребром 1 дм?

○ **50.15.** Докажите, что в октаэдре противоположные ребра параллельны.

○ **50.16.** Постройте сечение октаэдра плоскостью, проходящей через два его параллельных ребра. Определите вид сечения.

○ **50.17.** В октаэдр вписан куб таким образом, что его вершины находятся на ребрах октаэдра. Ребро октаэдра равно a. Найдите ребро куба.

● **50.18.** В тетраэдр $ABCD$ вписана правильная треугольная призма с равными ребрами таким образом, что вершины одного ее основания находятся на ребрах AD, BD, CD, а другого — в плоскости ABC. Ребро тетраэдра равно a. Найдите ребро призмы.

○ **50.19.** В тетраэдре $ABCD$ проведите сечение плоскостью, проходящей через точку M — середину высоты DO тетраэдра, параллельно плоскости грани ADC. Определите вид сечения.

● **50.20.** Изготовьте из разверток модели правильных многогранников.

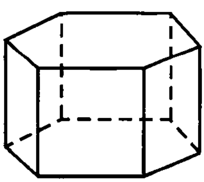
§ 51*. Полуправильные многогранники

В предыдущем пункте мы рассмотрели правильные многогранники, т. е. такие выпуклые многогранники, гранями которых являются правильные многоугольники с одним и тем же числом сторон, в каждой вершине которых сходится одинаковое число граней. Если в этом определении допустить, что гранями многогранника могут быть правильные многоугольники с различным числом сторон, то получим многогранники, которые называются полуправильными (равноугольно полуправильными).

Определение. *Полуправильным* многогранником называется выпуклый многогранник, гранями которого являются правильные многоугольники, возможно, с разным числом сторон, и все многогранные углы равны.

К полуправильным многогранникам относятся правильные n-угольные призмы, все ребра которых равны. Например, правильная шестиугольная призма на рисунке 343, *а* имеет своими гранями два правильных шестиугольника — основания призмы — и шесть квадратов, образующих боковую поверхность призмы. К полуправильным многогранникам относятся и так называемые *антипризмы* с равными ребрами.

На рисунке 343, *б* мы видим шестиугольную антипризму, полученную из шестиугольной призмы (рис. 343, *а*) поворотом одного из оснований относительно другого на угол 30°. Каждая вершина верхнего и нижнего оснований соединена с двумя ближайшими вершинами другого основания.


а)

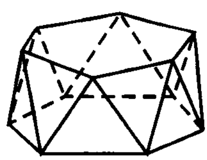

б)

Рис. 343

Кроме этих двух бесконечных серий полуправильных многогранников имеется еще 14 полуправильных многогранников, 13 из которых открыл и описал Архимед, поэтому они называются *телами Архимеда.*

Самые простые из них получаются из правильных многогранников операцией «усечения», состоящей в отсечении плоскостями углов многогранника. Если срезать углы тетраэдра плоскостями, каждая из которых отсекает третью часть его ребер, выходящих из одной вершины, то получим *усеченный тетраэдр*, имеющий восемь граней (рис. 344, *а*). Из них четыре — правильные шестиугольники и четыре — правильные треугольники. В каждой вершине этого многогранника сходятся три грани.

Если указанным образом срезать вершины октаэдра и икосаэдра, то получим соответственно *усеченный октаэдр* (рис. 344, *б*) и *усеченный икосаэдр* (рис. 344, *в*). Обратите внимание на то, что поверхность футбольного мяча изготавливают в форме поверхности усеченного икосаэдра. Из куба и додекаэдра также можно получить *усеченный куб* (рис. 344, *г*) и *усеченный додекаэдр* (рис. 344, *д*).

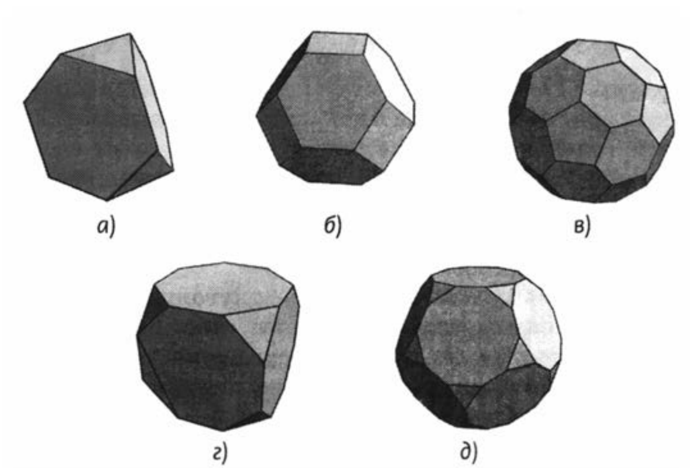
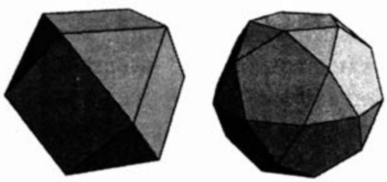


Рис. 344

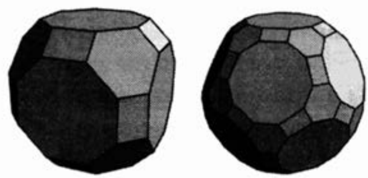
Для того чтобы получить еще один полуправильный многогранник, проведем в кубе отсекающие плоскости через середины ребер, выходящих из одной вершины. В результате получим полуправильный многогранник, который называется *кубооктаэдром* (рис. 345, *а*). Его гранями являются шесть квадратов, как у куба, и восемь правильных треугольников, как у октаэдра. Отсюда и его название — кубооктаэдр.

Аналогично, если в додекаэдре отсекающие плоскости провести через середины ребер, выходящих из одной вершины, то получим многогранник, который называется *икосододекаэдром* (рис. 345, *б*). У него двадцать граней — правильные треугольники, и двенадцать граней — правильные пятиугольники, т. е. все грани икосаэдра и додекаэдра.



а) б)

Рис. 345



а) б)

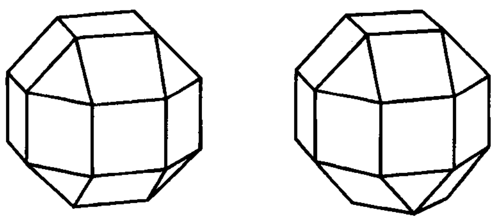
Рис. 346

К последним двум многогранникам снова можно применить операцию усечения. Получим *усеченный кубооктаэдр* (рис. 346, *а*) и *усеченный икосододекаэдр* (рис. 346, *б*).

Мы рассмотрели 9 из 13 описанных Архимедом полуправильных многогранников. Четыре оставшихся — многогранники более сложного типа.

На рисунке 347, *а* мы видим *ромбокубооктаэдр*. Он состоит из граней куба и октаэдра, к которым добавлены еще 12 квадратов.

Если повернуть верхнюю восьмиугольную чашу этого многогранника на 45°, то получится новый полуправильный многогранник, который называется *псевдоархимедовым*. Его открыли только в середине прошлого столетия (рис. 347, *б*).



а) б)

Рис. 347

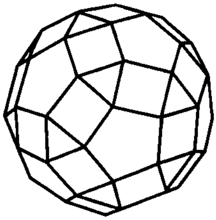


Рис. 348

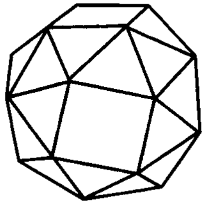


Рис. 349

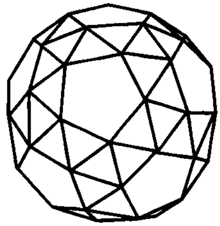


Рис. 350

На рисунке 348 изображен *ромбоикосододекаэдр*, состоящий из граней икосаэдра, додекаэдра и еще 30 квадратов. На рисунках 349 и 350 представлены соответственно так называемые *плосконосый* (иногда называют *курносый*) *куб* и *плосконосый (курносый) додекаэдр*, которые состоят из граней куба или додекаэдра, окруженных правильными треугольниками.

Как видим, каждое тело состоит из двух или трех типов граней: квадраты, треугольники, пятиугольники; треугольники, квадраты; пятиугольники и треугольники. Модели этих фигур будут особенно привлекательны, если при их изготовлении грани каждого типа раскрасить в свой особый цвет.

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Вслед за Евклидом изучением пяти правильных многогранников занимался Архимед (287—212 гг. до н. э.). Убедившись в том, что нельзя построить шестой правильный многогранник, Архимед стал строить многогранники, гранями которых являются правильные, но не одноименные многоугольники, а в каждой вершине, как и у правильных многогранников, сходится одно и то же число ребер. Так он получил 13 равноугольно полуправильных многогранников. До нас дошла работа самого ученого «О многогранниках», в которой подробно описаны и даны рисунки всех 13 многогранников, названных в честь ученого телами Архимеда.

Сам Архимед был уникальным ученым — механиком, физиком, математиком, инженером. Основной чертой его творчества было единство теории и практики, что делает изучение трудов Архимеда интересным и полезным для историков современной математики и ученых многих других специальностей. Широко известна теорема Архимеда о потере веса телами, погруженными в жидкость. Эта теорема сформулирована в трактате «О плавающих телах» и в современных учебниках по физике называется законом Архимеда. Среди инженерных изобретений ученого известна катапульта, «архимедов винт» (иногда его называют также «кохлея» — улитка) для поднятия наверх воды. Архимед участвовал в защите своего родного города Сиракузы, при осаде которого и погиб. Архимед, по выражению современников, был околдован геометрией, и хотя у него было много прекрасных открытий, он просил на могиле изобразить цилиндр и содержащийся в нем шар и указать соотношение их объемов. Позже именно по этому памятнику и была найдена могила великого ученого.

Упражнения

51.1. Какие многогранники называются телами Архимеда? Почему?

51.2. Из каких граней состоят усеченный тетраэдр и усеченный куб?

51.3. Определите число вершин, ребер и граней усеченного октаэдра.

51.4. Поверхность какого полуправильного многогранника напоминает поверхность футбольного мяча? Сколько у него вершин, ребер и граней?

51.5. Как из икосаэдра получить усеченный икосаэдр?

51.6. Какие грани и сколько имеет усеченный додекаэдр?

51.7. Как можно получить 5-угольную антипризму?

51.8. Из каких граней состоит многогранник, двойственный усеченному тетраэдру?

○ **51.9.** Докажите, что правильная n-угольная призма (n = 3, 4, 5...) с квадратными боковыми гранями является полуправильным многогранником.

○ **51.10.** Найдите высоту шестиугольной антипризмы, если ее ребро равно a.

○ **51.11.** Определите, какую часть ребер правильного тетраэдра, выходящих из одной вершины, должны отсекать плоскости, чтобы получившийся в результате усеченный тетраэдр был полуправильным многогранником.

○ **51.12.** Решите задачу 51.11 для куба с ребром, равным a.

○ **51.13.** Какую часть ребер правильного икосаэдра, выходящих из одной вершины, должны отсекать плоскости, чтобы получившийся в результате усеченный икосаэдр был полуправильным многогранником?

○ **51.14.** Какую часть ребер правильного додекаэдра, выходящих из одной вершины, должны отсекать плоскости, чтобы получившийся в результате усеченный додекаэдр был полуправильным многогранником?

○ **51.15.** Определите число вершин, ребер и граней усеченного икосаэдра и усеченного додекаэдра.

○ **51.16.** На рисунке 351 изображены пять многогранников. Многогранники, расположенные в углах рисунка, получены из куба одной и той же операцией. Что это за операция? Как называются все изображенные многогранники? Найдите ребра многогранников на рисунках 351, *а*, *б*, если ребро куба равно a.

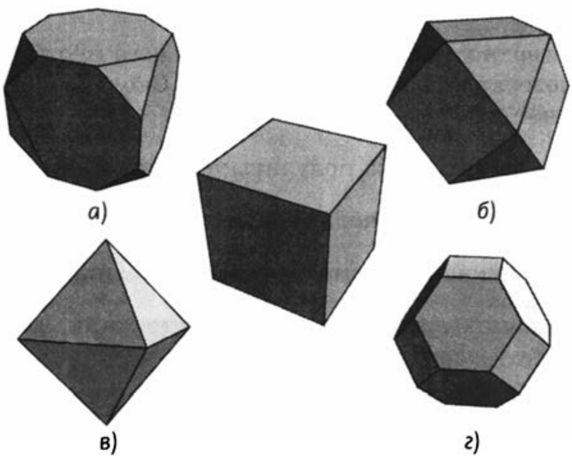


Рис. 351

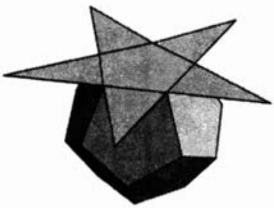
○ **51.17.** Изготовьте модели каких-нибудь полуправильных многогранников.

○ **51.18.** Нарисуйте многогранники, двойственные:
а) правильной шестиугольной призме с равными ребрами;
б) четырехугольной антипризме с равными ребрами;
в) кубооктаэдру.

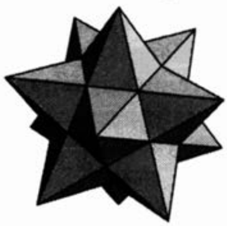
§ 52*. Звездчатые многогранники

Кроме правильных и полуправильных многогранников красивые формы имеют так называемые *звездчатые многогранники*. Здесь мы рассмотрим правильные звездчатые многогранники. Их всего четыре. Первые два были открыты И. Кеплером, а два других почти 200 лет спустя построил Л. Пуансо (1777—1859). Именно поэтому правильные звездчатые многогранники называются *телами Кеплера — Пуансо*. Они получаются из правильных многогранников продолжением их граней или ребер.

Из тетраэдра, куба и октаэдра звездчатые многогранники не получаются. Рассмотрим додекаэдр. Продолжение его ребер приводит к замене каждой грани звездчатым правильным пятиугольником (рис. 352, *а*), и в результате возникает многогранник, который называется *малым звездчатым додекаэдром* (рис. 352, *б*).



а)



б)

Рис. 352

При продолжении граней додекаэдра возникают две возможности. Во-первых, если рассматривать правильные пятиугольники, то получится так называемый *большой додекаэдр* (рис. 353). Если же, во-вторых, в качестве граней рассматривать звездчатые пятиугольники, то получается *большой звездчатый додекаэдр* (рис. 354).

Икосаэдр имеет одну звездчатую форму. При продолжении граней правильного икосаэдра получается *большой икосаэдр* (рис. 355).

Таким образом, существуют четыре типа правильных звездчатых многогранников.

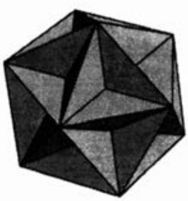


Рис. 353

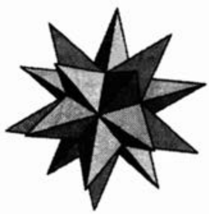


Рис. 354

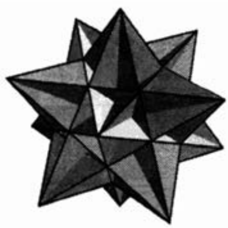


Рис. 355

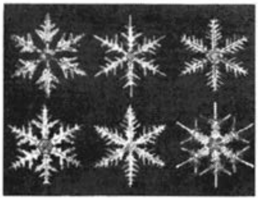


Рис. 356

Многие формы звездчатых многогранников подсказывает сама природа. Снежинки — это звездчатые многогранники (рис. 356). С древности люди пытались описать все возможные типы снежинок, составляли специальные атласы. Сейчас известно несколько тысяч различных типов снежинок.

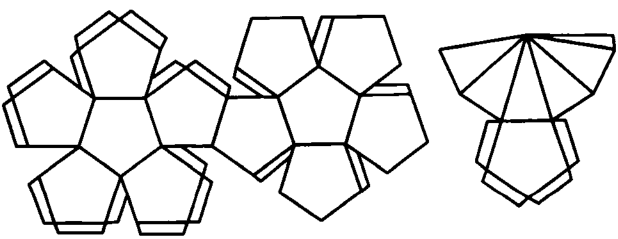
Изготовление моделей звездчатых многогранников

Изготовление моделей многогранников рассматривалось в параграфе 35. Мы познакомились с двумя способами моделирования: из разверток и с помощью геометрического конструктора.

Здесь построим модель правильного звездчатого многогранника — малого звездчатого додекаэдра, который, как сказано выше, получается из правильного додекаэдра путем продолжения его ребер до самопересечения. Это очень красивый многогранник, который может украсить и школьный кабинет, и домашний рабочий уголок.

Модель малого звездчатого додекаэдра очень просто изготовить из модели додекаэдра. Достаточно изготовить 12 правильных пятиугольных пирамид с основаниями, равными граням додекаэдра, и наклеить их на все грани правильного додекаэдра.

Таким образом, сначала нужно изготовить модель додекаэдра. Ее можно склеить из развертки. На рисунке 357, *а* представлена развертка додекаэдра с нарисованными клапанами для склеивания. Можно воспользоваться другим, очень интересным и необычным способом изготовления додекаэдра, который заключается в следующем. Развертку додекаэдра (рис. 357, *а*) необходимо разделить на две звезды и наложить их одна на другую так, чтобы



а) *б)*

Рис. 357

получилась десятиугольная звезда. Эту звезду следует обвязать резинкой, обходя ею углы поочередно сверху и снизу и прижимая модель свободной рукой к столу. Отпустив руку, видим, что раскрывшаяся звезда превращается в пространственную модель додекаэдра.

После того как модель додекаэдра готова, строится модель соответствующей правильной пирамиды, развертка которой показана на рисунке 357, *б*. Необходимо изготовить 12 таких пирамид, по числу граней додекаэдра, и наклеить их на его грани. Модель малого звездчатого додекаэдра готова.

Упражнения

52.1. На рисунке 358 изображен многогранник, называемый *звездчатым октаэдром*, получающийся продолжением граней октаэдра. Он был открыт Леонардо да Винчи, затем спустя почти сто лет переоткрыт И. Кеплером и назван им «*Stella octangula*» — звезда восьмиугольная. Является ли этот многогранник правильным звездчатым?

Рис. 358

52.2. Как можно получить звездчатый октаэдр из куба?

52.3. Звездчатый октаэдр является объединением двух правильных тетраэдров. Подумайте, какой фигурой является пересечение указанных тетраэдров.

○ **52.4.** Сколько вершин, ребер и граней имеет малый звездчатый додекаэдр?

○ **52.5.** Какие ребра должны быть у правильных пятиугольных пирамид, чтобы при добавлении их к граням додекаэдра с ребром a получился малый звездчатый додекаэдр (рис. 352, *б*)?

○ **52.6.** Какие ребра должны быть у правильных треугольных пирамид, чтобы при добавлении их к граням икосаэдра с ребром a получился большой звездчатый додекаэдр (рис. 354)?

○ **52.7.** Какие ребра должны быть у правильных треугольных пирамид, чтобы при удалении их из граней икосаэдра с ребром a получился большой додекаэдр?

○ **52.8.** Нарисуйте и изготовьте модели каких-нибудь звездчатых многогранников.

§ 53*. Кристаллы — природные многогранники

Многие формы многогранников придумал не сам человек, а их создала природа в виде кристаллов.

Кристаллы поваренной соли имеют форму куба, *кристаллы льда и горного хрусталя (кварца)* напоминают отточенный с двух сторон карандаш, т. е. имеют форму шестиугольной призмы, на основания которой поставлены шестиугольные пирамиды (рис. 359).

Алмаз чаще всего встречается в виде октаэдра, иногда куба и даже кубооктаэдра.

Исландский шпат, который раздваивает изображение, имеет форму косого параллелепипеда.

Пирит — куб или октаэдр, иногда встречается в виде кубооктаэдра.

Кристалл граната имеет форму *ромбододекаэдра* (иногда его называют ромбоидальный или ромбический додекаэдр) — двенадцатигранника, гранями которого являются двенадцать равных ромбов (рис. 360).

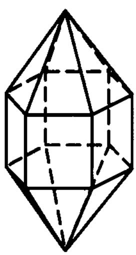


Рис. 359

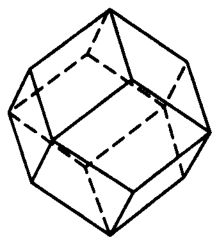


Рис. 360

Для граната настолько типичны двенадцатигранные кристаллы, что форма такого многогранника получила даже название гранатоэдра.

Гранат — один из основных породообразующих минералов. Встречаются огромные скалы, которые сложены гранатовыми породами, называемыми скарнами. Однако драгоценные, красиво окрашенные и прозрачные камни встречаются далеко не часто. Несмотря на это, как раз именно гранат — кроваво-красный пироп — археологи считают самым древним украшением, так как он был обнаружен в Европе в эпоху неолита на территории современных Чехии и Словакии, где и в настоящее время пользуется особой популярностью.

О том, что гранат, т. е. многогранник-ромбододекаэдр, был известен с глубокой древности, можно судить по истории происхождения его названия, которое в переводе с древнегреческого языка означало «красная краска». При этом название связывалось с красным цветом — наиболее часто встречающейся окраской гранатов.

Гранат высоко ценится знатоками драгоценных камней. Он применяется для изготовления первоклассных ювелирных изделий. До нас дошло описание древнейшего из известных крупных исторических ювелирных изделий — эфуда, нагрудника древнееврейских первосвященников (ок. 2000 лет до н. э.), украшенного двенадцатью камнями, среди которых был и гранат.

Художественные изделия из гранатов были обнаружены в Египте в могилах додинастического периода (свыше двух тысячелетий до н. э.).

В коллекциях Эрмитажа особым вниманием пользуются золотые украшения древних скифов. Необычайно тонка художественная отделка золотых венков, диадем, сплетенных из листьев и веточек с плодами оливкового дерева и украшенных драгоценными красно-фиолетовыми гранатами.

Сохранились интересные письменные материалы, например так называемый «папирус Эберса», который содержит описание методов лечения камнями, особые ритуалы и заклинания, где драгоценным камням приписываются таинственные силы. Считалось, что кристалл граната приносит счастье в январе. Это камень-талисман для людей, родившихся в первом месяце года.

С драгоценными камнями связано много увлекательных преданий. Например, А. И. Куприн в повести «Гранатовый браслет» говорит о том, что гранат имеет свойство сообщать дар предвидения носящим его женщинам и отгоняет от них тяжелые мысли, мужчин же охраняет от насильственной смерти.

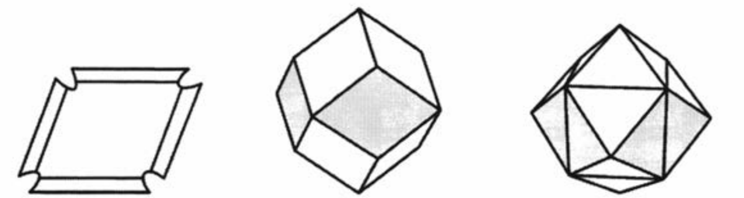
Гранаты подчеркивают необычность ситуации, неординарность поступков героев, подчеркивают чистоту и возвышенность их чувств. Тот же прием использован и в повести И. С. Тургенева «Вешние воды», где девушка дарит на память герою маленький гранатовый крестик.

Часто люди, рассматривая чудесные, сверкающие, переливающиеся многогранники кристаллов, не могут поверить, что их создала природа, а не человек. Именно поэтому родилось так много удивительных народных сказаний о кристаллах. Несколько таких легенд, рассказанных старыми уральскими мастерами и записанных П. П. Бажовым, составили сборник «Малахитовая шкатулка». Известный любитель и знаток камня академик А. Е. Ферсман в книге «Рассказы о самоцветах» тоже поведал много легенд о драгоценных камнях. Он ярко и красочно повествует о том, какие красивые самоцветы находят у нас в России, в частности о месторождениях граната на Урале.

Упражнения

○ **53.1.** Изготовьте модель ромбододекаэдра, используя геометрический конструктор, состоящий из двенадцати одинаковых ромбов. Ребра ромба возьмите равными 6 см, острый угол приблизительно равен 70°, ширина клапана — 0,8 см (рис. 361, *а*). Модель лучше сделать двуцветной, как показано на рисунке 361, *б*.

○ **53.2.** Возьмем два одинаковых куба. Разобьем один из них на шесть одинаковых четырехугольных пирамид с вершинами в центре куба и основаниями — гранями куба. Приложим теперь эти пирамиды к граням второго равного куба так, чтобы основания пирамид совместились с гранями куба. Покажите, что образовавшийся при этом многогранник будет ромбододекаэдром (рис. 361, *в*).



а) б) в)

Рис. 361

○ **53.3.** Найдите углы ромбов, являющихся гранями ромбододекаэдра.

○ **53.4.** Найдите меньшую диагональ ромба со стороной 6 см, являющегося гранью ромбододекаэдра.

○ **53.5.** Используя модель ромбододекаэдра:

а) подсчитайте количество его граней, ребер и вершин;

б) имеются ли пары параллельных граней? Сколько таких пар?

в) Сколько трехгранных и четырехгранных углов?

г) Определите величину двугранного угла ромбододекаэдра;

д) найдите углы между несмежными гранями четырехгранных углов ромбододекаэдра.

○ **53.6.** Можно ли равными ромбододекаэдрами заполнить все пространство, т. е. составить пространственный паркет?

○ **53.7.** Из каких одноименных правильных многогранников можно составить пространственный паркет?

○ **53.8.** Вершинами какого многогранника являются центры граней ромбододекаэдра?

ОТВЕТЫ

ГЛАВА 1

§ 1

1.3. а) $\dfrac{2x^2-5x-2}{3x-3}$; б) $\dfrac{2x^6-3x^3-4}{3-3x^3}$; в) $\dfrac{2+3x-4x^2}{3x+3x^2}$;

г) $\dfrac{8x^4+24x^3+64x^2+69x+61}{6x^2+9x+18}$. **1.6.** а) $2 \leqslant x < 4$; б) $2 < x < 2{,}5$, $2{,}5 < x \leqslant 3$; в) $x \leqslant \dfrac{1}{2}$, $2 \leqslant x < 5$; г) $6 \leqslant x < 7$, $7 < x < 10$.

1.13. а) $D(f) = (-\infty; -1{,}75) \cup (-1{,}75; 1{,}75) \cup (1{,}75; +\infty)$, $E(f) = \left(-\infty; -\dfrac{1}{49}\right] \cup (0; +\infty)$; б) $D(f) = (-\infty; -3] \cup [-1; +\infty)$, $E(f) = [0; +\infty)$; в) $D(f) = (-\infty; -0{,}6) \cup (-0{,}6; 0{,}6) \cup (0{,}6; +\infty)$, $E(f) = (-\infty; 0) \cup \left[\dfrac{1}{9}; +\infty\right)$; г) $D(f) = [-3; 6]$, $E(f) = [0; 4{,}5]$. **1.16.** а) 1; б) 4; в) 3; г) 1. **1.17.** а) 5; б) 1; в) 6; г) 0. **1.18.** а) $f(6{,}25) = 2{,}5$; $f(0{,}01) = 100$; $f(-3)$ не существует; в) $D(f) = (0; +\infty)$; г) $E(f) = [1; +\infty)$. **1.19.** в) $D(f) = [-4; +\infty)$, $E(f) = (0; 5]$. **1.19.** а) $f(-5)$ не существует; $f(-3) = 2$; $f(0) = 5$; $f(4) = 0{,}5$; в) $D(f) = [-4; +\infty)$; г) $E(f) = (0; 5]$.

§ 2

2.3. а), г) Возрастает; б), в) убывает. **2.4.** а), г) Возрастает; б), в) убывает. **2.5.** а), г) Возрастает; б), в) убывает. **2.6.** а), г) Ограничена снизу; б), в) ограничена сверху. **2.7.** а), в) Ограничена снизу и сверху; б), г) ограничена снизу. **2.10.** а) -1; 5; б) $y_{наиб} = 3$, $y_{наим}$ не существует; в) $-38{,}5$; $1{,}5$; г) -2; 58.

§ 3

3.2. а) $y = \dfrac{3x+1}{2x-1}$; б) $y = \dfrac{4-x}{x+3}$; в) $y = \dfrac{3-x}{5x+2}$; г) $y = \dfrac{x+5}{2-2x}$. **3.3.** а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = x^2$, $x \geqslant 0$; в) $y = 1 - \sqrt{x}$; г) $y = -x^2$, $x \geqslant 0$. **3.4.** а) $y = \sqrt[3]{x}$; б) $y = 2 + \sqrt[3]{x}$; в) $y = \sqrt[3]{1-x}$; г) $y = \sqrt[3]{x+1} - 3$. **3.5.** а), в) Не существует; б) $y = -2 - \sqrt{x+12}$; г) $y = \sqrt{7-x} + 1$.

ГЛАВА 2

§ 4

4.17. а) IV; б) II; в) II; г) III. **4.18.** а) IV; б) I; в) II; г) III. **4.19.** а) $2\pi k < t < \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$; б) $-\pi + 2\pi k < t < \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$;

в) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k < t < 2\pi + 2\pi k$; г) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k < t < \pi + 2\pi k$.

4.20. а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < t < \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$; б) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k < t < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$.

§ 5

5.10. а) −, +; б) −, +; в) +, −; г) +, −. **5.11.** а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; б) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$; в) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{3} + 2\pi k$; г) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k < t < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$.

5.12. а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k < t < \frac{7\pi}{4} + 2\pi k$; б) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < t < \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$; в) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$; г) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{6} + 2\pi k$.

5.13. а) $2\pi k < t < \pi + 2\pi k$; б) $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{6} + 2\pi k$; в) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$; г) $-\pi + 2\pi k < t < 2\pi k$.

5.14. а) $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{4} + 2\pi k$; б) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$; в) $\frac{4\pi}{3} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$; г) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$.

§ 6

6.6. а) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1}{2}$; б) 0; в) 1; г) $\frac{\sqrt{6}}{8}$. **6.7.** а) 1; б) 0. **6.9.** а) $\frac{3}{2}$; б) −3; в) 0; г) −4,5. **6.12.** а) $\sin^2 t$; б) $-\sin^2 t$; в) $-\cos^2 t$; г) $\operatorname{tg}^2 t$. **6.13.** а) −1; б) $-\frac{1}{2}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **6.14.** а) 0,5; б) 1; в) 0; г) 1. **6.15.** а) −2; 2; б) −1; 7; в) −3; 3; г) −2; 8. **6.20.** а) +; б) −; в) −; г) −. **6.21.** а) −; б) +; в) −; г) +. **6.22.** а) −; б) −; в) −; г) +. **6.23.** а) −; б) +; в) −; г) −. **6.24.** а) −; б) −; в) +; г) −. **6.25.** а) −; б) +; в) +; г) +. **6.26.** а) +; б) −. **6.27.** а) 0; б) 1. **6.28.** а) $\frac{\sqrt{2} + 1}{2}$; б) 1. **6.29.** а) 1; б) 0. **6.30.** а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; б) $\frac{5\pi}{4} + 2\pi k$; $\frac{7\pi}{4} + 2\pi k$; в) $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; г) $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. **6.31.** а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$; б) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$.

6.32. а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; б) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$; в) πk; г) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$. **6.33.** а) Да; б) нет; в) да; г) нет. **6.34.** а) $a > b$; б) $a < b$; в) $a > b$; г) $a > b$. **6.35.** а) +; б) –; в) –; г) –. **6.36.** а) $\sin\frac{4\pi}{3}$, $\sin\frac{7\pi}{6}$, $\sin\frac{\pi}{7}$, $\sin\frac{\pi}{5}$, $\sin\frac{2\pi}{3}$; б) $\cos\frac{5\pi}{6}$, $\cos\frac{5\pi}{4}$, $\cos\frac{\pi}{3}$, $\cos\frac{7\pi}{4}$, $\cos\frac{\pi}{8}$. **6.37.** а) $\cos 4$, $\sin 5$, $\cos 5$, $\sin 2$; б) $\cos 3$, $\cos 4$, $\cos 7$, $\cos 6$; в) $\sin 4$, $\sin 6$, $\sin 3$, $\sin 7$; г) $\cos 3$, $\sin 5$, $\sin 4$, $\cos 2$. **6.38.** а) $\cos 1$, $\sin 1$, 1, $\operatorname{tg} 1$; б) $\operatorname{ctg} 2$, $\cos 2$, $\sin 2$, 2. **6.39.** а) $2\pi k < t < \pi + 2\pi k$; б) $-\frac{4\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{3} + 2\pi k$; в) $-\pi + 2\pi k < t < 2\pi k$; г) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$. **6.40.** а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; б) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k < t < \frac{7\pi}{4} + 2\pi k$; в) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k < t < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$; г) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{4} + 2\pi k$. **6.41.** а) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$; б) $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$; в) $\frac{5\pi}{4} + 2\pi k < t < \frac{7\pi}{4} + 2\pi k$; г) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$.

§ 7

7.6. а) 1; б) $\frac{1}{3}$; в) 1; г) 1. **7.7.** а) $\cos t = -\frac{3}{5}$; $\operatorname{tg} t = -\frac{4}{3}$; $\operatorname{ctg} t = -\frac{3}{4}$; б) $\cos t = \frac{12}{13}$; $\operatorname{tg} t = \frac{5}{12}$; $\operatorname{ctg} t = \frac{12}{5}$; в) $\cos t = 0{,}8$; $\operatorname{tg} t = -\frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg} t = -\frac{4}{3}$; г) $\cos t = -0{,}96$; $\operatorname{tg} t = \frac{7}{24}$; $\operatorname{ctg} t = \frac{24}{7}$. **7.8.** а) $\sin t = 0{,}6$; $\operatorname{tg} t = \frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg} t = \frac{4}{3}$; б) $\sin t = \frac{12}{13}$; $\operatorname{tg} t = -\frac{12}{5}$; $\operatorname{ctg} t = -\frac{5}{12}$; в) $\sin t = -0{,}8$; $\operatorname{tg} t = -\frac{4}{3}$; $\operatorname{ctg} t = -\frac{3}{4}$;

г) $\sin t = -\frac{7}{25}$; $\operatorname{tg} t = \frac{7}{24}$; $\operatorname{ctg} t = \frac{24}{7}$. **7.9.** а) $\sin t = \frac{3}{5}$; $\cos t = \frac{4}{5}$; $\operatorname{ctg} t = \frac{4}{3}$; б) $\sin t = -\frac{12}{13}$; $\cos t = -\frac{5}{13}$; $\operatorname{ctg} t = \frac{5}{12}$; в) $\sin t = \frac{3}{5}$; $\cos t = -\frac{4}{5}$; $\operatorname{ctg} t = -\frac{4}{3}$; г) $\sin t = -\frac{5}{13}$; $\cos t = \frac{12}{13}$; $\operatorname{ctg} t = -\frac{12}{5}$.

7.10. а) $\sin t = -\frac{5}{13}$; $\cos t = -\frac{12}{13}$; $\operatorname{tg} t = \frac{5}{12}$; б) $\sin t = \frac{24}{25}$; $\cos t = \frac{7}{25}$; $\operatorname{tg} t = \frac{24}{7}$; в) $\sin t = -\frac{12}{13}$; $\cos t = \frac{5}{13}$; $\operatorname{tg} t = -\frac{12}{5}$; г) $\sin t = \frac{15}{17}$; $\cos t = -\frac{8}{17}$; $\operatorname{tg} t = -\frac{15}{8}$. **7.11.** а) 0, 2; б) $s_{\text{наиб}} = 1$, $s_{\text{наим}}$ не существует; в) 2, 4; г) $s_{\text{наиб}} = 4$, $s_{\text{наим}}$ не существует. **7.12.** а) $\frac{1}{\sin t}$; б) 0; в) $-\sin^2 t$; г) $\frac{1}{\sin^2 t}$. **7.13.** а) $\frac{2}{\sin t}$; б) $\sin^2 t$; в) $\frac{2}{\cos t}$; г) $\operatorname{tg} t$. **7.14.** а) $\frac{1}{\sin^2 t}$; б) $\operatorname{ctg}^6 t$.

7.17. а) $-\frac{3}{4}$; б) $\frac{12}{5}$. **7.18.** а) $-\frac{12}{13}$; б) $-1{,}4$. **7.19.** 1,4.

§ 8

8.7. sin 160°, sin 40°, sin 120°, sin 80°. **8.8.** cos 160°, cos 120°, cos 80°, cos 40°. **8.9.** sin 210°, sin 20°, sin 400°, sin 110°. **8.12.** а) 6, $6\sqrt{3}$, $18\sqrt{3}$, 6; б) $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, 9, 3; в) 2, $2\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, 2; г) 30, $30\sqrt{3}$, $450\sqrt{3}$, 30.
8.13. $2R\cos\alpha$. **8.15.** $BC = 8$ см, $AC = 4(\sqrt{3}+1)$ см, $S = 8(\sqrt{3}+1)$ см². **8.16.** $\frac{25(3+\sqrt{3})}{6}$ см².

§ 9

9.7. а) $-1{,}5$; б) 2; в) $-\sqrt{2}$; г) -1. **9.8.** а) 0; б) $2\cos t$. **9.9.** а) $\operatorname{ctg}\alpha$; б) $\cos t$; в) $\operatorname{ctg}\alpha$; г) $-\cos t$. **9.10.** а) -1; б) $-\frac{1}{\cos t}$. **9.12.** а) $2\pi k$; б) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; в) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$; г) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$. **9.13.** а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; б) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.
9.14. а) Корней нет; б) t — любое действительное число.

§ 10

10.3. а) 0; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) 1; г) −1. **10.5.** а) Да; б) да; в) да; г) нет. **10.6.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1; б) −1, 1; в) −1, 1; г) −1, $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **10.11.** а) $-\pi$; б) 0; в) 0; г) π. **10.12.** а) $\pm\frac{\pi}{2}$; 0; б) $\frac{\pi}{2}$. **10.13.** а) π; б) 0. **10.17.** а) −1, 0, 1, π. **10.18.** а) −0,5, 0, sin 1.

§ 11

11.4. а) $-\sqrt{2}-1$; б) 1. **11.7.** а) $-\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $y_{наиб} = 1$, $y_{наим}$ не существует; в) −1, 1; г) −1, 1. **11.9.** а) $-\frac{\pi}{2}$; б) 0; в) 0; г) $\frac{\pi}{2}$. **11.10.** а) 0; б) $\frac{\pi}{2}$; в) π; г) 0.

§ 12

12.9. а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; б) $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$.

§ 13

13.4. а) — г) 3; −3. **13.5.** а) $-3\sin x$; б) $6\sin x$; в) $6\sin x + 1$; г) 0. **13.6.** а) $-0{,}5\cos x$; б) $-\cos x$; в) $-0{,}5\cos x$; г) 0.

13.9. а) $y = \begin{cases} x^2, \text{ если } x < 0, \\ \frac{1}{2}\sin x, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant \pi; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} 1{,}5\cos x, \text{ если } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ x - \frac{\pi}{2}, \text{ если } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

13.13. а) 2; 0; б) $y_{наим} = -2$; в) 1; −2; г) 2; $\sqrt{2}$. **13.14.** а) −1; 0; б) $y_{наиб} = 1$, $y_{наим}$ не существует; в) −1; 1; г) −1, 1. **13.15.** а) −1, 1; б) −1, 1; в) −1, 1; г) −1, 1. **13.16.** а) $\cos\frac{x}{3}$; б) $3\cos\frac{x}{3}$; в) $\cos x$; г) 0. **13.17.** а) $-\sin 2x$; б) $2\sin 2x$; в) $-\sin 6x$; г) 0. **13.20.** а) $y = \begin{cases} -x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ \sin 2x, \text{ если } x > 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} \cos 3x, \text{ если } x \leqslant \frac{\pi}{3}, \\ -1, \text{ если } x > \frac{\pi}{3}; \end{cases}$ в) $y = \begin{cases} \sin 2x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ 2\cos x, \text{ если } x > 0; \end{cases}$

г) $y = \begin{cases} -2\sin x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ \cos\frac{x}{2}, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

§ 14

14.2. а) Нет; б) $y_{наиб} = 0$; в) -1; $\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) $y_{наим} = 0$. **14.3.** а) $-\frac{\pi}{3} + \pi k$; б) $\frac{\pi}{4} + \pi k$; в) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$; г) πk. **14.5.** а) 0; 1; б) $y_{наиб} = 0$; в) нет; г) -1; $\sqrt{3}$. **14.6.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi k$; б) $\frac{\pi}{3} + \pi k$; в) $\frac{2\pi}{3} + \pi k$; г) $\frac{\pi}{2} + \pi k$. **14.7.** а) Ни четная, ни нечетная; б) нечетная; в) четная; г) нечетная. **14.8.** $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{3}$. **14.9.** $-\frac{7}{5}$; $-\frac{5}{7}$. **14.10.** а) $-$; б) $-$; в) $+$; г) $-$.

ГЛАВА 3

§ 15

15.3. а) $\frac{3\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{6}$; в) π; г) $\frac{\pi}{3}$. **15.4.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) 0; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **15.8.** а) 0; б) $\frac{\pi}{3}$. **15.9.** а) $[-1; 1]$; б) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$; в) $[0; 2]$; г) $[1; 2]$. **15.10.** а) Нет; б) да; в) да; г) нет. **15.12.** а) $2\pi k$; б) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$. **15.13.** а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; $\pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{3}\right) + 2\pi k$; б) $\pm\arccos\frac{1}{5} + 2\pi k$. **15.14.** а) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$; б) $\frac{8\pi}{3}$, $\frac{10\pi}{3}$; в) $\pm\frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$; г) $-\pi$, π. **15.15.** а) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$; б) $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{3}$; в) $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$, $\frac{15\pi}{4}$; г) $\pm\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{5\pi}{4}$. **15.17.** а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{3} + 2\pi k$;

б) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$; в) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$;

г) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$.

15.18. а) $\arccos\frac{2}{3} + 2\pi k < t < 2\pi - \arccos\frac{2}{3} + 2\pi k$;

б) $-\arccos\left(-\frac{1}{7}\right) + 2\pi k < t < \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) + 2\pi k$;

в) $-\arccos\frac{2}{3} + 2\pi k < t < \arccos\frac{2}{3} + 2\pi k$;

г) $\arccos\left(-\frac{1}{7}\right) + 2\pi k < t < 2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) + 2\pi k$.

15.19. а) $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi k \leqslant t \leqslant 2\pi - \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi k$;

б) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $\arccos\frac{1}{3} + 2\pi k < t < 2\pi - \arccos\frac{1}{3} + 2\pi k$;

в) $-\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi k < t < \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi k$;

г) $-\arccos\frac{1}{3} + 2\pi k \leqslant t \leqslant -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \arccos\frac{1}{3} + 2\pi k$.

15.20. а) $\frac{\pi}{3} + \pi k < t < \frac{2\pi}{3} + \pi k$; б) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < t < -\arccos\frac{1}{3} + 2\pi k$;

$\arccos\frac{1}{3} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; в) $-\arccos\frac{1}{3} + \pi k < t < \arccos\frac{1}{3} + \pi k$;

$\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi k < t < \pi + \arccos\frac{1}{3} + 2\pi k$;

г) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k < t < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$; $-\arccos\frac{1}{3} + 2\pi k < t < \arccos\frac{1}{3} + 2\pi k$.

15.21. а) $\frac{4}{5}$; б) 0,6. **15.22.** а) $-\frac{12}{5}$; б) $\frac{4}{3}$.

§ 16

16.3. а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{\pi}{12}$; г) $-\frac{\pi}{3}$. **16.4.** а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{5\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{7\pi}{12}$.

16.9. а) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$; б) $-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$; в) $-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$; г) $-\frac{11\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$.

16.10. а) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}$; б) $-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$; в) $-\frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$; г) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

16.11. а) $[-1; 1]$; б) $[2; 3]$; в) $[-2; 2]$; г) $\left[-2; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; 2\right]$. **16.12.** а) Да;

б) нет; в) нет; г) да. **16.13.** а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$;

б) $\frac{\pi}{2} + \pi k, (-1)^k \arcsin\frac{2}{3} + \pi k$; в) $(-1)^k \arcsin\frac{3}{4} + \pi k, \pi k$; г) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$.

16.14. а) $(-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k, (-1)^{k+1}\arcsin\frac{2}{3} + \pi k$; б) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

16.15. а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; б) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$;

в) $-\frac{4\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{3} + 2\pi k$; г) $\frac{7\pi}{6} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{11\pi}{6} + 2\pi k$.

16.16. а) $-\pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k < t < \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k$;

б) $-\arcsin 0{,}6 + 2\pi k \leqslant t \leqslant \pi + \arcsin 0{,}6 + 2\pi k$;

в) $\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k$;

г) $\pi + \arcsin 0{,}6 + 2\pi k < t < 2\pi - \arcsin 0{,}6 + 2\pi k$.

16.17. а) $\pi + \arcsin 0{,}8 + 2\pi k < t < 2\pi - \arcsin 0{,}8 + 2\pi k$;

б) $-\arcsin 0{,}8 + 2\pi k \leqslant t \leqslant \pi + \arcsin 0{,}8 + 2\pi k$.

16.18. а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k < t < \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi k$; $\pi - \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi k < t < \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$;

б) $\arcsin\frac{2}{3} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \pi - \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi k$; $\frac{7\pi}{6} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{11\pi}{6} + 2\pi k$.

16.19. а) $\frac{12}{13}$; б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{15}{17}$; г) $-\frac{3}{4}$.

§ 17

17.4. а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{7\pi}{12}$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $-\frac{\pi}{6}$. **17.8.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\operatorname{arctg} 5 + \pi k$;

б) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\operatorname{arctg} 3 + \pi k$. **17.9.** а) $\frac{\pi}{3} + \pi k$; б) $\frac{\pi}{3} + \pi k$; в) $\frac{\pi}{6} + \pi k$; г) $\frac{3\pi}{4} + \pi k$.

§ 18

18.1. а) $(-1)^n\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$; б) $\pm 2\pi + 6\pi n$; в) $(-1)^n\frac{2\pi}{3} + 4\pi n$; г) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$.

18.2. а) $(-1)^{n+1}\frac{3\pi}{4} + 3\pi n$; б) $\pm\frac{5\pi}{12} + \pi n$; в) $-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}$; г) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n$.

18.3. а) $\frac{2\pi}{3} + 4\pi k$; $4\pi k$; б) $\frac{\pi}{2} + 3\pi k$; в) $\frac{2\pi k}{3}$; $\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3}$; г) $-\frac{2\pi}{3} + 4\pi k$.

18.4. а) $\frac{7\pi}{12} + \pi k$; б) $\pi + 2\pi k$; в) $8\pi k$; $\frac{-4\pi}{3} + 8\pi k$; г) $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$; $\frac{2\pi k}{3}$.

18.5. а) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; б) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$; в) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$;

г) $\frac{4\pi}{3} + 2\pi k$; $\frac{5\pi}{3} + 2\pi k$. **18.6.** а) $(-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{3} + \pi k$;

б) $(-1)^{k+1}\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} + \frac{\pi k}{2}$; в) $(-1)^k\arcsin\frac{1}{4} + \pi k$; г) $\pi + 4\pi k$; $(-1)^k\frac{\pi}{3} + 2\pi k$.

18.7. а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; $\pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi k$; б) $\pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$; в) $\pi+2\pi k$; г) $\pm\pi+6\pi k$.

18.8. а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; в) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $(-1)^k\arcsin\frac{1}{5} + \pi k$; г) $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$.

18.9. а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k$; б) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$; $\frac{1}{2}\operatorname{arcctg} 5 + \frac{\pi k}{2}$;

в) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k$; $-\operatorname{arctg} 2 + \pi k$; г) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$; $2\operatorname{arcctg}\frac{5}{7} + 2\pi k$.

18.10. а) $-\frac{\pi}{3} + \pi k$; б) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$; в) $\operatorname{arctg} 3 + \pi k$; г) $-\frac{\pi}{6} + \pi k$. **18.11.** а) πk; $-\frac{\pi}{4} + \pi k$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $-\frac{\pi}{6} + \pi k$; в) πk; $\operatorname{arctg} 3 + \pi k$; г) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\frac{\pi}{3} + \pi k$.

18.12. а) $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $-\operatorname{arctg} 3 + \pi k$; б) $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\operatorname{arctg} 3 + \pi k$; в) $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $-\operatorname{arctg} 2 + \pi k$; г) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi k$. **18.13.** а) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$;

б) $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi$; в) $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$; г) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi$. **18.14.** а) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}$;

б) $-\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$. **18.15.** а) $\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}$;

б) $\pm\frac{\pi}{18}, \pm\frac{11\pi}{18}, \pm\frac{13\pi}{18}$; в) $-\frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$; г) $\frac{3\pi}{16}, \frac{7\pi}{16}, \frac{11\pi}{16}, \frac{15\pi}{16}$.

18.16. а) $-\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$; б) $0, 2\pi, 4\pi$. **18.17.** а) $-2\pi, 0, 2\pi, 4\pi$;

б) $\frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{7\pi}{4}$. **18.18.** а) $\frac{7\pi}{8}$; б) $-\frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$; в) $-\frac{\pi}{8}$; г) $-\frac{\pi}{8}$.

18.19. а) $\frac{\pi}{3}$; б) $0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}$; в) $-\frac{2\pi}{3}$; г) $-\frac{2\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}$. **18.20.** а) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k$;

б) $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. **18.21.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $-\operatorname{arctg} 2 + \pi k$; б) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi k$;

в) $\operatorname{arctg} 2 + \pi k$; $-\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k$; г) $\frac{3\pi}{4} + \pi k$; $\operatorname{arcctg} \frac{3}{4} + \pi k$. **18.22.** а) $\pi + 2\pi k$; $\pm\frac{5\pi}{3} + 4\pi k$; б) $\frac{\pi}{3} + \pi k$; πk; в) $\frac{\pi k}{3}$; $\frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}$; г) $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$; $-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$.

18.23. а) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k$; б) $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. **18.24.** а) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$; б) $\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$; в) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; г) $\frac{\pi}{51} + \frac{\pi k}{17}$. **18.25.** а) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi k}{2}$; $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \frac{\pi k}{2}$; б) $-\frac{1}{3} \operatorname{arctg} 3 + \frac{\pi k}{3}$; $-\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \frac{\pi k}{3}$. **18.26.** а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; б) $\pm\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}$.

18.27. а) $\operatorname{arctg} 5 + \pi k$; $-\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k$; б) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\operatorname{arctg} 2 + \pi k$; в) $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $-\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k$; г) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\operatorname{arctg} 3 + \pi k$.

18.28. а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $-\frac{\pi}{6} + \pi k$; б) πk; $-\operatorname{arctg} 1{,}5 + \pi k$.

18.29. а) $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$; $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi k}{2}$; б) $\frac{\pi k}{4}$; $-\frac{1}{4} \operatorname{arctg} 1{,}5 + \frac{\pi k}{4}$.

18.30. а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $2\operatorname{arctg} 3 + 2\pi k$; б) $\frac{3\pi}{2} + 3\pi k$; $\frac{\pi}{2} + 3\pi k$. **18.31.** а) $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$; б) $-\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \frac{\pi k}{3}$. **18.32.** а) $-2 \operatorname{arctg} 3 + 2\pi k$; б) $-\pi + 3\pi k$. **18.33.** а) 0, π, $-\pi$, 4, -4; б) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, 0, 7. **18.34.** а) 1, $\frac{3}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$, $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ ($k = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$); б) 1, $\frac{4}{3}$, $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ($k = \pm1, \pm2, \ldots$). **18.35.** а) $\{-1, 1\}$; б) $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

ГЛАВА 4

§ 19

19.3. а) $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin\alpha$; б) $-\sin\alpha$; в) $\frac{1}{2} \cos\alpha$; г) $-\cos\alpha$. **19.10.** а) 0; б) $\frac{1}{2}$; в) 1; г) $\frac{1}{2}$. **19.11.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $-\frac{1}{2}$. **19.12.** а) $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$; б) $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{8}$.

19.13. а) $(-1)^k \frac{\pi}{42} + \frac{\pi k}{7}$; б) $\pm\frac{5\pi}{72} + \frac{\pi k}{6}$. **19.14.** а) $\pi + 2\pi k$; б) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$.

19.15. а) 15°; б) 75°. **19.16.** а) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{9\pi}{4}$; б) $-\frac{5\pi}{8}$; $-\frac{\pi}{8}$; $\frac{3\pi}{8}$; $\frac{7\pi}{8}$.

19.17. а) $\frac{4\sqrt{3} + 3}{10}$; б) $-\frac{3}{5}$; в) $\frac{4}{5}$; г) $\frac{4 - 3\sqrt{3}}{10}$.

19.18. а) $\frac{12\sqrt{3}+5}{26}$; б) $-\frac{12}{13}$; в) $\frac{-5\sqrt{3}+12}{26}$; г) $-\frac{5}{13}$. **19.19.** а) $-\frac{13}{85}$; б) $\frac{84}{85}$.

19.20. а) $-\frac{36}{85}$; б) $\frac{77}{85}$. **19.21.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$. **19.22.** а) 1; б) 1.

19.23. а) $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$; б) $\pm\frac{\pi}{3} + 4\pi k$. **19.24.** а) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$; б) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $\pi + 2\pi k$;

в) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; г) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k$. **19.25.** а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; б) $2\pi k$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$;

в) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; г) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$. **19.26.** а) $\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{2} < x < \frac{5\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}$;

б) $\frac{1}{7}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{2\pi k}{7} < x < \frac{\pi}{7} + \frac{1}{7}\arccos\frac{1}{3} + \frac{2\pi k}{7}$;

в) $-\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3} < x < \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}$;

г) $-4\arcsin\frac{1}{3} + 8\pi k < x < 4\pi + 4\arcsin\frac{1}{3} + 8\pi k$.

§ 20

20.1. а) $2-\sqrt{3}$; б) $-2-\sqrt{3}$; в) $\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$; г) $2-\sqrt{3}$. **20.2.** а) 1; б) -1;

в) $\sqrt{3}$; г) 1. **20.3.** а) $\frac{1}{5}$; б) $-\frac{41\sqrt{3}+80}{23}$; в) $-1\frac{1}{3}$; г) $-\frac{3}{13}$. **20.4.** а) 1; б) $\frac{1}{7}$.

20.5. а) $\frac{11}{13}$; б) $\frac{1}{17}$. **20.7.** а) 1; б) 1. **20.9.** а) $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}$; б) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$.

20.10. а) $-\frac{11\pi}{12}$, $\frac{\pi}{12}$, $\frac{13\pi}{12}$; б) $-\frac{17\pi}{30}$, $-\frac{\pi}{15}$, $\frac{13\pi}{30}$, $\frac{14\pi}{15}$, $\frac{43\pi}{30}$, $\frac{29\pi}{15}$. **20.11.** а) -2;

б) $-\frac{3}{2}$. **20.12.** а) $-\frac{1}{2}$; б) $-1\frac{1}{6}$. **20.13.** а) $-2\frac{3}{7}$; б) $\frac{7}{17}$. **20.14.** а) $-\frac{25\sqrt{3}+48}{39}$;

б) $\frac{25\sqrt{3}-48}{39}$. **20.16.** $\operatorname{arctg} 3$.

§ 21

21.4. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) -1. **21.5.** а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$. **21.9.** а) $-\frac{120}{169}$;

б) $\frac{119}{169}$; в) $-\frac{120}{119}$; г) $-\frac{119}{120}$. **21.10.** а) $\frac{24}{25}$; б) $\frac{7}{25}$; в) $\frac{24}{7}$; г) $\frac{7}{24}$.

21.11. а) $\frac{\sqrt{14}}{4}$, $\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\frac{\sqrt{7}}{7}$, $\sqrt{7}$; б) $-\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\frac{2}{\sqrt{5}}$, -2, $-\frac{1}{2}$.

21.12. а) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\frac{3}{\sqrt{10}}$, -3, $-\frac{1}{3}$; б) $-\frac{3}{\sqrt{10}}$, $-\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\frac{1}{3}$, 3. **21.13.** а) $\operatorname{tg}\frac{t}{2}$;

б) $\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}$; в) $2\sin 2t$; г) $\frac{1}{\cos 2t + \sin 2t}$. **21.14.** а) $2\sin t$; б) -1; в) $\cos 2t$; г) 2. **21.15.** а) $\sin 2t$; б) $-\operatorname{tg} 2t$. **21.16.** а) $\cos 2t$; б) $-2\sin\frac{t}{2}$.

21.23. а), г) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; б), в) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. **21.24.** а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; б) πk; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; в) πk; г) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$. **21.25.** а) $(-1)^k\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$; б) $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{8}$; в) $\pm\frac{\pi}{2} + 3\pi k$; г) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$. **21.26.** а) $2\pi k$; $\pi + 4\pi k$; б) $\pi + 2\pi k$; $4\pi k$.

21.27. а) $2\pi k$; б) $2\pi k$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$. **21.28.** а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$; б) $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{8}$; в) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; г) $\pm\frac{4\pi}{3} + 4\pi k$. **21.29.** а) 0; π; 2π; б) $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; в) 0; π; 2π; г) $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$.

21.30. а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{1}{16}$. **21.31.** а) 1; б) 0. **21.33.** а) 2, -1; б) 3, -1.

21.34. а) $-120°$; б) $-240°$. **21.35.** а) πk; $\operatorname{arctg} 3 + \pi k$; б) $\frac{\pi k}{2}$; $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi k}{2}$.

21.36. а) 0; π; 2π; б) $\frac{7\pi}{9}$. **21.37.** $\pm\frac{\pi}{9}$; $\pm\frac{17\pi}{9}$. **21.38.** а) 2; б) 4.

§ 22

22.3. а) $2\sin\frac{\pi}{20}\cos\frac{3\pi}{20}$; б) $2\sin\frac{7\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}$; в) $2\sin\frac{13\pi}{84}\cos\frac{\pi}{84}$; г) $2\sin\frac{4\pi}{33}\cos\frac{7\pi}{33}$. **22.4.** а) $-2\sin\frac{3\pi}{40}\sin\frac{\pi}{40}$; б) $-\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{12}$; в) $-2\sin\frac{8\pi}{55}\sin\frac{3\pi}{55}$; г) $2\cos\frac{13\pi}{16}\cos\frac{7\pi}{16}$. **22.5.** а) $2\sin t\cos 2t$; б) $2\sin 2\alpha\sin 2\beta$; в) $2\cos 5t\cos t$; г) $-2\sin 2\beta\cos\alpha$. **22.6.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2\cos 25°\cos 35°}$; б) $\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{5}}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2\cos 20°\cos 40°}$; г) $2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}$. **22.7.** а) -1; б) $-\sqrt{3}$.

22.10. а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$; б) $\frac{\pi k}{8}$; в) $\frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi k}{3}$; г) $\frac{\pi k}{7}$; $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}$.

22.11. а) $\frac{\pi k}{2}$; $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; б) $\frac{\pi k}{4}$; $(-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$.

22.12. а) $2\sin\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$; б) $2\sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$;

в) $4\cos\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$; г) $\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$. **22.13.** а) $4\sin 6x\ \cos^2\frac{x}{2}$;

б) $4\cos x\ \cos^2\frac{3x}{2}$. **22.14.** а) $4\cos t\ \cos\frac{t}{2}\ \sin\frac{5t}{2}$; б) $-4\sin t\ \sin 2t\ \cos 5t$.

22.16. а) $\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi k}{5}$; б) $\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi k}{3}$; в) $\frac{\pi}{40}+\frac{\pi k}{10}$; $\frac{\pi}{20}+\frac{\pi k}{5}$; г) $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}$.

22.17. а) $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{8}$; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$; б) $\frac{\pi k}{6}$; в) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}$; $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$; г) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}$.

22.18. а) $\frac{2\pi k}{7}$; $\frac{2\pi k}{3}$; б) $\frac{\pi}{14}+\frac{\pi k}{7}$. **22.19.** а) $\frac{\pi k}{6}$, но $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$; б) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}$;

в) $\frac{\pi k}{2}$; г) $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $\pi+2\pi k$. **22.20.** а) $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$;

б) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$; $(-1)^k\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}$. **22.21.** а) 3 корня; б) 2 корня. **22.22.** а) $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{9}$; $\frac{2\pi}{9}$;

$\frac{\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{9}$; $\frac{5\pi}{9}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{9}$; б) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{4}$.

§ 23

23.1. а) $\frac{1}{2}(\cos 9^\circ-\cos 55^\circ)$; б) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{24}+\cos\frac{5\pi}{24}\right)$; в) $\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sin 2^\circ$;

г) $\sin\frac{13\pi}{40}-\sin\frac{3\pi}{40}$. **23.2.** а) $\frac{1}{2}(\cos 2\beta-\cos 2\alpha)$; б) $\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)$;

в) $\frac{1}{2}(\cos\alpha+\cos\beta)$; г) $\sin 2\alpha+\sin 2\beta$. **23.3.** а) $\frac{1}{2}(\sin(2\alpha+\beta)+\sin\beta)$;

б) $\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{2}(\sin(\alpha+2\beta)-\sin\alpha)$; г) $\frac{1}{2}\cos 2\alpha$. **23.4.** а) πk;

б) $\frac{\pi}{6}+\pi k$; **23.5.** а) $\frac{\pi n}{2}$; $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}+\pi n$; б) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$.

23.7. а) $\frac{1}{4}(\sin 24^\circ-\sin 4^\circ+\sin 12^\circ+\sin 8^\circ)$;

б) $\cos 35^\circ-\cos 45^\circ+\cos 5^\circ-\cos 15^\circ$. **23.8.** а) 1; б) $\frac{1}{4}$. **23.9.** а) 1; б) 2.

23.10. а) πk; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$; б) $\frac{\pi}{2}+\pi k$; в) πk; г) $2\pi k$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$. **23.11.** а) $\pm\frac{\pi}{6}$;

б) $\pm\frac{\pi}{4}$. **23.12.** а) $y_{\text{наиб}}=\frac{3}{4}$, $y_{\text{наим}}=-\frac{1}{4}$; б) $y_{\text{наиб}}=\frac{1}{4}$, $y_{\text{наим}}=-\frac{3}{4}$.

ГЛАВА 5

§ 24

24.3. а) 3; −3; $-\frac{3}{2}$; 0; $3\cos 0{,}4\pi$; б) −1; 1; −1; 1; −1; в) 0; 1; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}$; $\sin^2\frac{\pi}{5}$; г) 1; −1; 1; −1; 1. **24.4.** 1027. **24.7.** а) 3^n; б) $(n+2)^2$; в) n^3; г) n^3+1. **24.8.** а) $\frac{1}{2^{n-1}}$; б) $\frac{2n+1}{2n+2}$; в) $\frac{1}{n^3}$; г) $\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$. **24.10.** а) 2; б) 5; в) 13; г) 45. **24.11.** а) Нет; б) да; в) да; г) нет. **24.12.** а), в) Ограничены снизу. **24.13.** б), в), г) Ограничены сверху. **24.14.** а), б), в) Ограничены. **24.15.** а) Возрастает; б) убывает; в) возрастает; г) убывает. **24.16.** а) Не является монотонной; б) возрастает; в) возрастает; г) возрастает. **24.19.** а) 0; б) 6; в) 0; г) −4. **24.20.** а) 5; б) 7; в) 3; г) $\frac{2}{3}$. **24.21.** а) 0; б) 0; в) 0; г) 0. **24.22.** а) 2; б) 1; в) −1; г) −2.

§ 25

25.3. а) 4; б) $57\frac{1}{6}$; в) 0,9; г) 156,25. **25.4.** а) −5,4; б) $\frac{3}{2}\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$; в) $38\frac{1}{9}$; г) $4\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$. **25.8.** а) $2\frac{2}{9}$; б) −0,128; в) −0,022; г) $3\frac{1}{9}$. **25.9.** а) 12,5; б) $-8\frac{2}{3}$; в) 9; г) −36. **25.10.** $41\frac{2}{3}$. **25.11.** $b_1 = 12$; $q = 0{,}5$. **25.12.** $b_1 = 12$; $q = \frac{1}{3}$. **25.13.** а) $\frac{\sin x}{1-\sin x}$; б) $\frac{\cos x}{1+\cos x}$; в) $\operatorname{ctg}^2 x$; г) $\frac{1}{1+\sin^3 x}$. **25.14.** а) 0,8; б) 0,3. **25.15.** а) $\frac{5}{33}$; б) $\frac{11}{90}$; в) $\frac{2}{11}$; г) $\frac{116}{495}$.

§ 26

26.8. а) 0; б) −2; в) 0; г) 6. **26.9.** а) 1; б) 1,5; в) 1; г) $1\frac{1}{6}$. **26.10.** а) 4; б) 0; в) 0; г) 2. **26.16.** а) 3; б) 1; в) −13; г) $3\frac{4}{15}$. **26.17.** а) 3; б) 1,4; в) 3; г) $\frac{7}{9}$. **26.18.** а) 0; б) −4; в) 10; г) $-\frac{1}{6}$. **26.19.** а) 0; б) 0. **26.22.** а) 0,2; б) −0,1; в) 0,1; г) 0,05. **26.24.** а) $3\Delta x$; б) $-2x\Delta x - (\Delta x)^2$; в) $-2\Delta x$; г) $4x\Delta x + 2(\Delta x)^2$. **26.25.** а) $2ax\Delta x + a(\Delta x)^2$; б) $-\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$.

§ 27

27.8. а) 2 м/с, 2 м/с^2; б) 4,2 м/с, 2 м/с^2; в) 4 м/с, 2 м/с^2; г) 7 м/с, 2 м/с^2. **27.10.** а) 2,2 м/с; б) 1,4 м/с; в) 2 м/с; г) 1,2 м/с. **27.11.** а) $2t$ м/с; б) $(2t - 1)$ м/с; в) $2t$ м/с; г) $(2t - 2)$ м/с. **27.13.** а) $f'(-7) < f'(-2)$; б) $f'(-4) < f'(2)$; в) $f'(-9) < f'(0)$; г) $f'(-1) > f'(5)$.

§ 28

28.18. а) $\dfrac{x^2(x+3)}{(x+2)^2}$; б) $-\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$; в) $\dfrac{2x(3-2x)}{(3-4x)^2}$; г) $\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.

28.23. а) 14; б) 1,5; в) 5; г) 72. **28.24.** а) -3; б) $\frac{4}{3}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) $-\frac{4}{15}$.

28.25. а) 2; б) 1; в) -1; г) -16. **28.26.** а) π; б) $2\frac{1}{3}$; в) 0; г) $-\frac{5+3\sqrt{3}}{6}$.

28.27. а) $\frac{1}{49}$; б) $\frac{1}{16}$. **28.31.** а) $3\cdot 7^7$; б) -2; в) 3; г) $-1\frac{1}{8}$. **28.32.** а) 10; б) 1,75; в) $-\frac{48}{361}$; г) $-\frac{5}{8}$. **28.33.** а) 0; б) 12; в) $-\sqrt{3}$; г) $-\frac{4}{9}$. **28.34.** а) 3,5; б) 1,6; в) -8; г) $-0,5$. **28.35.** а) $\frac{1}{16}$; б) $\pm\frac{3\pi}{8} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) $\frac{1}{4}$; г) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **28.36.** а) $x > \frac{3}{4}$; б) $-\sqrt{3} < x < -\sqrt{2}$; $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$.

28.37. а) $\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{3\pi}{4} + \pi k$; б) $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < x < -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$.

28.38. а) $-\frac{3}{4} < x < 0$; $x > 0$; б) $x < \frac{2}{5}$; $x > \frac{2}{5}$. **28.39.** а) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \pi n$; б) $\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$. **28.40.** а) $x < 0$; $x > 2$; б) $0 < x < 4$; в) $x < 0$; $0 < x < \frac{3}{4}$; г) $\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{2\pi}{3} + \pi n$. **28.41.** а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$; б) $-3 < x < -1$; $1 < x < 3$. **28.42.** а) 1; 16; б) $\sqrt[3]{4}$. **28.43.** а) $x < 0$; $x > 3$; б) таких значений нет; в) $\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$; $\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{2\pi}{3} + \pi n$; г) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n$. **28.44.** а) $\frac{12-\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$; б) таких значений нет; в) 9; г) таких значений нет. **28.45.** а) 2; б) 0; -4; в) $2\frac{2}{3}$; г) $\frac{5\pi}{24} + \frac{\pi k}{4}$.

28.46. а) $\pm\sqrt{3}$, $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\pm\sqrt{2} \pm 1$.

§ 29

29.8. а) $135°$; б) $45°$. **29.9.** а) $45°$; б) $135°$. **29.10.** а) $30°$; б) $135°$. **29.11.** а) $150°$; б) $135°$. **29.12.** а) $y = 6x - 9$; б) $y = 2 - x$; в) $y = 3x - 2$; г) $y = 7$. **29.13.** а) $y = 7x - 10$; б) $y = 5x - 17$. **29.14.** а) $y = 3x - 4$; б) $y = -x + 4$. **29.15.** а) $y = 1$; б) $y = 1$. **29.16.** а) $y = \frac{\pi}{2} - 2x$; б) $y = \frac{2}{3}x$. **29.17.** $y = -6x + 18$; $y = 6x + 18$. **29.18.** $y = 5x - 16$; $y = -5x - 1$. **29.19.** $(0; 1)$, $y = x + 1$; $(2; -1)$, $y = x - 3$. **29.20.** а) $x = 1$; б) $x = -\frac{1}{4}$; в) $x = \frac{3}{8}$; г) $x = -0{,}5$. **29.21.** а) $x = 3$; б) $x_1 = 0$; $x_2 = \sqrt{2}$; $x_3 = -\sqrt{2}$; в) $x = 1$; г) $x_1 = 0$; $x_2 = 0{,}6$. **29.22.** а) $x = \pi + 2\pi n$; б) $x = \frac{\pi}{3}n$; в) $x = \pi n$; г) $x = \frac{3\pi}{2} + 3\pi k$. **29.23.** а) $y = x - \frac{8}{3}$; $y = x - \frac{4}{3}$; б) $y = 9x - 20$; $y = 9x + 16$. **29.24.** а) $0{,}99$; б) $1{,}025$; в) $1{,}21$; г) $1{,}9975$. **29.25.** а) $y = -0{,}1x + 2{,}8$, $y = -0{,}5x + 2$; б) $y = -0{,}5x + 2$. **29.26.** $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$. **29.27.** $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1)$, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 1)$.

§ 30

30.11. а) Возрастает; б) убывает; в) возрастает; г) убывает. **30.12.** а) Убывает на $(-\infty; 2{,}5]$, возрастает на $[2{,}5; +\infty)$; б) убывает на $(-\infty; -1{,}5]$, возрастает на $[-1{,}5; +\infty)$; в) возрастает на $(-\infty; 4]$, убывает на $[4; +\infty)$; г) убывает на $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$, возрастает на $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **30.13.** а) Возрастает на R; б) возрастает на $[-5; 3]$; убывает на $(-\infty; -5]$ и на $[3; +\infty)$; в) возрастает на $(-\infty; -2]$ и на $[3; +\infty)$; убывает на $[-2; 3]$; г) убывает на $(-\infty; -1]$ и на $[1; +\infty)$; возрастает на $[-1; 1]$. **30.14.** а) Убывает на $(-\infty; -1]$ и на $[0; 1]$; возрастает на $[-1; 0]$ и на $[1; +\infty)$; б) убывает на R; в) возрастает на $(-\infty; 1]$; убывает на $[1; +\infty)$; г) возрастает на R. **30.15.** а) Убывает на $(-\infty; -3)$ и на $(-3; +\infty)$; б) возрастает на $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ и на $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$; в) убывает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$; г) убывает на $(-\infty; -1{,}5)$ и на $(-1{,}5; +\infty)$. **30.16.** а) Возрастает на $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$; б) возрастает на $\left(-\infty; \frac{15}{16}\right]$;

убывает на $\left[\frac{15}{16};\ 1\right]$; в) убывает на $\left(-\infty;\ \frac{1}{2}\right]$; г) возрастает на $\left[\frac{1}{2};\ 1\right]$; убывает на $[1;\ +\infty)$. **30.24.** а) При $a = \pm 3$; б) при $a = \pm 5$. **30.26.** а) $x = -2$ — точка минимума, $x = 2$ — точка максимума; б) $x = -1$, $x = 1$ — точки максимума, $x = 0$ — точка минимума; в) $x = -\frac{4}{9}$ — точка максимума, $x = 0$ — точка минимума; г) $x = -2$, $x = 2$ — точки минимума, $x = 0$ — точка максимума. **30.27.** а) $x = -2$ — точка максимума, $x = 2$ — точка минимума; б) точек экстремума нет, функция возрастает на $\left[\frac{1}{2};\ +\infty\right)$; в) $x = -5$ — точка максимума, $x = 5$ — точка минимума; г) $x = 3$ — точка минимума. **30.28.** а) $x = 2$ — точка максимума, $x = 3$ — точка минимума; б) $x = -3$ — точка максимума, $x = 3$ — точка минимума; в) $x = -\frac{1}{3}$ — точка максимума, $x = 5$ — точка минимума; г) $x = 7$ — точка максимума, $x = 0$ — точка минимума. **30.29.** а) $x = 0{,}6$ — точка максимума, $x = -0{,}6$ — точка минимума; б) $x = -1$, $x = 4$ — точки минимума, $x = 0$ — точка максимума; в) $x = -5$, $x = 5$ — точки минимума, $x = 0$ — точка максимума; г) $x = -3$ — точка максимума, $x = 1$ — точка минимума. **30.30.** а) $x = -2$ — точка максимума, $x = 2$ — точка минимума; б) $x = -3$ — точка максимума, $x = 3$ — точка минимума. **30.31.** а) $x = 3$ — точка минимума; б) $x = 8{,}5$ — точка максимума. **30.32.** а) $x = -\frac{\pi}{6}$ — точка минимума, $x = -\frac{5\pi}{6}$ — точка максимума; б) $x = \frac{5\pi}{3}$ — точка минимума, $x = \frac{7}{3}\pi$ — точка максимума.

§ 31

31.13. б) При $a = 3$. **31.14.** б) При $a > 9$. **31.15.** а) При $a < -2$ или $a > 2$; б) $a = \pm 2$.

§ 32

32.6. а) 28; 3; б) 9; −3; в) 16; −2; г) −7; −199. **32.8.** а) 19; −35; б) 35; 15; в) 19; −93; г) 19; 15. **32.9.** а) 173; −2; б) −43; −72; в) 45; 173; г) −2; −72. **32.10.** а) 4; −3; б) −12; −28; в) 4; −28; г) 4; −28. **32.11.** а) 20; −7; б) 4; −124; в) 121; −44; г) 148; −124. **32.12.** а) 6; 5; б) −3; −4. **32.13.** а) $y_{\text{наиб}} = \frac{\pi}{4} + 1$, $y_{\text{наим}} = \frac{3\pi}{4} - 1$; б) $y_{\text{наиб}} = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3}$, $y_{\text{наим}} = -\pi$; в) $y_{\text{наиб}} = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$, $y_{\text{наим}} = -\frac{\pi}{2}$; г) $y_{\text{наиб}} = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3}$, $y_{\text{наим}} = 0$. **32.14.** а) $y_{\text{наиб}}$ не

существует, $y_{наим} = -\frac{5}{27}$; б) $y_{наиб}$ не существует, $y_{наим} = -1$; в) $y_{наиб} = 0$, $y_{наим}$ не существует; г) $y_{наиб}$ не существует, $y_{наим} = 0$. **32.15.** а) $y_{наиб} = -2$, $y_{наим}$ не существует; б) $y_{наиб} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y_{наим} = 0$; в) $y_{наиб} = -2$, $y_{наим}$ не существует; г) $y_{наиб} = 3{,}5$, $y_{наим}$ не существует. **32.16.** а) 8, $1\frac{3}{4}$; б) 17, −3. **32.17.** а) $\left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$; б) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$. **32.18.** а) $\left[-\frac{4\sqrt{6}}{9}; +\infty\right)$; б) $\left(-\infty; \frac{\sqrt{3}}{9}\right]$.
32.19. [−17; 10]. **32.20.** 12, 12. **32.21.** 22, 22. **32.22.** −49, 49. **32.23.** 2 + 1. **32.24.** 1,25 + 3,75. **32.25.** 14 см, 14 см. **32.26.** 50 м × 50 м. **32.27.** 4 м × 4 м. **32.28.** 50 м × 50 м. **32.29.** 32 см^2. **32.30.** (1; 1), (−1; 1). **32.31.** (4, 2). **32.32.** 4 дм, 4 дм, 2 дм. **32.33.** 7м, 7м, 7м. **32.34.** $4\sqrt[3]{5}$ м; $6\sqrt[3]{5}$ м; $\frac{24\sqrt[3]{5}}{5}$ м. **32.35.** $\frac{d\sqrt{3}}{3}$. **32.36.** 30 см. **32.37.** а) 6000; б) 108. **32.38.** а) 21; б) 32,4. **32.39.** $\sqrt{ab}$. **32.40.** 3 ч 44 мин.

ГЛАВА 6

§ 34

34.2. Одна. **34.3.** Одна, если точки не принадлежат одной прямой. Бесконечно много, если точки принадлежат одной прямой. **34.4.** Бесконечно много. **34.5.** Нет. **34.6.** а), б) Нет. **34.7.** Нет. **34.8.** Нет. **34.9.** Нет. **34.10.** а), б) Да; в) нет. **34.11.** а) Не обязательно; б) да. **34.12.** а) Да; б) не обязательно. **34.19.** Нет. Одна или три. **34.20.** а) 3; б) 6; в) 10; г) $\frac{n(n-1)}{2}$. **34.21.** а) 4; б) 10; в) $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. **34.22.** а) 3; б) 6; в) $\frac{n(n-1)}{2}$. **34.23.** а) 4; б) 8; в) 15.

§ 35

35.1. Нет. **35.2.** а) Нет; б) да. **35.3.** Пятиугольник. **35.4.** а) 5-угольная; б), в) 6-угольная. **35.5.** а) Нет; б) да. **35.6.** а) Да; б) нет. **35.7.** 16-угольник. **35.8.** а) 5-угольная; б) 11-угольная; в) 9-угольная. **35.9.** в), д), ж). **35.10.** а), б), в), г). **35.11.** а), б), д). **35.12.** а), б), в), г) Да. **35.15.** а) Нет; б) да. **35.18.** а), б) 4; в) 0; г) $n(n-3)$; д) 0. **35.27.** Да. **35.28.** а) 4; б) 2; в) 4; г) 4. **35.29.** $a\sqrt{5}$.

ГЛАВА 7

§ 36

36.1. Пересекаться, быть параллельными или скрещиваться. **36.2.** Нет. **36.3.** У которых основание имеет параллельные стороны. **36.4.** а) Нет;

б) да, 18 пар; в) да, 6 пар; г) да, 15 пар; д) да, 15 пар. **36.6.** Нет. **36.7.** а) Одна; б) бесконечно много. **36.8.** Лежат в одной плоскости. **36.9.** а) Да, 24 пары; б) да, 300 пар; в) да, 300 пар. **36.10.** Нет. **36.11.** Бесконечно много, если точка не принадлежит данной прямой. **36.12.** Нет. **36.18.** Проходящая через точку C. **36.19.** Нет. **36.20.** Скрещиваются. **36.21.** Нет. **36.27.** а) 3; б) 15; в) $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$.

§ 37

37.1. Прямая лежит в плоскости, прямая пересекает плоскость, прямая параллельна плоскости. **37.2.** Нет. **37.3.** Нет. **37.4.** Нет. **37.5.** Параллельна данным прямым. **37.6.** Да. **37.7.** Нет. **37.8.** Нет. **37.12.** AB, BC, DE, EF пересекают плоскость; CD параллельна плоскости. **37.17.** Параллельны. **37.22.** Скрещиваются.

§ 38

38.1. Пересекаются или параллельны. **38.3.** а) Нет; б) да, 3 пары; в) да, 4 пары. **38.4.** а), б) Да. **38.6.** Нет. **38.7.** Нет. **38.8.** Да. **38.9.** Да. **38.10.** Нет. **38.11.** Нет. **38.12.** Нет. **38.18.** Нет. **38.19.** $\frac{ac}{a+b}$.

§ 39

39.1. Если прямая параллельна направлению проектирования. **39.2.** Нет. **39.3.** Нет. **39.4.** Нет. **39.5.** Нет. **39.6.** Если прямая параллельна направлению проектирования. **39.7.** Нет. **39.8.** Нет. **39.9.** Одна или две. **39.10.** Три, две или одна. **39.11.** Две пересекающиеся прямые или одна прямая. **39.12.** Если они лежат в плоскости, параллельной направлению проектирования, но не параллельны ему. **39.13.** Если они параллельны направлению проектирования. **39.14.** Пересекающиеся прямые, параллельные прямые, прямая и точка. **39.15.** Прямая не параллельна направлению проектирования, и через эту прямую и данную точку проходит плоскость, параллельная направлению проектирования. **39.16.** Прямые должны пересекаться, и одна из них должна быть параллельна направлению проектирования. **39.17.** Да. **39.18.** Нет. **39.20.** $\frac{na+mb}{n+m}$.

§ 40

40.1. Треугольник или отрезок. **40.2.** а), б), в) Да. **40.3.** Да. **40.4.** Параллелограммом или отрезком. **40.5.** а), б), в) Да; г) нет. **40.6.** Нет. **40.7.** Параллелограммов. **40.8.** а) Да; б), в) нет. **40.10.** Параллелограммом. **40.11.** В трапецию или отрезок. **40.23.** $\frac{a+b+c}{3}$.

§ 41

41.1. Да. **41.2.** Нет. **41.3.** Нет. **41.4.** Треугольной или четырехугольной пирамиды. **41.5.** а), б) Четырехугольные пирамиды; в) тетраэдр; г), д) шестиугольные пирамиды; е) куб. **41.6.** Нет. **41.14.** S.

§ 42

42.1. Многоугольником. **42.2.** а), б) $\frac{n(n-3)}{2}$. **42.3.** $2n$; $3n$; $n + 2$. **42.4.** а), б), в) Да; г), д) нет. **42.5.** а), б), в), г) Да; д) нет. **42.6.** а) Да; б) нет. **42.7.** а), б) Да; в) нет. **42.8.** Треугольники, четырехугольники, пятиугольники. **42.9.** Да. **42.10.** Нет. **42.16.** Равнобедренная трапеция периметра $\frac{3\sqrt{2}}{2} + \sqrt{5}$. **42.22.** Равнобедренная трапеция. **42.23.** Да. **42.26.** Сечение, проходящее через середину диагонали куба и перпендикулярное этой диагонали.

ГЛАВА 8

§ 43

43.1. Бесконечно много. **43.2.** Бесконечно много. **43.3.** Бесконечно много. **43.4.** Нет. **43.10.** а) 90°; б) 60°. **43.11.** 45°. **43.12.** 90°. **43.13.** 60°. **43.14.** $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{2}$. **43.15.** а), б) 90°. **43.16.** а) 45°; б) $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{2}$; в) 60°. **43.17.** $\cos \varphi = \frac{1}{3}$. **43.18.** $\cos \varphi = \frac{3}{4}$. **43.19.** 90°. **43.20.** 60°. **43.21.** Да. **43.22.** Все углы равны 60°. **43.23.** Да. **43.24.** 60°, 90°. **43.25.** 90°. **43.26.** а) 90°; б) 45°.

§ 44

44.1. Нет. **44.2.** Да. **44.3.** а) Нет; б) да. **44.4.** а), б) Нет. **44.6.** а), б) Нет. **44.7.** Да. **44.8.** Перпендикулярны. **44.9.** Плоскость, перпендикулярная данной прямой. **44.10.** Перпендикулярна. **44.11.** а), б) Да; в) нет. **44.12.** а), б), в) Да. **44.18.** Да. **44.19.** Прямоугольный. **44.20.** Прямые перпендикулярны. **44.22.** $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. **44.26.** а), б) Да; в) нет. **44.27.** Правильным шестиугольником.

§ 45

45.1. Да. **45.2.** Параллельными ортогональной проекции наклонной. **45.3.** Равны. **45.4.** Нет. **45.6.** Да. **45.7.** Да. **45.8.** Параллельны или пересекаются. **45.9.** Окружность. **45.11.** Равны. **45.12.** Равны. **45.13.** SC — наименьший; SB — наибольший. **45.14.** а) 45°; б) 30°. **45.15.** 12 см. **45.16.** 2 см. **45.17.** 9 см. **45.18.** $3\sqrt{41}$ см. **45.19.** b и $\sqrt{2a^2 + b^2}$. **45.23.** $\cos \varphi = \frac{a\sqrt{3}}{3b}$. **45.24.** 60°. **45.26.** 45°.

§ 46

46.1. Они перпендикулярны. **46.2.** 90°. **46.3.** Да. **46.4.** $\angle MAB$. **46.5.** $\angle MHB$, где BH — высота параллелограмма, опущенная на сторону AD. **46.6.** Нет. **46.7.** Нет. **46.8.** Одну, если прямая не перпендикулярна плоскости; бесконечно много, если прямая перпендикулярна плоскости. **46.9.** Нет. **46.11.** Нет. **46.12.** Да. **46.13.** Нет. **46.14.** Нет. **46.15.** 60°. **46.16.** $\cos\varphi = \frac{1}{3}$. **46.17.** 60°. **46.18.** а), в) Да; б), г) нет. **46.20.** $10\sqrt{2}$ дм^2. **46.21.** 6 см^2. **46.22.** а) $\sqrt{6}$ см^2; б) $3\sqrt{6}$ см^2. **46.23.** а) $\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{a^2}{\cos\varphi}$. **46.24.** $2\sqrt{\frac{2Q\cdot\cos\varphi}{7}}$. **46.27.** 90°, 60°. **46.28.** Да. **46.29.** Да. **46.30.** Да. **46.31.** а), б), в) Да.

§ 47

47.1. Нет. **47.3.** Да, за исключением их точки пересечения. **47.4.** Если прямые параллельны плоскости проектирования. **47.5.** Уменьшенное прямое. **47.6.** Перевернутое. **47.7.** Увеличенное прямое. **47.8.** Она будет подобна исходной. **47.14.** $\frac{2}{3}$.

ГЛАВА 9

§ 48

48.1. а) Тетраэдр, куб; б) октаэдр; в) икосаэдр. **48.2.** а) Трехгранные; б) трехгранные и пятигранный. **48.4.** а) 5; б) 14; в) 20. **48.5.** а), б) Нет; в) да. **48.6.** $10° < \varphi < 150°$. **48.8.** 90°. **48.9.** 60°. **48.10.** 90°. **48.11.** $\sqrt{6}$ см.

§ 49

49.1. а), г) Выпуклые; б), в) невыпуклые. **49.2.** Да. **49.3.** Нет. **49.4.** б), д) Выпуклые; а), в), г) невыпуклые. **49.5.** Нет. **49.6.** Пространственный крест. **49.7.** Число плоских углов равно удвоенному числу ребер. **49.8.** Нет. **49.9.** Четырехугольная пирамида. **49.10.** Шестиугольная пирамида. **49.11.** Тетраэдр. **49.12.** Четырехугольная пирамида. **49.13.** 7 дм. **49.14.** а) 2; б) 5; в) 9; г) $\frac{n(n-3)}{2}$. **49.15.** Нет. **49.22.** 200 см^2. **49.23.** 22 см. **49.24.** 5 см, 6 см. **49.28.** а) Да; б) нет. **49.29.** а) Да; б) нет.

§ 50

50.3. Из треугольников. **50.6.** Нет. **50.7.** Нет, 30 квадратов, 32 вершины, 60 ребер. **50.8.** в). **50.11.** Тетраэдр. **50.12.** $\sqrt{2}$. **50.13.** Октаэдр. **50.14.** $\sqrt{2}$ дм. **50.17.** $\frac{a}{2}$. **50.18.** $(\sqrt{6}-2)a$.

§ 51

51.2. 4 треугольника и 4 шестиугольника; 8 треугольников и 6 восьмиугольников. **51.3.** 24 вершины, 36 ребер, 14 граней. **51.4.** Усеченный икосаэдр. **51.6.** 12 десятиугольных и 20 треугольных граней. **51.8.** Треугольных. **51.10.** $a\sqrt{\sqrt{3}-1}$. **51.11.** $\frac{1}{3}$. **51.12.** $\frac{2-\sqrt{2}}{2}a$. **51.13.** $\frac{1}{3}$ или $\frac{1}{2}$.

51.14. $\frac{5-\sqrt{5}}{10}$ или $\frac{1}{2}$. **51.15.** В = 60, Р = 90, Г = 32; В = 60, Р = 90, Г = 32. **51.16.** Операция усечения; а) усеченный куб; б) кубооктаэдр; в) октаэдр; г) усеченный октаэдр; а) $(\sqrt{2}-1)a$; б) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

§ 52

52.1. Нет. **52.2.** Вершины звездчатого октаэдра являются вершинами куба. **52.3.** Октаэдром. **52.4.** 12 вершин выпуклых пятигранных углов; 30 ребер; 12 звездчатых пятиугольных граней. **52.5.** $\frac{\sqrt{5}+1}{2}a$. **52.6.** $\frac{\sqrt{5}+1}{2}a$. **52.7.** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$.

§ 53

53.3. $\cos\varphi = \frac{1}{3}$. **53.4.** $4\sqrt{3}$. **53.5.** а) Г = 12, Р = 24, В = 14; б) да, 6; в) 8 трехгранных и 6 четырехгранных углов; г) 120°; д) 90°. **53.6.** Да. **53.7.** Только из кубов. **53.8.** Кубооктаэдра.

ПРИМЕРНОЕ ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

(4 ч в неделю, всего 136 ч)

10 класс

Первый блок (18 ч)

Определение числовой функции. Способы ее задания (§ 1)	2 ч
Свойства функций (§ 2)	3 ч
Обратная функция (§ 3)	1 ч
История возникновения и развития геометрии (§ 33)	1 ч
Основные понятия стереометрии (§ 34)	2 ч
Пространственные фигуры (§ 35)	2 ч
Параллельность прямых в пространстве (§ 36)	2 ч
Параллельность прямой и плоскости (§ 37)	2 ч
Параллельность двух плоскостей (§ 38)	2 ч
Контрольная работа № 1	1 ч

Второй блок (13 ч)

Числовая окружность (§ 4)	2 ч
Числовая окружность на координатной плоскости (§ 5)	2 ч
Синус и косинус. Тангенс и котангенс (§ 6)	3 ч
Тригонометрические функции числового аргумента (§ 7)	2 ч
Тригонометрические функции углового аргумента (§ 8)	1 ч
Формулы приведения (§ 9)	2 ч
Контрольная работа № 2	1 ч

Третий блок (10 ч)

Параллельное проектирование (§ 39)	2 ч
Параллельные проекции плоских фигур (§ 40)	2 ч
Изображение пространственных фигур (§ 41)	3 ч
Сечения многогранников (§ 42)	2 ч
Контрольная работа № 3	1 ч

Четвертый блок (10 ч)

Функция $y = \sin x$, ее свойства и график (§ 10)	2 ч
Функция $y = \cos x$, ее свойства и график (§ 11)	2 ч
Периодичность функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ (§ 12)	1 ч
Преобразования графиков тригонометрических функций (§ 13)	2 ч
Функции $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, их свойства и графики (§ 14)	2 ч
Контрольная работа № 4	1 ч

Пятый блок (10 ч)

Арккосинус. Решение уравнения $\cos t = a$ (§ 15)	2 ч
Арксинус. Решение уравнения $\sin t = a$ (§ 16)	2 ч
Арктангенс и арккотангенс. Решение уравнений $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$ (§ 17)	1 ч
Тригонометрические уравнения (§ 18)	4 ч
Контрольная работа № 5	1 ч

Шестой блок (9 ч)

Угол между прямыми в пространстве. Перпендикулярность прямых (§ 43)	2 ч
Перпендикулярность прямой и плоскости. Ортогональное проектирование (§ 44)	2 ч
Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью (§ 45)	2 ч
Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей (§ 46)	2 ч
Контрольная работа № 6	1 ч

Седьмой блок (13 ч)

Синус и косинус суммы и разности аргументов (§ 19)	3 ч
Тангенс суммы и разности аргументов (§ 20)	2 ч
Формулы двойного аргумента (§ 21)	3 ч
Преобразование сумм тригонометрических функций в произведения (§ 22)	3 ч
Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы (§ 23)	1 ч
Контрольная работа № 7	1 ч

Восьмой блок (16 ч)

Центральное проектирование. Перспектива (§ 47)	2 ч
Многогранные углы (§ 48)	2 ч
Выпуклые многогранники (§ 49)	3 ч
Правильные многогранники (§ 50)	2 ч
Числовые последовательности и их свойства. Предел последовательности (§ 24)	2 ч
Сумма бесконечной геометрической прогрессии (§ 25)	2 ч
Предел функции (§ 26)	2 ч
Контрольная работа № 8	1 ч

Девятый блок (16 ч)

Определение производной (§ 27)	3 ч
Вычисление производных (§ 28)	3 ч

Уравнение касательной к графику функции (§ 29)	2 ч
Применение производной для исследования функций на монотонность и экстремумы (§ 30)	3 ч
Построение графиков функций (§ 31)	3 ч
Контрольная работа № 9	2 ч

Десятый блок (11 ч)

Применение производной для отыскания наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на промежутке (§ 32)	2 ч
Задачи на отыскание наибольших и наименьших значений величин (§ 32)	3 ч
Полуправильные многогранники (§ 51)	2 ч
Звездчатые многогранники (§ 52)	1 ч
Кристаллы — природные многогранники (§ 53)	1 ч
Контрольная работа № 10	2 ч
Повторение	**10 ч**

11 класс

Первый блок (15 ч)

Понятие корня n-й степени из действительного числа (§ 1*)	2 ч
Функции $y = \sqrt[n]{x}$, их свойства и графики (§ 2)	2 ч
Свойства корня n-й степени (§ 3)	3 ч
Цилиндр, конус (§ 29)	2 ч
Фигуры вращения (§ 30)	2 ч
Взаимное расположение сферы и плоскости (§ 31)	2 ч
Контрольная работа № 1	2 ч

Второй блок (15 ч)

Многогранники, вписанные в сферу (§ 32)	2 ч
Многогранники, описанные около сферы (§ 33)	2 ч
Преобразование выражений, содержащих радикалы (§ 4)	3 ч
Обобщение понятия о показателе степени (§ 5)	3 ч
Степенные функции, их свойства и графики (§ 6)	3 ч
Контрольная работа № 2	2 ч

Третий блок (11 ч)

Показательная функция, ее свойства и график (§ 7)	3 ч
Показательные уравнения и неравенства (§ 8)	3 ч

* Нумерация параграфов соответствует учебнику «Математика» для 11-го класса (М.: Мнемозина, 2008).

Сечения цилиндра плоскостью (§ 34)	2 ч
Симметрия пространственных фигур (§ 35)	2 ч
Контрольная работа № 3	1 ч

Четвертый блок (11 ч)

Объем фигур в пространстве. Объем цилиндра (§ 37)	2 ч
Принцип Кавальери (§ 38)	2 ч
Объем пирамиды (§ 39)	2 ч
Объем конуса (§ 40)	2 ч
Объем шара (§ 41)	2 ч
Контрольная работа № 4	1 ч

Пятый блок (13 ч)

Понятие логарифма (§ 9)	2 ч
Функция $y = \log_a x$, ее свойства и график (§ 10)	2 ч
Свойства логарифмов (§ 11)	3 ч
Площадь поверхности (§ 42)	2 ч
Площадь поверхности шара (§ 43)	2 ч
Контрольная работа № 5	2 ч

Шестой блок (11 ч)

Логарифмические уравнения (§ 12)	3 ч
Логарифмические неравенства (§ 13)	3 ч
Переход к новому основанию логарифма (§ 14)	1 ч
Дифференцирование показательной и логарифмической функций (§ 15)	3 ч
Контрольная работа № 6	1 ч

Седьмой блок (14 ч)

Прямоугольная система координат в пространстве (§ 44)	2 ч
Векторы в пространстве (§ 45)	2 ч
Координаты вектора (§ 46)	2 ч
Первообразная (§ 16)	2 ч
Определенный интеграл (§ 17)	2 ч
Вычисление площадей плоских фигур с помощью интеграла (§ 17)	2 ч
Контрольная работа № 7	2 ч

Восьмой блок (17 ч)

Скалярное произведение векторов (§ 47)	2 ч
Уравнение плоскости в пространстве (§ 48)	2 ч
Уравнение прямой в пространстве (§ 49)	2 ч

Статистическая обработка данных (§ 18)	2 ч
Простейшие вероятностные задачи (§ 19)	2 ч
Сочетания и размещения (§ 20)	2 ч
Формула бинома Ньютона (§ 21)	1 ч
Случайные события и их вероятности (§ 22)	2 ч
Контрольная работа № 8	2 ч

Девятый блок (17 ч)

Равносильность уравнений (§ 23)	2 ч
Общие методы решения уравнений (§ 24)	3 ч
Решение неравенств с одной переменной (§ 25)	3 ч
Уравнения и неравенства с двумя переменными (§ 26)	1 ч
Системы уравнений (§ 27)	3 ч
Уравнения и неравенства с параметрами (§ 28)	3 ч
Контрольная работа № 9	2 ч
Повторение	**12 ч**

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Мордкович Александр Григорьевич, **Смирнова** Ирина Михайловна
Денищева Лариса Олеговна и др.

МАТЕМАТИКА
10 класс

УЧЕБНИК

для учащихся общеобразовательных учреждений
(базовый уровень)

Генеральный директор издательства *М. И. Безвиконная*
Главный редактор *К. И. Куровский*
Редактор *С. В. Бахтина*
Оформление и художественное редактирование: *Т. С. Богданова*
Технический редактор *И. Л. Ткаченко*
Корректоры *Л. А. Ключникова, Л. В. Дьячкова*
Компьютерная верстка и графика: *А. А. Горкин*

Формат $60\times90^{1}/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Гарнитура «Школьная».
Печать офсетная. Усл. печ. л. 27,0. Тираж 10 000 экз. Заказ № 2841.

Издательство «Мнемозина». 105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел.: 8 (499) 367 5418, 367 5627, 367 6781; факс: 8 (499) 165 9218.
E-mail: ioc@mnemozina.ru
www.mnemozina.ru

Магазин «Мнемозина»
(розничная и мелкооптовая продажа книг, «КНИГА — ПОЧТОЙ»,
ИНТЕРНЕТ-магазин).
105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел./факс: 8 (495) 783 8284; тел.: 8 (495) 783 8285.
E-mail: magazin@mnemozina.ru
www.shop.mnemozina.ru

Торговый дом «Мнемозина» (оптовая продажа книг).
Тел./факс: 8 (495) 665 6031 (многоканальный).
E-mail: td@mnemozina.ru

Отпечатано с готовых файлов заказчика
в ОАО «Первая Образцовая типография»,
филиал «УЛЬЯНОВСКИЙ ДОМ ПЕЧАТИ»
432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14