

С. А. Шестаков, И. Р. Высоцкий, Л. И. Звавич

СБОРНИК ЗАДАЧ

ДЛЯ ПОДГОТОВКИ И ПРОВЕДЕНИЯ
ПИСЬМЕННОГО ЭКЗАМЕНА ПО АЛГЕБРЕ
ЗА КУРС ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

9

КЛАСС

Учебное издание

С. А. Шестаков, И. Р. Высоцкий, Л. И. Звавич

Сборник задач
для подготовки и проведения
письменного экзамена по алгебре
за курс основной школы

9 класс

Под редакцией С. А. Шестакова

Редакция «Образовательные проекты»

Общероссийский классификатор продукции ОК-005-93, том 2;
953005 — литература учебная

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.02.953.Д.003857.05.06 от 05.05.2006 г.

ООО «Издательство Астрель»
129085, Москва, пр-д Ольминского, д. 3а

ООО «Издательство АСТ»
170002, РФ, г. Тверь, пр-т Чайковского, д. 27/32

Наши электронные адреса: www.ast.ru
E-mail: astpub@aha.ru

ОАО «Владимирская книжная типография»
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7.
Качество печати соответствует качеству предоставленных диапозитивов

По вопросам приобретения книг обращаться по адресу:
129085, Москва, Звездный бульвар, дом 21, 7 этаж
Отдел реализации учебной литературы
«Издательской группы АСТ»
Справки по телефону: (495) 615-53-10, факс 232-17-04

Под редакцией С. А. Шестакова

2-е издание, исправленное

Допущено Министерством образования и науки Российской Федерации
в качестве учебного пособия по алгебре
для учащихся 9 классов общеобразовательных учреждений



АСТ • Астрель
Москва • 2008

Рецензенты:

- Т. П. Григорьева**, доцент кафедры теории и методики обучения математике
Нижегородского педагогического университета;
Л. Г. Ершова, учитель математики Нижегородской гуманитарной
художественной школы им. М. В. Ломоносова;
Л. А. Жигулев, зав. кабинетом математики Санкт-Петербургской
академии постдипломного педагогического образования

*Сборник разработан при методической поддержке
Московского института открытого образования
и Московского центра непрерывного математического образования
(научный руководитель проекта —
зав. кафедрой математики МИОО, к. ф.-м. н. И. В. Яценко)*

*Разработка оригинал-макета осуществлена с использованием оригинальных
технологий учебно-издательского центра «Интерактивная линия»*

Шестаков, С. А.

- Ш51 Сборник задач для подготовки и проведения письменного
экзамена по алгебре за курс основной школы : 9-й кл. /
С. А. Шестаков, И. Р. Высоцкий, Л. И. Звавич; под ред.
С. А. Шестакова. — 2-е изд., испр. — М.: АСТ: Астрель,
2008. — 255, [1] с.

ISBN 978-5-17-033617-3 (ООО «Издательство АСТ»)

ISBN 978-5-271-12877-6 (ООО «Издательство Астрель»)

Сборник предназначен для подготовки и проведения итоговой аттестации
по математике выпускников основной школы. Он может быть использован в
учебном процессе, для организации итогового повторения курса алгебры 7–9,
тематического и рубежного контроля. В качестве приложения в сборник вклю-
чены задачи по геометрии. Все задачи классифицированы по содержатель-
ным линиям и дифференцированы по четырем уровням сложности.

УДК 373:512
ББК 22.14я72

Подписано в печать 04.05.2007. Формат 60х90¹/₁₆.
Усл. печ. л. 16,0. Доп. тираж 15 000 экз. Заказ № 4967.

ISBN 978-5-17-033617-3 (ООО «Издательство АСТ»)

ISBN 978-5-271-12877-6 (ООО «Издательство Астрель»)

© ООО «Издательство Астрель», 2004
© Интерактивная линия, 2004

ПРЕДИСЛОВИЕ

О назначении сборника

Сборник предназначен для подготовки и проведения итоговой аттестации по математике выпускников основной школы. Структура и содержание сборника учитывают традиции российского математического образования и реалии современного образовательного процесса. Сборник позволяет проводить независимую от учебника, по которому ведется преподавание, диагностику знаний учащихся с эффективным выявлением проблемных зон, выстраивать индивидуальные образовательные траектории, продуктивно реализовывать уровневую дифференциацию. Сборник может быть использован в учебном процессе, для организации итогового повторения курса алгебры 7–9, тематического и рубежного контроля. Он составлен с учетом развития профильного образования и предпрофильной подготовки в основной школе и обеспечивает подготовку к продолжению образования в старшей школе в соответствии с выбранным профилем.

О структуре сборника

В сборнике – девять глав: “Числовые выражения”, “Буквенные выражения”, “Уравнения”, “Неравенства”, “Системы уравнений”, “Системы неравенств”, “Функции и графики”, “Текстовые задачи”, “Прогрессии”. В первых восьми главах – по 3 параграфа, в последней – один параграф.

В качестве приложений в сборник включены главы “Задачи по геометрии” (Приложение 1) и “Задачи по теории вероятностей и статистике” (Приложение 2), а также примерные варианты экзаменационных работ по алгебре (Приложение 3). Задачи по теории вероятностей и статистике и задачи по геометрии не предназначены для включения в варианты экзаменационных работ в настоящее время.

Задания дифференцированы по уровням А, В, С и D в порядке возрастания сложности.

В каждом параграфе – 80 задач (сгруппированных по две): 20 задач уровня А, 20 задач уровня В, 20 задач уровня С, 20 задач уровня D. Исключение составляет приложение 1 – глава “Задачи по геометрии”, в параграфах которой содержится

по 30 задач каждого уровня (120 задач в параграфе). Наличие этой главы в сборнике придает ему определенную универсальность как единому сборнику экзаменационных материалов по математике для выпускников основной школы и позволяет использовать его, в частности, для подготовки и проведения устного экзамена по геометрии.

Первый параграф каждой из глав 1-6 посвящен целым числам или целым алгебраическим выражениям, второй параграф – дробным числам или алгебраическим дробям, третий параграф – квадратным корням или иррациональным выражениям. Это позволяет организовать отбор задач для экзаменационных работ как по содержательным (главы), так и по функциональным (параграфы) линиям.

Информация о типе и уровне задачи содержится в ее номере. Например, задача 3.2.C08 – это восьмая по счету задача уровня С параграфа 2 главы 3, т.е. задача по теме “Рациональные уравнения”.

Такая структура позволяет, с одной стороны, сделать требования, предъявляемые к аттестации, прозрачными и понятными и, с другой стороны, организовать обобщающее итоговое повторение, систематизацию и итоговый контроль знаний учащихся – как тематический, так и комплексный (в том числе с учетом уровневой дифференциации).

О структуре экзаменационных работ по алгебре и критериях их оценки

Экзаменационная работа по алгебре для учащихся общеобразовательных классов компонуется из 10 задач глав 1-9. Каждая экзаменационная работа состоит из 6 задач уровня А, 2 задач уровня В и 2 задач уровня С, причем семь из восьми задач уровней А и В выбираются по одной в каждой из глав 1-7, а еще одна задача – либо в главе 8 “Текстовые задачи”, либо в главе 9 “Прогрессии”. Задания 9-10 (задачи уровня С) выбираются в двух из тех шести глав, в которых были выбраны задания уровня А.

Как уже отмечалось, сборник составлен с учетом развития профильного образования и предпрофильной подготовки в основной школе. Он предусматривает, в частности, возможность проведения итоговой аттестации в классах с углубленным изучением математики. Работа по алгебре для учащихся

классов с углубленным изучением математики включает 10 задач: 6 задач уровня В, 2 задачи уровня С и 2 задачи уровня Д. Для каждой экзаменационной работы семь из восьми задач уровней В и С выбираются по одной в каждой из глав 1-7, а еще одна задача – либо в главе 8 “Текстовые задачи”, либо в главе 9 “Прогрессии”. Задания 9-10 (задачи уровня Д) выбираются в двух из тех шести глав, в которых были выбраны задания уровня В.

Задания по темам “Системы иррациональных уравнений” (§3 главы 5), “Иррациональные неравенства и системы иррациональных неравенств” (§3 главы 4 и §3 главы 6) в варианты экзаменационных работ для общеобразовательных классов не включаются.

Оценка “3” ставится, если верно решено не менее 5 задач, оценка “4” – если верно решено не менее 7 задач, оценка “5” – если верно решено не менее 9 задач.

Таким образом, для получения оценки “3” в общеобразовательном классе достаточно решить только задания уровня А, для получения оценки “4” необходимо наряду с заданиями уровня А решить хотя бы одну задачу более высокого уровня сложности, а получение оценки “5” невозможно без решения хотя бы одной задачи уровня С.

О заданиях сборника

Задания сборника составлены в соответствии с действующими учебниками и нормативными документами. При их составлении учитывался опыт и результаты международных исследований (“TIMSS”, “PISA”), проводимых в нашей стране (в частности, особое внимание уделено задачам практического и экономического характера, чтению и построению графиков, задачам, связанным с выдвижением и проверкой гипотез, т.е. тем разделам, по которым результаты российских школьников традиционно сравнительно невысоки).

Всего в сборнике – 2440 задач, сгруппированных по две под одним номером.

При отборе заданий и отнесении каждого из них к тому или иному уровню сложности авторы руководствовались следующими принципами.

Задания уровня А (уровень “тройки”) предназначены для проверки достижения школьниками уровня стандартов и соответствуют обязательному минимуму содержания основного

общего образования по предмету. Задания этого уровня предполагают однократное или двукратное применение не более двух основных формул или свойств. Так, из формул сокращенного умножения достаточно знать только формулы квадрата суммы (разности) и разности квадратов.

Задания уровня В (уровень “четверки”) схожи с заданиями уровня А, но номенклатура формул несколько расширена (в частности, включены задачи на применение формул сокращенного умножения для третьих степеней) и на одно-два увеличено число действий.

Задания уровня С (уровень “пятерки”) предполагают проверку более глубокого и полного усвоения учащимися основных разделов программы. По уровню технических сложностей эти задания отличаются от заданий уровня В незначительно, но для их выполнения требуется более высокая степень владения материалом, понимания и осмысленности действий по сравнению с заданиями уровня В.

Обратим внимание на то, что хотя в сборник и включены параграфы с уравнениями и неравенствами, содержащими переменную под знаком корня, задачи этих параграфов не предполагают знакомства учащихся с методами решения иррациональных уравнений и неравенств: они составлены так, что для решения любой из этих задач достаточно знания свойств числовых неравенств, а также определения и свойств квадратного корня.

Подчеркнем и то, что для решения целых и рациональных неравенств уровней А, В и С знание метода интервалов не обязательно.

Задания уровня D предназначены для более полного обеспечения потребностей предпрофильной подготовки и в экзаменационные материалы для общеобразовательных классов включаться не будут. Эти задания предполагают знакомство учащихся с методами и идеями, необходимыми для дальнейшего успешного углубленного изучения математики. Отметим, что вычислительные сложности в большинстве задач минимизированы (за исключением нескольких задач на преобразование выражений, проверяющих именно умение выполнять преобразования).

В сборник не включались задания с многоходовым решением, предполагающим неоднократное использование одной и той же формулы или дублирование нескольких однотипных

преобразований, поскольку если какое-то из них выполнено верно, а в другом допущена ошибка, сделать однозначный вывод об овладении тем или иным навыком невозможно.

Вместе с тем, даже среди заданий уровня А есть несколько элементарных задач, решение которых требует рассмотрения двух случаев или выбора правильного ответа посредством последовательного исключения неправильных. Наличие таких задач обусловлено общим концептуальным подходом, требующим на уровне функциональной грамотности умения в простейших случаях анализировать, интерпретировать и систематизировать информацию, делать выводы и принимать решения.

Такой подход призван способствовать возвращению математике ее важнейшей образовательной функции, заключающейся в развитии универсальных (общих) способностей, которые могут применяться учащимися в различных областях знаний и сферах деятельности.

Сборник является частью учебно-методического комплекса, включающего комплект из шести рабочих тетрадей (“Числовые и буквенные выражения”, “Уравнения и системы уравнений”, “Неравенства и системы неравенств”, “Функции и графики”, “Текстовые задачи. Прогрессии”, “Планиметрия”), книгу для учителя и электронное учебное пособие, разработанные по оригинальным технологиям учебно-издательского центра “Интерактивная линия”.

Издание осуществлено при методической поддержке кафедры математики Московского института открытого образования и Московского центра непрерывного математического образования (научный руководитель проекта - зав. кафедрой математики МИОО, к.ф.-м.н. И.В. Яценко).

Авторы будут признательны за конструктивную критику, которая может способствовать совершенствованию сборника и комплекса в целом. В этой связи нельзя не поблагодарить рецензентов секции математики Федерального экспертного совета - доцента кафедры теории и методики обучения математике Нижегородского государственного педагогического университета Т.П. Григорьеву, зав. кафедрой теории и методики обучения математике в школе Московского городского педагогического университета, доцента Л.О. Денищеву, учителя математики Нижегородской гуманитарной художественной школы им. М.В. Ломоносова Л.Г. Ершову, зав. кабинетом математики

Санкт-Петербургской Академии постдипломного педагогического образования Л. А. Жигулева, многие замечания и пожелания которых были учтены при окончательной доработке книги. Авторы особо признательны декану математического факультета Нижегородского государственного педагогического университета, профессору, д.п.н. Е. Н. Перевощиковой, внимательно и неравнодушно прочитавшей рукопись и сделавшей ряд ценных замечаний и предложений по отдельным задачам и улучшению сборника в целом.

В заключение – слова благодарности методистам и педагогическому активу города Москвы, чье деятельное и заинтересованное участие в немалой степени способствовало формированию структуры и содержания сборника. Это – Н. П. Адамская, А. В. Алферов, А. А. Арбузова, Г. А. Асрян, Т. П. Афанасьева, Т. Ф. Бабакина, С. Б. Бархатова, Н. Б. Беспятова, К. В. Бохонова, Г. И. Герасимова, А. А. Горбачевская, Н. В. Гришкова, И. С. Гущина, Л. А. Дрогунова, Т. Н. Епифанова, Т. Н. Забелло, Р. Ж. Измествьева, М. М. Калика, В. Н. Карпов, Н. Г. Кованая, В. В. Козлова, И. В. Колчина, И. В. Комисарова, Е. И. Константинова, Т. В. Кочеткова, Н. В. Красильникова, О. М. Ларцева, О. В. Лебедева, Н. Е. Левинтова, М. А. Леонова, И. В. Малышева, М. В. Мартьянова, Л. И. Медведь, О. Ю. Морозова, Д. Б. Невидимый, Л. С. Петухова, Б. П. Пигарев, Т. К. Полева, Л. Л. Равская, А. Р. Рязановский, С. М. Саакян, Л. Г. Савина, Е. А. Савко, Т. Б. Сальникова, Г. В. Самойлик, Н. В. Сафонова, П. В. Семенов, Н. Л. Сергеева, В. А. Сеница, А. В. Солопова, Л. А. Солуковцева, Н. В. Стоенко, Т. В. Симкина, Г. А. Тикунова, М. Г. Трошина, С. В. Тумасова, Е. Н. Устинова, Л. В. Федотова, Т. М. Филиппычева, Е. В. Хлебнова, Н. В. Хренова, А. В. Цибульник, М. А. Черняева, В. И. Чика, О. А. Шадрикова, Л. М. Шестопалова, Л. Н. Шмелева, С. П. Шорина, И. И. Юдина, Е. В. Юрченко, Р. И. Якушина.

Особая благодарность – тем, кто принимал непосредственное участие в создании всего комплекса: Е. С. Епифановой, В. Е. Зайцеву, С. С. Крылову, М. А. Левинской, С. О. Прилуцкому, В. А. Прядко, С. В. Станченко, В. В. Тимохину, Э. Е. Фоминовой, П. С. Шестакову.

Авторы

1

ГЛАВА

ЧИСЛОВЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

§ 1. Действия с целыми числами

Уровень А

- 1.1.A01** Найдите значение выражения:
а) $564 \cdot 645 - 563 \cdot 645 + 563355$;
б) $598 \cdot 985 - 597 \cdot 985 + 597015$.
- 1.1.A02** Найдите значение выражения:
а) $(735 + 728)^2 - 4 \cdot 735 \cdot 728$;
б) $(744 + 740)^2 - 4 \cdot 744 \cdot 740$.
- 1.1.A03** Найдите значение выражения:
а) $(306 - 694)^2 + 4 \cdot 306 \cdot 694$;
б) $(414 - 586)^2 + 4 \cdot 414 \cdot 586$.
- 1.1.A04** Найдите значение выражения:
а) $(162^2 - 161^2) : 323$;
б) $(133^2 - 132^2) : 265$.
- 1.1.A05** Найдите значение выражения:
а) $584 + 583^2 - 584^2 + 583$;
б) $675 + 674^2 - 675^2 + 674$.
- 1.1.A06** а) Запишите выражение $7^{82} \cdot 2^{82}$ в виде квадрата степени с целым показателем.
б) Запишите выражение $3^{52} \cdot 5^{52}$ в виде квадрата степени с целым показателем.
- 1.1.A07** Сравните:
а) $477 \cdot 960 - 822$ и $477 \cdot 960 - 945$;
б) $950 \cdot 462 - 286$ и $950 \cdot 462 - 491$.
- 1.1.A08** Сравните:
а) 6^{79} и 36^{39} ; б) 2^{99} и 4^{49} .
- 1.1.A09** а) Делится ли $34^{15} + 34^{16}$ на 35?
б) Делится ли $5^{32} + 5^{34}$ на 26?
- 1.1.A10** а) Делится ли $4^{24} + 4^{25} + 4^{26}$ на 21?
б) Делится ли $8^{16} + 8^{17} + 8^{18}$ на 73?

Уровень В

- 1.1.В01** Найдите значение выражения:
а) $5379^2 - 5378 \cdot 5380$; б) $9552 \cdot 9550 - 9551^2$.
- 1.1.В02** Найдите значение выражения:
а) $480^3 - 480^2 - 480 \cdot 479 - 479^2 - 479^3$;
б) $494^3 - 494^2 - 494 \cdot 493 - 493^2 - 493^3$.
- 1.1.В03** Найдите значение выражения:
а) $(5 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 2)(5 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 7) - 597 \cdot 5970$;
б) $(7 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 2)(7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 9) - 759 \cdot 7590$.
- 1.1.В04** Сравните:
а) 2^{99} и 3^{66} ; б) 2^{96} и 3^{64} .
- 1.1.В05** Расположите в порядке убывания числа:
а) $3^{143} \cdot 49^{36}$, 63^{72} , $3^{143} \cdot 7^{71}$; б) $4^{127} \cdot 25^{32}$, 80^{64} , $4^{127} \cdot 5^{63}$.
- 1.1.В06** Сравните:
а) $573 \cdot 575 - 578 \cdot 576$ и $574 \cdot 572 - 577 \cdot 579$;
б) $597 \cdot 599 - 602 \cdot 600$ и $598 \cdot 596 - 601 \cdot 603$.
- 1.1.В07** Найдите последнюю цифру произведения:
а) $262 \cdot 263 \cdot 264 \cdot 266 \cdot 267$;
б) $204 \cdot 206 \cdot 207 \cdot 208 \cdot 209$.
- 1.1.В08** Не вычисляя произведение, проверьте, равны ли:
а) $827 \cdot 278 \cdot 782$ и 179786491 ;
б) $743 \cdot 437 \cdot 374$ и 121434433 .
- 1.1.В09** а) Сравните произведения $688 \cdot 690$ и $689 \cdot 687$, не вычисляя их значений.
б) Сравните произведения $685 \cdot 687$ и $686 \cdot 684$, не вычисляя их значений.
- 1.1.В10** а) Ровно одно из чисел 3326, 3307, 3325, 3321 является простым. Какое это число?
б) Ровно одно из чисел 2966, 2969, 2965, 2961 является простым. Какое это число?

Уровень С

- 1.1.С01** а) Найдите x , если $x^2 = 13889 \cdot 13891 + 1$ и $x < 0$.
б) Найдите x , если $x^2 = 59919 \cdot 59921 + 1$ и $x > 0$.
- 1.1.С02** а) Найдите x , если $x^3 = 301^3 - 3 \cdot 301^2 + 902$.
б) Найдите x , если $x^3 = 201^3 - 3 \cdot 201^2 + 602$.

- 1.1.С03** а) Найдите последнюю цифру числа 749^{49} .
б) Найдите последнюю цифру числа 754^{45} .
- 1.1.С04** а) Найдите последнюю цифру числа 463^{96} .
б) Найдите последнюю цифру числа 687^{92} .
- 1.1.С05** Не вычисляя произведение, сравните:
а) $87 \cdot 88 \cdot 89$ и 891384 ;
б) $95 \cdot 96 \cdot 97$ и 974640 .
- 1.1.С06** Не вычисляя произведение, проверьте, равны ли:
а) $752 \cdot 753 \cdot 754$ и 426957014 ;
б) $771 \cdot 772 \cdot 773$ и 460098866 .
- 1.1.С07** Не вычисляя произведение, проверьте равенство:
а) $529 \cdot 169 \cdot 961 = 299 \cdot 403 \cdot 713$;
б) $121 \cdot 841 \cdot 361 = 319 \cdot 551 \cdot 209$.
- 1.1.С08** а) Найдите остаток от деления натурального числа на 3, если известно, что остаток от деления этого числа на 9 равен 5.
б) Найдите остаток от деления натурального числа на 4, если известно, что остаток от деления этого числа на 8 равен 7.
- 1.1.С09** Найдите значение выражения:
а) $|354 \cdot 352 - 355 \cdot 353| + |354 \cdot 356 - 355 \cdot 353|$;
б) $|265 \cdot 263 - 266 \cdot 264| + |265 \cdot 267 - 266 \cdot 264|$.
- 1.1.С10** а) Найдите число a , если $2a^3 = 321^3 + 321^2 + 321 \cdot 320 + 320^2 + 320^3$.
б) Найдите число a , если $2a^3 = 417^3 + 417^2 + 417 \cdot 416 + 416^2 + 416^3$.

Уровень D

- 1.1.Д01** а) Найдите последнюю цифру числа 872^{113} .
б) Найдите последнюю цифру числа 278^{311} .
- 1.1.Д02** Сравните:
а) 633^{372} и 632^{454} ; б) 436^{436} и 437^{448} .
- 1.1.Д03** а) Существует ли натуральное число, остаток от деления которого на 8 равен 7, а остаток от деления на 4 равен 1?

- б) Существует ли натуральное число, остаток от деления которого на 9 равен 7, а остаток от деления на 3 равен 2?
- 1.1.D04** а) Найдите наименьшее натуральное число, большее 2, остатки от деления которого на 3 и 23 равны 2.
б) Найдите наименьшее натуральное число, большее 6, остатки от деления которого на 7 и 19 равны 6.
- 1.1.D05** а) Найдите наименьшее натуральное число, остатки от деления которого на 19 и 11 равны соответственно 16 и 8.
б) Найдите наименьшее натуральное число, остатки от деления которого на 17 и 13 равны соответственно 15 и 11.
- 1.1.D06** а) Найдите натуральное число a , если из трех следующих утверждений два истинны, а одно — ложно:
1) последней цифрой числа a^{22} является 1;
2) последней цифрой числа a^{44} является 2;
3) a — одно из чисел 639 или 936.
б) Найдите число a , если из трех следующих утверждений два истинны, а одно — ложно:
1) последней цифрой числа a^{36} является 1;
2) последней цифрой числа a^{72} является 2;
3) a — одно из чисел 945 или 549.
- 1.1.D07** а) Найдите натуральное число a , если из трех следующих утверждений два истинны, а одно — ложно:
1) остаток от деления числа a на число 13 равен 9;
2) остаток от деления числа a на число 13 равен 10;
3) a — одно из чисел 61 или 63.
б) Найдите натуральное число a , если из трех следующих утверждений два истинны, а одно — ложно:
1) остаток от деления числа a на число 12 равен 8;
2) остаток от деления числа a на число 12 равен 9;
3) a — одно из чисел 56 или 58.
- 1.1.D08** а) Найдите натуральное число a , если известно, что из следующих утверждений истинны только два:
1) число a делится на 46;
2) остаток от деления числа a на число 23 равен 3;
3) a — одно из чисел 92, 93, 94.

- б) Найдите натуральное число a , если известно, что из следующих утверждений истинны только два:
1) число a делится на 22;
2) остаток от деления числа a на число 11 равен 4;
3) a — одно из чисел 44, 46, 47.
- 1.1.D09** Найдите натуральные числа x и y , если известно, что из следующих трех утверждений два истинны, а одно — ложно:
а) 1) $4x + 9y = 135$; б) 1) $5x + 8y = 120$;
2) $9x + 4y = 135$; 2) $8x + 5y = 120$;
3) $6x + 11y = 240$. 3) $7x + 10y = 195$.
- 1.1.D10** Найдите натуральные числа a и b , если известно, что из четырех следующих утверждений три истинны, а одно — ложно:
а) 1) a делится на $11b$; б) 1) a делится на $5b$;
2) $11b$ делится на a ; 2) $5b$ делится на a ;
3) $27a + 7b = 305$; 3) $15a + 13b = 343$;
4) $11a + 47b = 672$. 4) $19a + 23b = 944$.

§2. Действия с дробями

Уровень А

- 1.2.A01** а) Запишите выражение $\frac{27^{-1} \cdot 9^5}{16^0 \cdot 3^{-3}}$ в виде степени числа 3.
б) Запишите выражение $\frac{9^{-3} \cdot 27^4}{12^0 \cdot 3^{-6}}$ в виде степени числа 3.
- 1.2.A02** а) Запишите выражение $\frac{(2^6)^2 \cdot 128^{-5}}{2^{-43}}$ в виде степени числа 2.
б) Запишите выражение $\frac{(2^9)^6 \cdot 64^{-4}}{2^{42}}$ в виде степени числа 2.
- 1.2.A03** а) Запишите выражение $\frac{10^{-7} \cdot 100^9}{10^9 \cdot 100^{-7}}$ в виде степени числа 10.
б) Запишите выражение $\frac{10^{-8} \cdot 100^6}{10^6 \cdot 100^{-8}}$ в виде степени числа 10.

1.2.A04 Найдите значение выражения:

а) $\frac{3^2 - 0,363^2}{3,363}$; б) $\frac{5^2 - 0,275^2}{5,275}$.

1.2.A05 Найдите значение выражения:

а) $9,4 \cdot 10^{-3} : 10^{-7} : 10^3$; б) $3,6 \cdot 10^{-3} : 10^{-8} : 10^1$.

1.2.A06 Сравните:

а) $56,78 \cdot 10^6$ и $5,687 \cdot 10^7$; б) $4,567 \cdot 10^9$ и $45,76 \cdot 10^8$.

1.2.A07 Сравните:

а) $3,456 \cdot 10^{-5}$ и $345,6 \cdot 10^{-7}$;
б) $259,8 \cdot 10^{-8}$ и $2,598 \cdot 10^{-6}$.

1.2.A08 Верно ли равенство:

а) $(0,69 - 5,01) : 10,8 = (0,008 + 0,242) \cdot (-1,6)$;
б) $(0,79 - 1,81) : 10,2 = (0,031 + 0,219) \cdot (-0,4)$?

1.2.A09 Верно ли равенство:

а) $\left(3\frac{5}{9} - \frac{7}{9}\right) \cdot \frac{9}{25} = \left(\frac{3}{5} + \frac{29}{10}\right) : 3\frac{1}{2}$;
б) $\left(10\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{3}{29} = \left(\frac{4}{5} + \frac{37}{10}\right) : 4\frac{1}{2}$?

1.2.A10 а) Какая из точек числовой оси — $A\left(\frac{32}{33}\right)$ или $B\left(\frac{33}{32}\right)$ — расположена ближе к точке $C(1)$?

б) Какая из точек числовой оси — $A\left(\frac{37}{38}\right)$ или $B\left(\frac{38}{37}\right)$ — расположена ближе к точке $C(1)$?

Уровень В

1.2.B01 Найдите значение выражения:

а) $\frac{2,097 \cdot 79,02}{20,97 \cdot 7,902}$; б) $\frac{3,654 \cdot 45,63}{0,3654 \cdot 4,563}$.

1.2.B02 а) Запишите выражение $(0,24)^5 \left(\frac{25}{6}\right)^{-6} \left(\frac{6}{25}\right)^4$ в виде степени числа $\frac{6}{25}$.

б) Запишите выражение $(0,65)^{-7} \left(\frac{20}{13}\right)^2 \left(\frac{13}{20}\right)^4$ в виде степени числа $\frac{13}{20}$.

1.2.B03 а) Запишите выражение $27^6 \cdot 169^9 : (5^9)^2$ в виде куба степени с натуральным показателем.
б) Запишите выражение $16^6 \cdot 121^{12} : (5^{12})^2$ в виде куба степени с натуральным показателем.

1.2.B04 Восстановите пропущенный показатель степени в равенстве:

а) $\frac{31^{-27} \cdot 31^{28}}{31^{\dots}} = 31^{12}$; б) $\frac{38^{20} \cdot 38^{13}}{38^{\dots}} = 38^{-19}$.

1.2.B05 Найдите значение выражения:

а) $9,1(0,1 : (0,0001 : 100))$; б) $2,3(0,001 : (0,1 : 10000))$.

1.2.B06 Сравните:

а) $(3 \cdot 10^{-2})^3$ и $0,000027$; б) $(11 \cdot 10^{-3})^2$ и $0,000121$.

1.2.B07 а) Сравните произведения $\frac{2}{5} \cdot \frac{11}{19} \cdot \frac{29}{37}$ и $\frac{11}{37} \cdot \frac{29}{5} \cdot \frac{2}{19}$, не находя их значений.

б) Сравните произведения $\frac{2}{7} \cdot \frac{11}{17} \cdot \frac{23}{37}$ и $\frac{11}{37} \cdot \frac{23}{7} \cdot \frac{2}{17}$, не находя их значений.

1.2.B08 Сравните:

а) $\frac{577}{696}$ и $\frac{578}{695}$; б) $\frac{457}{772}$ и $\frac{456}{773}$.

1.2.B09 а) Сравните произведения $\frac{169}{174} \cdot \frac{171}{175}$ и $\frac{170}{173} \cdot \frac{172}{174}$, не находя их значений.

б) Сравните произведения $\frac{271}{276} \cdot \frac{273}{277}$ и $\frac{272}{275} \cdot \frac{274}{276}$, не находя их значений.

1.2.B10 Не вычисляя произведение, проверьте равны ли:

а) $0,9477 \cdot 0,774$ и $0,7335199$;
б) $0,8368 \cdot 0,863$ и $0,7221585$.

Уровень С

1.2.C01 Не вычисляя произведение, проверьте, равны ли:

а) $\frac{1}{155} \cdot \frac{1}{156} \cdot \frac{1}{157}$ и $\frac{1}{3896260}$; б) $\frac{1}{175} \cdot \frac{1}{176} \cdot \frac{1}{177}$ и $\frac{1}{5551600}$.

1.2.C02 а) Верно ли равенство $\frac{19}{196} \cdot \frac{14}{529} \cdot \frac{23}{361} = \frac{1}{6118}$?

б) Верно ли равенство $\frac{19}{256} \cdot \frac{16}{625} \cdot \frac{25}{361} = \frac{1}{7600}$?

- 1.2.C03** Не вычисляя сумму, проверьте, равны ли:
 а) $0,718^2 + 0,871^2 + 0,187^2$ и $1,309135$;
 б) $0,764^2 + 0,476^2 + 0,647^2$ и $1,228882$.
- 1.2.C04** Не вычисляя произведение, сравните:
 а) $0,3916 \cdot 0,619$ и $0,2824004$;
 б) $0,4257 \cdot 0,752$ и $0,2701264$.
- 1.2.C05** Сравните:
 а) $\frac{928}{927}$ и $\frac{929}{928}$; б) $\frac{509}{508}$ и $\frac{510}{509}$.
- 1.2.C06** Сравните:
 а) 7^{-952} и 50^{-476} ; б) 6^{-530} и 37^{-265} .
- 1.2.C07** Не вычисляя произведение, сравните:
 а) $\frac{1}{382} \cdot \frac{1}{383} \cdot \frac{1}{384}$ и $\frac{1}{26481504}$;
 б) $\frac{1}{497} \cdot \frac{1}{498} \cdot \frac{1}{499}$ и $\frac{1}{63205494}$.
- 1.2.C08** а) Какая из точек — $A\left(\frac{1}{65}\right)$ или $B\left(\frac{1}{67}\right)$ — числовой оси расположена дальше от точки $C\left(\frac{1}{66}\right)$?
 б) Какая из точек — $A\left(\frac{1}{52}\right)$ или $B\left(\frac{1}{54}\right)$ — числовой оси расположена дальше от точки $C\left(\frac{1}{53}\right)$?
- 1.2.C09** а) Запишите выражение $\left| \frac{861}{862} - \frac{862}{863} \right|$ в виде разности двух дробей.
 б) Запишите выражение $\left| \frac{852}{853} - \frac{853}{854} \right|$ в виде разности двух дробей.
- 1.2.C10** Расположите в порядке возрастания числа:
 а) $\frac{154}{261}$; $\frac{152}{259}$ и $\frac{153}{260}$; б) $\frac{160}{269}$; $\frac{158}{267}$ и $\frac{159}{268}$.

Уровень D

- 1.2.D01** Найдите значение выражения:
 а) $0,298^3 + 3 \cdot 0,298 \cdot 0,702 + 0,702^3$;
 б) $0,357^3 + 3 \cdot 0,357 \cdot 0,643 + 0,643^3$.

- 1.2.D02** Найдите значение выражения:
 а) $0,613^3 - 0,613^2 + 0,613 \cdot 0,387 - 0,387^2 + 0,387^3$;
 б) $0,453^3 - 0,453^2 + 0,453 \cdot 0,547 - 0,547^2 + 0,547^3$.
- 1.2.D03** Сравните:
 а) $0,123^3 + 0,124^3 + 0,125^3$ и $0,002856$;
 б) $0,131^3 + 0,132^3 + 0,133^3$ и $0,002976$.
- 1.2.D04** Сравните:
 а) $0,195^3 + 0,196^3 + 0,197^3$ и $0,0025684$;
 б) $0,189^3 + 0,188^3 + 0,187^3$ и $0,0025234$.
- 1.2.D05** Сравните:
 а) $\frac{0,943}{0,349 + \frac{1}{0,943 + \frac{1}{0,349}}}$ и $\frac{0,349}{0,943 + \frac{1}{0,349 + \frac{1}{0,943}}}$;
 б) $\frac{0,651}{0,156 + \frac{1}{0,651 + \frac{1}{0,156}}}$ и $\frac{0,156}{0,651 + \frac{1}{0,156 + \frac{1}{0,651}}}$.
- 1.2.D06** Сравните:
 а) $\left(\frac{0,138}{604,2}\right)^7$ и $\left(\frac{60,42}{0,0138}\right)^{-8}$;
 б) $\left(\frac{753,2}{0,579}\right)^{-9}$ и $\left(\frac{0,0579}{75,32}\right)^{10}$.
- 1.2.D07** Сравните:
 а) $(0,349 \cdot 0,049 \cdot 0,009)^4$ и $(0,0349 \cdot 0,0049 \cdot 0,9)^5$;
 б) $(0,169 \cdot 0,069 \cdot 0,009)^6$ и $(0,0169 \cdot 0,0069 \cdot 0,9)^7$.
- 1.2.D08** Сравните:
 а) $\frac{1}{372} + \frac{2}{373} + \frac{3}{374} + \frac{4}{375}$ и $\frac{1}{37}$;
 б) $\frac{1}{482} + \frac{2}{483} + \frac{3}{484} + \frac{4}{485}$ и $\frac{1}{48}$.
- 1.2.D09** а) Верно ли равенство
 $3,9175 \cdot 91,753 \cdot 175,39 \cdot 7539,1 = 3917,5 \cdot 917,53 \cdot 17,539 \cdot 7,5391$?
- б) Верно ли равенство
 $6284,3 \cdot 284,36 \cdot 84,362 \cdot 4,3628 = 6,2843 \cdot 28,436 \cdot 8,4362 \cdot 4362,8$?

- 1.2.D10** а) Найдите число a , если известно, что из следующих трех утверждений два истинны, а одно — ложно:
 1) последняя отличная от нуля цифра десятичной записи числа a^{14} равна 6;
 2) последняя отличная от нуля цифра десятичной записи числа a^{28} равна 4;
 3) a — одно из чисел 0,746; 0,475; 0,761.
 б) найдите число a , если известно, что из следующих трех утверждений два истинны, а одно — ложно:
 1) последняя отличная от нуля цифра десятичной записи числа a^{12} равна 5;
 2) последняя отличная от нуля цифра десятичной записи числа a^{24} равна 4;
 3) a — одно из чисел 0,645; 0,461; 0,656.

§ 3. Действия с корнями

Уровень А

- 1.3.A01** а) Между какими последовательными натуральными числами заключено число $\sqrt{168}$?
 б) Между какими последовательными натуральными числами заключено число $\sqrt{170}$?
- 1.3.A02** Найдите значение выражения:
 а) $\sqrt{65^2 - 56^2}$; б) $\sqrt{58^2 - 42^2}$.
- 1.3.A03** Найдите значение выражения:
 а) $\frac{(13\sqrt{5})^2}{65}$; б) $\frac{(11\sqrt{3})^2}{33}$.
- 1.3.A04** Найдите значение выражения:
 а) $(\sqrt{7} - 6)(6 + \sqrt{7})$; б) $(\sqrt{5} - 4)(4 + \sqrt{5})$.
- 1.3.A05** Внесите множитель под знак корня:
 а) $-6\sqrt{\frac{15}{17}}$; б) $-7\sqrt{\frac{12}{23}}$.
- 1.3.A06** Внесите множитель под знак корня:
 а) $3\sqrt{\frac{15}{13}}$; б) $7\sqrt{\frac{13}{19}}$.
- 1.3.A07** Сократите дробь:
 а) $\frac{\sqrt{567}}{72\sqrt{7}}$; б) $\frac{\sqrt{448}}{40\sqrt{7}}$.

- 1.3.A08** а) Представьте $\frac{1}{\sqrt{11}}$ в виде дроби с целым знаменателем.
 б) Представьте $\frac{1}{\sqrt{19}}$ в виде дроби с целым знаменателем.
- 1.3.A09** Сравните:
 а) $\sqrt{\frac{23}{13}}\sqrt{\frac{7}{11}}$ и $\sqrt{\frac{7}{13}}\sqrt{\frac{23}{11}}$; б) $\sqrt{\frac{17}{31}}\sqrt{\frac{41}{11}}$ и $\sqrt{\frac{41}{31}}\sqrt{\frac{17}{11}}$.
- 1.3.A10** Сравните:
 а) $\sqrt{308} - \sqrt{92}$ и $\sqrt{972} - \sqrt{46}$;
 б) $\sqrt{668} - \sqrt{97}$ и $\sqrt{878} - \sqrt{44}$.

Уровень В

- 1.3.B01** Найдите значение выражения:
 а) $\sqrt{96} + \sqrt{24} - \sqrt{216}$; б) $\sqrt{63} + \sqrt{28} - \sqrt{175}$.
- 1.3.B02** Найдите значение выражения:
 а) $6\sqrt{2} - (\sqrt{8} - (\sqrt{50} - \sqrt{162}))$;
 б) $3\sqrt{2} - (\sqrt{50} - (\sqrt{32} - \sqrt{8}))$.
- 1.3.B03** Найдите значение выражения:
 а) $\sqrt{\sqrt{70} - \sqrt{6}}\sqrt{\sqrt{70} + \sqrt{6}}$;
 б) $\sqrt{\sqrt{26} - \sqrt{10}}\sqrt{\sqrt{26} + \sqrt{10}}$.
- 1.3.B04** Найдите значение выражения:
 а) $\frac{\sqrt{99} + \sqrt{363} - 3\sqrt{11}}{33\sqrt{3}}$; б) $\frac{21\sqrt{7}}{\sqrt{147} + \sqrt{63} - 7\sqrt{3}}$.
- 1.3.B05** Упростите:
 а) $7 \cdot 18^{\frac{1}{2}} + 4 \cdot 32^{\frac{1}{2}} - 8 \cdot 50^{\frac{1}{2}}$; б) $8 \cdot 147^{\frac{1}{2}} + 7 \cdot 75^{\frac{1}{2}} - 6 \cdot 12^{\frac{1}{2}}$.
- 1.3.B06** Упростите:
 а) $\sqrt{4\frac{5}{11}} - \sqrt{7\frac{4}{11}} + \sqrt{1\frac{5}{11}} - \sqrt{3\frac{3}{11}}$;
 б) $\sqrt{1\frac{17}{19}} - \sqrt{2\frac{11}{19}} + \sqrt{1\frac{6}{19}} - \sqrt{3\frac{7}{19}}$.
- 1.3.B07** Упростите:
 а) $\frac{\sqrt{2,8} \cdot \sqrt{4,2}}{\sqrt{0,24}}$; б) $\frac{\sqrt{1,8} \cdot \sqrt{6,3}}{\sqrt{0,14}}$.

1.3.B08 Упростите:

а) $\frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{15}-3\sqrt{5}}$; б) $\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{14}-2\sqrt{7}}$.

1.3.B09 Сравните:

а) $\frac{1}{119} + \frac{1}{125} + \frac{1}{137}$ и $\frac{1}{\sqrt{119}} + \frac{1}{\sqrt{125}} + \frac{1}{\sqrt{137}}$;
 б) $\frac{1}{125} + \frac{1}{133} + \frac{1}{145}$ и $\frac{1}{\sqrt{125}} + \frac{1}{\sqrt{133}} + \frac{1}{\sqrt{145}}$.

1.3.B10 а) Представьте выражение $\frac{37}{9+\sqrt{7}}$ в виде дроби с целым знаменателем.

б) Представьте выражение $\frac{29}{8-\sqrt{6}}$ в виде дроби с целым знаменателем.

Уровень С

1.3.C01 Упростите:

а) $\sqrt{67-16\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{69-16\sqrt{5}}$.

1.3.C02 Сократите дробь:

а) $\frac{17+2\sqrt{30}}{\sqrt{15}+\sqrt{2}}$; б) $\frac{16+2\sqrt{39}}{\sqrt{13}+\sqrt{3}}$.

1.3.C03 Сократите дробь:

а) $\frac{16-2\sqrt{39}}{\sqrt{13}-\sqrt{3}}$; б) $\frac{26-2\sqrt{69}}{\sqrt{23}-\sqrt{3}}$.

1.3.C04 Сократите дробь:

а) $\frac{23\sqrt{23}+2\sqrt{2}}{\sqrt{23}+\sqrt{2}}$; б) $\frac{5\sqrt{5}+3\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

1.3.C05 Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{\sqrt{55} \cdot \sqrt{275} \cdot \sqrt{605}}$; б) $\sqrt{\sqrt{39} \cdot \sqrt{117} \cdot \sqrt{507}}$.

1.3.C06 Сравните:

а) $5^{\frac{1}{2}} + 7^{\frac{1}{2}}$ и $26^{\frac{1}{2}}$; б) $6^{\frac{1}{2}} + 11^{\frac{1}{2}}$ и $37^{\frac{1}{2}}$.

1.3.C07 Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{83+18\sqrt{2}}-\sqrt{2}$; б) $\sqrt{54-14\sqrt{5}}+\sqrt{5}$.

1.3.C08 Сравните:

а) $\sqrt{1,6}-\sqrt{8,1}+\sqrt{6,4}$ и $\frac{3\sqrt{10}}{10}$;
 б) $\sqrt{8,1}-\sqrt{6,4}+\sqrt{1,6}$ и $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

1.3.C09 Сравните:

а) $\sqrt{152 \cdot 155} - 132$ и $\sqrt{154 \cdot 151} - 134$;
 б) $\sqrt{216 \cdot 222} - 187$ и $\sqrt{221 \cdot 215} - 189$.

1.3.C10 Не вычисляя произведение, проверьте, равны ли:

а) $\sqrt{9651 \cdot 6519 \cdot 5196}$ и 575757 ;
 б) $\sqrt{7651 \cdot 6517 \cdot 5176}$ и 518022 .

Уровень D

1.3.D01 Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{19}\sqrt{19+\sqrt{342}}\sqrt{19+\sqrt{342+\sqrt{342}}}\sqrt{19-\sqrt{342+\sqrt{342}}}$;
 б) $\sqrt{23}\sqrt{23+\sqrt{506}}\sqrt{23+\sqrt{506+\sqrt{506}}}\sqrt{23-\sqrt{506+\sqrt{506}}}$.

1.3.D02 Найдите значение выражения:

а) $\frac{38\sqrt{38}+37\sqrt{37}}{\sqrt{38}+\sqrt{37}} - \sqrt{1406} + \frac{2\sqrt{37}}{\sqrt{38}+\sqrt{37}} + \sqrt{1\frac{13}{36}}$;
 б) $\frac{34\sqrt{34}+33\sqrt{33}}{\sqrt{34}+\sqrt{33}} - \sqrt{1122} + \frac{2\sqrt{33}}{\sqrt{34}+\sqrt{33}} + \sqrt{18\frac{7}{9}}$.

1.3.D03 Найдите значение выражения:

а) $(1,953^3 - 3 \cdot 1,953 \cdot 0,953 - 0,953^3)^{\frac{1}{2}}$;
 б) $(1,842^3 - 3 \cdot 1,842 \cdot 0,842 - 0,842^3)^{\frac{1}{2}}$.

1.3.D04 Найдите все пары $(m; n)$ целых чисел m и n , для которых:

а) $m + (3 + \sqrt{2})n = 3\sqrt{2}$;
 б) $(2 + \sqrt{3})m - n = 2\sqrt{3}$.

1.3.D05 Найдите все пары $(a; b)$ целых чисел a и b , для которых:

а) $(a + 3b)\sqrt{3} = (a + b + 2)\sqrt{7}$;
 б) $(a + b + 4)\sqrt{5} = (3a - b)\sqrt{2}$.

1.3.D06 Сравните:

а) $\sqrt{19+\sqrt{15}}$ и $\sqrt{13+\sqrt{21}}$; б) $\sqrt{17+\sqrt{15}}$ и $\sqrt{13+\sqrt{19}}$.

1.3.D07 Сравните:

а) $\sqrt{5680^2 - 5642^2}$ и $\sqrt{5642^2 - 5604^2}$;
 б) $\sqrt{5676^2 - 5638^2}$ и $\sqrt{5638^2 - 5600^2}$.

1.3.D08 Сравните:

- а) $0,815 \cdot 0,015 \cdot 0,005$ и $\sqrt{0,0815 \cdot 0,0015 \cdot 0,5}$;
 б) $0,826 \cdot 0,026 \cdot 0,006$ и $\sqrt{0,0826 \cdot 0,0026 \cdot 0,6}$.

1.3.D09 Сравните:

- $\sqrt{687 \cdot 689} - \sqrt{692 \cdot 690}$ и $\sqrt{688 \cdot 686} - \sqrt{691 \cdot 693}$;
 $\sqrt{865 \cdot 867} - \sqrt{864 \cdot 862}$ и $\sqrt{866 \cdot 864} - \sqrt{863 \cdot 865}$.

1.3.D10 а) Найдите натуральное число b , если известно, что из следующих трех утверждений два истинны, а одно — ложно:

- 1) \sqrt{b} заключен между числами 10 и 11;
- 2) \sqrt{b} больше 12;
- 3) b — одно из чисел 80 или 120.

б) Найдите натуральное число b , если известно, что из следующих трех утверждений два истинны, а одно — ложно:

- 1) \sqrt{b} заключен между числами 28 и 29;
- 2) \sqrt{b} больше 30;
- 3) b — одно из чисел 728 или 840.

2 ГЛАВА

БУКВЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

§ 1. Действия с многочленами

Уровень А

2.1.A01 Вынесите за скобки общий множитель:

- а) $x^{56}y^{54} - x^{55}y^{55}$; б) $x^{34}y^{32} - x^{33}y^{33}$.

2.1.A02 Вынесите за скобки общий множитель:

- а) $x^{79}y^{80} + x^{80}y^{79}$; б) $x^{69}y^{70} + x^{70}y^{69}$.

2.1.A03 Вынесите за скобки общий множитель:

- а) $10x^4y^7z^{10} - x^7y^{10}z^4$; б) $25x^5y^{15}z^{25} - x^{15}y^{25}z^5$.

2.1.A04 Разложите на множители:

- а) $16ay + 3(x + y) + 16ax$; б) $25ay - 2(x + y) + 25ax$.

2.1.A05 Разложите на множители:

- а) $7x - 32z(x - y) - 7y$; б) $11x + 12z(x - y) - 11y$.

2.1.A06 Разложите на множители:

- а) $6a + 13xb - 6b - 13xa$; б) $5a + 14xb - 5b - 14xa$.

2.1.A07 Представьте в виде произведения двух двучленов выражение:

- а) $4xy + 3 + 4x + 3y$; б) $2xy + 3 + 6x + y$.

2.1.A08 Представьте в виде произведения двух двучленов выражение:

- а) $x^2 + 21yz + 7xz + 3xy$; б) $x^2 + 42yz + 6xz + 7xy$.

2.1.A09 Упростите:

- а) $(7p + 2q)^2 + (7p - 2q)^2$; б) $(4p - 5q)^2 + (4p + 5q)^2$.

2.1.A10 Упростите:

- а) $(3d + 5c)^2 - (3d - 5c)^2$; б) $(d + 6c)^2 - (d - 6c)^2$.

Уровень В

2.1.B01 Разложите на множители:

- а) $x^2 - 8x + 7$; б) $x^2 + 8x + 12$.

2.1.B02 Разложите на множители:

- а) $2m^2 + 5m + 3$; б) $4m^2 + 9m + 5$.

- 2.1.B03** Разложите на множители:
а) $-5x - 6x^2 + 4$; б) $x - 10x^2 + 2$.
- 2.1.B04** Разложите на множители:
а) $12ax + 11by + 5(x - y) - 12ay - 11bx$;
б) $10ax + 13by - 7(x - y) - 10ay - 13bx$.
- 2.1.B05** Разложите на множители:
а) $x^8 - 5x^7 + 6x^6$; б) $x^6 + 9x^5 + 20x^4$.
- 2.1.B06** а) Найдите $p(a)$, если $p(a - 3) = 8a + 11$.
б) Найдите $p(b)$, если $p(b - 5) = 7b + 12$.
- 2.1.B07** а) Найдите значение выражения $2x_1 + 3x_1x_2 + 2x_2$, если x_1 и x_2 — два различных корня уравнения $x^2 + 5x + 2 = 0$.
б) Найдите значение выражения $3x_1 + 2x_1x_2 + 3x_2$, если x_1 и x_2 — два различных корня уравнения $x^2 - 3x - 5 = 0$.
- 2.1.B08** а) Найдите значение выражения $x_1(4x_2 + 3) + x_2(4x_1 + 3)$, если x_1 и x_2 — два различных корня уравнения $x^2 + 5x - 1 = 0$.
б) Найдите значение выражения $x_1(3x_2 + 2) + x_2(3x_1 + 2)$, если x_1 и x_2 — два различных корня уравнения $x^2 - 3x + 1 = 0$.
- 2.1.B09** а) Найдите значение выражения $16a^2 - 24ab + 9b^2 - 4a + 3b$, если $a = \frac{3}{4}b$.
б) Найдите значение выражения $9a^2 + 30ab + 25b^2 + 3a + 5b$, если $a = -\frac{5}{3}b$.
- 2.1.B10** а) Даны два многочлена $A(y) = 3y^2 + 4y - 1$ и $B(y) = 4y - 5$. Представьте в виде многочлена стандартного вида выражение $A(y) \cdot B(y)$.
б) Даны два многочлена $A(y) = 5y^2 - 4y + 3$ и $B(y) = 3y + 4$. Представьте в виде многочлена стандартного вида выражение $A(y) \cdot B(y)$.

Уровень С

- 2.1.C01** Разложите на множители:
а) $3x^2 - 11xy - 4y^2$; б) $6y^2 + 11xy - 2x^2$.
- 2.1.C02** а) Найдите значение выражения $25a^2 - 40ab + 16b^2 + 5a - 4b$, если $a = \frac{4b - 1}{5}$.
б) Найдите значение выражения $9a^2 + 12ab + 4b^2 + 9a + 6b$, если $a = -\frac{2b + 3}{3}$.
- 2.1.C03** а) Найдите все пары чисел x и y , для каждой из которых значение выражения $(x + y)^2 - 10x + 4y - 2xy + 29$ равно нулю.
б) Найдите все пары чисел x и y , для каждой из которых значение выражения $(x - y)^2 + 2x + 4y + 2xy + 5$ равно нулю.
- 2.1.C04** а) Может ли выражение $9x^4 - 48x^3 + 64x^2$ принимать отрицательные значения? Найдите значение этого выражения при $x = 2\frac{2}{3}$.
б) Может ли выражение $25x^4 - 90x^3 + 81x^2$ принимать отрицательные значения? Найдите значение этого выражения при $x = 1\frac{4}{5}$.
- 2.1.C05** а) Существуют ли значения x и y , при которых значение выражения $-17x^2 + 56xy - 49y^2$ положительно?
б) Существуют ли значения x и y , при которых значение выражения $-25x^2 + 10xy - 9y^2$ положительно?
- 2.1.C06** Представьте в виде многочлена стандартного вида выражение:
а) $(x^2 + 5x - 4)^2$; б) $(x^2 - 3x + 2)^2$.
- 2.1.C07** а) Найдите значение выражения $x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2$, если x_1 и x_2 — два различных корня уравнения $x^2 - 4x - 2 = 0$.
б) Найдите значение выражения $x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2$, если x_1 и x_2 — два различных корня уравнения $x^2 - 6x - 3 = 0$.

2.1.C08 а) Значение выражения $ax + by$ при $x = 4, y = 6$ равно 72.
Найдите значение этого выражения при $x = \frac{1}{6}, y = \frac{1}{4}$.

б) Значение выражения $ax - by$ при $x = 3, y = 8$ равно 48.
Найдите значение этого выражения при $x = \frac{1}{8}, y = \frac{1}{3}$.

2.1.C09 а) Представьте трехчлен $36w^4 - 61w^2 + 25$ в виде произведения многочленов первой степени.

б) Представьте трехчлен $25w^4 - 89w^2 + 64$ в виде произведения многочленов первой степени.

2.1.C10 а) Найдите наибольшее значение выражения
 $5x^2 + 4xy - 5y^2$, если $2x - y = 1$.

б) Найдите наибольшее значение выражения
 $x^2 - 4xy + y^2$, если $x - y = 3$.

Уровень D

2.1.D01 а) Найдите наименьшее значение выражения
 $(x - 2y + 1)^2 + (x + 2y - 3)^2 + 5$.

При каких значениях x и y это значение достигается?

б) Найдите наибольшее значение выражения
 $7 - (2x - y - 1)^2 - (x + y - 2)^2$.

При каких значениях x и y это значение достигается?

2.1.D02 Разложите на множители:

а) $u^2 + 3uv + 4u - 6v - 12$; б) $v^2 - 2uv - 2v - 6u - 15$.

2.1.D03 а) Найдите значение выражения

$u^2 + 4u + 4uv + 8v + 4v^2$, если $u = -\frac{1}{3}x - 1, v = \frac{1}{6}x - \frac{5}{2}$.

б) Найдите значение выражения

$9u^2 - 9u + 24uv - 12v + 16v^2$, если $u = -\frac{2}{3}x + \frac{3}{7}, v = \frac{1}{2}x - \frac{4}{7}$.

2.1.D04 а) Не выполняя умножения многочленов

$p(x) = 3 + 2x - 4x^3$ и $q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x - 17$,

найдите сумму всех коэффициентов произведения
 $p(x) \cdot q(x)$.

б) Не выполняя умножения многочленов

$p(x) = 3 - 2x + 3x^3$ и $q(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 16$,

найдите сумму всех коэффициентов произведения
 $p(x) \cdot q(x)$.

2.1.D05 а) Значение выражения $ax^2 + by^2 + cz^2$ при $x = 5, y = -3, z = -2$ равно 16. Найдите значение данного выражения при $x = \frac{25}{4}, y = -\frac{15}{4}, z = -\frac{5}{2}$.

б) Значение выражения $ax^2 + by^2 + cz^2$ при $x = 4, y = -3, z = 2$ равно 4. Найдите значение данного выражения при $x = 10, y = -\frac{15}{2}, z = 5$.

2.1.D06 а) Найдите наибольшее значение y , при котором значение выражения $x^2 + 4xy + 11y^2 + 8x + 44y$ равно -37 .

б) Найдите наибольшее значение y , при котором значение выражения $x^2 + 4xy + 7y^2 - 8x - 28y$ равно -25 .

2.1.D07 а) Найдите значение выражения $7x - 11y + 9z$, если $x + 3y + 3z = 6, 2x - 2y + 3z = -1$.

б) Найдите значение выражения $7x + 10y - z$, если $x - 2y - z = 5, 3x + 2y - z = -6$.

2.1.D08 а) Найдите значение выражения $-6x + 9y + 2z$, если $x - 3y = 1, 3x - 2z = -6$.

б) Найдите значение выражения $-4x + y - 2z$, если $2x - y = 6, x + z = -3$.

2.1.D09 а) Найдите многочлен $P(x)$, если из следующих трех утверждений два истинны, а одно — ложно:

1) $P(2 + \sqrt{2}) = P(3 + \sqrt{3}) = P(\sqrt{3} - 2)$;

2) $P(x)$ — многочлен второй степени;

3) $P(x)$ — один из многочленов $2x + 1$ или $3x^2 + 4x - 5$.

б) Найдите многочлен $P(x)$, если из следующих трех утверждений два истинны, а одно — ложно:

1) $P(2 - \sqrt{2}) = P(3 - \sqrt{3}) = P(\sqrt{3} + 2)$;

2) $P(x)$ — многочлен второй степени;

3) $P(x)$ — один из многочленов $5x + 4$ или $2x^2 + x - 1$.

2.1.D10 а) Найдите многочлен $P(x)$, если из следующих трех утверждений два истинны, а одно — ложно:

1) $P(-4) = -12; P(-8) = -24$;

2) $P(x)$ — многочлен первой степени;

3) $P(x)$ — один из многочленов $3x$ или $x^2 + 15x + 32$.

б) Найдите многочлен $P(x)$, если из следующих трех утверждений два истинны, а одно — ложно:

1) $P(1) = -5$; $P(2) = -10$;

2) $P(x)$ — многочлен первой степени;

3) $P(x)$ — один из многочленов $-5x$ или $x^2 - 8x + 2$.

§ 2. Действия с алгебраическими дробями

Уровень А

2.2.A01 Сократите дробь:

а) $\frac{4x^2 - x}{6x}$;

б) $\frac{x^2 + 2x}{7x}$.

2.2.A02 Сократите дробь:

а) $\frac{14x - 14y}{8x - 8y}$;

б) $\frac{8x - 8y}{6x - 6y}$.

2.2.A03 Сократите дробь:

а) $\frac{15x^4y^6z^9}{5x^3y^2z^4}$;

б) $\frac{54x^7y^3z^5}{6x^2yz^4}$.

2.2.A04 Сократите дробь:

а) $\frac{49x^2 - 36y^2}{6y + 7x}$;

б) $\frac{64x^2 - 25y^2}{5y + 8x}$.

2.2.A05 Сократите дробь:

а) $\frac{25a^2 - 16b^2}{(4b - 5a)^2}$;

б) $\frac{9a^2 - 49b^2}{(7b + 3a)^2}$.

2.2.A06 Сократите дробь:

а) $\frac{24x^{10} - 24y^{24}}{10y^{24} - 10x^{10}}$;

б) $\frac{18x^{12} - 18y^{18}}{12y^{18} - 12x^{12}}$.

2.2.A07 Сократите дробь:

а) $\frac{9y - 9z}{15xz - 15xy}$;

б) $\frac{6y - 6z}{16xz - 16xy}$.

2.2.A08 Упростите:

а) $\frac{x^5}{5y^5z^4} \cdot \frac{25y^{10}z^7}{7x^{11}}$;

б) $\frac{x^7}{7y^5z^3} \cdot \frac{21y^7z^7}{5x^{11}}$.

2.2.A09 Выразите переменную b из формулы:

а) $S = \frac{5a - 3b}{7h}$;

б) $S = \frac{4a + 3b}{3h}$.

2.2.A10 Найдите при $y \neq 0$ значение выражения:

а) $\frac{9x}{8y} + \frac{16y - 9x}{8y}$;

б) $\frac{2x}{3y} + \frac{9y - 2x}{3y}$.

Уровень В

2.2.B01 Сократите дробь:

а) $\frac{x^{23}y^{23} + x^9y^{55}}{x^{15}y + xy^{33}}$;

б) $\frac{x^{20}y^{20} + x^8y^{48}}{x^{13}y + xy^{29}}$.

2.2.B02 Сократите дробь:

а) $\frac{20x^{21}y^{12} - 13x^{20}y^{13}}{20x^{17} - 13xy^{16}}$;

б) $\frac{23x^{24}y^5 - 5x^{23}y^6}{23x^{15} - 5y^{14}}$.

2.2.B03 Сократите дробь:

а) $\frac{x^3 - 125y^3}{x - 5y}$;

б) $\frac{216x^3 - y^3}{6x - y}$.

2.2.B04 Сократите дробь:

а) $\frac{x^3 - 64y^3}{4y - x}$;

б) $\frac{27x^3 - y^3}{y - 3x}$.

2.2.B05 Сократите дробь:

а) $\frac{27x^3 + 8y^3}{9x^2 - 6xy + 4y^2}$;

б) $\frac{8x^3 + 125y^3}{4x^2 - 10xy + 25y^2}$.

2.2.B06 Упростите:

а) $\frac{6y^4x^3}{3z^4} : \frac{36y^5x^4}{21z^5}$;

б) $\frac{5y^5x}{3z^9} : \frac{25y^6x^2}{12z^8}$.

2.2.B07 Упростите:

а) $(7x - y) \cdot \frac{7y}{49x^2 - y^2}$;

б) $(2x + y) \cdot \frac{5y}{4x^2 - y^2}$.

2.2.B08 Упростите:

а) $\frac{3x - 8}{x - y - 2} - \frac{x - 4y}{2 + y - x}$;

б) $\frac{2x - 21}{x - y - 3} - \frac{5x - 7y}{3 + y - x}$.

2.2.B09 Упростите:

а) $\frac{4x}{7y + 2x} - \frac{2x - 7y}{2x + 7y}$;

б) $\frac{3x}{7y + 4x} - \frac{11x + 14y}{4x + 7y}$.

2.2.B10 Упростите:

а) $(4x^2 - 25y^2) \left(\frac{1}{2x + 5y} + \frac{1}{2x - 5y} \right)$;

б) $(9x^2 - 16y^2) \left(\frac{1}{3x - 4y} - \frac{1}{3x + 4y} \right)$.

Уровень С

2.2.C01 Упростите:

а) $\left(\frac{3x^2y^5}{5z^6} \right)^5 \cdot \left(\frac{25z^5}{9x^2y^6} \right)^3$;

б) $\left(\frac{4xy^4}{5z^5} \right)^5 \cdot \left(\frac{25z^4}{16xy^5} \right)^3$.

2.2.C02 Упростите:

а) $(6y - x) : \left(\frac{1}{x - 2y} + \frac{1}{x - 3y} - \frac{x + y}{x^2 - 5xy + 6y^2} \right);$

б) $(2x - 3y) : \left(\frac{1}{2x + y} - \frac{1}{3x - y} + \frac{x - y}{6x^2 + xy - y^2} \right).$

2.2.C03 Упростите:

а) $(25x^2y - 40xy^2 + 16y^3) \cdot \frac{2}{25x^2y - 16y^3};$

б) $(4x^2y - 28xy^2 + 49y^3) \cdot \frac{3}{4x^2y - 49y^3}.$

2.2.C04 Упростите:

а) $\frac{4x^2 - y^2 + 14y - 49}{2x - y + 7};$ б) $\frac{36x^2 - y^2 - 12y - 36}{6x + y + 6}.$

2.2.C05 Сократите дробь:

а) $\frac{10y^2 + 9y - 9}{6y^2 + 11y + 3};$ б) $\frac{9y^2 - 6y - 8}{6y^2 - 5y - 4}.$

2.2.C06 Сократите дробь:

а) $\frac{2x^2 + xy - 6y^2}{3y - 2x};$ б) $\frac{3y^2 + 2xy - 8x^2}{4x - 3y}.$

2.2.C07 а) Найдите значение выражения $\frac{5a + 7b}{b}$, если значение выражения $\frac{7a + 5b}{a}$ равно 8.

б) Найдите значение выражения $\frac{3a + 5b}{b}$, если значение выражения $\frac{5a + 3b}{a}$ равно 6.

2.2.C08 а) Значение выражения $\frac{ax - by}{xy}$ при $x = 2, y = 5$ равно 14. Найдите значение этого выражения при $x = 4, y = 10$.

б) Значение выражения $\frac{xy}{ax + by}$ при $x = 3, y = 4$ равно 5. Найдите значение этого выражения при $x = 9, y = 12$.

2.2.C09 а) Найдите все значения, которые может принимать выражение $\frac{b}{a}$, если $a \neq 0$ и $2a^2 + 3ab - 20b^2 = 0$.

б) Найдите все значения, которые может принимать выражение $\frac{a}{b}$, если $b \neq 0$ и $4b^2 - 13ab + 3a^2 = 0$.

2.2.C10 Найдите значение выражения $\frac{x}{y}$, если

а) $\frac{10x^2 - 13xy + 3y^2}{2x^2 - 3y^2} = 4.$ б) $\frac{9x^2 - 8xy - 3y^2}{2x^2 - 3y^2} = 2.$

Уровень D

2.2.D01 а) Найдите значение выражения

$$z^3 + \frac{1}{z^3}, \text{ если } z + \frac{1}{z} = -3.$$

б) Найдите значение выражения

$$z^3 - \frac{64}{z^3}, \text{ если } z - \frac{4}{z} = -2.$$

2.2.D02 а) Найдите все целые значения n , при каждом из которых значение выражения $\frac{12n + 70}{4n + 11}$ является целым числом.

б) Найдите все целые значения n , при каждом из которых значение выражения $\frac{15n + 58}{5n + 9}$ является целым числом.

2.2.D03 а) Найдите значение выражения $\frac{b}{a^2 + 2ab} + \frac{a}{b^2 + 2ab}$, если a и b — два различных корня уравнения $x^2 + 5x - 4 = 0$.

б) Найдите значение выражения $\frac{b}{a^2 + 4ab} + \frac{a}{b^2 + 4ab}$, если a и b — два различных корня уравнения $x^2 + 3x - 5 = 0$.

2.2.D04 а) Найдите значение выражения $\frac{x}{y}$, если $\frac{7x - y}{6x + 5y} = \frac{6x + 5y}{7x - y}$, и $xy < 0$.

б) Найдите значение выражения $\frac{x}{y}$, если $\frac{5x - 3y}{3x + 5y} = \frac{3x + 5y}{5x - 3y}$, и $xy < 0$.

2.2.D05 а) Найдите значение выражения $\frac{3a^3 - 18a - 10}{4a^3 - 24a - 3}$, если a — корень многочлена $P(x) = x^3 - 6x - 2$.

б) Найдите значение выражения $\frac{3a^3 - 12a - 8}{4a^3 - 16a - 11}$, если a — корень многочлена $P(x) = x^3 - 4x - 2$.

2.2.D06 а) Найдите значение выражения $\frac{3a^3 + 5a^2 + 1}{2a^2 + 7a + 2}$, если a — корень уравнения $3x^3 - x^2 - 21x - 5 = 0$.

б) Найдите значение выражения $\frac{2a^3 + 7a^2 + 3}{3a^2 + 5a + 4}$, если a — корень уравнения $2x^3 - 5x^2 - 20x - 13 = 0$.

- 2.2.D07** а) На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{14n+15}{19n+20}$, если известно, что она сократима и n — натуральное число?
 б) На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{13n+14}{20n+21}$, если известно, что она сократима и n — натуральное число?

- 2.2.D08** а) Найдите наибольшее значение выражения

$$\frac{12}{(3x-y)^2 + (x+y-4)^2 + 4}.$$

При каких значениях x и y это значение достигается?

- б) Найдите наибольшее значение выражения

$$\frac{18}{(2x-y)^2 + (x-y+1)^2 + 6}.$$

При каких значениях x и y это значение достигается?

- 2.2.D09** а) Найдите наибольшее значение выражения

$$\frac{6}{(x-y+3)^2 + 3} + \frac{4}{|x+y-5| + 2}.$$

При каких значениях x и y оно достигается?

- б) Найдите наибольшее значение выражения

$$\frac{3}{(x-y+2)^2 + 3} + \frac{8}{|x+y-6| + 4}.$$

При каких значениях x и y оно достигается?

- 2.2.D10** а) Известно, что из следующих трех утверждений два истинны, а одно — ложно:

- 1) наименьшее значение выражения A равно 17;
- 2) наибольшее значение выражения A равно 9;
- 3) A — одно из выражений

$$23 - \frac{16}{(x-12)^2 + 4} \quad \text{или} \quad 5 + \frac{16}{(x-12)^2 + 4}.$$

Какое утверждение является ложным?

- б) Известно, что из следующих трех утверждений два истинны, а одно — ложно:

- 1) наименьшее значение выражения A равно 6;
- 2) наибольшее значение выражения A равно 0;
- 3) A — одно из выражений

$$11 - \frac{9}{(x-2)^2 + 3} \quad \text{или} \quad -3 + \frac{9}{(x-2)^2 + 3}.$$

Какое утверждение является ложным?

§ 3. Действия с иррациональными выражениями

Уровень А

- 2.3.A01** Упростите:

а) $\frac{a\sqrt{35}}{\sqrt{5a}};$

б) $\frac{a\sqrt{21}}{\sqrt{7a}}.$

- 2.3.A02** Упростите:

а) $\frac{b\sqrt{38}}{\sqrt{-19b}};$

б) $\frac{b\sqrt{33}}{\sqrt{-11b}}.$

- 2.3.A03** Упростите:

а) $\frac{\sqrt{91ab}}{\sqrt{13a}};$

б) $\frac{\sqrt{42ab}}{\sqrt{14a}}.$

- 2.3.A04** Упростите:

а) $\frac{\sqrt{70ab}}{\sqrt{-7a}};$

б) $\frac{\sqrt{15ab}}{\sqrt{-5a}}.$

- 2.3.A05** Упростите:

а) $\frac{x-49}{\sqrt{x}-7};$

б) $\frac{x-25}{\sqrt{x}+5}.$

- 2.3.A06** Упростите:

а) $\frac{225-x}{\sqrt{x}-15};$

б) $\frac{x-144}{12-\sqrt{x}}.$

- 2.3.A07** Упростите:

а) $\frac{\sqrt{(x+1)(y+5)}}{\sqrt{x+1}};$

б) $\frac{\sqrt{(x-3)(y-4)}}{\sqrt{x-3}}.$

- 2.3.A08** Упростите:

а) $\frac{\sqrt{49a^2-36}}{\sqrt{7a-6}};$

б) $\frac{\sqrt{25a^2-16}}{\sqrt{5a-4}}.$

- 2.3.A09** Упростите:

а) $\frac{8\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{x}}{x};$

б) $\frac{4\sqrt{x}-7}{\sqrt{x}} + \frac{7\sqrt{x}}{x}.$

- 2.3.A10** Упростите:

а) $(\sqrt{x}+3\sqrt{y})^2 - 6\sqrt{xy};$ б) $(2\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + 4\sqrt{xy}.$

Уровень В

- 2.3.B01** а) Выразите переменную u из формулы $z = \frac{5\sqrt{u+v}}{2w-1}$.
 б) Выразите переменную v из формулы $z = \frac{3\sqrt{u-v}}{5w-3}$.

2.3.B02 Упростите:

а) $\frac{36a^2 - 25b}{6a + 5\sqrt{b}}$;

б) $\frac{49a^2 - 16b}{7a + 4\sqrt{b}}$.

2.3.B03 Упростите:

а) $\frac{\sqrt{(x+3)(y+5)}}{\sqrt{-3-x}}$;

б) $\frac{\sqrt{(x+5)(y+4)}}{\sqrt{-5-x}}$.

2.3.B04 Упростите:

а) $\frac{\sqrt{16a^2 - 81}}{\sqrt{9 - 4a}}$;

б) $\frac{\sqrt{64a^2 - 9}}{\sqrt{3 - 8a}}$.

2.3.B05 Упростите:

а) $\frac{36 + x}{6 - \sqrt{-x}}$;

б) $\frac{64 + x}{8 - \sqrt{-x}}$.

2.3.B06 Упростите:

а) $\frac{x + 121}{\sqrt{-x + 11}}$;

б) $\frac{x + 169}{\sqrt{-x + 13}}$.

2.3.B07 Упростите:

а) $x + \sqrt{(x - 11)^2}$, если $x < 11$;

б) $x - \sqrt{(12 - x)^2}$, если $x > 12$.

2.3.B08 Упростите:

а) $\frac{34\sqrt{x} - x\sqrt{34}}{\sqrt{x} - \sqrt{34}}$;

б) $\frac{46\sqrt{x} - x\sqrt{46}}{\sqrt{x} - \sqrt{46}}$.

2.3.B09 Упростите:

а) $\frac{x + 6\sqrt{x} - 16}{\sqrt{x} + 8} + 2$;

б) $\frac{x - 6\sqrt{x} - 7}{\sqrt{x} + 1} + 7$.

2.3.B10 Упростите:

а) $\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x-25}{\sqrt{x}-5}$;

б) $\frac{x-16}{\sqrt{x}-4} - \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$.

Уровень С

2.3.C01 Упростите:

а) $2\sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-5} + \frac{1}{\sqrt{x}+5}\right) - \frac{100}{x-25}$;

б) $3\sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-4} + \frac{1}{\sqrt{x}+4}\right) - \frac{96}{x-16}$.

2.3.C02 Упростите:

а) $(x - 16y) : \left(\frac{4\sqrt{xy}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{y}}\right) + 4\sqrt{y}$;

б) $(9x - y) : \left(\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{xy}}{\sqrt{y}}\right) - 3\sqrt{x}$.

2.3.C03 Упростите:

а) $\frac{3\sqrt{x^2y} - x\sqrt{25y}}{\sqrt{64x^4y^3}}$, если $x < 0$;

б) $\frac{4\sqrt{x^2y} + x\sqrt{9y}}{\sqrt{x^4y^3}}$, если $x < 0$.

2.3.C04 Упростите:

а) $\sqrt{(2-x)^2} + \sqrt{(6-x)^2}$, если $3 \leq x \leq 5$;

б) $\sqrt{(4-x)^2} - \sqrt{(10-x)^2}$, если $5 \leq x \leq 9$.

2.3.C05 Упростите:

а) $\frac{36x-1}{36x-12\sqrt{x}+1} - \frac{2}{6\sqrt{x}-1}$;

б) $\frac{x-9}{x-6\sqrt{x}+9} - \frac{6}{\sqrt{x}-3}$.

2.3.C06 Упростите:

а) $(5a + 2\sqrt{15ab} + 6b)(5a - 2\sqrt{15ab} + 6b)$;

б) $(2a - 2\sqrt{7ab} + 7b)(2a + 2\sqrt{7ab} + 7b)$.

2.3.C07 а) Найдите $\sqrt{b+30}$, если $\sqrt{b-30} = 2$;б) Найдите $\sqrt{b+28}$, если $\sqrt{b-28} = 5$.2.3.C08 а) Найдите значение выражения $\frac{(\sqrt{c+b} + \sqrt{c-b})^2}{2} + b$, если b и c — соответственно длины катета и гипотенузы прямоугольного треугольника, периметр которого равен 5.б) Найдите значение выражения $\frac{(\sqrt{c-b} + \sqrt{c+b})^2}{2} + b$, если b и c — соответственно длины катета и гипотенузы прямоугольного треугольника, периметр которого равен 11.

2.3.C09 Найдите наименьшее значение выражения:

а) $\sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{y^2 + 81}$; б) $\sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{y^2 + 25}$.

2.3.C10 а) Найдите наибольшее значение выражения

$$12 - \sqrt{x^2 + y^2 + 121}.$$

б) Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 144} - 13.$$

Уровень D

2.3.D01 Упростите:

а) $\left(\frac{x\sqrt{x} - 8}{x - 3\sqrt{x} + 2} - \frac{6\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right)$;

б) $\left(\frac{x\sqrt{x} + 1}{x - \sqrt{x} - 2} + \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} \right) : \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{x} - 2} \right)$.

2.3.D02 Упростите:

а) $\left(\frac{4x\sqrt{y}}{4\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{y\sqrt{x}}{4\sqrt{x} - \sqrt{y}} \right) \cdot \frac{16x - y}{\sqrt{xy^3} + 16\sqrt{x^3y}}$;

б) $\left(\frac{3x\sqrt{y}}{3\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{y\sqrt{x}}{3\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right) \cdot \frac{9x - y}{\sqrt{xy^3} + 9\sqrt{x^3y}}$.

2.3.D03 а) Упростите $\sqrt{x + 2 - 2\sqrt{x + 1}} - \sqrt{x + 1}$, если $x \geq 0$;

б) Упростите $\sqrt{x - 4} - \sqrt{x - 3 - 2\sqrt{x - 4}}$, если $x \geq 5$.

2.3.D04 а) Значение выражения $\sqrt{ax - by + cz}$ при $x = 2$, $y = -5$, $z = 4$ равно 2. Найдите значение этого выражения при $x = 18$, $y = -45$, $z = 36$.

б) Значение выражения $\sqrt{ax + by - cz}$ при $x = 7$, $y = 6$, $z = -4$ равно 5. Найдите значение этого выражения при $x = 28$, $y = 24$, $z = -16$.

2.3.D05 а) Найдите значение выражения

$$\sqrt{\frac{3a - 2b}{2a - 3b}}, \text{ если } \frac{3a + 2b}{2a + 3b} = \frac{8}{7}.$$

б) Найдите значение выражения

$$\sqrt{\frac{2a + 3b}{a - 2b}}, \text{ если } \frac{2a - 3b}{a + 2b} = \frac{3}{5}.$$

2.3.D06 а) Найдите наименьшее значение выражения

$$1 + 2\sqrt{x - y + 1} + 3\sqrt{x - 4y + 3}.$$

При каких значениях x и y оно достигается?

б) Найдите наибольшее значение выражения

$$3 - 2\sqrt{x + y - 1} - \sqrt{4x + y - 3}.$$

При каких значениях x и y оно достигается?

2.3.D07 а) Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{x^2 - 6xy + 9y^2 + 4} + |x + 2y - 10|.$$

При каких значениях x и y оно достигается?

б) Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{4x^2 - 4xy + y^2 + 9} + |2x + y - 8|.$$

При каких значениях x и y оно достигается?

2.3.D08 а) Сравните число x с числом 17, если

$$(y - 3)\sqrt{\frac{x - 16}{y - 3}} = -\sqrt{(x - 16)(y - 3)}.$$

б) Сравните число y с числом 15, если

$$(x - 5)\sqrt{\frac{14 - y}{5 - x}} = -\sqrt{(14 - y)(5 - x)}.$$

2.3.D09 а) Какая из двух точек — $A(\sqrt{a^2 - 36})$ или $B(\sqrt{a^2 + 36})$ — числовой оси расположена ближе к точке $C(a)$, если $a > 6$?

б) Какая из двух точек — $A(\sqrt{a^2 - 25})$ или $B(\sqrt{a^2 + 25})$ — числовой оси расположена ближе к точке $C(a)$, если $a > 5$?

2.3.D10 а) Сравните число x с числом 4, если из следующих трех утверждений два истинны, а одно — ложно:

1) $x < 3$;

2) $\sqrt{(x - 3)(x - 22)} = \sqrt{3 - x}\sqrt{22 - x}$;

3) $x > 22$.

б) Сравните число x с числом 5, если из следующих трех утверждений два истинны, а одно — ложно:

1) $x < 4$;

2) $\sqrt{(x - 4)(x - 13)} = \sqrt{4 - x}\sqrt{13 - x}$;

3) $x > 13$.

§1. Целые алгебраические уравнения

Уровень А

3.1.A01 Решите уравнение:

$$\text{а) } \frac{3}{4}x = 3\frac{3}{4}; \quad \text{б) } \frac{2}{9}x = 4\frac{2}{9}.$$

3.1.A02 Решите уравнение:

$$\text{а) } 9 + 4x = 10x - 9; \quad \text{б) } 8 + 5x = 9x - 8.$$

3.1.A03 Решите уравнение:

$$\text{а) } 2x^2 - 7x = 0; \quad \text{б) } 5x^2 - 3x = 0.$$

3.1.A04 Решите уравнение:

$$\text{а) } \frac{3x^2 + 5x + 2}{3} = \frac{5x^2 + 2x + 3}{5};$$

$$\text{б) } \frac{4x^2 + 7x + 3}{4} = \frac{7x^2 + 3x + 4}{7}.$$

3.1.A05 Решите уравнение:

$$\text{а) } 64,25x^2 - \frac{257}{4} = 0; \quad \text{б) } 7,54x^2 - \frac{377}{50} = 0.$$

3.1.A06 Решите уравнение:

$$\text{а) } 3x^2 + x\sqrt{17} = 0; \quad \text{б) } 11x^2 + x\sqrt{19} = 0.$$

3.1.A07 Решите уравнение:

$$\text{а) } x^2 - 3x - 4 = 0; \quad \text{б) } x^2 - 5x - 6 = 0.$$

3.1.A08 Решите уравнение:

$$\text{а) } x^2 - 10x + 25 = 0; \quad \text{б) } x^2 - 14x + 49 = 0.$$

3.1.A09 Решите уравнение:

$$\text{а) } 21x^2 - 4x - 1 = 0; \quad \text{б) } 24x^2 - 2x - 1 = 0.$$

3.1.A10 Решите уравнение:

$$\text{а) } (x - 3)^2 = 16; \quad \text{б) } (x - 4)^2 = 9.$$

Уровень В

3.1.B01 Решите уравнение:

$$\text{а) } 27x^2 - 6\sqrt{3} \cdot x + 1 = 0; \quad \text{б) } 3x^2 + 2\sqrt{51} \cdot x + 17 = 0.$$

3.1.B02 Решите уравнение:

$$\text{а) } \frac{(x + \sqrt{6})^2}{6} + \frac{1 - \sqrt{6}x}{3} = \frac{4}{3};$$

$$\text{б) } \frac{(x + \sqrt{3})^2}{4} + \frac{1 - \sqrt{3}x}{2} = \frac{5}{4}.$$

3.1.B03 Решите уравнение:

$$\text{а) } \frac{15 - 9x}{5} - \frac{3 - x}{2} = -\frac{4x}{5} + \frac{x - 3}{9};$$

$$\text{б) } \frac{8 - 5x}{3} - \frac{2 - x}{2} = -\frac{x}{3} - \frac{4(x - 2)}{5}.$$

3.1.B04 Решите уравнение:

$$\text{а) } x\sqrt{2} + x\sqrt{18} + 4\sqrt{2} = x\sqrt{50} + \sqrt{8};$$

$$\text{б) } x\sqrt{2} + x\sqrt{72} + 3\sqrt{2} = x\sqrt{128} + \sqrt{98}.$$

3.1.B05 Решите уравнение:

$$\text{а) } (3x - 2)(x - 1) = 4(x - 1)^2;$$

$$\text{б) } (2x - 1)(x - 2) = 5(x - 2)^2.$$

3.1.B06 Решите уравнение:

$$\text{а) } (4x^2 - 3x)^3 = (3x)^3; \quad \text{б) } (3x^2 - 2x)^3 = (2x)^3.$$

3.1.B07 Решите уравнение:

$$\text{а) } (5x - 2)^2 + (5x + 2)^2 = 2(5x - 3)^2;$$

$$\text{б) } (7x - 3)^2 + (7x + 3)^2 = 2(7x - 4)^2.$$

3.1.B08 Решите уравнение:

$$\text{а) } (x - 0,5)^2 = (x + 0,04)^2; \quad \text{б) } (x + 0,06)^2 = (x - 0,2)^2.$$

3.1.B09 Решите уравнение:

$$\text{а) } 4x^4 + 3x^2 - 1 = 0; \quad \text{б) } 9x^4 + 8x^2 - 1 = 0.$$

3.1.B10 Решите уравнение:

$$\text{а) } |x^2 - 10| = 6; \quad \text{б) } |x^2 - 17| = 8.$$

Уровень С

3.1.C01 Решите уравнение:

$$\text{а) } |5x - 4| = |8 - 5x|; \quad \text{б) } |7x + 5| = |3 - 7x|.$$

3.1.C02 Решите уравнение:

а) $(x^2 + 10x + 16)^2 + (x^2 + 11x + 24)^2 = 0$;
 б) $(x^2 + 6x - 72)^2 + (x^2 + 15x + 36)^2 = 0$.

3.1.C03 Решите уравнение:

а) $(x^2 + 27x - 57)^2 = (x^2 - 3x + 1)^2$;
 б) $(x^2 - 12x + 20)^2 = (x^2 + 2x - 12)^2$.

3.1.C04 Решите уравнение:

а) $(3x + 7)^3 = (2x)^6$; б) $(5x + 4)^3 = (3x)^6$.

3.1.C05 Решите уравнение:

а) $(x - 2)^3 + (x - 4)^3 = 2(x - 3)^3$;
 б) $(x - 3)^3 + (x - 5)^3 = 2(x - 4)^3$.

3.1.C06 Решите уравнение:

а) $(x + 2)^3 = x^3 - 3x - 1$; б) $(x - 2)^3 = x^3 + 2x - 4$.

3.1.C07 Найдите все пары $(x; y)$ чисел x и y , для которых:

а) $(3x + y - 4)^2 + (x + y - 2)^2 = 0$;
 б) $(x - 2y + 1)^2 + (2x + y - 3)^2 = 0$.

3.1.C08 Решите уравнение:

а) $|5x^2 - 3x - 2| = -5x^2 + 3x + 2$;
 б) $|4x^2 - x - 3| = -4x^2 + x + 3$.

3.1.C09 Решите уравнение:

а) $(x - 4)(x - 3)^3 = (x - 3)(x - 4)^3$;
 б) $(x + 4)(x + 5)^3 = (x + 5)(x + 4)^3$.

3.1.C10 Решите уравнение:

а) $(x^2 - x)^2 - 14(x^2 - x) + 24 = 0$;
 б) $(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$.

Уровень D

3.1.D01 Решите уравнение:

а) $(2x - 3)^7 + (2x - 1)^{14} = 0$;
 б) $(2x + 5)^{18} + (2x + 3)^9 = 0$.

3.1.D02 Решите уравнение:

а) $2x^4 - x^2(x + 2) - (x + 2)^2 = 0$;
 б) $3x^4 + 2x^2(x - 2) - (x - 2)^2 = 0$.

3.1.D03 Решите уравнение:

а) $|2x - 1| + |3x + 2| = 6$; б) $|2x + 5| - |3x - 1| = 5$.

3.1.D04 Решите уравнение:

а) $(x^2 - 4x - 12)^2 + (x^2 + 4x - 12)^2 = 2(x^2 - 4)(x^2 - 36)$;
 б) $(x^2 - 2x - 15)^2 + (x^2 + 2x - 15)^2 = 2(x^2 - 9)(x^2 - 25)$.

3.1.D05 Решите уравнение:

а) $|5x^2 - 7x + 3| = 2x - 1$; б) $|8x^2 - 10x + 3| = 2 - x$.

3.1.D06 Решите уравнение:

а) $|x^2 - 4| + |x^2 - 9| = 2x^2 - 13$;
 б) $|x^2 - 1| + |x^2 - 16| = 2x^2 - 17$.

3.1.D07 Найдите все пары $(x; y)$ чисел x и y , для которых:

а) $|x^2 - 7y + 6| + (x + 2y - 3)^2 = 0$;
 б) $|x^2 - 5y + 4| + (x - 3y + 2)^2 = 0$.

3.1.D08 Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел x и y , для которых:

а) $4x + 6xy - 9y = 11$; б) $3x + 6xy - 10y = 12$.

3.1.D09 Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел x и y , для которых:

а) $(2x - y)^2 + 27(3x - y)^2 = 25$;
 б) $(2x + y)^2 + 18(x + y)^2 = 16$.

3.1.D10 Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел x и y , для которых:

а) $3(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2 = 7$;
 б) $2(x - 3)^2 + 3(y - 2)^2 = 5$.

§2. Дробно-рациональные уравнения

Уровень A

3.2.A01 Решите уравнение:

а) $\frac{1}{7z} - \frac{67}{7} = \frac{3}{z} - 1$; б) $\frac{5}{9z} - \frac{53}{9} = \frac{2}{z} - 3$.

3.2.A02 Решите уравнение:

а) $\frac{y^2 - 25}{4y + 20} = 0$; б) $\frac{y^2 - 9}{4y + 12} = 0$.

3.2.A03 Решите уравнение:

а) $\frac{2x + 5}{3x - 1} = 6$; б) $\frac{3x - 4}{2x + 3} = 4$.

3.2.A04 а) Найдите все значения x , при каждом из которых равны значения выражений $\frac{50}{x-1}$ и $\frac{40}{x+2}$.

б) Найдите все значения x , при каждом из которых равны значения выражений $\frac{50}{x-2}$ и $\frac{60}{x-3}$.

3.2.A05 Решите уравнение:

а) $\frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} = 0$; б) $\frac{x^2 + 6x + 8}{x + 4} = 0$.

3.2.A06 Решите уравнение:

а) $\frac{5}{2x + 3} = \frac{4}{7}$; б) $\frac{4}{3x + 2} = \frac{3}{5}$.

3.2.A07 Решите уравнение:

а) $\frac{x - 4}{x + 4} = 5$; б) $\frac{x + 3}{x - 3} = 4$.

3.2.A08 Решите уравнение:

а) $\frac{4}{x} - \frac{11}{4x} = 15$; б) $\frac{3}{x} - \frac{19}{5x} = 16$.

3.2.A09 а) Какие из чисел 2; 3; 4 являются корнями уравнения $\frac{(x-2)(x-4)}{2x^2 - 7x + 6} = 0$?

б) Какие из чисел -4; -3; -2 являются корнями уравнения $\frac{(x+2)(x+3)}{2x^2 + 5x - 3} = 0$?

3.2.A10 Решите уравнение:

а) $\frac{(x+3)(x-2)}{x^2 - 4} = 0$; б) $\frac{(x+4)(x+1)}{x^2 - 1} = 0$.

Уровень В

3.2.B01 Решите уравнение:

а) $\frac{x+3}{x+2} = \frac{6}{x} + \frac{1}{x+2}$; б) $\frac{x+4}{x-3} = \frac{4}{x} + \frac{7}{x-3}$.

3.2.B02 Решите уравнение:

а) $\frac{5}{x^2} + \frac{3}{x} - 2 = 0$; б) $\frac{6}{x^2} - \frac{1}{x} - 5 = 0$.

3.2.B03 Решите уравнение:

а) $\frac{y-1}{y} + \frac{1}{y^2} = 1$; б) $\frac{y+1}{y} - \frac{4}{y^2} = 1$.

3.2.B04 Решите уравнение:

а) $\frac{x^2}{x-5} - \frac{x}{5-x} = \frac{30}{x-5}$; б) $\frac{x^2}{x-2} - \frac{7x}{2-x} = \frac{18}{x-2}$.

3.2.B05 а) Найдите все значения переменной b , для каждого из которых равны значения выражений

$\frac{6b+5}{b-2}$ и $\frac{b-5}{3b+2}$.

б) Найдите все значения переменной b , для каждого из которых равны значения выражений

$\frac{5b+4}{b-2}$ и $\frac{b-4}{3b+2}$.

3.2.B06 Решите уравнение:

а) $\frac{x^2 - 5x - 6}{x^2 + 2x - 3} = 0$; б) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} = 0$.

3.2.B07 Решите уравнение:

а) $\frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 5x + 4} = 0$; б) $\frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + x - 12} = 0$.

3.2.B08 Решите уравнение:

а) $\frac{2y-3}{y} = \frac{y+6}{y+4}$; б) $\frac{5y+2}{y} = \frac{4y+13}{y+4}$.

3.2.B09 Решите уравнение:

а) $\frac{x}{17x^2 + 27} = 0,05x^{-1}$; б) $\frac{x}{3x^2 + 32} = 0,2x^{-1}$.

3.2.B10 Решите уравнение:

а) $\frac{2x-1}{x+2} = 1 - \frac{1}{2x}$; б) $\frac{2x-1}{x-4} = 1 + \frac{2}{5x}$.

Уровень С

3.2.C01 Решите уравнение:

а) $\frac{x-15}{x(x+7)} + \frac{2}{x+7} = 2$; б) $\frac{x+14}{x(x+1)} + \frac{3}{x+1} = 3$.

3.2.C02 Решите уравнение:

а) $\frac{y-5}{y-3} + \frac{4}{y+3} = -\frac{24}{y^2-9}$; б) $\frac{y+1}{y+2} - \frac{1}{y-2} = -\frac{4}{y^2-4}$.

3.2.C03 Найдите больший корень уравнения:

а) $8 - \frac{3}{u+1} = -\frac{19}{u-7}$; б) $7 - \frac{1}{u-2} = -\frac{22}{u-9}$.

3.2.C04 а) Найдите все значения переменной x , при каждом из которых значение выражения $\frac{1}{x-1}$ больше значения выражения $\frac{45}{5x-9}$ на 5.

б) Найдите все значения переменной x , при каждом из которых значение выражения $\frac{1}{x+1}$ меньше значения выражения $\frac{12}{3x+4}$ на 3.

3.2.C05 а) Найдите все значения переменной, при каждом из которых значение разности $\frac{5z-3}{z+4} - \frac{4z-1}{z+2}$ равно значению выражения $\frac{2-5z}{z^2+6z+8}$.

б) Найдите все значения переменной, при каждом из которых значение разности $\frac{5z+1}{z-4} - \frac{4z+1}{z+2}$ равно значению выражения $\frac{5z-14}{z^2-2z-8}$.

3.2.C06 а) Найдите все значения z , при каждом из которых сумма дробей $\frac{3z+4}{z+2}$ и $\frac{z+2}{3z+4}$ вдвое больше их произведения.

б) Найдите все значения z , при каждом из которых сумма дробей $\frac{3z+1}{z-2}$ и $\frac{z-2}{3z+1}$ вдвое больше их произведения.

3.2.C07 Решите уравнение:

$$\text{а) } \frac{x^2}{x^2+27} - \frac{4}{x^2+7} = 0; \quad \text{б) } \frac{x^2}{x^2+75} - \frac{3}{x^2-13} = 0.$$

3.2.C08 Решите уравнение:

$$\text{а) } 2\left(\frac{7x+5}{x}\right)^2 - 11 \cdot \frac{7x+5}{x} + 15 = 0;$$

$$\text{б) } 5\left(\frac{4x+7}{x}\right)^2 + 3 \cdot \frac{4x+7}{x} - 2 = 0.$$

3.2.C09 Решите уравнение:

$$\text{а) } \frac{3x+2}{2x+3} + \frac{2x+3}{3x+2} = -2; \quad \text{б) } \frac{4x-3}{3x-4} + \frac{3x-4}{4x-3} = 2.$$

3.2.C10 Решите уравнение:

$$\text{а) } 2P(x-4) + 3P(x-3) = 2P(-4), \text{ если } P(t) = \frac{1}{t+5};$$

$$\text{б) } 2P(x+4) + P(x+3) = 4P(7), \text{ если } P(t) = \frac{1}{t-5}.$$

Уровень D

3.2.D01 Решите уравнение:

$$\text{а) } \frac{5}{x^2+2x+4} = \frac{1}{x-2} - \frac{4x+4}{x^3-8};$$

$$\text{б) } \frac{4}{x^2+3x+9} = \frac{1}{x-3} - \frac{6x+9}{x^3-27}.$$

3.2.D02 Решите уравнение:

$$\text{а) } x^2 = \frac{12}{1 + \frac{1}{x}};$$

$$\text{б) } x^2 = \frac{6}{1 - \frac{1}{x}}.$$

3.2.D03 Решите уравнение:

$$\text{а) } \frac{x^2}{x+2} + \frac{x}{x^2-2} = 2;$$

$$\text{б) } \frac{x^2}{x+6} + \frac{x}{x^2-6} = 2.$$

3.2.D04 Решите уравнение:

$$\text{а) } \frac{6}{(5-z)^2} + \frac{6}{(z+5)^2} = -\frac{13}{z^2-25};$$

$$\text{б) } \frac{15}{(4-z)^2} + \frac{15}{(z+4)^2} = -\frac{34}{z^2-16}.$$

3.2.D05 Решите уравнение:

$$\text{а) } \left(\frac{3x-2}{4x+3}\right)^2 + \left(\frac{3x+2}{4x-3}\right)^2 = 2\frac{9x^2-4}{16x^2-9};$$

$$\text{б) } \left(\frac{2x-3}{3x+4}\right)^2 + \left(\frac{2x+3}{3x-4}\right)^2 = 2\frac{4x^2-9}{9x^2-16}.$$

3.2.D06 Решите уравнение:

$$\text{а) } \frac{2-7x^3}{x} = 2x-7;$$

$$\text{б) } \frac{3-5x^3}{x} = 3x-5.$$

3.2.D07 Найдите меньший корень уравнения:

$$\text{а) } x^2 - x = 14 - \frac{24}{x^2-x};$$

$$\text{б) } x^2 - 5x = 30 - \frac{144}{x^2-5x}.$$

3.2.D08 Решите уравнение:

$$\text{а) } \frac{2x+1}{x-3} + \frac{5}{x+4} = \frac{7}{x-3} + \frac{x+9}{x+4} + \frac{12}{x^3+x^2-12x+12};$$

$$\text{б) } \frac{2x-1}{x+3} + \frac{5}{x-4} = -\frac{7}{x+3} + \frac{x+1}{x-4} + \frac{11}{x^3-x^2-12x+11}.$$

3.2.D09 Решите уравнение:

$$а) \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + x + 1} - \frac{3x}{x^2 + 2x + 1} = 1;$$

$$б) \frac{x^2 - 4x + 2}{x^2 - 2x + 2} - \frac{3x}{x^2 + 2x + 2} = 1.$$

3.2.D10 Решите уравнение:

$$а) \frac{4}{|x^2 + 10x|} = \frac{1}{25} + \frac{2}{5x}; \quad б) \frac{25}{|x^2 + 5x|} = 1 + \frac{5}{x}.$$

§3. Иррациональные уравнения

Уровень А

3.3.A01 Решите уравнение:

$$а) \sqrt{-3x} = 2; \quad б) \sqrt{2x} = 3.$$

3.3.A02 Решите уравнение:

$$а) \sqrt{\frac{x}{2}} = 3; \quad б) \sqrt{-\frac{x}{3}} = 2.$$

3.3.A03 Решите уравнение:

$$а) \sqrt{x-5} = 4; \quad б) \sqrt{x-4} = 5.$$

3.3.A04 Решите уравнение:

$$а) \sqrt{4-x} = 5; \quad б) \sqrt{5-x} = 4.$$

3.3.A05 Решите уравнение:

$$а) \sqrt{3x-4} = 5; \quad б) \sqrt{5x-4} = 3.$$

3.3.A06 Решите уравнение:

$$а) \sqrt{6x+5} = 7; \quad б) \sqrt{7x+6} = 5.$$

3.3.A07 Решите уравнение:

$$а) \sqrt{8-3x} = 4; \quad б) \sqrt{9-2x} = 6.$$

3.3.A08 Решите уравнение:

$$а) \sqrt{\frac{x-6}{5}} = 3; \quad б) \sqrt{\frac{x-4}{7}} = 2.$$

3.3.A09 Решите уравнение:

$$а) \sqrt{\frac{3x}{5}} = 4; \quad б) \sqrt{\frac{5x}{3}} = 4.$$

3.3.A10 Решите уравнение:

$$а) \sqrt{\frac{9-x}{2}} = 5; \quad б) \sqrt{\frac{8-x}{5}} = 2.$$

Уровень В

3.3.B01 Решите уравнение:

$$а) \sqrt{\frac{5}{x-5}} = 5; \quad б) \sqrt{\frac{3}{x-3}} = 3.$$

3.3.B02 Решите уравнение:

$$а) \sqrt{\frac{7}{x+2}} = \frac{1}{4}; \quad б) \sqrt{\frac{6}{x+7}} = \frac{1}{5}.$$

3.3.B03 Решите уравнение:

$$а) \sqrt{\frac{11}{10-x}} = \frac{1}{6}; \quad б) \sqrt{\frac{13}{12-x}} = \frac{1}{3}.$$

3.3.B04 Решите уравнение:

$$а) \sqrt{\frac{x-3}{x+6}} = 0,8; \quad б) \sqrt{\frac{x-5}{x+11}} = 0,6.$$

3.3.B05 Решите уравнение:

$$а) \sqrt{\frac{3-x}{x+7}} = 3; \quad б) \sqrt{\frac{7-x}{x+10}} = 4.$$

3.3.B06 Решите уравнение:

$$а) \sqrt{\frac{x+6}{x-6}} = 2; \quad б) \sqrt{\frac{x+4}{x-4}} = 3.$$

3.3.B07 Решите уравнение:

$$а) \sqrt{\frac{x+20}{x+5}} = 4; \quad б) \sqrt{\frac{x+17}{x+8}} = 2.$$

3.3.B08 Решите уравнение:

$$а) \sqrt{\frac{5x}{x+31}} = 6; \quad б) \sqrt{\frac{3x}{x+46}} = 7.$$

3.3.B09 Решите уравнение:

$$а) \sqrt{6x^2 - 7x + 2} = 1; \quad б) \sqrt{3x^2 + 2x - 1} = 2.$$

3.3.B10 Решите уравнение:

$$а) \sqrt{6x - 3x^2 + 13} = 2; \quad б) \sqrt{16x - 4x^2 + 21} = 1.$$

Уровень С

3.3.C01 Решите уравнение:

а) $\sqrt{3x-2} = 4x-3$; б) $\sqrt{2x-1} = 3x-2$.

3.3.C02 Решите уравнение:

а) $\sqrt{\frac{x+3}{2}} = x+2$; б) $\sqrt{\frac{x-1}{3}} = x-3$.

3.3.C03 Решите уравнение:

а) $(x^2-9)\sqrt{x+2} = 0$; б) $(x^2-16)\sqrt{x+3} = 0$.

3.3.C04 Решите уравнение:

а) $\frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{x-4}$; б) $\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+4}} = \sqrt{x+2}$.

3.3.C05 Решите уравнение:

а) $\sqrt{x-5} = \sqrt{x^2-25}$; б) $\sqrt{x-3} = \sqrt{x^2-9}$.

3.3.C06 Решите уравнение:

а) $(x+6)\sqrt{2x-9} = 3(x+6)$;
б) $(x+4)\sqrt{3x-5} = 2(x+4)$.

3.3.C07 Решите уравнение:

а) $\frac{\sqrt{4x^2-9}}{\sqrt{3-2x}} = 5$; б) $\frac{\sqrt{9x^2-4}}{\sqrt{2-3x}} = 4$.

3.3.C08 Решите уравнение:

а) $|\sqrt{3x+4}-1| = 3$; б) $|\sqrt{4x-3}-1| = 2$.

3.3.C09 Решите уравнение:

а) $\sqrt{x^2+3x+2} + \sqrt{x^2-4} = 0$;
б) $\sqrt{x^2+4x+3} + \sqrt{x^2-9} = 0$.

3.3.C10 Решите уравнение:

а) $x-5\sqrt{x} = 6$; б) $x-6\sqrt{x} = 7$.

Уровень D

3.3.D01 Решите уравнение:

а) $(4x^2-4x-3)\sqrt{4x^2-12x+5} = 0$;
б) $(9x^2+6x-3)\sqrt{9x^2+18x+5} = 0$.

3.3.D02 Решите уравнение:

а) $x^2+x-2\sqrt{x^2+x+4} = 4$;
б) $x^2+x-2\sqrt{x^2+x+5} = 10$.

3.3.D03 а) Найдите все общие корни уравнений

$$x^3-x = \sqrt{x^2+9} \text{ и } 2\sqrt{x^2+9} = x^3+x.$$

б) Найдите все общие корни уравнений

$$3\sqrt{x^2+6} = x^3-8x \text{ и } x^3-4x = \sqrt{x^2+6}.$$

3.3.D04 Решите уравнение:

а) $\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} + 9\sqrt{\frac{x+1}{2x-1}} = 6$;

б) $\sqrt{\frac{x-2}{2x+1}} + 16\sqrt{\frac{2x+1}{x-2}} = 8$.

3.3.D05 Решите уравнение:

а) $\sqrt{3x+4} - \sqrt{4x-7} = 1$;
б) $\sqrt{4x-11} - \sqrt{3x+1} = -1$.

3.3.D06 Решите уравнение:

а) $\sqrt{6x-5} = |x| - |3x-2| + 1$;
б) $\sqrt{2x-3} = |x| - |3x-4| + 1$.

3.3.D07 Решите уравнение:

а) $x(2x+1) + 2x\sqrt{\frac{2x+1}{x}} + 1 = 0$;

б) $x(3x+4) + 4x\sqrt{\frac{3x+4}{x}} + 4 = 0$.

3.3.D08 Решите уравнение:

а) $\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}} + \frac{2}{\sqrt{x^2-4x+29}} = \frac{7}{5}$;

б) $\frac{2}{\sqrt{x^2-6x+10}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+13}} = \frac{5}{2}$.

3.3.D09 Найдите все пары $(x; y)$ чисел x и y , для которых:

а) $\sqrt{x^2-y+1} + \sqrt{x+3y-5} = 0$;
б) $\sqrt{x^2+y-5} + \sqrt{x-4y+2} = 0$.

3.3.D10 Найдите все пары $(x; y)$ чисел x и y , для которых:

а) $\sqrt{(x-2y+1)^2+1} + \sqrt{(3x-y-2)^2+25} = 6$;
б) $\sqrt{(2x-y-1)^2+9} + \sqrt{(x-3y+2)^2+16} = 7$.

§ 1. Целые алгебраические неравенства

Уровень А

4.1.A01 Решите неравенство:

$$\text{а) } 5x - 7 \geq 7x - 5; \quad \text{б) } 3x - 8 \geq 8x - 3.$$

4.1.A02 Решите неравенство:

$$\text{а) } 3(2x - 3) - 2(3x - 2) \leq 1 - 4x; \\ \text{б) } 4(3x - 4) - 3(4x - 3) \leq 1 - 5x.$$

4.1.A03 Решите неравенство:

$$\text{а) } (2 - x)(\sqrt{5} - \sqrt{7}) > 0; \quad \text{б) } (1 - x)(\sqrt{3} - \sqrt{5}) > 0.$$

4.1.A04 Решите неравенство:

$$\text{а) } (\sqrt{7} - \sqrt{10})x < \frac{6}{\sqrt{7} + \sqrt{10}}; \\ \text{б) } (\sqrt{5} - \sqrt{7})x < \frac{4}{\sqrt{5} + \sqrt{7}}.$$

4.1.A05 Решите неравенство:

$$\text{а) } (2x - 3)(5x + 2) \geq (2x - 3)(5x - 2); \\ \text{б) } (3x - 1)(4x + 3) \leq (3x - 1)(4x - 3).$$

4.1.A06 Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\text{а) } 5x - 6 < 2(3 - x) - 3x; \quad \text{б) } 3x + 4 < -5(3 + x) - x.$$

4.1.A07 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{4 + 5x}{2} > 3x + 1; \quad \text{б) } \frac{3 + 7x}{4} > 2x + 1.$$

4.1.A08 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{x}{3} - \frac{3 - x}{5} \geq \frac{x + 12}{15} - \frac{9}{5}; \quad \text{б) } \frac{x}{5} + \frac{x + 2}{3} \geq \frac{4x + 5}{15} - \frac{2}{3}.$$

4.1.A09 Решите неравенство:

$$\text{а) } (x + 7)^2 \leq (x - 3)^2; \quad \text{б) } (x - 6)^2 \geq (x - 4)^2.$$

4.1.A10 а) Найдите все значения n , при каждом из которых сумма чисел $\frac{4 + 10n}{9}$ и $\frac{4(3 - n)}{3}$ положительна.б) Найдите все значения n , при каждом из которых сумма чисел $\frac{10 + 17n}{16}$ и $\frac{5(2 - n)}{4}$ отрицательна.

Уровень В

4.1.B01 Решите неравенство:

$$\text{а) } 5x^2 + 3x \leq 0; \quad \text{б) } 3x^2 - 8x \leq 0.$$

4.1.B02 Решите неравенство:

$$\text{а) } 36x^2 - 25 \geq 0; \quad \text{б) } 49x^2 - 16 \geq 0.$$

4.1.B03 Решите неравенство:

$$\text{а) } 9 \geq \frac{x^2}{25}; \quad \text{б) } 4 \geq \frac{x^2}{64}.$$

4.1.B04 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{3x^2}{4} \geq \frac{4x}{5}; \quad \text{б) } \frac{7x^2}{4} \geq \frac{4x}{5}.$$

4.1.B05 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{x^2}{\sqrt{2}} < \sqrt{162}; \quad \text{б) } \frac{x^2}{\sqrt{2}} < \sqrt{98}.$$

4.1.B06 Решите неравенство:

$$\text{а) } x^2 - 19x + 18 \geq 0; \quad \text{б) } x^2 - 17x + 16 \geq 0.$$

4.1.B07 Решите неравенство:

$$\text{а) } 2x^2 - 9x - 5 < 0; \quad \text{б) } 5x^2 + 9x - 2 < 0.$$

4.1.B08 Решите неравенство:

$$\text{а) } (3x - 7)^2 \geq (7x - 3)^2; \quad \text{б) } (5x - 4)^2 \geq (4x - 5)^2.$$

4.1.B09 Решите неравенство:

$$\text{а) } x^2(x^2 + 9) \leq 9(x^2 + 9); \quad \text{б) } x^2(x^2 + 4) \geq 4(x^2 + 4).$$

4.1.B10 Решите неравенство:

$$\text{а) } (x - 2)(x - 1)^2 \geq 0; \quad \text{б) } (x - 6)(x + 2)^2 \geq 0.$$

Уровень С

4.1.C01 Решите неравенство:

$$\text{а) } (x + 3)^3 + (x - 5)^3 \geq 2(x - 1)^3; \\ \text{б) } (x + 5)^3 + (x - 3)^3 \geq 2(x + 1)^3.$$

4.1.C02 Решите неравенство:

$$\text{а) } (x^2 - 6x + 5)(x + 3)^2 \leq 0; \\ \text{б) } (x^2 - 5x + 4)(x + 2)^2 \leq 0.$$

4.1.C03 Решите неравенство:

$$\text{а) } 9x^4 \geq 4x^2; \quad \text{б) } 9x^2 \leq 16x^4.$$

4.1.C04 Решите неравенство:

- а) $(x^2 + 4x + 3)(x - 2) < (x^2 - 2x - 3)(x + 3)$;
 б) $(x^2 - 3x + 2)(x - 3) < (x^2 - 5x + 6)(x - 4)$.

4.1.C05 Решите неравенство:

- а) $(x^2 + 10x + 16)^2 > (x^2 + 10x + 26)^2$;
 б) $(x^2 + 12x + 15)^2 > (x^2 + 12x + 25)^2$.

4.1.C06 Решите неравенство:

- а) $(x^2 - 3)(2x^2 - 3x + 1) < (x^2 - 7)(2x^2 - 3x + 1)$;
 б) $(x^2 - 5)(4x^2 - x - 5) < (x^2 - 3)(4x^2 - x - 5)$.

4.1.C07 Решите неравенство:

- а) $(5x - 2)(3x^2 - x - 4)^2 \geq (4x + 1)(3x^2 - x - 4)^2$;
 б) $(4x - 1)(2x^2 - x - 3)^2 \geq (3x + 4)(2x^2 - x - 3)^2$.

4.1.C08 Решите неравенство:

- а) $(2x - 3)(x^2 - x - 2) \leq (2x - 3)(10x^2 + 11x + 2)$;
 б) $(3x - 1)(x^2 + x - 2) \leq (3x - 1)(9x^2 + 7x - 1)$.

4.1.C09 Решите неравенство:

- а) $(4x^2 - 9)(3x^2 - 5x - 8) \geq (4x^2 - 9)(2x^2 - 5x - 8)$;
 б) $(25x^2 - 4)(3x^2 - 2x - 5) \geq (25x^2 - 4)(2x^2 - 2x - 5)$.

4.1.C10 Решите неравенство:

- а) $x^3 + 15x^2 \geq 225(x + 15)$; б) $x^3 - 14x^2 \leq 196(x - 14)$.

Уровень D

4.1.D01 Решите неравенство:

- а) $36x^4 + 35x^2 - 1 \leq 0$; б) $49x^4 + 48x^2 - 1 \leq 0$.

4.1.D02 Решите неравенство:

- а) $(3x^2 - 4x + 1)^4 \geq (2x^2 - 3x + 3)^4$;
 б) $(3x^2 - 7x + 2)^4 \geq (2x^2 - 5x + 10)^4$.

4.1.D03 Решите неравенство:

- а) $(9x^4 - 9x - 10)^3 \leq (8x^4 - 9x - 9)^3$;
 б) $(8x^4 - 8x + 7)^3 \leq (7x^4 - 8x + 23)^3$.

4.1.D04 Решите неравенство:

- а) $(3x - 4)^6 > (4x - 3)^6$; б) $(2x - 3)^6 > (3x - 2)^6$.

4.1.D05 Решите неравенство:

- а) $(2x - 3)^6 < (3 - 2x)^3$; б) $(3x - 4)^6 < (4 - 3x)^3$.

4.1.D06 Решите неравенство:

- а) $|3x^2 - 11x + 6| (6x^2 - 11x + 3) \geq 0$;
 б) $|4x^2 - 12x + 5| (5x^2 - 12x + 4) \geq 0$.

4.1.D07 Решите неравенство:

- а) $(x^2 - 4x)^2 + 2(x^2 - 4x) - 35 < 0$;
 б) $(x^2 + 3x)^2 + 2(x^2 + 3x) - 24 < 0$.

4.1.D08 Решите неравенство:

- а) $(x^2 + 6x + 11)(x^2 + 6x + 13) \leq 8$;
 б) $(x^2 - 8x + 18)(x^2 - 8x + 19) \leq 6$.

4.1.D09 Найдите все пары $(x; y)$ чисел x и y , для которых:

- а) $(x^2 - 4x + 7)(y^2 + 2y + 10) \leq 27$;
 б) $(x^2 - 2x + 9)(y^2 + 4y + 7) \leq 24$.

4.1.D10 Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел x и y , для которых:

- а) $7(x - 5)^2 + 5(y - 7)^2 \leq 6$;
 б) $9(x - 11)^2 + 11(y - 9)^2 \leq 10$.

§ 2. Дробно-рациональные неравенства

Уровень A

4.2.A01 Решите неравенство:

- а) $\frac{5}{3x + 2} \leq 0$; б) $\frac{4}{2x + 3} \geq 0$.

4.2.A02 Решите неравенство:

- а) $\frac{2x - 1}{4x^2 + 3} > 0$; б) $\frac{3x - 2}{5x^2 + 7} < 0$.

4.2.A03 Решите неравенство:

- а) $\frac{3}{x^2 + 5} \geq \frac{2x}{x^2 + 5}$; б) $\frac{2}{x^2 + 4} \leq \frac{3x}{x^2 + 4}$.

4.2.A04 Решите неравенство:

- а) $\frac{7x^2 + 1}{2 - 3x} > 0$; б) $\frac{6x^2 + 1}{3 - 2x} < 0$.

4.2.A05 Решите неравенство:

- а) $\frac{4x^2}{4x + 3} < -\frac{7}{4x + 3}$; б) $\frac{5x^2}{5x - 4} > -\frac{9}{5x - 4}$.

4.2.A06 Решите неравенство:

- а) $\frac{2}{5x - 4} \leq \frac{3}{5x - 4}$; б) $\frac{4}{3x + 4} \geq \frac{5}{3x + 4}$.

4.2.A07 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{5}{3x-2} < \frac{4}{2-3x}; \quad \text{б) } \frac{2}{4x-3} > \frac{3}{3-4x}.$$

4.2.A08 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{x^2+4}{4x-1} \geq \frac{1}{4x-1}; \quad \text{б) } \frac{x^2+3}{4x+5} \leq \frac{2}{4x+5}.$$

4.2.A09 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{2x-7}{3x^2+2} > \frac{x-2}{3x^2+2}; \quad \text{б) } \frac{7x-3}{2x^2+3} < \frac{x-3}{2x^2+3}.$$

4.2.A10 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{2x-9}{5x+4} \leq \frac{2x-3}{5x+4}; \quad \text{б) } \frac{3x-5}{6x+5} \geq \frac{3x+2}{6x+5}.$$

Уровень В

4.2.B01 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{4}{4x^2-9} > 0; \quad \text{б) } \frac{9}{9x^2-4} < 0.$$

4.2.B02 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{9x^2-1}{3x^2+4} < 0; \quad \text{б) } \frac{4x^2-1}{4x^2+5} > 0.$$

4.2.B03 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{4}{x^2-16} \geq \frac{3}{16-x^2}; \quad \text{б) } \frac{5}{x^2-81} \leq \frac{2}{81-x^2}.$$

4.2.B04 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{2x^2+11}{25-x^2} \leq 0; \quad \text{б) } \frac{4x^2+13}{16-x^2} \geq 0.$$

4.2.B05 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{7x^2}{49x^2-36} > -\frac{9}{49x^2-36}; \quad \text{б) } \frac{4x^2}{36x^2-49} < -\frac{9}{36x^2-49}.$$

4.2.B06 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{6}{x(x-3)} < \frac{5}{x(3-x)}; \quad \text{б) } \frac{5}{x(x-2)} > \frac{4}{x(2-x)}.$$

4.2.B07 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{x^2-x-6}{2x^2+9} \geq 0; \quad \text{б) } \frac{x^2+x-12}{3x^2+5} \leq 0.$$

4.2.B08 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{2}{x^2-2x-24} < \frac{3}{x^2-2x-24};$$

$$\text{б) } \frac{3}{x^2-3x-18} > \frac{4}{x^2-3x-18}.$$

4.2.B09 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{x^2-20}{5x^2+12} \leq \frac{x-8}{5x^2+12}; \quad \text{б) } \frac{x^2-21}{4x^2+11} \geq \frac{9-x}{4x^2+11}.$$

4.2.B10 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{(4x-3)^2}{7x^2+3} \geq \frac{x^2}{7x^2+3}; \quad \text{б) } \frac{x^2}{3x^2+7} \geq \frac{(3x-2)^2}{3x^2+7}.$$

Уровень С

4.2.C01 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{2x^2}{3x+7} \leq 0; \quad \text{б) } \frac{3x^2}{2x+5} \leq 0.$$

4.2.C02 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{(x+4)^2}{x^2-9} \leq 0; \quad \text{б) } \frac{(x+7)^2}{x^2-36} \leq 0.$$

4.2.C03 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{16-x^2}{(x-3)^2} \geq 0; \quad \text{б) } \frac{25-x^2}{(x-4)^2} \geq 0.$$

4.2.C04 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{4x}{16x^2-25} > \frac{5}{16x^2-25}; \quad \text{б) } \frac{3x}{9x^2-16} > \frac{4}{9x^2-16}.$$

4.2.C05 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{3x-2}{4x^2+9} \leq \frac{3x-2}{4x^2+5}; \quad \text{б) } \frac{4x-3}{3x^2+8} \geq \frac{4x-3}{3x^2+5}.$$

4.2.C06 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{4}{x^2-4x} < \frac{1}{x-4}; \quad \text{б) } \frac{6}{x^2-6x} < \frac{1}{x-6}.$$

4.2.C07 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{1}{2-x} < \frac{x^2-5}{x-2}; \quad \text{б) } \frac{2}{3-x} < \frac{x^2-11}{x-3}.$$

4.2.C08 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{x^3-3x^2-10x}{x^2-3x-10} \geq 0; \quad \text{б) } \frac{x^3-4x^2-12x}{x^2-4x-12} \leq 0.$$

4.2.C09 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{x^3-9x^2+20x}{x-4} \leq 0; \quad \text{б) } \frac{x^3-8x^2+15x}{x-3} \leq 0.$$

4.2.C10 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{1}{x-7} > \frac{1}{x+8}; \quad \text{б) } \frac{1}{x-8} < \frac{1}{x+7}.$$

Уровень D

4.2.D01 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{x^3 - 4x^2 - 25x + 100}{4 - x} \geq 0; \quad \text{б) } \frac{x^3 - 3x^2 - 16x + 48}{3 - x} \geq 0.$$

4.2.D02 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{(x^2 - 3x)^2}{9x^2 + 2} \geq \frac{(x^2 - 3x + 4)^2}{9x^2 + 2};$$

$$\text{б) } \frac{(x^2 + 2x)^2}{8x^2 + 3} \geq \frac{(x^2 + 2x - 6)^2}{8x^2 + 3}.$$

4.2.D03 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 + 5} \leq \frac{x^2 - 4x + 3}{3x^2 + 5};$$

$$\text{б) } \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 + 7} \leq \frac{x^2 - 3x + 2}{4x^2 + 7}.$$

4.2.D04 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{x - 2}{x + 7} > \frac{x - 5}{x + 4}; \quad \text{б) } \frac{x - 3}{x + 6} < \frac{x - 4}{x + 5}.$$

4.2.D05 Решите неравенство:

$$\text{а) } \left(\frac{3x - 4}{x + 2}\right)^2 + \left(\frac{3x + 4}{x - 2}\right)^2 \leq 2 \frac{9x^2 - 16}{x^2 - 4};$$

$$\text{б) } \left(\frac{2x - 3}{x + 3}\right)^2 + \left(\frac{2x + 3}{x - 3}\right)^2 \leq 2 \frac{4x^2 - 9}{x^2 - 9}.$$

4.2.D06 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{9}{(4x + 5)^2} - \frac{18}{4x + 5} + 8 < 0;$$

$$\text{б) } \frac{4}{(3x + 4)^2} - \frac{16}{3x + 4} + 15 > 0.$$

4.2.D07 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{3}{x^2 + 8x + 17} + \frac{4}{x^2 + 8x + 18} \geq 5;$$

$$\text{б) } \frac{2}{x^2 + 10x + 27} + \frac{5}{x^2 + 10x + 26} \geq 6.$$

4.2.D08 Найдите все пары $(x; y)$ чисел x и y , для которых:

$$\text{а) } x^2 + 4x + 6 \leq \frac{2}{y^2 - 6y + 10};$$

$$\text{б) } x^2 - 6x + 11 \leq \frac{4}{y^2 + 4y + 6}.$$

4.2.D09 Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел x и y , для которых:

$$\text{а) } \frac{1}{2(x + 5)^2} + \frac{2}{5(y - 3)^2} \geq 0,9;$$

$$\text{б) } \frac{3}{5(x + 2)^2} + \frac{1}{2(y - 4)^2} \geq 1,1.$$

4.2.D10 Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел x и y , для которых:

$$\text{а) } \frac{1}{9(x - 7)^2 + 7(y - 9)^2} \geq \frac{1}{8}; \quad \text{б) } \frac{1}{7(x - 5)^2 + 5(y - 7)^2} \geq \frac{1}{6}.$$

§ 3. Иррациональные неравенства

Уровень А

4.3.A01 Решите неравенство:

$$\text{а) } 3\sqrt{2x - 9} > 0; \quad \text{б) } 7\sqrt{3x - 8} > 0.$$

4.3.A02 Решите неравенство:

$$\text{а) } \sqrt{5x + 8} \leq 0; \quad \text{б) } \sqrt{8x + 5} \leq 0.$$

4.3.A03 Решите неравенство:

$$\text{а) } (x^2 + 8)\sqrt{x + 8} > 0; \quad \text{б) } (x^2 + 6)\sqrt{x + 6} > 0.$$

4.3.A04 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{\sqrt{12x^2 + 11}}{12 - 11x} \leq 0; \quad \text{б) } \frac{\sqrt{16x^2 + 15}}{16 - 15x} \leq 0.$$

4.3.A05 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{7}{\sqrt{3x - 5}} \geq \frac{5}{\sqrt{3x - 5}}; \quad \text{б) } \frac{5}{\sqrt{4x - 7}} \geq \frac{3}{\sqrt{4x - 7}}.$$

4.3.A06 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{6x}{\sqrt{2x^2 + 11}} \leq \frac{7}{\sqrt{2x^2 + 11}}; \quad \text{б) } \frac{4x}{\sqrt{3x^2 + 10}} \leq \frac{9}{\sqrt{3x^2 + 10}}.$$

4.3.A07 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{\sqrt{4x^2 + 7}}{2x - 5} \geq \frac{3}{5 - 2x}; \quad \text{б) } \frac{\sqrt{5x^2 + 9}}{3x - 7} \geq \frac{2}{7 - 3x}.$$

4.3.A08 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{7x + 5}{\sqrt{7x^2 + 5}} > 0; \quad \text{б) } \frac{4x + 3}{\sqrt{4x^2 + 3}} < 0.$$

4.3.A09 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{15x+8}{\sqrt{13x^2+12}} < \frac{2x-5}{\sqrt{13x^2+12}}; \quad \text{б) } \frac{12x+7}{\sqrt{11x^2+10}} > \frac{2x-3}{\sqrt{11x^2+10}}.$$

4.3.A10 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{4}{\sqrt{2x^2+1}} \geq \frac{5x}{\sqrt{2x^2+1}}; \quad \text{б) } \frac{3}{\sqrt{4x^2+3}} \leq \frac{2x}{\sqrt{4x^2+3}}.$$

Уровень В

4.3.B01 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{5}{\sqrt{16x^2-25}} > 0; \quad \text{б) } \frac{3}{\sqrt{36x^2-9}} > 0.$$

4.3.B02 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{4x^2-9}{\sqrt{13x^2+11}} < 0; \quad \text{б) } \frac{9x^2-4}{\sqrt{14x^2+11}} > 0.$$

4.3.B03 Решите неравенство:

$$\text{а) } (36x^2-49)\sqrt{36x^2+49} \geq 0; \\ \text{б) } (25x^2-36)\sqrt{25x^2+36} \leq 0.$$

4.3.B04 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{\sqrt{3x^2+7}}{16-x^2} < 0; \quad \text{б) } \frac{\sqrt{14x^2+3}}{49-x^2} > 0.$$

4.3.B05 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{5x^2}{\sqrt{25x^2-4}} > -\frac{2}{\sqrt{25x^2-4}}; \quad \text{б) } \frac{4x^2}{\sqrt{16x^2-9}} > -\frac{3}{\sqrt{16x^2-9}}.$$

4.3.B06 Решите неравенство:

$$\text{а) } 4x^2\sqrt{4x^2+9} \geq 9\sqrt{4x^2+9}; \\ \text{б) } 9x^2\sqrt{9x^2+4} \leq 4\sqrt{9x^2+4}.$$

4.3.B07 Решите неравенство:

$$\text{а) } \sqrt{\frac{x^2-x-30}{6x^2+7}} \geq 0; \quad \text{б) } \sqrt{\frac{x^2+x-42}{5x^2+6}} \geq 0.$$

4.3.B08 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{4}{\sqrt{x^2+3x-18}} < \frac{9}{\sqrt{x^2+3x-18}}; \\ \text{б) } \frac{2}{\sqrt{x^2+5x-24}} < \frac{7}{\sqrt{x^2+5x-24}}.$$

4.3.B09 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{x^2+24}{\sqrt{15x^2+11}} \leq \frac{10x}{\sqrt{15x^2+11}}; \quad \text{б) } \frac{x^2+20}{\sqrt{14x^2+17}} \geq \frac{12x}{\sqrt{14x^2+17}}.$$

4.3.B10 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{(x-3)^2}{\sqrt{3x^2+4}} \geq \frac{(2x-5)^2}{\sqrt{3x^2+4}}; \quad \text{б) } \frac{(x-4)^2}{\sqrt{5x^2+6}} \leq \frac{(3x-8)^2}{\sqrt{5x^2+6}}.$$

Уровень С

4.3.C01 Решите неравенство:

$$\text{а) } (3x-4)\sqrt{4x-3} \leq 0; \quad \text{б) } (3x-5)\sqrt{5x-3} \leq 0.$$

4.3.C02 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{\sqrt{6-x}}{2x+1} \geq 0; \quad \text{б) } \frac{\sqrt{4-x}}{2-3x} \leq 0.$$

4.3.C03 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{6x-5}{\sqrt{4x+3}} \leq 0; \quad \text{б) } \frac{5x-4}{\sqrt{6x+5}} \leq 0.$$

4.3.C04 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{5\sqrt{x}}{4x-3} < \frac{2}{3-4x}; \quad \text{б) } \frac{4\sqrt{x}}{3x-2} < \frac{3}{2-3x}.$$

4.3.C05 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{2\sqrt{x}}{x(x-2)} < \frac{11}{x(2-x)}; \quad \text{б) } \frac{4\sqrt{x}}{x(x-4)} < \frac{13}{x(4-x)}.$$

4.3.C06 Решите неравенство:

$$\text{а) } \sqrt{\frac{7(x-7)^2}{5-6x}} \geq 0; \quad \text{б) } \sqrt{\frac{5(x-5)^2}{2-7x}} \geq 0.$$

4.3.C07 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{16x-x^3}{\sqrt{x^2-16}} \geq 0; \quad \text{б) } \frac{49x-x^3}{\sqrt{x^2-49}} \leq 0.$$

4.3.C08 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{\sqrt{12-x-x^2}}{x-2} \leq 0; \quad \text{б) } \frac{\sqrt{6-x-x^2}}{x-1} \geq 0.$$

4.3.C09 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{\sqrt{x+7}}{x+5} \geq \frac{\sqrt{x+7}}{x-5}; \quad \text{б) } \frac{\sqrt{x+9}}{x-6} \leq \frac{\sqrt{x+9}}{x+6}.$$

4.3.C10 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{2}{3-x} < \frac{\sqrt{x^2-16}}{x-3}; \quad \text{б) } \frac{3}{2-x} < \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-2}.$$

Уровень D

4.3.D01 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{\sqrt{4x^2 - 12x + 5}}{2x^2 - 3x - 2} \leq 0; \quad \text{б) } \frac{\sqrt{6x^2 - 23x + 7}}{3x^2 - 8x - 3} \leq 0.$$

4.3.D02 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{3x^2 - 16x + 5}{\sqrt{15 - 2x - x^2}} \geq 0; \quad \text{б) } \frac{5x^2 - 16x + 3}{\sqrt{15 + 2x - x^2}} \geq 0.$$

4.3.D03 Решите неравенство:

$$\text{а) } (2x^2 + 3x - 20)\sqrt{25 - x^2} \leq 0; \\ \text{б) } (3x^2 + 5x - 12)\sqrt{16 - x^2} \leq 0.$$

4.3.D04 Решите неравенство:

$$\text{а) } 10x - 29\sqrt{x} + 10 < 0; \quad \text{б) } 12x - 25\sqrt{x} + 12 < 0.$$

4.3.D05 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{4}{\sqrt{x-5}+3} > \frac{3}{\sqrt{x-5}+4}; \quad \text{б) } \frac{3}{\sqrt{x-4}+2} > \frac{2}{\sqrt{x-4}+3}.$$

4.3.D06 Решите неравенство:

$$\text{а) } 3x + 2\sqrt{x} - 3 \leq \frac{4x-9}{2\sqrt{x}-3}; \quad \text{б) } 2x + 3\sqrt{x} - 4 \leq \frac{9x-4}{3\sqrt{x}-2}.$$

4.3.D07 Решите неравенство:

$$\text{а) } x + 3 + \sqrt{-3x-2} \geq \frac{\sqrt{9x^2-4}}{\sqrt{2-3x}}; \\ \text{б) } x + 4 + \sqrt{-2x-3} \geq \frac{\sqrt{4x^2-9}}{\sqrt{3-2x}}.$$

4.3.D08 Решите неравенство:

$$\text{а) } \frac{7}{\sqrt{x^2-8x+17}} + \frac{6}{\sqrt{x^2-8x+52}} \geq 8; \\ \text{б) } \frac{9}{\sqrt{x^2+6x+18}} + \frac{10}{\sqrt{x^2+6x+34}} \geq 5.$$

4.3.D09 Найдите все пары $(x; y)$ чисел x и y , для которых:

$$\text{а) } \sqrt{x^2-6x+13} \cdot \sqrt{y^2+10y+34} \leq 6; \\ \text{б) } \sqrt{x^2+8x+20} \cdot \sqrt{y^2-6y+34} \leq 10.$$

4.3.D10 Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел x и y , для которых:

$$\text{а) } 5\sqrt{3x-2y-4} + 3\sqrt{2x+3y-7} \leq 2; \\ \text{б) } 4\sqrt{3x-2y+1} + 7\sqrt{2x-3y+4} \leq 3.$$

5

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

§1. Системы целых алгебраических уравнений

Уровень А

5.1.A01 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 5x + y = -2, \\ 7x - y = -10; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x + y = 13, \\ 4x - y = 15. \end{cases}$$

5.1.A02 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 4x - 3y = -4, \\ 4x - y = 3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x + y = 3, \\ 3x + 4y = -2. \end{cases}$$

5.1.A03 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 8x + 3y = -3, \\ 4x + 3y = -6; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 9x + 2y = 23, \\ 3x + 2y = 13. \end{cases}$$

5.1.A04 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x - 5y = 3, \\ 2y - 3x = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 7x - 2y = 2, \\ 5y - 7x = 3. \end{cases}$$

5.1.A05 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 15x - 4y = 14, \\ 5x + 4y = -6; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 4x - 3y = 9, \\ 2x + 3y = -18. \end{cases}$$

5.1.A06 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x - 2y = 4, \\ 3x - 5y = -8; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 5x + 2y = 24, \\ 5x - y = 18. \end{cases}$$

5.1.A07 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 5x - 3y = 7, \\ 7x + y = -11; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 4x + 3y = -5, \\ 5x + y = -9. \end{cases}$$

5.1.A08 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x + 5y = 5, \\ x - 3y = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x - 5y = -2, \\ -x + 4y = -3. \end{cases}$$

5.1.A09 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 10y - x = -21, \\ 3x + 5y = -7; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 15y + x = 29, \\ 2x - 3y = -8. \end{cases}$$

5.1.A10 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 7(x - 3y) = -11, \\ x - 4y = -2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 6(x + 4y) = 19, \\ x + 3y = 1. \end{cases}$$

Уровень В

5.1.B01 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{2}{3}y = -8, \\ -x + \frac{1}{3}y = 5; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{3}{5}y = 3, \\ -x + \frac{1}{5}y = 4. \end{cases}$$

5.1.B02 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x + 5y = 29, \\ 5x + 2y = 23; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 4x + 5y = 21, \\ 3x - 4y = 8. \end{cases}$$

5.1.B03 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x + y = \frac{22}{5}, \\ 3x + 2y = \frac{34}{5}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 7x - y = \frac{107}{5}, \\ 4x + 3y = \frac{54}{5}. \end{cases}$$

5.1.B04 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 + 5y = (x - 2)^2 - 20, \\ 4x + y = -8; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^2 + 3y = (x + 1)^2 + 12, \\ 2x - 5y = -17. \end{cases}$$

5.1.B05 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = x^2 + y^2 + 1, \\ 6y + x = 25; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} (x + 2)^2 + (y - 4)^2 = x^2 + y^2 + 4, \\ 7y + x = 23. \end{cases}$$

5.1.B06 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} (x + 2y)^2 - (3x + y)^2 = 8, \\ y - 2x = 4; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} (2x - y)^2 - (x + 3y)^2 = -9, \\ 3x + 2y = -1. \end{cases}$$

5.1.B07 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} (x - 2)(y + 3) = 0, \\ 3x - 2y = 6; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} (x + 3)(y - 4) = 0, \\ 4x - 3y = -12. \end{cases}$$

5.1.B08 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} (x - 3y)(x + 4) = 0, \\ x - 5y = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} (x + 4y)(x - 3) = 0, \\ x + 3y = 1. \end{cases}$$

5.1.B09 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 4(x + 3y) + 2(x - y) = 28, \\ 2(y - x) + x + 3y = 2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2(x + y) + 3(2x - 3y) = -30, \\ 4(3y - 2x) + x + y = 40. \end{cases}$$

5.1.B10 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x^2 - y = 7, \\ 5y - 3x^2 = -23; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 5x^2 - 4y = 17, \\ 6y - 5x^2 = -23. \end{cases}$$

Уровень С

5.1.C01 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x\sqrt{48} + y\sqrt{5} = -11, \\ x\sqrt{27} - y\sqrt{5} = -10; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x\sqrt{27} + y\sqrt{2} = -6, \\ x\sqrt{75} - y\sqrt{2} = -18. \end{cases}$$

5.1.C02 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 4x^2 - 49y^2 = 10(2x - 7y), \\ x + y = 45; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 9x^2 - 64y^2 = 5(3x + 8y), \\ x - y = 55. \end{cases}$$

5.1.C03 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} (x - 2y)^2 = 11(x - 2y), \\ 2x + y = 50; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} (3x - y)^2 = 9(3x - y), \\ x + 3y = 40. \end{cases}$$

5.1.C04 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} (x - 5y)(x^2 - 36) = 0, \\ x - y = 4; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} (x + 3y)(x^2 - 4) = 0, \\ x + y = -2. \end{cases}$$

5.1.C05 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 - 16y^2 + x + 4y = 0, \\ 3x - 4y = 16; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^2 - 9y^2 + x - 3y = 0, \\ 4x + 3y = 10. \end{cases}$$

5.1.C06 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x + y = -5, \\ x^2 + xy - x - 11y = 55; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + 2y = 7, \\ x^2 - xy + x + 43y = 56. \end{cases}$$

5.1.C07 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 6x + 5y = 44, \\ xy = 16; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x + 4y = 35, \\ xy = 25. \end{cases}$$

5.1.C08 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 4|x| + 3y = 8, \\ 4x - y = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3|x| + 2y = 2, \\ 3x - y = 4. \end{cases}$$

5.1.C09 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x^2 - 4y + 3xy - 4x = 0, \\ 3x - 2y = 6; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 5x^2 - 2y - 5xy + 2x = 0, \\ 5x + 3y = 1. \end{cases}$$

5.1.C10 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x^3 - 64y^3 = -56, \\ 4y - x = 2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^3 - 8y^3 = -91, \\ 2y - x = 7. \end{cases}$$

Уровень D

5.1.D01 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} (2x - 3y)^4 + 7(2x - 3y)^2 = 8, \\ 2x + 3y = 5; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} (3x - 5y)^4 + 6(3x - 5y)^2 = 7, \\ 3x + 5y = 11. \end{cases}$$

5.1.D02 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x^3 + y^3 = 152, \\ x + y = 8; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^3 - y^3 = 98, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

5.1.D03 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x^2 + xy = 10, \\ 2y^2 + 9xy = 20; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x^2 + xy = 30, \\ 3y^2 + 19xy = 60. \end{cases}$$

5.1.D04 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} |x - 3y| - |y| = -3, \\ 2|x - 3y| + y = 3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} |x - 2y| - |y| = -12, \\ 5|x - 2y| + y = 12. \end{cases}$$

5.1.D05 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 + 5xy + 6y^2 = 0, \\ |x + 2y| + |x + 3y| = 12; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 0, \\ |x + y| + |x - 3y| = 16. \end{cases}$$

5.1.D06 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} |x + y| = 1, \\ (x^2 - y^2)(x - y) = -4; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} |x - y| = 2, \\ (x^2 - y^2)(x + y) = 50. \end{cases}$$

5.1.D07 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} (4x - 5)^2 + (4y - 5)^2 = 2(4x - 5)(4y - 5), \\ x^2 + y^2 = 72; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} (3x + 2)^2 + (3y + 2)^2 = 2(3x + 2)(3y + 2), \\ x^2 + y^2 = 98. \end{cases}$$

5.1.D08 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 - 6x(y + 1) - 27(y + 1)^2 = 0, \\ (x - 9y - 9)^2 + (x + 3y + 3)^2 = 36; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^2 + 5x(y - 1) - 24(y - 1)^2 = 0, \\ (x + 8y - 8)^2 + (x - 3y + 3)^2 = 25. \end{cases}$$

5.1.D09 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 2y = -17, \\ 3z - x + 5y = -8; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y = -2, \\ 2z + x + y = -6. \end{cases}$$

5.1.D10 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} (x-3z)^2 + |y-7z| = 0, \\ x+y+z = 44; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} (x-4z)^2 + |y-6z| = 0, \\ x+y+z = 33. \end{cases}$$

5.2.A08 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{1}{3x+4} = \frac{1}{3y+4}, \\ 4x-3y = 2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{1}{4x+5} = \frac{1}{4y+5}, \\ 5x-4y = 3. \end{cases}$$

5.2.A09 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{x-y}{x+y} = 49, \\ x-y = 49; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = 47, \\ x+y = 47. \end{cases}$$

5.2.A10 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{6x}{5x+y} = 7, \\ 5x+y = 6; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{8x}{7x+y} = 9, \\ 7x+y = 8. \end{cases}$$

Уровень В

5.2.B01 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{17}{8x+9y} = 1, \\ \frac{7}{3x+4y} = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{19}{9x+10y} = 1, \\ \frac{9}{4x+5y} = 1. \end{cases}$$

5.2.B02 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{2x+7}{7y+2} = -5, \\ \frac{7x+2}{2y+7} = 13; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{3x+5}{5y+3} = -10, \\ \frac{5x+3}{3y+5} = 14. \end{cases}$$

5.2.B03 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{5x+6}{5y+6} = \frac{6x+5}{6y+5}, \\ \frac{5}{x} = \frac{1}{6-y}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{4x+5}{4y+5} = \frac{5x+4}{5y+4}, \\ \frac{4}{x} = \frac{1}{5-y}. \end{cases}$$

5.2.B04 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 13, \\ \frac{4}{x} - \frac{3}{y} = 5; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{7}{y} = 19, \\ \frac{6}{x} - \frac{5}{y} = 7. \end{cases}$$

5.2.B05 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 12x + \frac{15}{y} = 13, \\ 13x - \frac{15}{y} = 12; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 13x + \frac{17}{y} = 14, \\ 14x - \frac{17}{y} = 13. \end{cases}$$

§2. Системы рациональных уравнений

Уровень А

5.2.A01 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{5}{2x+y} = 1, \\ 2x-y = 7; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{3}{4x+y} = 1, \\ 4x-y = 13. \end{cases}$$

5.2.A02 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{4}{3x-y} = -0,5, \\ 0,2x-y = -2,4; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{5}{2x-y} = -0,5, \\ 0,3x-y = -4,9. \end{cases}$$

5.2.A03 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{3x-2y}{2x+3y} = -5, \\ 2x-3y = 5; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{2x-3y}{3x+2y} = 5, \\ 3x-2y = 5. \end{cases}$$

5.2.A04 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{x+3}{y+3} = 2, \\ x+y = 9; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{x+2}{y+2} = 3, \\ x+y = 8. \end{cases}$$

5.2.A05 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{4}{x+5} = \frac{5}{y+4}, \\ 4x+5y = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{3}{x+4} = \frac{4}{y+3}, \\ 3x+4y = 1. \end{cases}$$

5.2.A06 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{1}{x-7} = \frac{1}{y-5}, \\ 5x+7y = 58; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{1}{x-9} = \frac{1}{y-3}, \\ 4x+9y = 50. \end{cases}$$

5.2.A07 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{11}{x} = \frac{13}{y}, \\ x-y = -2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{5}{x} = \frac{9}{y}, \\ x-y = -4. \end{cases}$$

5.2.B06 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} \frac{3x+2y}{3x-2y} = \frac{25}{3x+2y}, \\ 3x+2y=5; \end{cases} \quad б) \begin{cases} \frac{2x-3y}{2x+3y} = \frac{49}{2x-3y}, \\ 2x-3y=7. \end{cases}$$

5.2.B07 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} \frac{17}{x-17} = \frac{19}{y-19}, \\ 19x+17y=38; \end{cases} \quad б) \begin{cases} \frac{13}{x-13} = \frac{15}{y-15}, \\ 15x+13y=30. \end{cases}$$

5.2.B08 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} \frac{5-3x}{3x-4} = \frac{5-3y}{3y-4}, \\ \frac{y+5}{x-3} = 5; \end{cases} \quad б) \begin{cases} \frac{7-5x}{5x-6} = \frac{7-5y}{5y-6}, \\ \frac{y+7}{x-5} = 7. \end{cases}$$

5.2.B09 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} \frac{x^2}{13x+14y} = 14, \\ 13x+14y=14; \end{cases} \quad б) \begin{cases} \frac{x^2}{11x+12y} = 12, \\ 11x+12y=12. \end{cases}$$

5.2.B10 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} (x+12)(y+13)=0, \\ \frac{13x+12y}{y+13} = 24; \end{cases} \quad б) \begin{cases} (x+11)(y+12)=0, \\ \frac{12x+11y}{y+12} = 22. \end{cases}$$

Уровень С

5.2.C01 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} \frac{5x+4y}{5x-4y} = -31, \\ \frac{4x-5y}{4x+5y} = -\frac{1}{4}; \end{cases} \quad б) \begin{cases} \frac{4x+3y}{4x-3y} = -17, \\ \frac{3x-4y}{3x+4y} = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

5.2.C02 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} (x-5)(y-3)=0, \\ \frac{3x+y+12}{x-y+8} = 1; \end{cases} \quad б) \begin{cases} (x+3)(y-4)=0, \\ \frac{2y-x+5}{x+y+7} = 3. \end{cases}$$

5.2.C03 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} \frac{(x-7)(y-6)}{y-5} = 0, \\ y^2+6x+y=72; \end{cases} \quad б) \begin{cases} \frac{(x-6)(y-5)}{y-4} = 0, \\ y^2+5x+y=50. \end{cases}$$

5.2.C04 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} \frac{x}{y} - 18\frac{y}{x} = 3, \\ x+3y=9; \end{cases} \quad б) \begin{cases} \frac{x}{y} - 16\frac{y}{x} = 6, \\ x+2y=10. \end{cases}$$

5.2.C05 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} x^2 + \frac{5}{y} = 26, \\ x^2 - \frac{10}{y} = 23; \end{cases} \quad б) \begin{cases} x^2 + \frac{6}{y} = 37, \\ x^2 - \frac{12}{y} = 34. \end{cases}$$

5.2.C06 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} \frac{x}{y} = 32, \\ \frac{x^2}{32y} + \frac{32y^2}{x} = 33; \end{cases} \quad б) \begin{cases} \frac{x}{y} = 33, \\ \frac{x^2}{33y} + \frac{33y^2}{x} = 34. \end{cases}$$

5.2.C07 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} \frac{y}{x+5} = -5, \\ y^2 + \frac{y^2}{x+5} = 6; \end{cases} \quad б) \begin{cases} \frac{y}{x+6} = -6, \\ y^2 + \frac{y^2}{x+6} = 7. \end{cases}$$

5.2.C08 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} 5x + \frac{4}{y} = -y, \\ 5x + \frac{3}{y} = 2; \end{cases} \quad б) \begin{cases} 6x + \frac{5}{y} = -y, \\ 6x + \frac{4}{y} = -2. \end{cases}$$

5.2.C09 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} 4x^2 = 9y^2, \\ \frac{2x+3y+1}{y} = \frac{2x-3y+1}{x}; \end{cases} \quad б) \begin{cases} 9x^2 = 4y^2, \\ \frac{3x+2y+1}{y} = \frac{3x-2y+1}{x}. \end{cases}$$

5.2.C10 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} 3x = 4y, \\ \frac{4}{x} + \frac{3}{y-2} = 4; \end{cases} \quad б) \begin{cases} 5x = 4y, \\ \frac{4}{x} + \frac{5}{y-4} = 6. \end{cases}$$

Уровень D

5.2.D01 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} 24x + \frac{121}{y} = y, \\ 24y + \frac{121}{x} = x; \end{cases} \quad б) \begin{cases} 35x + \frac{169}{y} = y, \\ 35y + \frac{169}{x} = x. \end{cases}$$

5.2.D02 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 - 7xy + 12y^2 = 0, \\ \frac{12}{x} + \frac{1}{y} = 20; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^2 - 9xy + 14y^2 = 0, \\ \frac{14}{x} + \frac{1}{y} = 24. \end{cases}$$

5.2.D03 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{x}{2y-3} + \frac{2y}{2x-3} = -3, \\ \frac{3x}{2y-3} - \frac{2y}{2x-3} = -1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{x}{4y-5} + \frac{4y}{4x-5} = -5, \\ \frac{5x}{4y-5} - \frac{4y}{4x-5} = -1. \end{cases}$$

5.2.D04 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} (x-3)^2 + (y-3)^2 = 1, \\ \frac{x^2 + 5y^2 + 3x - 2}{4y^2 + 3x + 11} = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} (x-4)^2 + (y-4)^2 = 1, \\ \frac{x^2 + 6y^2 + 2x - 8}{5y^2 + 2x + 17} = 1. \end{cases}$$

5.2.D05 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{xy}{5x-4} = \frac{xy}{4y-5}, \\ 5x + 4y = -9; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{xy}{4x+3} = \frac{xy}{3y+4}, \\ 4x + 3y = 7. \end{cases}$$

5.2.D06 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{x}{1 - \frac{5}{x+5}} = \frac{y}{1 - \frac{6}{y+6}}, \\ 5x - y = xy + 5; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{x}{1 - \frac{4}{x+4}} = \frac{y}{1 - \frac{5}{y+5}}, \\ 4x - y = xy + 4. \end{cases}$$

5.2.D07 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{8}{|x^2 - 9x| + 4} = y^2 + 2, \\ \frac{x + 19y}{x + y - 8} = 9; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{6}{|x^2 - 7x| + 2} = y^2 + 3, \\ \frac{x + 16y}{x + y - 6} = 7. \end{cases}$$

5.2.D08 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{2}{(2x-3z)^2 + 1} + \frac{3}{(3y-4z)^2 + 1} = 5, \\ 2x + 3y + 4z = 66; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{3}{(3x-4z)^2 + 1} + \frac{4}{(4y-5z)^2 + 1} = 7, \\ 3x + 4y + 5z = 168. \end{cases}$$

5.2.D09 Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел x и y , являющиеся решениями системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x = \frac{7y-34}{y-5}, \\ x^2 + y^2 = 52; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x = \frac{6y-23}{y-4}, \\ x^2 + y^2 = 34. \end{cases}$$

5.2.D10 Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел x и y , являющиеся решениями системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} y = 3x + \frac{5}{3x+1}, \\ x^3 = y - 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} y = 4x - \frac{7}{4x-1}, \\ x^3 = y + 1. \end{cases}$$

§3. Системы иррациональных уравнений

Уровень А

5.3.A01 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \sqrt{x+y-3} = 0, \\ \sqrt{x-y-1} = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \sqrt{x+y-4} = 0, \\ \sqrt{x-y-2} = 0. \end{cases}$$

5.3.A02 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} = 4, \\ x + y = 17; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} = 3, \\ x + y = 10. \end{cases}$$

5.3.A03 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \sqrt{x-y} = 2, \\ x + y = 8; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \sqrt{x-y} = 3, \\ x + y = 11. \end{cases}$$

5.3.A04 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \sqrt{3x+4y} = 0, \\ \sqrt{3x-4y} = 12; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \sqrt{2x+3y} = 0, \\ \sqrt{2x-3y} = 6. \end{cases}$$

5.3.A05 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \sqrt{\frac{x-7}{y-6}} = 1, \\ x + y = 11; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \sqrt{\frac{x-9}{y-5}} = 1, \\ x + y = 12. \end{cases}$$

5.3.A06 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \sqrt{3x-y-1} = 1, \\ \sqrt{x-2y+5} = 2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \sqrt{x-3y+3} = 1, \\ \sqrt{2x-y+3} = 2. \end{cases}$$

5.3.A07 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4x+5y}} = 1, \\ 4x - 5y = -9; \end{cases} \quad б) \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3x+4y}} = 1, \\ 3x - 4y = -7. \end{cases}$$

5.3.A08 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} \sqrt{\frac{x-y}{7}} = 2, \\ \frac{x+y}{7} = 4; \end{cases} \quad б) \begin{cases} \sqrt{\frac{x-y}{9}} = 3, \\ \frac{x+y}{9} = 5. \end{cases}$$

5.3.A09 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} \sqrt{\frac{3y}{5x}} = 1, \\ 5x + 3y = 30; \end{cases} \quad б) \begin{cases} \sqrt{\frac{7y}{2x}} = 1, \\ 2x + 7y = 28. \end{cases}$$

5.3.A10 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} \sqrt{\frac{2y-3x}{x}} = 3, \\ x + y = 14; \end{cases} \quad б) \begin{cases} \sqrt{\frac{2y-5x}{x}} = 5, \\ x + y = 16. \end{cases}$$

Уровень В

5.3.B01 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} (x-2)\sqrt{y-3} = 0, \\ x + y = 4; \end{cases} \quad б) \begin{cases} (x-4)\sqrt{y-6} = 0, \\ x + y = 8. \end{cases}$$

5.3.B02 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} (x-25)(y-28) = 0, \\ y + 5\sqrt{x} = 25; \end{cases} \quad б) \begin{cases} (x-16)(y-19) = 0, \\ y + 4\sqrt{x} = 16. \end{cases}$$

5.3.B03 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} 3x - 2\sqrt{y} = 4, \\ 3x + 2\sqrt{y} = 8; \end{cases} \quad б) \begin{cases} 2x - 3\sqrt{y} = 3, \\ 2x + 3\sqrt{y} = 9. \end{cases}$$

5.3.B04 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} 2\sqrt{x} + 7y = 9, \\ 2\sqrt{x} + 3y = 5; \end{cases} \quad б) \begin{cases} 3\sqrt{x} + 4y = 7, \\ 3\sqrt{x} + 2y = 5. \end{cases}$$

5.3.B05 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} (\sqrt{x}-3)(y-6) = 0, \\ \sqrt{x} + 5y = 8; \end{cases} \quad б) \begin{cases} (\sqrt{x}-4)(y-5) = 0, \\ \sqrt{x} + 2y = 6. \end{cases}$$

5.3.B06 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} 4\sqrt{x} - 7\sqrt{y} = -3, \\ 4\sqrt{x} + 7\sqrt{y} = 11; \end{cases} \quad б) \begin{cases} 8\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 5, \\ 8\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 11. \end{cases}$$

5.3.B07 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} 2\sqrt{x} = y - 4, \\ 4\sqrt{x} = y + 2; \end{cases} \quad б) \begin{cases} 3\sqrt{x} = y - 5, \\ 5\sqrt{x} = y + 3. \end{cases}$$

5.3.B08 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} \sqrt{\frac{5x}{2y+3}} = 1, \\ x^2 + 5y + 25 = (x+5)^2; \end{cases} \quad б) \begin{cases} \sqrt{\frac{7x}{3y+4}} = 1, \\ x^2 + 7y + 49 = (x+7)^2. \end{cases}$$

5.3.B09 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} \sqrt{5x^2 + 9y + 16} = 5, \\ \sqrt{4x^2 + 9y + 16} = 5; \end{cases} \quad б) \begin{cases} \sqrt{4x^2 + 7y + 2} = 4, \\ \sqrt{3x^2 + 7y + 2} = 4. \end{cases}$$

5.3.B10 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} \sqrt{x+y} = 8, \\ \frac{\sqrt{x+y}}{x} = 4; \end{cases} \quad б) \begin{cases} \sqrt{x+y} = 6, \\ \frac{\sqrt{x+y}}{x} = 3. \end{cases}$$

Уровень С

5.3.C01 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 4, \\ x - y = 32; \end{cases} \quad б) \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2, \\ x - y = 36. \end{cases}$$

5.3.C02 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} x - y = 76, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 38; \end{cases} \quad б) \begin{cases} x - y = 72, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 36. \end{cases}$$

5.3.C03 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} \sqrt{xy} = 11, \\ x + y = 122; \end{cases} \quad б) \begin{cases} \sqrt{xy} = 10, \\ x + y = 101. \end{cases}$$

5.3.C04 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{17}, \\ xy = 4; \end{cases} \quad б) \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{5}, \\ xy = 8. \end{cases}$$

5.3.C05 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} 5x + 3y = 10\sqrt{5x+3y}, \\ 5x - 3y = 20; \end{cases} \quad б) \begin{cases} 4x + 5y = 8\sqrt{4x+5y}, \\ 4x - 5y = 16. \end{cases}$$

5.3.C06 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \sqrt{(7x-4y)^2} = 28, \\ 7x+4y=14; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \sqrt{(6x-7y)^2} = 42, \\ 6x+7y=18. \end{cases}$$

5.3.C07 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} |5x+7y| = |y| + 20, \\ \sqrt{5x+7y} = 5; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} |3x+8y| = |y| + 33, \\ \sqrt{3x+8y} = 6. \end{cases}$$

5.3.C08 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} |\sqrt{3x-2y}-8| = 10, \\ 3x+2y=12; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} |\sqrt{4x-7y}-6| = 13, \\ 4x+7y=39. \end{cases}$$

5.3.C09 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} y = 5\sqrt{x+28}, \\ y = 9\sqrt{x-28}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} y = 3\sqrt{x+20}, \\ y = 7\sqrt{x-20}. \end{cases}$$

5.3.C10 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} y = 12\sqrt{x}, \\ 144x - 7y - 18 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} y = 11\sqrt{x}, \\ 121x + y - 20 = 0. \end{cases}$$

Уровень D

5.3.D01 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{x}{y} + 6 = 5\sqrt{\frac{x}{y}}, \\ x + y = 40; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{x}{y} + 14 = 9\sqrt{\frac{x}{y}}, \\ x + y = 50. \end{cases}$$

5.3.D02 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x + 2y - 24\sqrt{x+2y} + 144 = 0, \\ x - 2y = 44; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x + y - 22\sqrt{2x+y} + 121 = 0, \\ 2x - y = -21. \end{cases}$$

5.3.D03 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} = 12\sqrt{\frac{y}{x}} + 4, \\ x + y = 37; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} = 15\sqrt{\frac{y}{x}} + 2, \\ x + y = 26. \end{cases}$$

5.3.D04 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x - y - 18\sqrt{3x-y} + 81 = 0, \\ 3x + y - 6\sqrt{3x+y} + 9 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x - 4y - 8\sqrt{x-4y} + 16 = 0, \\ x + 4y - 16\sqrt{x+4y} + 64 = 0. \end{cases}$$

5.3.D05 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{2}{3}, \\ 3x + 7\sqrt{xy} + 4y + 6 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{2}{5}, \\ 5x + 11\sqrt{xy} + 4y + 10 = 0. \end{cases}$$

5.3.D06 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x\sqrt{\frac{y}{x}} = -\sqrt{10}, \\ x^2 + y^2 = 29; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x\sqrt{\frac{y}{x}} = -\sqrt{15}, \\ x^2 + y^2 = 34. \end{cases}$$

5.3.D07 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \sqrt{x-5} + \sqrt{y+4} = 8, \\ (x-5)\sqrt{y+4} + (y+4)\sqrt{x-5} = 96; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \sqrt{x+3} + \sqrt{y-6} = 9, \\ (x+3)\sqrt{y-6} + (y-6)\sqrt{x+3} = 72. \end{cases}$$

5.3.D08 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x + \sqrt{xy} + 2y = -92, \\ \frac{x}{y} - 9\sqrt{\frac{x}{y}} - 10 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x + \sqrt{xy} + y = -121, \\ \frac{x}{y} - 7\sqrt{\frac{x}{y}} - 8 = 0. \end{cases}$$

5.3.D09 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} |2x-5z| + \sqrt{3y-4z} = 0, \\ 2x+3y+z = 10; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} |4x-7z| + \sqrt{2y-3z} = 0, \\ 4x+2y+z = 11. \end{cases}$$

5.3.D10 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \sqrt{(x-2y)^2+4} + \sqrt{(z-11y)^2+121} = 13, \\ x+y+z = 14; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \sqrt{(x+3y)^2+9} + \sqrt{(z-12y)^2+144} = 15, \\ x+y+z = 10. \end{cases}$$

§1. Системы целых алгебраических неравенств

Уровень А

6.1.A01 Решите систему неравенств:

$$а) \begin{cases} 4x + 9 \leq 9x + 4, \\ 1, 7x < 51; \end{cases} \quad б) \begin{cases} 5x + 8 \leq 8x + 5, \\ 2, 3x < 46. \end{cases}$$

6.1.A02 Решите систему неравенств:

$$а) \begin{cases} 5(4x + 3) - 4(5x + 3) > 3x, \\ \frac{2}{3}x < \frac{3}{2}x + 5; \end{cases} \\ б) \begin{cases} 3(2x + 5) - 2(3x + 5) > 5x, \\ \frac{4}{5}x < \frac{5}{4}x + 9. \end{cases}$$

6.1.A03 Решите систему неравенств:

$$а) \begin{cases} -0, 7x \leq 2, 1 \\ 2, 1x < 0, 7; \end{cases} \quad б) \begin{cases} -0, 6x \leq 2, 4 \\ 2, 4x < 0, 6. \end{cases}$$

6.1.A04 Решите систему неравенств:

$$а) \begin{cases} \frac{2x + 5}{5} > \frac{5x + 2}{2}, \\ \frac{x + 2}{5} < \frac{x + 5}{2}; \end{cases} \quad б) \begin{cases} \frac{3x + 2}{2} > \frac{2x + 3}{3}, \\ \frac{x + 2}{3} < \frac{x + 3}{2}. \end{cases}$$

6.1.A05 Решите систему неравенств:

$$а) \begin{cases} (x + 6)^2 < (x + 4)^2, \\ 6x + 13 > 5x - 7; \end{cases} \quad б) \begin{cases} (x + 5)^2 < (x + 3)^2, \\ 5x + 12 > 4x - 9. \end{cases}$$

6.1.A06 Решите систему неравенств:

$$а) \begin{cases} \frac{5}{3}x < 0, 6x + 16, \\ 0, 7x > -0, 56; \end{cases} \quad б) \begin{cases} \frac{10}{3}x < 0, 3x + 91, \\ 0, 9x > -0, 63. \end{cases}$$

6.1.A07 Решите двойное неравенство:

$$а) 2x - 3 \leq 5x - 2 \leq 3 - 2x; \quad б) 3x - 4 \leq 7x - 2 \leq 4 - 3x.$$

6.1.A08 Решите двойное неравенство:

$$а) 6x - 5 \leq 6 - 5x \leq 5 - 6x; \quad б) 5x - 4 \leq 5 - 4x \leq 4 - 5x.$$

6.1.A09 Решите двойное неравенство:

$$а) 1, 7x - 2, 6 < 0, 7x - 0, 6 < 2, 7x - 1, 6; \\ б) 2, 3x - 3, 4 < 1, 3x - 1, 4 < 3, 3x - 2, 4.$$

6.1.A10 Решите двойное неравенство:

$$а) 2 < 3 - \frac{2}{3}x < 4; \quad б) 3 < 4 - \frac{3}{4}x < 5.$$

Уровень В

6.1.B01 Решите систему неравенств:

$$а) \begin{cases} (3 - 2x)(\sqrt{5} - 3) > 0, \\ 0, 3x < 3; \end{cases} \quad б) \begin{cases} (4 - 3x)(\sqrt{3} - 2) > 0, \\ 0, 4x < 4. \end{cases}$$

6.1.B02 Решите систему неравенств:

$$а) \begin{cases} (3 - \sqrt{11})x < \frac{4}{3 + \sqrt{11}}, \\ x^2 + 25 > (x + 5)^2; \end{cases} \\ б) \begin{cases} (2 - \sqrt{7})x < \frac{6}{2 + \sqrt{7}}, \\ x^2 + 36 > (x + 6)^2. \end{cases}$$

6.1.B03 Решите систему неравенств:

$$а) \begin{cases} 7(3x + 2) - 3(7x + 2) > 2x, \\ (x - 4)(x + 8) < 0; \end{cases} \\ б) \begin{cases} 7(5x + 4) - 5(7x + 4) > 4x, \\ (x - 2)(x + 4) < 0. \end{cases}$$

6.1.B04 Решите двойное неравенство:

$$а) (4x + 3)^2 < 16x^2 < (4x - 3)^2; \\ б) (2x + 7)^2 < 4x^2 < (2x - 7)^2.$$

6.1.B05 Решите двойное неравенство:

$$а) 3x^2 - 4x + 3 \leq 3x^2 - 5x + 5 \leq 2x^2 - 3x + 4; \\ б) 5x^2 - 6x - 1 \leq 5x^2 - 7x + 2 \leq 4x^2 - 3x - 2.$$

6.1.B06 Решите двойное неравенство:

$$а) -9 < 7 - x^2 < 8; \quad б) -8 < 17 - x^2 < 18.$$

6.1.B07 Решите систему неравенств:

$$а) \begin{cases} x^2 + 9x + 8 \leq 0, \\ -0, 3x \geq 2, 4; \end{cases} \quad б) \begin{cases} x^2 + 7x + 6 \leq 0, \\ -0, 7x \geq 4, 2. \end{cases}$$

6.1.B08 Решите систему неравенств:

$$а) \begin{cases} 3x^2 - 14x + 8 < 0, \\ 5x + 2 > 2x + 5; \end{cases} \quad б) \begin{cases} 4x^2 - 11x + 6 < 0, \\ 4x + 3 > 3x + 4. \end{cases}$$

6.1.B09 Решите систему неравенств:

$$а) \begin{cases} (x + 2)^2 + (x - 6)^2 \geq 40, \\ x^2 \leq 4x; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} (x+3)^2 + (x-5)^2 \geq 34, \\ x^2 \leq 2x. \end{cases}$$

6.1.B10 Решите двойное неравенство:

$$а) 9x^2 - 2 < (3x+2)^2 < 9x^2 + 2;$$

$$б) 4x^2 - 3 < (2x+3)^2 < 4x^2 + 3.$$

Уровень С

6.1.C01 Решите систему неравенств:

$$а) \begin{cases} (x-7)(x^2-49) \geq 0, \\ (x-9)(x^2-81) \leq 0; \end{cases} \quad б) \begin{cases} (x-6)(x^2-36) \geq 0, \\ (x-10)(x^2-100) \leq 0. \end{cases}$$

6.1.C02 Решите двойное неравенство:

$$а) 3x^2 - 2x - 6 \leq 2x^2 - 2x + 3 \leq 3x^2 - 2x - 1;$$

$$б) 4x^2 - 5x - 14 \leq 3x^2 - 5x + 2 \leq 4x^2 - 5x - 7.$$

6.1.C03 Решите систему неравенств:

$$а) \begin{cases} 2x^2(4x-3) \geq 7(3-4x), \\ 3(2x-7) \leq 4x^2(7-2x); \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 3x^2(7x-2) \geq 4(2-7x), \\ 2(3x-4) \leq 7x^2(4-3x). \end{cases}$$

6.1.C04 Решите систему неравенств:

$$а) \begin{cases} (x+4)^3(x+2)^2 \leq (x+4)^2(x+2)^3, \\ x^2 < 15; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} (x+5)^3(x+3)^2 \leq (x+5)^2(x+3)^3, \\ x^2 < 24. \end{cases}$$

6.1.C05 Решите систему неравенств:

$$а) \begin{cases} (x^2-64)(x-6) < (x^2-36)(x-8), \\ 0, 6x > 4, 2; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} (x^2-81)(x+5) > (x^2-25)(x+9), \\ 0, 4x > -2, 4. \end{cases}$$

6.1.C06 Решите систему неравенств:

$$а) \begin{cases} (3x^2-11)^2 \leq (3x^2-13)^2, \\ (x+7)^2 \leq (x-7)^2; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} (2x^2-7)^2 \leq (2x^2-9)^2, \\ (x+8)^2 \leq (x-8)^2. \end{cases}$$

6.1.C07 Решите систему неравенств:

$$а) \begin{cases} x^3(5x^2+4) > 4x^3, \\ x^2-8x-20 < 0; \end{cases} \quad б) \begin{cases} x^3(4x^2+5) > 5x^3, \\ x^2+10x-24 < 0. \end{cases}$$

6.1.C08 Решите систему неравенств:

$$а) \begin{cases} 3x(4x-7)^2 \leq 2(4x-7)^2, \\ 4x(3x-2)^2 \geq 7(3x-2)^2; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 8x(2x-9)^2 \leq 3(2x-9)^2, \\ 2x(8x-3)^2 \geq 9(8x-3)^2. \end{cases}$$

6.1.C09 а) Решите систему неравенств:

$$а) \begin{cases} (2x-5)^2 \geq (5x-2)^2, \\ (2x+5)^2 \leq (5x+2)^2; \end{cases} \quad б) \begin{cases} (3x-4)^2 \geq (4x-3)^2, \\ (3x+4)^2 \leq (4x+3)^2. \end{cases}$$

6.1.C10 Решите систему неравенств:

$$а) \begin{cases} (x^2-4x+3)^2 \leq 0, \\ x^3+x^2 > 35; \end{cases} \quad б) \begin{cases} (x^2-3x-4)^2 \leq 0, \\ x^3+x^2 > 47. \end{cases}$$

Уровень D

6.1.D01 Решите систему неравенств:

$$а) \begin{cases} 25x^4 + 21x^2 - 4 > 0, \\ x^2(9x+11) < 11x^2; \end{cases} \quad б) \begin{cases} 16x^4 + 7x^2 - 9 > 0, \\ x^2(7x+8) < 8x^2. \end{cases}$$

6.1.D02 Решите двойное неравенство:

$$а) (5x^2-4x-1)^2 < (5x^2-4x+3)^2 < (5x^2+4x+2)^2;$$

$$б) (4x^2-2x-3)^2 < (4x^2-2x+5)^2 < (4x^2+2x+1)^2.$$

6.1.D03 а) Наибольшее из чисел m, n обозначается $\max(m, n)$. Если числа равны, то $\max(m, n) = m = n$. Найдите все значения x , при каждом из которых

$$\max(6x-5; x^2+3) < 7.$$

б) Наименьшее из чисел m и n обозначается $\min(m, n)$. Если числа равны, то $\min(m, n) = m = n$. Найдите все значения x , при каждом из которых

$$\min(3x+2; x^2+7) > 11.$$

6.1.D04 Решите систему неравенств:

$$а) \begin{cases} (2x+3)^6 > (3x+2)^6, \\ 2x^3 < 3x^2; \end{cases} \quad б) \begin{cases} (3x-4)^6 > (4x-3)^6, \\ 4x^3 < 5x^2. \end{cases}$$

6.1.D05 Решите систему неравенств:

$$а) \begin{cases} (5x^2-12x+4)^2 + (2x^2-7x+6)^2 \leq 0, \\ x^5-2x^4-x^2+5 \geq 0; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} (5x^2-17x+6)^2 + (3x^2-13x+12)^2 \leq 0, \\ x^5-3x^4-x^2+10 \geq 0. \end{cases}$$

6.1.D06 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} |x^2 - 121|(16 - x^2) \geq 0, \\ x^2 + 15x + 44 \leq 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} |x^2 - 144|(9 - x^2) \geq 0, \\ x^2 + 15x + 36 \leq 0. \end{cases}$$

6.1.D07 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} (3x - 4)^6 \leq (4x - 3)^3, \\ 9x^2 - 28x + 19 \geq 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} (2x - 3)^6 \leq (3x - 2)^3, \\ 4x^2 - 15x + 11 \geq 0. \end{cases}$$

6.1.D08 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} 2(2x + 3)^4 \geq (2x + 3)^3 + (2x + 3)^5, \\ x^2 + 3x + 2 \leq 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2(3x + 7)^4 \geq (3x + 7)^3 + (3x + 7)^5, \\ x^2 + 5x + 6 \leq 0. \end{cases}$$

6.1.D09 а) Сравните каждое из чисел m , n и k с числом 3, если $(m - 3)(n - 3) < 0$, $(m - 3)(k - 3) > 0$, $(m - 3)(n - 3)(k - 3) < 0$.

б) Сравните каждое из чисел x , y и z с числом 5, если $(x - 5)(y - 5) > 0$, $(x - 5)(z - 5) > 0$, $(x - 5)(y - 5)(z - 5) < 0$.

6.1.D10 а) Сравните число a с числом 7, если

$$(a^2 - 5a + 6)(a^2 - 11a + 28) > 0, \\ (a^2 - 6a + 8)(a^2 - 11a + 24) < 0.$$

б) Сравните число a с числом -5 , если $(a^2 + 5a + 4)(a^2 + 7a + 10) > 0$, $(a^2 + 10a + 24)(a^2 + 3a + 2) < 0$.

§2. Системы дробно-рациональных неравенств

Уровень А

6.2.A01 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{3}{4x + 5} > 0, \\ 3x - 8 < 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{2}{3x + 7} > 0, \\ 2x - 5 < 0. \end{cases}$$

6.2.A02 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{2x - 5}{5x^2 + 9} < 0, \\ 4x - 1 > 2x + 3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{3x - 2}{9x^2 + 5} < 0, \\ 3x - 2 > 2x - 7. \end{cases}$$

6.2.A03 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{5}{5 - 3x} > 0, \\ \frac{5 - 6x}{3} \geq \frac{2}{5}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{4}{4 - 5x} > 0, \\ \frac{4 - 3x}{2} \geq \frac{3}{5}. \end{cases}$$

6.2.A04 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{11}{5 - 6x} < 0, \\ 0, 2x - 0, 1 > 0, 3x - 0, 2; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{5}{3 - 8x} < 0, \\ 0, 3x - 0, 2 > 0, 4x - 0, 3. \end{cases}$$

6.2.A05 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{8}{5x + 4} > \frac{5}{5x + 4}, \\ 5x + 4 < 4x + 5; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{7}{6x + 5} > \frac{6}{6x + 5}, \\ 6x + 5 < 5x + 6. \end{cases}$$

6.2.A06 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{7}{6x - 5} \geq \frac{8}{6x - 5}, \\ \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}x > -13; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{8}{7x - 6} \geq \frac{9}{7x - 6}, \\ \frac{4}{3}x + \frac{3}{4}x > -25. \end{cases}$$

6.2.A07 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{5}{3x - 5} < \frac{3}{3x - 5}, \\ 0, 4x \geq 0, 3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{7}{2x - 7} < \frac{2}{2x - 7}, \\ 0, 6x \geq 0, 5. \end{cases}$$

6.2.A08 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{15}{3 - 5x} > \frac{17}{3 - 5x}, \\ \frac{2 + 3x}{4} < 5; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{12}{1 - 4x} > \frac{19}{1 - 4x}, \\ \frac{3 + 4x}{3} < 5. \end{cases}$$

6.2.A09 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{11}{4 - x} \geq 0, \\ \frac{2}{2 - 5x} < 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{9}{3 - x} \geq 0, \\ \frac{3}{3 - 4x} < 0. \end{cases}$$

6.2.A10 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{3x - 5}{4x - 5} > \frac{3x - 2}{4x - 5}, \\ \frac{2}{3x} < \frac{3}{2x}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{4x - 7}{3x - 2} > \frac{4x - 3}{3x - 2}, \\ \frac{3}{4x} < \frac{4}{3x}. \end{cases}$$

Уровень В

6.2.В01 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{14}{16x^2 - 9} > 0, \\ 4x - 3 < 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{19}{4x^2 - 25} > 0, \\ 2x - 5 < 0. \end{cases}$$

6.2.В02 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{25 - 36x^2}{3x^2 + 4} \leq 0, \\ \frac{5 - 6x}{7} > 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{16 - 9x^2}{2x^2 + 5} \leq 0, \\ \frac{4 - 3x}{6} > 0. \end{cases}$$

6.2.В03 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{7}{6x - 7} > \frac{6x^2}{7 - 6x}, \\ \frac{4x^2}{4x^2 + 9} < \frac{9}{4x^2 + 9}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{10}{9x - 10} > \frac{9x^2}{10 - 9x}, \\ \frac{9x^2}{9x^2 + 16} < \frac{16}{9x^2 + 16}. \end{cases}$$

6.2.В04 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{2x^2 + 11}{11x^2 + 2} > \frac{2x^2 + 11x}{11x^2 + 2}, \\ 0, 2x - 0, 6 < 0, 6x - 0, 2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{3x^2 + 10}{10x^2 + 3} > \frac{3x^2 + 10x}{10x^2 + 3}, \\ 0, 4x - 0, 7 < 0, 7x - 0, 4. \end{cases}$$

6.2.В05 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{5}{25x^2 - 144} > \frac{12}{25x^2 - 144}, \\ 1, 2x > 0, 5; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{6}{36x^2 - 121} > \frac{11}{36x^2 - 121}, \\ 1, 1x > 0, 6. \end{cases}$$

6.2.В06 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{7}{x(4 - x)} < \frac{3}{x(x - 4)}, \\ 5x > x + 5; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{5}{x(3 - x)} < \frac{2}{x(x - 3)}, \\ 4x > x + 4. \end{cases}$$

6.2.В07 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{x^2 - 6x}{6x^2 + 5} \leq 0, \\ \frac{6}{5 - x} > 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{x^2 - 8x}{8x^2 + 7} \leq 0, \\ \frac{5}{7 - x} > 0. \end{cases}$$

6.2.В08 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{1}{x^2 - x - 12} < \frac{12}{x^2 - x - 12}, \\ 12x > 0, 12; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{3}{x^2 - 3x - 10} < \frac{10}{x^2 - 3x - 10}, \\ 10x > 0, 1. \end{cases}$$

6.2.В09 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{x^2 + 40}{x^2 + 4} < \frac{x + 40}{x^2 + 4}, \\ \frac{4}{3x - 2} > 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{x^2 + 50}{x^2 + 5} < \frac{x + 50}{x^2 + 5}, \\ \frac{5}{4x - 3} > 0. \end{cases}$$

6.2.В10 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{(x + 4)^2}{5x^2 + 4} > \frac{(x + 5)^2}{5x^2 + 4}, \\ 0, 9x > -8, 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{(x + 6)^2}{7x^2 + 6} > \frac{(x + 7)^2}{7x^2 + 6}, \\ 0, 13x > -1, 69. \end{cases}$$

Уровень С

6.2.С01 Решите двойное неравенство:

$$\text{а) } \frac{1}{7} < \frac{1}{3 - 2x} < \frac{1}{5}; \quad \text{б) } \frac{1}{11} < \frac{1}{2 - 3x} < \frac{1}{8}.$$

6.2.С02 Решите двойное неравенство:

$$\text{а) } \frac{4}{x - 4} - \frac{6}{x + 2} < \frac{4}{x - 4} - \frac{5}{x + 2} < \frac{3}{x - 4} - \frac{5}{x + 2};$$

$$\text{б) } \frac{3}{x - 3} - \frac{7}{x + 4} < \frac{3}{x - 3} - \frac{6}{x + 4} < \frac{2}{x - 3} - \frac{6}{x + 4}.$$

6.2.С03 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{5x^2}{6 + 11x} \leq 0, \\ 17x + x^2 \leq 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{4x^2}{9 + 13x} \leq 0, \\ 22x + x^2 \leq 0. \end{cases}$$

6.2.С04 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{(x - 5)^2}{16 - x^2} \geq 0, \\ 5x - x^2 \geq 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{(x - 6)^2}{25 - x^2} \geq 0, \\ 6x - x^2 \geq 0. \end{cases}$$

6.2.С05 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{17}{17x - x^2} > \frac{1}{17 - x}, \\ x^2 - 19x < 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{11}{11x - x^2} > \frac{1}{11 - x}, \\ x^2 - 13x < 0. \end{cases}$$

6.2.C06 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{1}{x-4} < \frac{1}{x+8}, \\ \frac{1}{x+6} > \frac{1}{x-5}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{1}{x-6} < \frac{1}{x+9}, \\ \frac{1}{x+7} > \frac{1}{x-7}. \end{cases}$$

6.2.C07 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{1}{3x^2-2x} > \frac{1}{5}, \\ \frac{1}{3x^2-2x} < 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{1}{4x^2-3x} > \frac{1}{7}, \\ \frac{1}{4x^2-3x} < 1. \end{cases}$$

6.2.C08 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{3}{x^2-3x} \leq \frac{1}{x-3}, \\ x < 4; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{2}{x^2-2x} \leq \frac{1}{x-2}, \\ x < 3. \end{cases}$$

6.2.C09 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{2}{x} < \frac{3}{x^2}, \\ x^2 \leq 4; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{3}{x} < \frac{7}{x^2}, \\ x^2 \leq 9. \end{cases}$$

6.2.C10 а) Положительным или отрицательным является число b , если

$$\frac{1}{(b+1)(b+4)(b-5)} > 0, \quad \frac{1}{(b+3)(b+4)(b-5)} < 0?$$

б) Положительным или отрицательным является число b , если

$$\frac{1}{(b+5)(b-7)(b-15)} > 0, \quad \frac{1}{(b+4)(b-7)(b-15)} < 0?$$

Уровень D

6.2.D01 Решите двойное неравенство:

$$\text{а) } x - 2 \leq \frac{x^3 - 8x^2 + 12x}{x - 6} \leq 6x;$$

$$\text{б) } x - 3 \leq \frac{x^3 - 7x^2 + 12x}{x - 4} \leq 4x.$$

6.2.D02 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{x-5}{x-6} < \frac{x+7}{x+6}, \\ \frac{x+4}{x+8} > \frac{x-7}{x-3}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{x-4}{x-5} < \frac{x+6}{x+5}, \\ \frac{x+3}{x+7} > \frac{x-6}{x-2}. \end{cases}$$

6.2.D03 Решите двойное неравенство:

$$\text{а) } \frac{4}{x} - 3 < \frac{1}{x^2} < \frac{5}{x} + 6; \quad \text{б) } \frac{3}{x} - 2 < \frac{1}{x^2} < \frac{6}{x} + 7.$$

6.2.D04 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{1}{|x|-5} > \frac{1}{|x|+9}, \\ \frac{5}{|x|+9} > \frac{4}{|x|+10}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{1}{|x|-6} > \frac{1}{|x|+10}, \\ \frac{6}{|x|+10} > \frac{5}{|x|+11}. \end{cases}$$

6.2.D05 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{5}{7x^2+6} < \frac{7}{6x^2+5}, \\ \frac{5x^2-7}{x^2(121x^2-16)} < \frac{7}{x^2(16-121x^2)}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{7}{9x^2+8} < \frac{9}{8x^2+7}, \\ \frac{7x^2-9}{x^2(36x^2-81)} < \frac{9}{x^2(81-36x^2)}. \end{cases}$$

6.2.D06 Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел x и y , являющиеся решениями системы:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{1}{5(x-2)^2+6(y-4)^2} \geq \frac{1}{7}, \\ \frac{1}{8(x-3)^2+7(y-5)^2} \geq \frac{1}{9}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{1}{4(x-1)^2+5(y-3)^2} \geq \frac{1}{6}, \\ \frac{1}{7(x-2)^2+6(y-4)^2} \geq \frac{1}{8}. \end{cases}$$

6.2.D07 а) Наибольшее из чисел m, n обозначается $\max(m; n)$. Если числа равны, то $\max(m; n) = m = n$. Найдите все значения x , при каждом из которых

$$\max\left(\frac{1}{x^2-8x}; \frac{1}{x^2-25}\right) < 0.$$

б) Наибольшее из чисел m, n обозначается $\max(m; n)$. Если числа равны, то $\max(m; n) = m = n$. Найдите все значения x , при каждом из которых

$$\max\left(\frac{1}{x^2-6x}; \frac{1}{x^2-16}\right) < 0.$$

6.2.D08 а) Наименьшее из чисел m и n обозначается $\min(m; n)$. Если числа равны, то $\min(m; n) = m = n$. Найдите все значения x , при каждом из которых

$$\min\left(\frac{1}{x^2 - 49}; \frac{1}{x^2 + 9x}\right) > 0.$$

б) Наименьшее из чисел m и n обозначается $\min(m; n)$. Если числа равны, то $\min(m; n) = m = n$. Найдите все значения x , при каждом из которых

$$\min\left(\frac{1}{x^2 - 36}; \frac{1}{x^2 + 8x}\right) > 0.$$

6.2.D09 а) Сравните число m с числом -9 , если

$$\frac{1}{(m-7)(m+8)(m-1)} < 0; \quad \frac{1}{(m-7)(m+8)(m-2)} < 0;$$

$$\frac{1}{(m-2)(m+9)(m-1)} < 0.$$

б) Сравните число m с числом 8 , если

$$\frac{1}{(m+6)(m-5)(m+2)} > 0; \quad \frac{1}{(m+6)(m-5)(m+3)} > 0;$$

$$\frac{1}{(m+3)(m-8)(m+2)} > 0.$$

6.2.D10 а) Сравните дроби $\frac{k}{2}$ и $\frac{m}{3}$, если $\frac{k-m}{k} > 0$;

$$\frac{k-m}{m} < 0; \quad \frac{k-m}{km} > 0.$$

б) Сравните дроби $\frac{4}{x}$ и $\frac{5}{y}$, если $\frac{x+y}{x} < 0$;

$$\frac{x+y}{y} > 0; \quad \frac{x+y}{xy} < 0.$$

§3. Системы иррациональных неравенств

Уровень А

6.3.A01 Решите систему неравенств:

$$а) \begin{cases} (5x-2)\sqrt{2x^2+5} > 0, \\ (2x-5)\sqrt{5x^2+2} > 0; \end{cases} \quad б) \begin{cases} (7x-3)\sqrt{3x^2+7} > 0, \\ (3x-7)\sqrt{7x^2+3} > 0. \end{cases}$$

6.3.A02 Решите систему неравенств:

$$а) \begin{cases} \frac{6x+5}{\sqrt{6x^2+5}} < 0, \\ \frac{5x+6}{\sqrt{5x^2+6}} > 0; \end{cases} \quad б) \begin{cases} \frac{4x+3}{\sqrt{4x^2+3}} < 0, \\ \frac{3x+4}{\sqrt{3x^2+4}} > 0. \end{cases}$$

§3. Системы иррациональных неравенств

6.3.A03 Решите систему неравенств:

$$а) \begin{cases} x\sqrt{3x^2+7} < (2x-1)\sqrt{3x^2+7}, \\ 0,7x-0,5 < 0,3x+0,7; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x\sqrt{2x^2+9} < (3x-2)\sqrt{2x^2+9}, \\ 0,6x-0,7 < 0,2x+0,9. \end{cases}$$

6.3.A04 Решите систему неравенств:

$$а) \begin{cases} \frac{\sqrt{13x^2+17}}{13-17x} \leq 0, \\ 3x+7 > 7x+3; \end{cases} \quad б) \begin{cases} \frac{\sqrt{11x^2+15}}{11-15x} \leq 0, \\ 2x+9 > 9x+2. \end{cases}$$

6.3.A05 Решите систему неравенств:

$$а) \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{7-4x}} < \frac{7}{\sqrt{7-4x}}, \\ \frac{7}{\sqrt{7x+4}} > \frac{4}{\sqrt{7x+4}}; \end{cases} \quad б) \begin{cases} \frac{3}{\sqrt{8-3x}} < \frac{8}{\sqrt{8-3x}}, \\ \frac{8}{\sqrt{8x+3}} > \frac{3}{\sqrt{8x+3}}. \end{cases}$$

6.3.A06 Решите систему неравенств:

$$а) \begin{cases} \frac{4x}{\sqrt{4x^2+9}} \leq \frac{9}{\sqrt{4x^2+9}}, \\ \frac{9x}{\sqrt{9x^2+4}} \geq \frac{4}{\sqrt{9x^2+4}}; \end{cases} \quad б) \begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{2x^2+5}} \leq \frac{5}{\sqrt{2x^2+5}}, \\ \frac{5x}{\sqrt{5x^2+2}} \geq \frac{2}{\sqrt{5x^2+2}}. \end{cases}$$

6.3.A07 Решите систему неравенств:

$$а) \begin{cases} \frac{\sqrt{6x^2+17}}{17x-6} \geq \frac{17}{6-17x}, \\ \frac{3x}{2} < \frac{2x}{3} + 5; \end{cases} \quad б) \begin{cases} \frac{\sqrt{5x^2+12}}{12x-5} \geq \frac{12}{5-12x}, \\ \frac{4x}{3} < \frac{3x}{4} + 7. \end{cases}$$

6.3.A08 Решите систему неравенств:

$$а) \begin{cases} \frac{7x^2+x-5}{\sqrt{7x^2+5}} < \frac{7x^2}{\sqrt{7x^2+5}}, \\ 2,7x+7,9 > 2,5; \end{cases} \quad б) \begin{cases} \frac{4x^2+x-7}{\sqrt{4x^2+7}} < \frac{4x^2}{\sqrt{4x^2+7}}, \\ 2,4x+9,9 > 2,7. \end{cases}$$

6.3.A09 Решите систему неравенств:

$$а) \begin{cases} (3x-8)\sqrt{8x^2+3} < 0, \\ \frac{3x+8}{\sqrt{3x^2+8}} > 0; \end{cases} \quad б) \begin{cases} (4x-7)\sqrt{7x^2+4} < 0, \\ \frac{4x+7}{\sqrt{4x^2+7}} > 0. \end{cases}$$

6.3.A10 Решите двойное неравенство:

$$а) 0 < \frac{5x-4}{\sqrt{16x^2+25}} < \frac{4x+5}{\sqrt{16x^2+25}};$$

$$б) 0 < \frac{4x-3}{\sqrt{9x^2+16}} < \frac{3x+4}{\sqrt{9x^2+16}}.$$

Уровень В

6.3.B01 Решите двойное неравенство:

$$\begin{aligned} \text{а) } & (x-2)\sqrt{x^2+5} < (3x-4)\sqrt{x^2+5} < (2x-1)\sqrt{x^2+5}; \\ \text{б) } & (x-3)\sqrt{x^2+6} < (3x-5)\sqrt{x^2+6} < (2x-3)\sqrt{x^2+6}. \end{aligned}$$

6.3.B02 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{36x^2-49}{\sqrt{x^2+85}} < 0, \\ 6x-7 < 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{25x^2-64}{\sqrt{x^2+89}} < 0, \\ 5x-8 < 0. \end{cases}$$

6.3.B03 Решите систему неравенств:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} (144-x^2)\sqrt{x^2+12} \geq 0, \\ \frac{x-6}{6} \leq 1; \end{cases} \\ \text{б) } & \begin{cases} (196-x^2)\sqrt{x^2+14} \geq 0, \\ \frac{x-7}{7} \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

6.3.B04 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{3\sqrt{x^4+6}}{2x-7} < \frac{2\sqrt{x^4+6}}{2x-7}, \\ 4x^2 < 49; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{5\sqrt{x^4+6}}{3x-8} < \frac{4\sqrt{x^4+6}}{3x-8}, \\ 9x^2 < 64. \end{cases}$$

6.3.B05 Решите систему неравенств:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} \frac{13x^2}{\sqrt{169x^2-49}} > -\frac{7}{\sqrt{169x^2-49}}, \\ 1, 3x > 0, 7; \end{cases} \\ \text{б) } & \begin{cases} \frac{12x^2}{\sqrt{144x^2-25}} > -\frac{5}{\sqrt{144x^2-25}}, \\ 1, 2x > 0, 5. \end{cases} \end{aligned}$$

6.3.B06 Решите систему неравенств:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} 9x^2\sqrt{25x^2+9} < 25\sqrt{25x^2+9}, \\ 5\sqrt{5x^2+3} > 3x\sqrt{5x^2+3}; \end{cases} \\ \text{б) } & \begin{cases} 16x^2\sqrt{9x^2+16} < 9\sqrt{9x^2+16}, \\ 3\sqrt{3x^2+4} > 4x\sqrt{3x^2+4}. \end{cases} \end{aligned}$$

6.3.B07 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{x^2-8x+15}{\sqrt{3x^2+5}} < 0, \\ (x-1)^2 > (x-5)^2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{x^2-7x+10}{\sqrt{2x^2+5}} < 0, \\ (x-1)^2 > (x-3)^2. \end{cases}$$

6.3.B08 Решите систему неравенств:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} \frac{5}{\sqrt{14-5x-x^2}} < \frac{14}{\sqrt{14-5x-x^2}}, \\ \frac{7}{2x} < \frac{2}{7x}; \end{cases} \\ \text{б) } & \begin{cases} \frac{3}{\sqrt{28-3x-x^2}} < \frac{28}{\sqrt{28-3x-x^2}}, \\ \frac{7}{4x} < \frac{4}{7x}. \end{cases} \end{aligned}$$

6.3.B09 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{15x}{\sqrt{x^2+56}} > \frac{x^2+56}{\sqrt{x^2+56}}, \\ \frac{x-8}{8} < \frac{x-7}{7}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{15x}{\sqrt{x^2+54}} > \frac{x^2+54}{\sqrt{x^2+54}}, \\ \frac{x-9}{9} < \frac{x-6}{6}. \end{cases}$$

6.3.B10 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{(x-4)^2}{\sqrt{x^2+12}} \geq \frac{(x-8)^2}{\sqrt{x^2+12}}, \\ x^2 \leq 36; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{(x-3)^2}{\sqrt{x^2+10}} \geq \frac{(x-7)^2}{\sqrt{x^2+10}}, \\ x^2 \leq 25. \end{cases}$$

Уровень С

6.3.C01 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} (x-2)\sqrt{4-x} \geq 0, \\ (x-3)\sqrt{4-x} \leq 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} (x-1)\sqrt{5-x} \geq 0, \\ (x-4)\sqrt{5-x} \leq 0. \end{cases}$$

6.3.C02 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{\sqrt{x+8}}{x-5} \leq 0, \\ \frac{\sqrt{x+8}}{x+4} \geq 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{\sqrt{x+14}}{x-8} \leq 0, \\ \frac{\sqrt{x+14}}{x+7} \geq 0. \end{cases}$$

6.3.C03 Решите систему неравенств:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} (4x^2-9)\sqrt{3-2x} \geq 0, \\ (4x+9)\sqrt{3-2x} \leq 0; \end{cases} \\ \text{б) } & \begin{cases} (16x^2-25)\sqrt{5-4x} \geq 0, \\ (16x+25)\sqrt{5-4x} \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

6.3.C04 Решите систему неравенств:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} (x^2-5x+4)\sqrt{4-x} \geq 0, \\ (3-x)|x-4| \leq 0; \end{cases} \\ \text{б) } & \begin{cases} (x^2-4x+3)\sqrt{3-x} \geq 0, \\ (2-x)|x-3| \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

6.3.C05 Решите систему неравенств:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} 5x(3x-5)\sqrt{x} < 3x(5-3x), \\ 0, 3x < 1, 5; \end{cases} \\ \text{б) } & \begin{cases} 7x(4x-7)\sqrt{x} < 4x(7-4x), \\ 0, 4x < 2, 8. \end{cases} \end{aligned}$$

6.3.C06 Решите двойное неравенство:

$$\begin{aligned} \text{а) } & 5x\sqrt{35-x} \leq 2\sqrt{35-x} \leq 7x\sqrt{35-x}; \\ \text{б) } & 4x\sqrt{44-x} \leq 7\sqrt{44-x} \leq 11x\sqrt{44-x}. \end{aligned}$$

6.3.C07 Решите двойное неравенство:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{3x-2}{\sqrt{x-5}} \leq \frac{2x+5}{\sqrt{x-5}} \leq \frac{5x-7}{\sqrt{x-5}}; \\ \text{б) } & \frac{4x-3}{\sqrt{x-7}} \leq \frac{3x+7}{\sqrt{x-7}} \leq \frac{7x-9}{\sqrt{x-7}}. \end{aligned}$$

6.3.C08 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{\sqrt{x+6}}{x-5} \geq 0, \\ x^2 \leq 36; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{\sqrt{x+7}}{x-6} \geq 0, \\ x^2 \leq 49. \end{cases}$$

6.3.C09 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{\sqrt{x+17}}{x-12} \leq \frac{\sqrt{x+17}}{x+12}, \\ x^2 + 17x \leq 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{\sqrt{x+15}}{x-11} \leq \frac{\sqrt{x+15}}{x+11}, \\ x^2 + 15x \leq 0. \end{cases}$$

6.3.C10 Решите систему неравенств:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} \frac{18}{4-x} < \frac{\sqrt{196-x^2}}{x-4}, \\ 1, 4x+1, 8 < 1, 8x-1, 4; \end{cases} \\ \text{б) } & \begin{cases} \frac{20}{5-x} < \frac{\sqrt{225-x^2}}{x-5}, \\ 1, 5x+2 < 2x-1, 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Уровень D

6.3.D01 Решите двойное неравенство :

$$\begin{aligned} \text{а) } & 30 < x - 21\sqrt{x} + 110 < 42; \\ \text{б) } & 12 < x - 20\sqrt{x} + 96 < 32. \end{aligned}$$

6.3.D02 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{\sqrt{18-3x-x^2}}{x+4} \geq 0, \\ 4x \leq x^2 - 12; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{\sqrt{28-3x-x^2}}{x+5} \geq 0, \\ 4x \leq x^2 - 21. \end{cases}$$

6.3.D03 Решите систему неравенств:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} \frac{2x^2-15x+7}{\sqrt{14+5x-x^2}} \geq 0, \\ \frac{5\sqrt{x+2}+6}{11} < \frac{6\sqrt{x+2}+7}{10}; \end{cases} \\ \text{б) } & \begin{cases} \frac{3x^2-19x+6}{\sqrt{18+3x-x^2}} \geq 0, \\ \frac{7\sqrt{x+3}+8}{15} < \frac{8\sqrt{x+3}+9}{14}. \end{cases} \end{aligned}$$

6.3.D04 Решите систему неравенств:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} (x^2+2x-35)\sqrt{144-x^2} \leq 0, \\ (x^2+x-30)\sqrt{x+12} \leq 0; \end{cases} \\ \text{б) } & \begin{cases} (x^2+4x-32)\sqrt{121-x^2} \leq 0, \\ (x^2+3x-28)\sqrt{x+11} \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

6.3.D05 Решите систему неравенств:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} \frac{10}{\sqrt{x+13}+13} < \frac{13}{\sqrt{x+10}+10}, \\ x+18+\sqrt{-x-9} > \frac{\sqrt{x^2-81}}{\sqrt{9-x}}; \end{cases} \\ \text{б) } & \begin{cases} \frac{11}{\sqrt{x+12}+12} < \frac{12}{\sqrt{x+11}+11}, \\ x+16+\sqrt{-x-8} > \frac{\sqrt{x^2-64}}{\sqrt{8-x}}. \end{cases} \end{aligned}$$

6.3.D06 Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел x и y , являющиеся решениями системы:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} \sqrt{5x-6y-4} \leq 0, 564, \\ \sqrt{6x-5y-7} \leq 0, 657; \end{cases} \\ \text{б) } & \begin{cases} \sqrt{4x-3y-6} \leq 0, 436, \\ \sqrt{3x-4y-1} \leq 0, 341. \end{cases} \end{aligned}$$

6.3.D07 а) Наименьшее из чисел m и n обозначается $\min(m; n)$. Если числа равны, то $\min(m; n) = m = n$. Найдите все значения x , при каждом из которых

$$\min(11\sqrt{x}-3; 11-3\sqrt{x}) > 0.$$

б) Наименьшее из чисел m и n обозначается $\min(m; n)$. Если числа равны, то $\min(m; n) = m = n$. Найдите все значения x , при каждом из которых

$$\min(12\sqrt{x}-5; 12-5\sqrt{x}) > 0.$$

- 6.3.D08** а) Наибольшее из чисел m, n обозначается $\max(m; n)$. Если числа равны, то $\max(m; n) = m = n$. Найдите все значения x , при каждом из которых

$$\max(x - 10\sqrt{x}; x - 14\sqrt{x} + 24) < 0.$$

- б) Наибольшее из чисел m, n обозначается $\max(m; n)$. Если числа равны, то $\max(m; n) = m = n$. Найдите все значения x , при каждом из которых

$$\max(x - 8\sqrt{x}; x - 14\sqrt{x} + 33) < 0.$$

- 6.3.D09** а) Сравните \sqrt{m} и 13, если
 $(\sqrt{m} - 7)(\sqrt{m} - 9)(\sqrt{m} - 15) > 0$;
 $(\sqrt{m} - 7)(\sqrt{m} - 9)(\sqrt{m} - 17) > 0$;
 $(\sqrt{m} - 13)(\sqrt{m} - 15)(\sqrt{m} - 17) < 0$.

- б) Сравните \sqrt{m} и 7, если
 $(\sqrt{m} - 3)(\sqrt{m} - 5)(\sqrt{m} - 9) < 0$;
 $(\sqrt{m} - 3)(\sqrt{m} - 5)(\sqrt{m} - 11) > 0$;
 $(\sqrt{m} - 7)(\sqrt{m} - 9)(\sqrt{m} - 11) < 0$.

- 6.3.D10** а) Между какими двумя последовательными натуральными числами заключено число \sqrt{a} , если
 $(\sqrt{a} - 3)(\sqrt{a} - 5)(\sqrt{a} - 6) > 0$;
 $(\sqrt{a} - 4)(\sqrt{a} - 5)(\sqrt{a} - 6) < 0$?
- б) Между какими двумя последовательными натуральными числами заключено число \sqrt{a} , если
 $(\sqrt{a} - 7)(\sqrt{a} - 9)(\sqrt{a} - 10) > 0$;
 $(\sqrt{a} - 8)(\sqrt{a} - 9)(\sqrt{a} - 10) < 0$?

7

§1. Чтение графиков

Уровень А

- 7.1.A01** а) По графику квадратичной функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 1, найдите:
- значения x , при которых значение y равно 6;
 - наименьшее значение $f(x)$.
- б) По графику квадратичной функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 2, найдите:
- значения x , при которых значение y равно 6;
 - наименьшее значение $f(x)$.

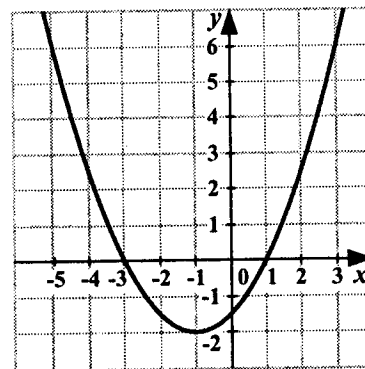


Рис. 1

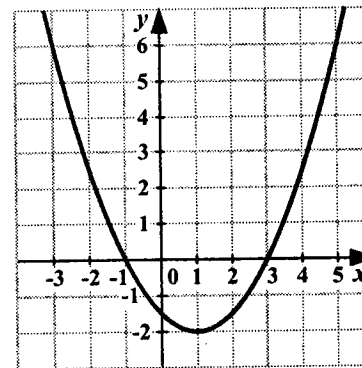


Рис. 2

- 7.1.A02** а) По графику квадратичной функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 3, найдите:
- значение y при $x = -2$;
 - значения x , при которых значение y равно 0.
- б) По графику квадратичной функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 4, найдите:
- значение y при $x = 2$;
 - значения x , при которых значение y равно 0.

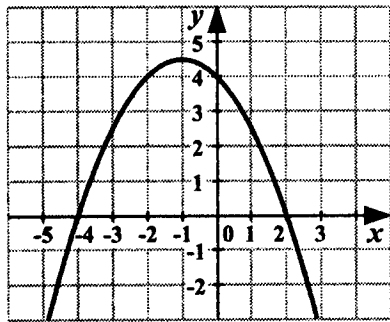


Рис. 3

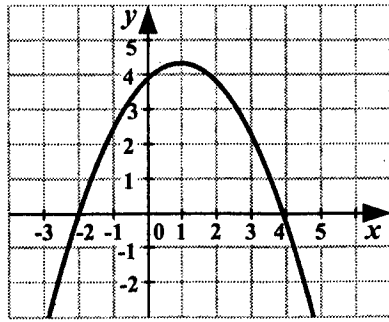


Рис. 4

7.1.A03 а) По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 5, найдите:

- 1) значение y при $x = 6$;
- 2) значение x , при котором значение y равно 2.

б) По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 6, найдите:

- 1) значение y при $x = 7$;
- 2) значение x , при котором значение y равно 3.

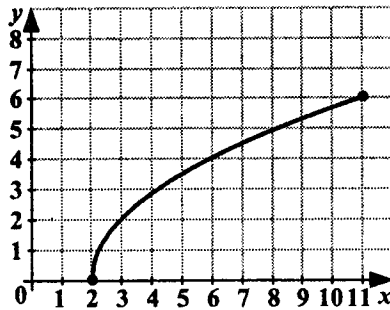


Рис. 5

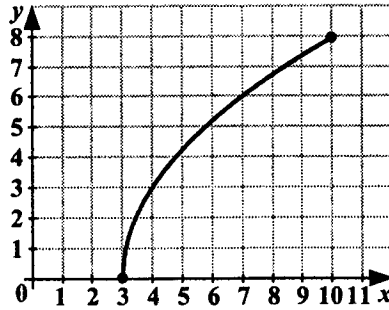


Рис. 6

7.1.A04 а) По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 7, найдите:

- 1) наибольшее значение y ;
- 2) значения x , при которых значение y равно 4.

б) По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 8, найдите:

- 1) наибольшее значение y ;
- 2) значения x , при которых значение y равно 3.

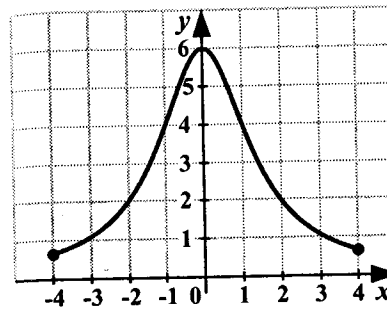


Рис. 7

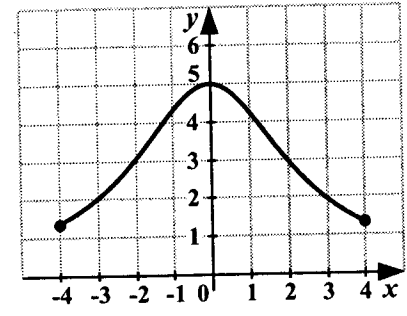


Рис. 8

7.1.A05 а) По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 9, найдите:

- 1) значения x , при которых значение y равно 0;
- 2) промежутки возрастания функции $f(x)$.

б) По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 10, найдите:

- 1) значения x , при которых значение y равно 0;
- 2) промежутки убывания функции $f(x)$.

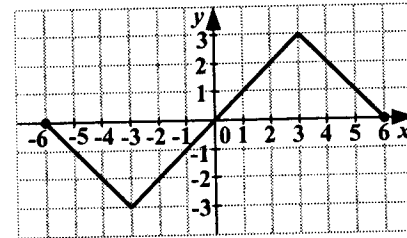


Рис. 9

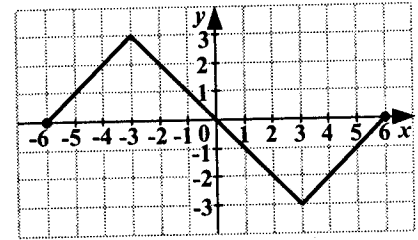


Рис. 10

7.1.A06 а) По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 11, найдите:

- 1) область определения функции;
- 2) множество значений функции.

б) По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 12, найдите:

- 1) область определения функции;
- 2) множество значений функции.

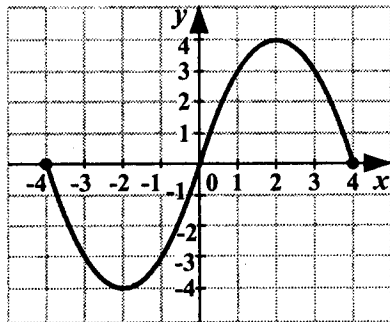


Рис. 11

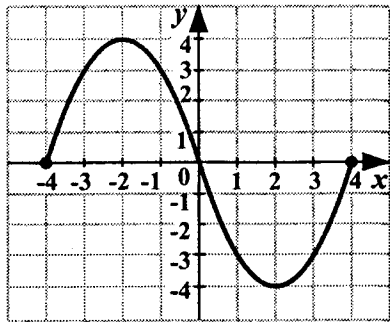


Рис. 12

7.1.A07 а) По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 13, найдите:

- 1) значения x , при которых значение y равно 0;
- 2) наибольшее значение $f(x)$.

б) По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 14, найдите:

- 1) значения x , при которых значение y равно 0;
- 2) наименьшее значение $f(x)$.

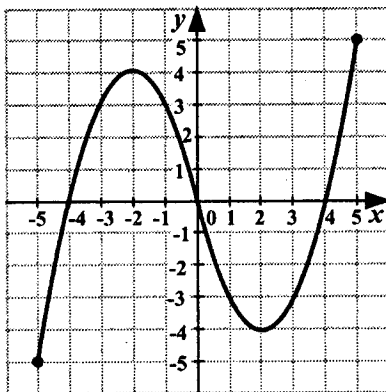


Рис. 13

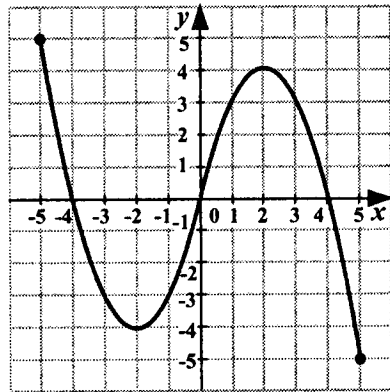


Рис. 14

7.1.A08 а) По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 15, найдите:

- 1) значения x , при которых значение y равно 1;
- 2) промежутки возрастания функции $f(x)$.

б) По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 16, найдите:

- 1) значения x , при которых значение y равно -1 ;
- 2) промежутки возрастания функции $f(x)$.

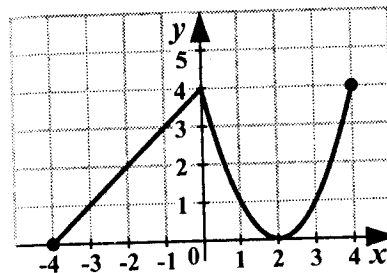


Рис. 15

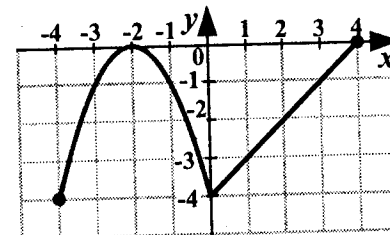


Рис. 16

7.1.A09 а) По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 17, найдите:

- 1) значения x , при которых значение y равно 1;
- 2) промежутки убывания $f(x)$.

б) По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 18, найдите:

- 1) значения x , при которых значение y равно 1;
- 2) промежутки возрастания $f(x)$.

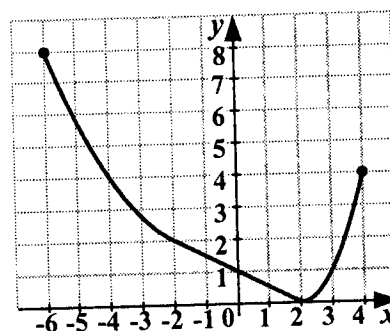


Рис. 17

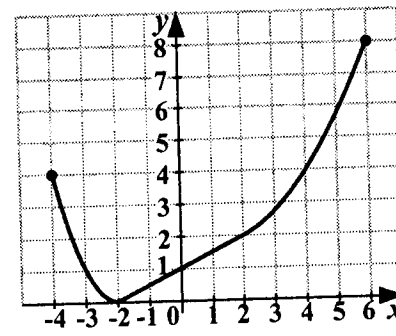


Рис. 18

7.1.A10 а) По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 19, найдите:

- 1) значения x , при которых значение y равно 2;
- 2) все значения x , при которых $0 \leq y \leq 2$.

б) По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 20, найдите:

- 1) значения x , при которых значение y равно -2 ;
- 2) все значения x , при которых $-2 \leq y \leq 0$.

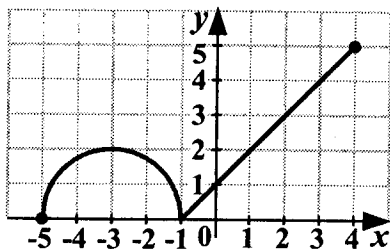


Рис. 19

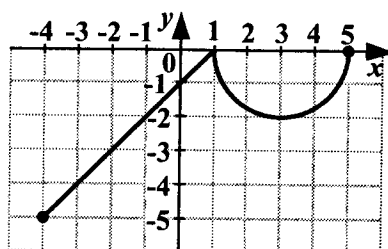


Рис. 20

Уровень В

7.1.B01 а) По графику квадратичной функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 21, найдите:

- 1) значение y при $x = 4$;
- 2) значения x , при которых $y = -2$;
- 3) наименьшее значение функции;
- 4) промежутки возрастания и убывания функции.

б) По графику квадратичной функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 22, найдите:

- 1) значение y при $x = -4$;
- 2) значения x , при которых $y = 2$;
- 3) наибольшее значение функции;
- 4) промежутки возрастания и убывания функции.

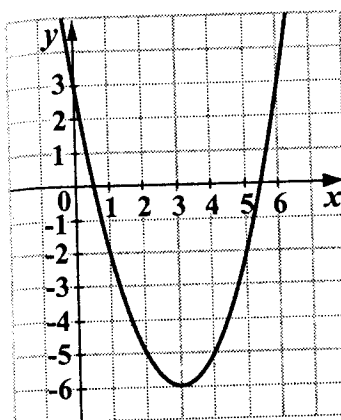


Рис. 21

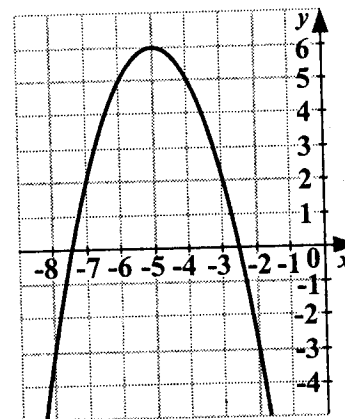


Рис. 22

7.1.B02 а) По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 23, найдите:

- 1) значения x , при которых значение y равно нулю;
- 2) промежутки возрастания функции;
- 3) значения x , при которых $y > 0$;
- 4) наименьшее значение функции при $x < 0$.

б) По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 24, найдите:

- 1) значения x , при которых значение y равно нулю;
- 2) промежутки возрастания функции;
- 3) значения x , при которых $y > 0$;
- 4) наибольшее значение функции при $x > 0$.

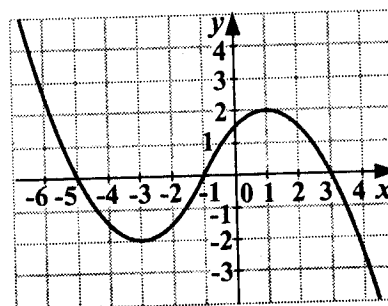


Рис. 23

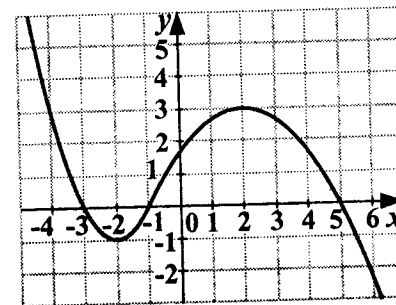


Рис. 24

7.1.В03 а) По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 25, найдите:

- 1) значения x , при которых значение y равно нулю
- 2) промежутки убывания функции;
- 3) значения x , при которых $y > 0$;
- 4) наибольшее значение функции при $x < 0$.

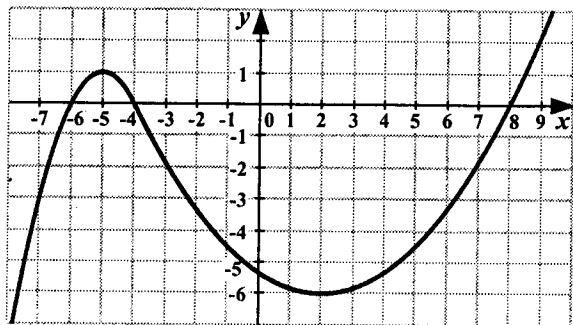


Рис. 25

б) По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 26, найдите:

- 1) значения x , при которых значение y равно нулю;
- 2) промежутки убывания функции;
- 3) значения x , при которых $y > 0$;
- 4) наименьшее значение функции при $x > 0$.

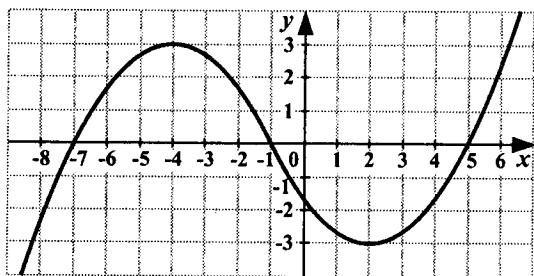


Рис. 26

7.1.В04 а) По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 27, найдите:

- 1) область определения функции;
- 2) значения x , при которых значение y равно 0;
- 3) наибольшее значение $f(x)$;
- 4) промежутки возрастания $f(x)$.

б) По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 28, найдите:

- 1) область определения функции;
- 2) значения x , при которых значение y равно 0;
- 3) наименьшее значение $f(x)$;
- 4) промежутки убывания $f(x)$.

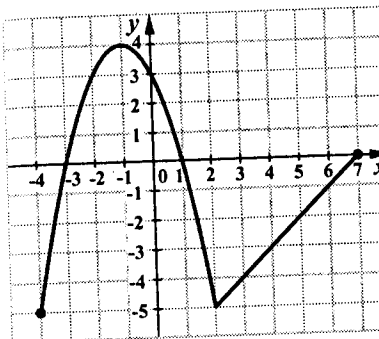


Рис. 27

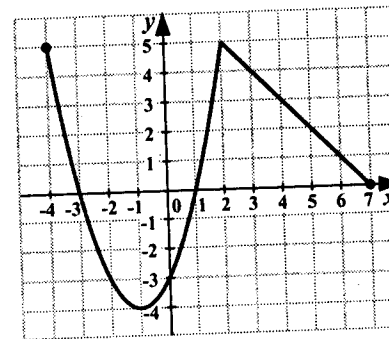


Рис. 28

7.1.В05 а) По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 29, найдите:

- 1) область определения функции;
- 2) множество значений функции;
- 3) значения x , при которых значение y равно -3 ;
- 4) промежутки возрастания и убывания $f(x)$.

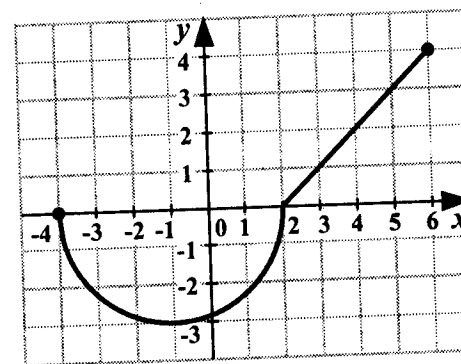


Рис. 29

б) По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 30, найдите:

- 1) область определения функции;
- 2) множество значений функции;
- 3) значения x , при которых значение y равно 3;
- 4) промежутки возрастания и убывания $f(x)$.

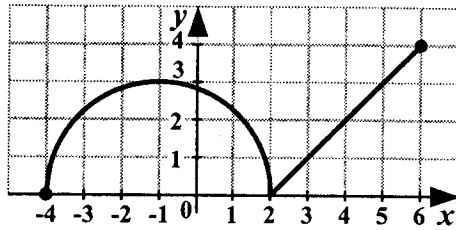


Рис. 30

7.1.В06 а) По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 31, найдите:

- 1) область определения функции;
- 2) значения x , при которых значение y равно 4;
- 3) значение y при $x = 3$;
- 4) все значения x , при которых $y < 4$.

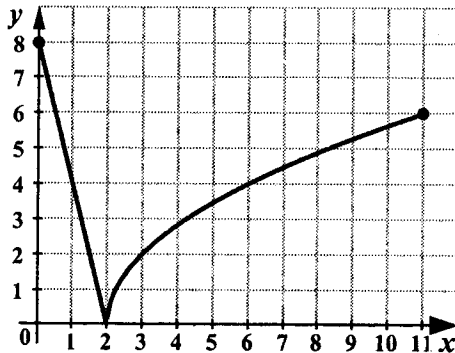


Рис. 31

б) По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 32, найдите:

- 1) область определения функции;
- 2) значения x , при которых значение y равно 6;
- 3) значение y при $x = 4$;
- 4) все значения x , при которых $y < 6$.

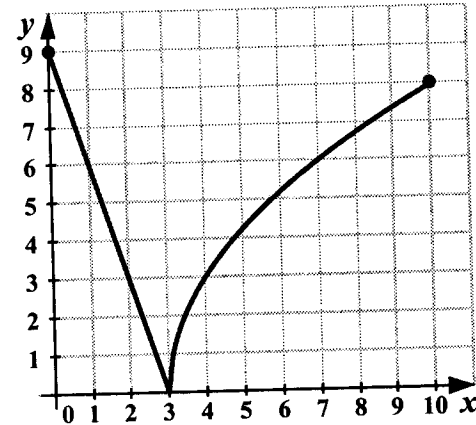


Рис. 32

7.1.В07 а) По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 33, найдите:

- 1) область определения функции;
- 2) множество значений функции;
- 3) значения x , при которых значение y равно 0;
- 4) все значения x , при которых $y < 0$.

б) По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 34, найдите:

- 1) область определения функции;
- 2) множество значений функции;
- 3) значения x , при которых значение y равно 0;
- 4) все значения x , при которых $y > 0$.

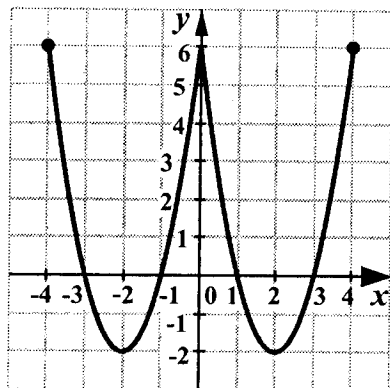


Рис. 33

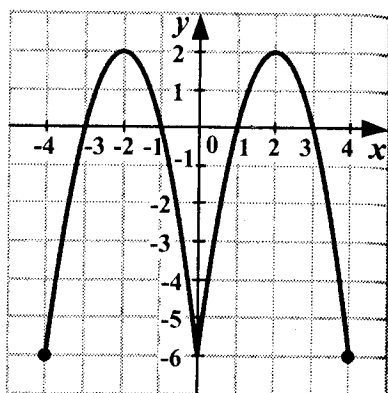


Рис. 34

7.1.B08 а) По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 35, найдите:

- 1) наименьшее значение функции;
- 2) наибольшее значение функции;
- 3) значения x , при которых значение y равно 0;
- 4) промежутки убывания функции.

б) По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 36, найдите:

- 1) наименьшее значение функции;
- 2) наибольшее значение функции;
- 3) значения x , при которых значение y равно 0;
- 4) промежутки возрастания функции.

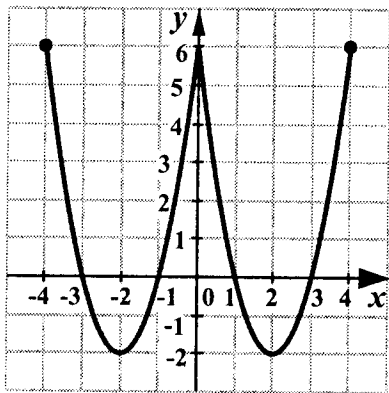


Рис. 35

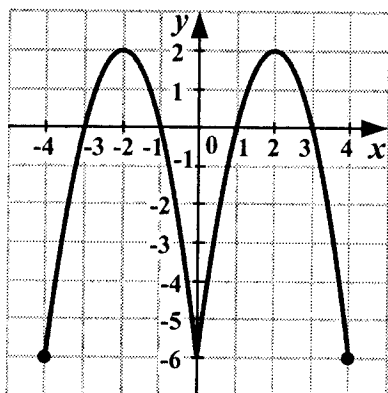


Рис. 36

7.1.B09 а) По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 37, найдите:

- 1) область определения функции;
- 2) множество значений функции;
- 3) значения x , при которых значение y равно -1 ;
- 4) промежутки возрастания функции.

б) По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 38, найдите:

- 1) область определения функции;
- 2) множество значений функции;
- 3) значения x , при которых значение y равно 1;
- 4) промежутки убывания функции.

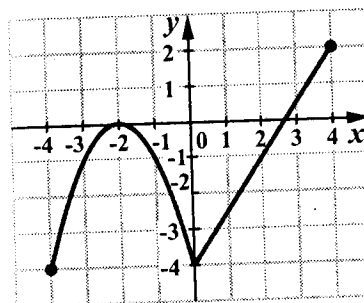


Рис. 37

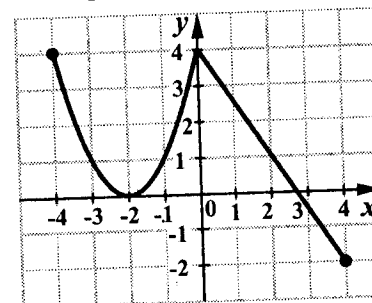


Рис. 38

7.1.B10 а) 1 ноября компания, производящая компьютеры, объявила об эмиссии (выпуске) акций компании. 3 ноября предприниматель приобрел 60 акций этой компании. На графике, изображенном на рисунке 39, представлено изменение курса акций (по оси абсцисс откладываются числа ноября, считая от дня эмиссии, по оси ординат — стоимость одной акции в рублях). 13 ноября предприниматель продал все свои акции. Прибыль или убыток принесла ему эта сделка? Сколько рублей получил или потерял предприниматель в результате этой сделки?

б) 1 декабря компания, производящая аудиотехнику, объявила об эмиссии (выпуске) акций компании. 5 декабря предприниматель приобрел 90 акций этой компании. На графике, изображенном на рисунке 40, представлено изменение курса акций (по оси абсцисс откладываются числа декабря, считая от дня

эмиссии, по оси ординат — стоимость одной акции в рублях). 17 декабря предприниматель продал все свои акции. Прибыль или убыток принесла ему эта сделка? Сколько рублей получил или потерял предприниматель в результате этой сделки?

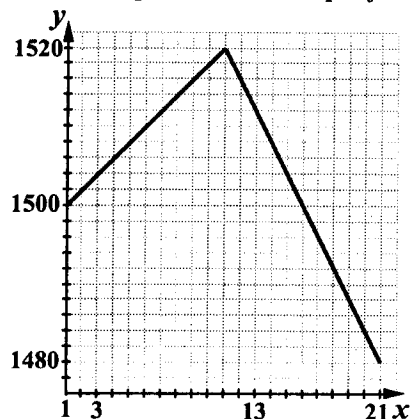


Рис. 39

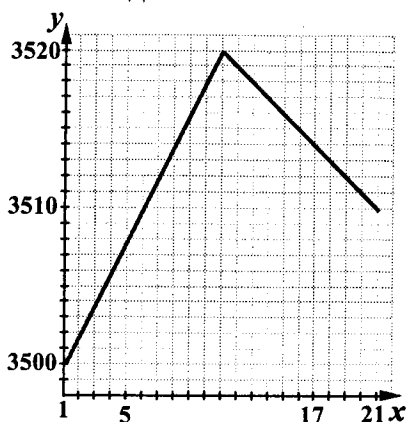


Рис. 40

Уровень С

7.1.C01 а) По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 41, найдите:

- 1) значение y при $x = 4$;
- 2) промежутки возрастания функции;
- 3) значения c , при которых прямая $y = c$ имеет с графиком функции не более трех общих точек.

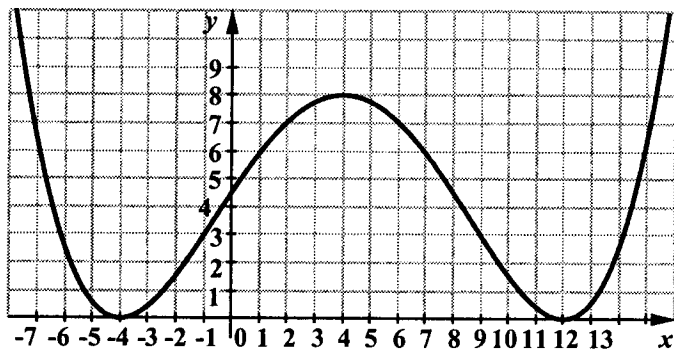


Рис. 41

б) По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 42, найдите:

- 1) значение y при $x = -1$;
- 2) промежутки возрастания функции;
- 3) значения c , при которых прямая $y = c$ имеет с графиком функции не менее двух общих точек.

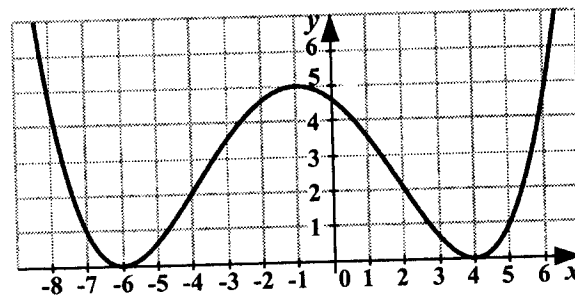


Рис. 42

7.1.C02 а) По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 43, найдите:

- 1) значение y при $x = 5$;
- 2) наибольшее значение y при $x \in [4; 10]$;
- 3) значения c , при которых прямая $y = c$ имеет с графиком функции не более двух общих точек.

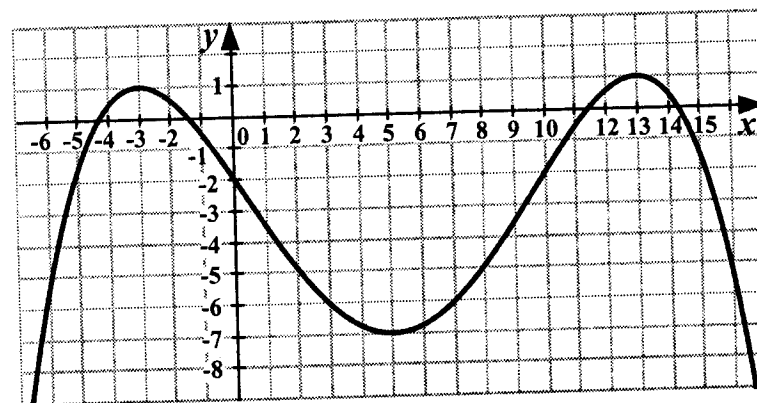


Рис. 43

б) По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 44, найдите:

- 1) значение y при $x = -7$;
- 2) наименьшее значение y при $x \in [-13; -10]$;
- 3) значения c , при которых прямая $y = c$ имеет с графиком функции не менее трех общих точек.

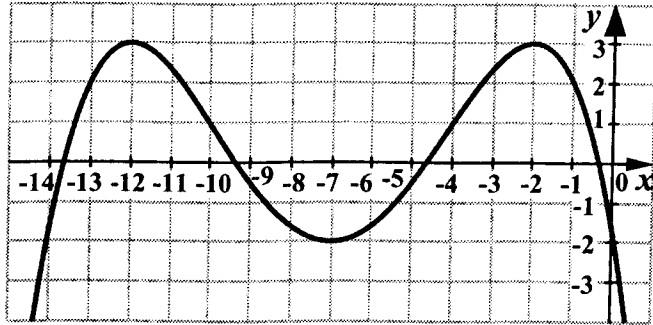


Рис. 44

7.1.C03 а) Функция $y = f(x)$ задана графиком, изображенным на рисунке 45.

- 1) Найдите корни уравнения $f(x) = -3$.
- 2) Найдите число корней уравнения $f(x) = c$ в зависимости от c .

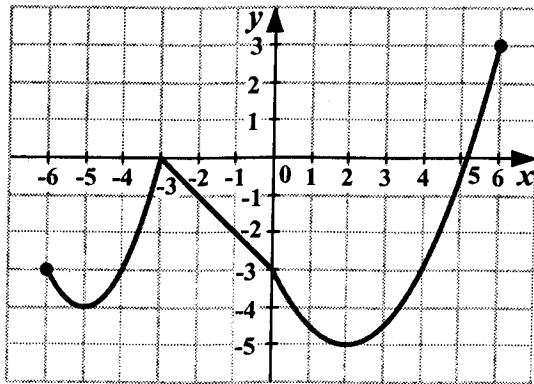


Рис. 45

б) Функция $y = f(x)$ задана графиком, изображенным на рисунке 46.

- 1) Найдите корни уравнения $f(x) = 3$.
- 2) Найдите число корней уравнения $f(x) = c$ в зависимости от c .

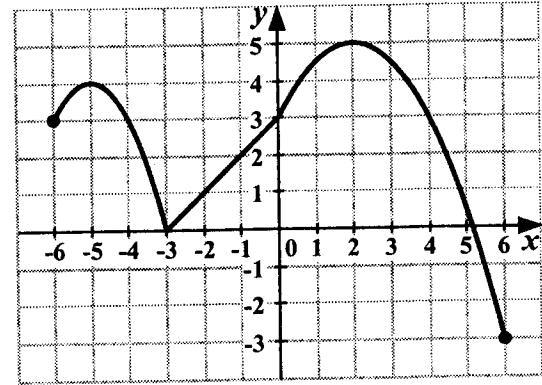


Рис. 46

- 7.1.C04 а) Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ задана графиком, изображенным на рисунке 47. Определите знаки коэффициентов a , b и c .
- б) Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ задана графиком, изображенным на рисунке 48. Определите знаки коэффициентов a , b и c .

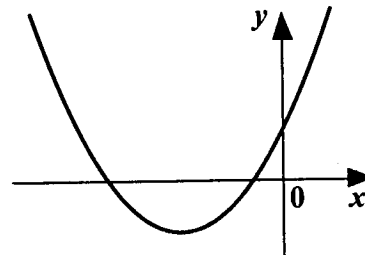


Рис. 47

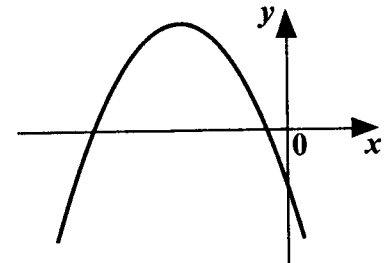


Рис. 48

- 7.1.C05 а) Рыбак отправился на озеро, где провел некоторое время, после чего вернулся домой. На рисунке 49 изображен график его движения (по горизонтальной оси откладывается время t в часах, по вертикальной — расстояние s от дома в километрах).

Используя график, ответьте на вопросы:

- 1) Сколько времени рыбак провел на озере?
- 2) На каком расстоянии от дома находится озеро?
- 3) Когда скорость рыбака была больше: на пути от дома к озеру или от озера к дому?

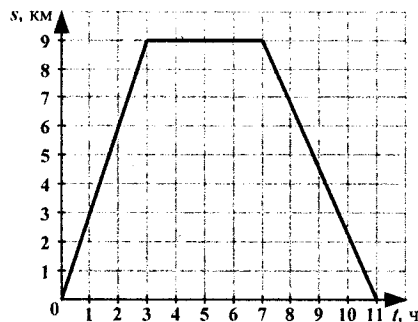


Рис. 49

б) Рыбак отправился на озеро, где провел некоторое время, после чего вернулся домой. На рисунке 50 изображен график его движения (по горизонтальной оси откладывается время t в часах, по вертикальной — расстояние s от дома в километрах). Используя график, ответьте на вопросы:

- 1) Сколько времени рыбак провел на озере?
- 2) На каком расстоянии от дома находится озеро?
- 3) Когда скорость рыбака была больше: на пути от дома к озеру или от озера к дому?

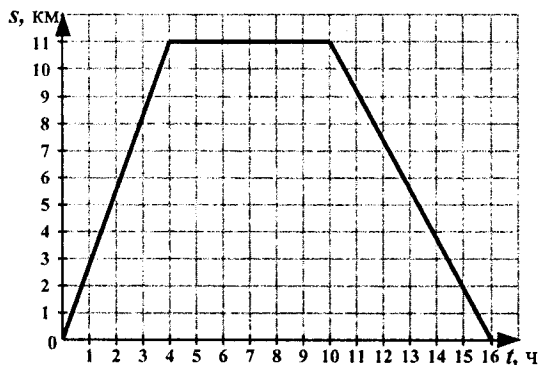


Рис. 50

- 7.1.C06 а) Турист собрался в поход. В походе он сделал два привала и после второго привала вернулся на турбазу. На рисунке 51 изображен график движения туриста (по горизонтальной оси откладывается время t в часах, по вертикальной — расстояние s от турбазы в километрах). Используя график, ответьте на вопросы:
- 1) Сколько времени турист потратил на привалы?
 - 2) С какой скоростью (в км/ч) он шел от первого до второго привала?
 - 3) Какова средняя скорость туриста за все время движения (время на привалы не учитывать)?

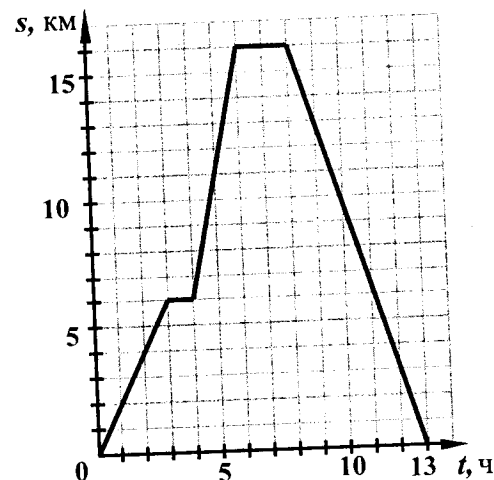


Рис. 51

- б) Турист собрался в поход. В походе он сделал два привала и после второго привала вернулся на турбазу. На рисунке 52 изображен график движения туриста (по горизонтальной оси откладывается время t в часах, по вертикальной — расстояние s от турбазы в километрах). Используя график, ответьте на вопросы:
- 1) Сколько времени турист потратил на привалы?
 - 2) С какой скоростью (в км/ч) он шел от первого до второго привала?
 - 3) Какова средняя скорость туриста за все время движения (время на привалы не учитывать)?

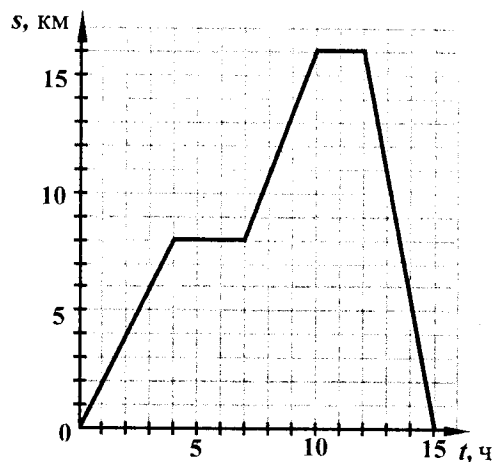


Рис. 52

7.1.C07 а) Муравей поднялся вверх по стволу дерева, сделал одну остановку для отдыха, и спустился вниз. График, изображенный на рисунке 53, показывает, как менялась высота s , на которой находился муравей, в зависимости от времени t (по вертикальной оси откладывается высота в метрах, по горизонтальной — время в минутах). Используя график, ответьте на вопросы:

- 1) Находясь на какой высоте, муравей решил отдохнуть?
- 2) Сколько времени он отдыхал?
- 3) На какую максимальную высоту он поднялся?
- 4) С какой скоростью он спускался с дерева?

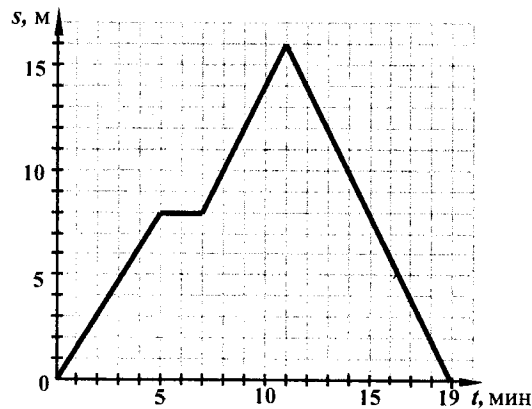


Рис. 53

б) Муравей поднялся вверх по стволу дерева, сделал одну остановку для отдыха, и спустился вниз. График, изображенный на рисунке 54, показывает, как менялась высота s , на которой находился муравей, в зависимости от времени t (по вертикальной оси откладывается высота в метрах, по горизонтальной — время в минутах). Используя график, ответьте на вопросы:

- 1) Находясь на какой высоте, муравей решил отдохнуть?
- 2) Сколько времени он отдыхал?
- 3) На какую максимальную высоту он поднялся?
- 4) С какой скоростью он спускался с дерева?

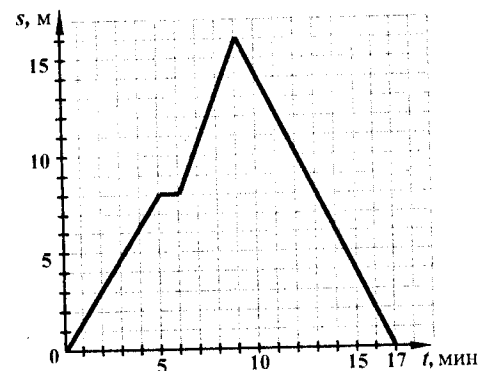


Рис. 54

- 7.1.C08 а) 1 февраля брокер купил 50 акций некоторой компании. На графике, изображенном на рисунке 55, представлено изменение курса этих акций (по оси абсцисс откладываются числа февраля, считая от дня покупки, по оси ординат — стоимость одной акции в рублях). 3 февраля брокер продал 20 акций, а оставшиеся акции он продал 17 февраля. Найдите убыток, который принесла брокеру эта сделка.
- б) 1 марта брокер купил 90 акций некоторой компании. На графике, изображенном на рисунке 56, представлено изменение курса этих акций (по оси абсцисс откладываются числа марта, считая от дня покупки, по оси ординат — стоимость одной акции в рублях). 5 марта брокер продал 10 акций, а оставшиеся акции

он продал 15 марта. Найдите убыток, который принесла брокеру эта сделка.

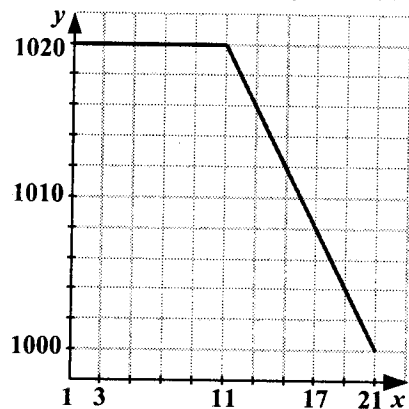


Рис. 55

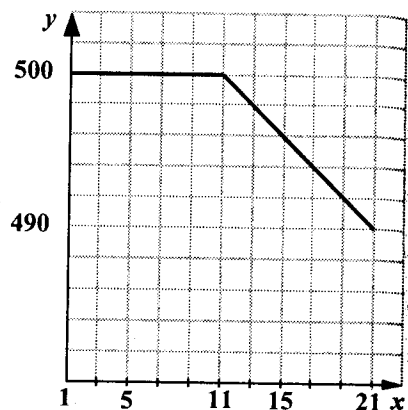


Рис. 56

- 7.1.C09** а) 6 февраля два брокера купили по 100 акций некоторой компании каждый. На графике, изображенном на рисунке 57, представлено изменение курса этих акций (по оси абсцисс откладываются числа февраля, считая от дня покупки, по оси ординат — стоимость одной акции в рублях). 14 февраля первый брокер продал 80 акций, а второй — 45 акций. Оставшиеся акции брокеры продали 24 февраля. Какой из брокеров — первый или второй — получил большую прибыль? На сколько рублей его прибыль оказалась больше прибыли другого брокера?
- б) 7 марта два брокера купили по 80 акций некоторой компании каждый. На графике, изображенном на рисунке 58, представлено изменение курса этих акций (по оси абсцисс откладываются числа марта, считая от дня покупки, по оси ординат — стоимость одной акции в рублях). 11 марта первый брокер продал 20 акций, а второй — 25 акций. Оставшиеся акции брокеры продали 30 марта. Какому из брокеров — первому или второму — сделка принесла меньший убыток? На сколько рублей его убыток оказался меньше убытка другого брокера?

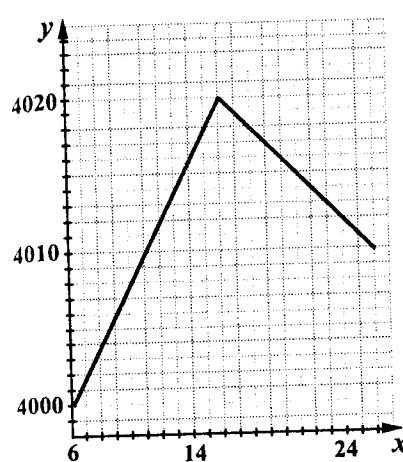


Рис. 57

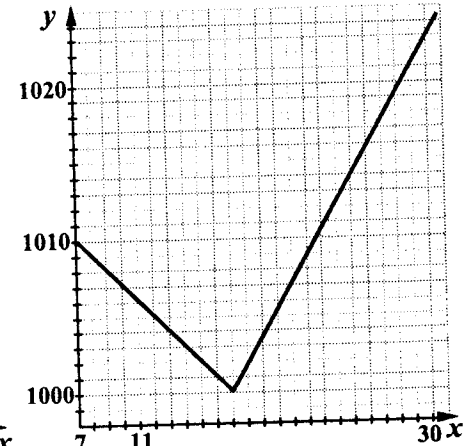


Рис. 58

- 7.1.C10** а) На графике, изображенном на рисунке 59, представлено изменение курса акций компании сотовой связи (по оси абсцисс откладываются числа августа, а по оси ординат — стоимость одной акции в рублях). Иван и Леонид приобрели акции компании 3 августа. Иван купил 50 акций и продал их 17 августа, а Леонид купил 30 акций и продал их 23 августа. Кто из них получил больший доход? На сколько рублей его доход выше, чем доход другого?

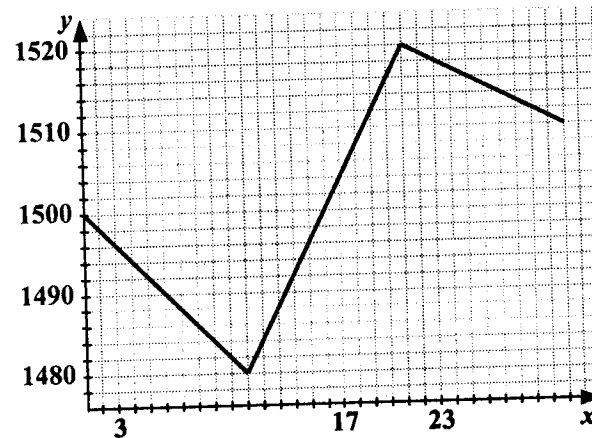


Рис. 59

б) На графике, изображенном на рисунке 60, представлено изменение курса акций компании телекоммуникационной связи (по оси абсцисс откладываются числа мая, а по оси ординат — стоимость одной акции в рублях). Борис и Андрей приобрели акции компании 5 мая. Борис купил 50 акций и продал их 19 мая, а Андрей купил 10 акций и продал их 25 мая. Кто из них получил больший доход? На сколько рублей его доход выше, чем доход другого?

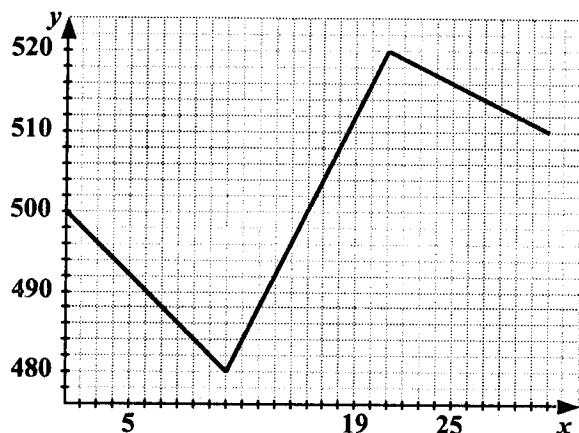


Рис. 60

Уровень D

7.1.D01 а) Квадратичная функция задана графиком, изображенным на рисунке 61.

- 1) Задайте эту функцию формулой.
- 2) Найдите значение функции при $x = -2$.

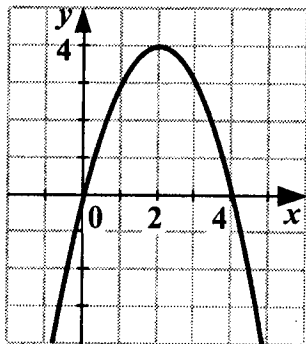


Рис. 61

б) Квадратичная функция задана графиком, изображенным на рисунке 62.

- 1) Задайте эту функцию формулой.
- 2) Найдите значение функции при $x = -7$.

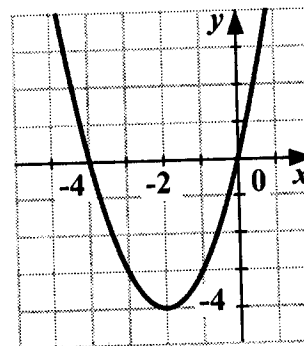


Рис. 62

- 7.1.D02 а) График функции, изображенный на рисунке 63, является полуокружностью. Задайте функцию формулой.
- б) График функции, изображенный на рисунке 64, является полуокружностью. Задайте функцию формулой.

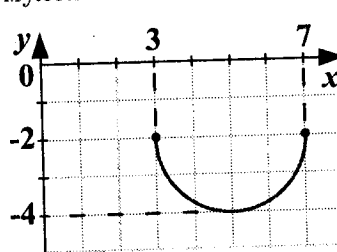


Рис. 63

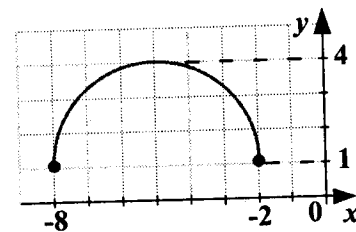


Рис. 64

7.1.D03 а) На рисунке 65 изображен график функции $y = |ax^2 + bx + c|$.

Найдите a, b, c и значение функции при $x = 0$.

б) На рисунке 66 изображен график функции $y = ax^2 + b|x| + c$.

$$y = ax^2 + b|x| + c.$$

Найдите a, b, c и значение функции при $x = 0$.

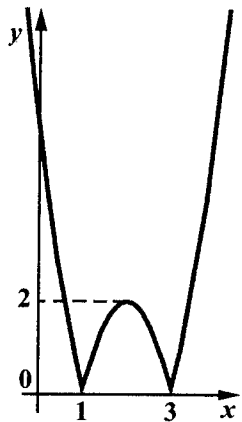


Рис. 65

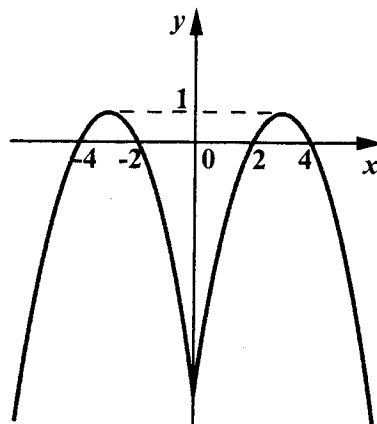


Рис. 66

- 7.1.D04 а) Функция $y = ax + b$ задана графиком, изображенным на рисунке 67. Найдите $y(3)$, если известно, что a и b – целые числа.
 б) Функция $y = ax + b$ задана графиком, изображенным на рисунке 68. Найдите $y(3)$, если известно, что a и b – целые числа.

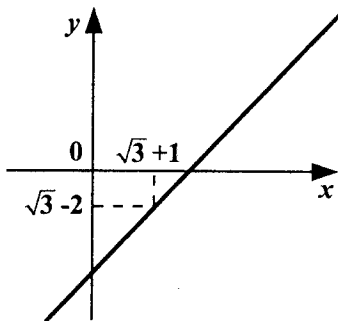


Рис. 67

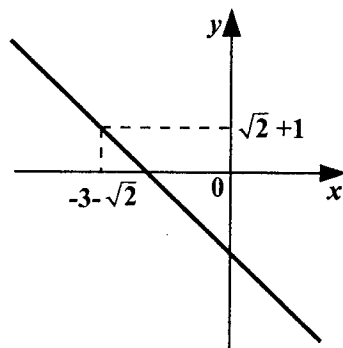


Рис. 68

- 7.1.D05 а) Функция $y = x^2 + px + q$ задана графиком, изображенным на рисунке 69. Найдите нули функции, если известно, что p и q – целые числа.
 б) Функция $y = x^2 + px + q$ задана графиком, изображенным на рисунке 70. Найдите нули функции, если известно, что p и q – целые числа.

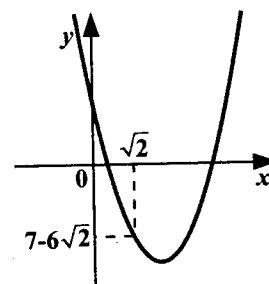


Рис. 69

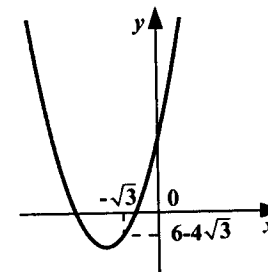


Рис. 70

- 7.1.D06 а) Функция $y = \frac{a}{x-b}$ задана графиком, изображенным на рисунке 71. Найдите $y(1)$, если известно, что a и b – целые числа.
 б) Функция $y = \frac{a}{x-b}$ задана графиком, изображенным на рисунке 72. Найдите $y(-1)$, если известно, что a и b – целые числа.

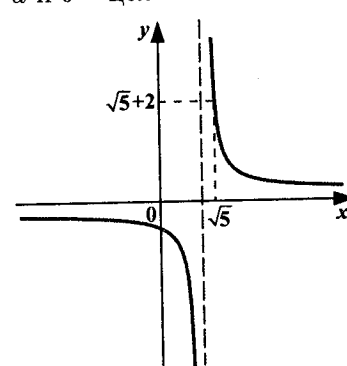


Рис. 71

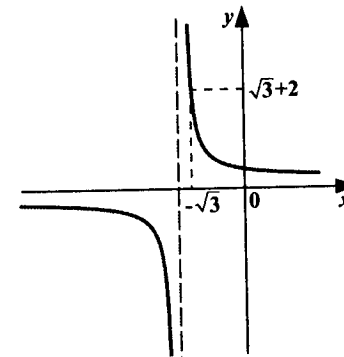


Рис. 72

- 7.1.D07 а) 1 сентября предприниматель приобрел акции шоколадной фабрики. На графике, изображенном на рисунке 73, представлено изменение курса этих акций (по оси абсцисс откладываются числа сентября, считая от дня покупки, по оси ординат – стоимость одной акции в рублях). Однако купленные акции не оправдали ожиданий, и 9 сентября предприниматель продал 20% этих акций, а 15 сентября продал остальные. Сколько процентов убытка принесла предпринимателю эта биржевая операция?

б) 1 октября предприниматель приобрел акции чайной фабрики. На графике, изображенном на рисунке 74, представлено изменение курса этих акций (по оси абсцисс откладываются числа, считая от дня покупки, по оси ординат — стоимость одной акции в рублях). Однако купленные акции не оправдали ожиданий, и 5 октября предприниматель продал 10% этих акций, а 17 октября продал остальные. Сколько процентов убытка принесла предпринимателю эта биржевая операция?

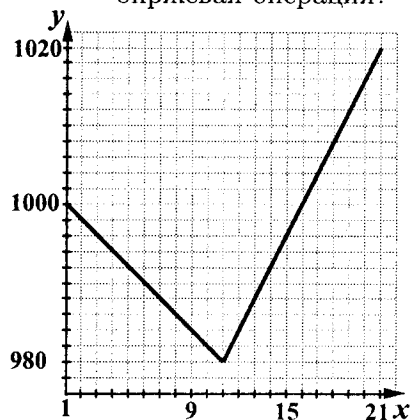


Рис. 73

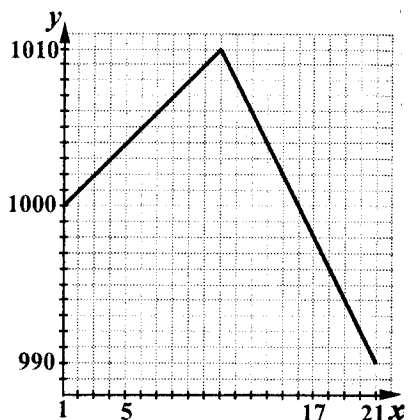


Рис. 74

7.1.D08 а) 1 июня брокер приобрел акции алюминиевого комбината. На графике, изображенном на рисунке 75, представлено изменение курса этих акций (по оси абсцисс откладываются числа июня, считая от дня покупки, по оси ординат — стоимость одной акции в рублях). 5 июня брокер продал 60% этих акций, а 13 июня продал остальные. Сколько процентов прибыли принесла брокеру эта биржевая операция?

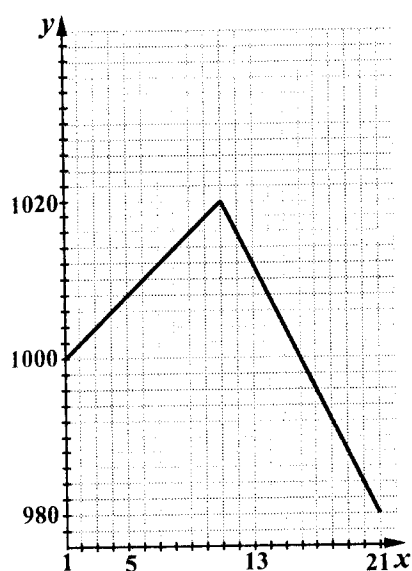


Рис. 75

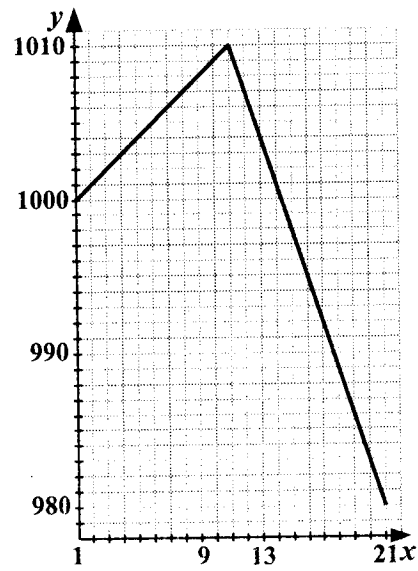


Рис. 76

7.1.D09 а) На графике, изображенном на рисунке 77, представлено изменение курса акций ОАО «АБВ» (по оси абсцисс откладываются числа июля, а по оси ординат — стоимость одной акции в рублях). Какой наибольший доход могла бы принести одна акция за июль?

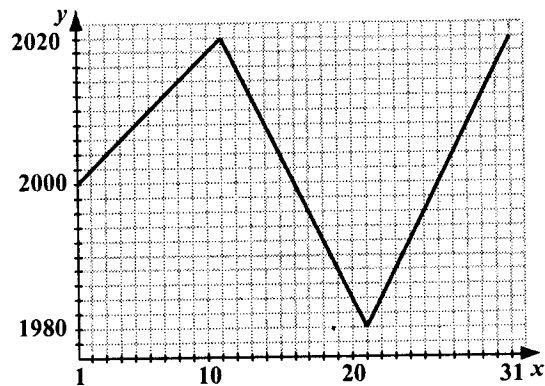


Рис. 77

б) 1 июля брокер приобрел акции деревообрабатывающего комбината. На графике, изображенном на рисунке 76, представлено изменение курса этих акций (по оси абсцисс откладываются числа июля, считая от дня покупки, по оси ординат — стоимость одной акции в рублях). 9 июля брокер продал 40% этих акций, а 13 июля продал остальные. Сколько процентов прибыли принесла брокеру эта биржевая операция?

б) На графике, изображенном на рисунке 78, представлено изменение курса акций ОАО «ЭЮЯ» (по оси абсцисс откладываются числа августа, а по оси ординат — стоимость одной акции в рублях). Какой наибольший доход могла бы принести одна акция за август?

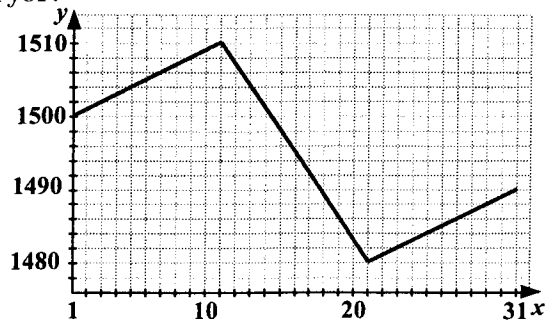


Рис. 78

7.1.D10 а) На графике, изображенном на рисунке 79, представлено изменение курса акций торгово-промышленной группы (по оси абсцисс откладываются числа августа, а по оси ординат — стоимость одной акции в рублях). Два бизнесмена купили по 30 акций этой группы 3 августа. 15 августа первый бизнесмен продал второму все свои акции по биржевому курсу. Второй бизнесмен продал все имеющиеся у него акции 27 августа. Какой убыток понес первый бизнесмен и какой доход получил второй от совершенной биржевой операции?

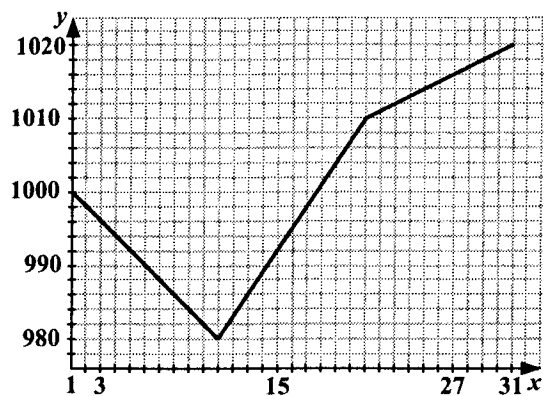


Рис. 79

б) На графике, изображенном на рисунке 80, представлено изменение курса акций торгово-промышленной группы (по оси абсцисс откладываются числа апреля, а по оси ординат — стоимость одной акции в рублях). Два бизнесмена купили по 50 акций этой группы 7 апреля. 17 апреля первый бизнесмен продал второму все свои акции по биржевому курсу. Второй бизнесмен продал все имеющиеся у него акции 23 апреля. Найдите доход каждого бизнесмена от совершенной биржевой операции.

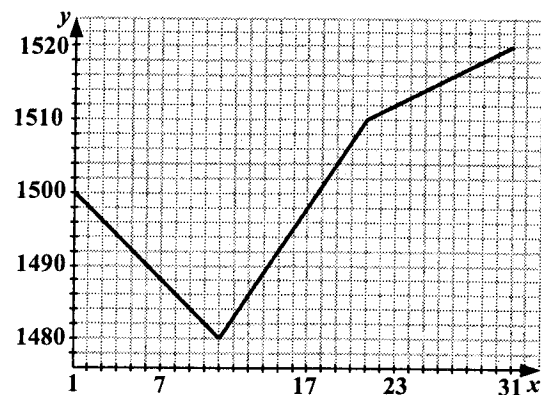


Рис. 80

§ 2. Построение графиков

Уровень А

- 7.2.A01 а) Постройте график функции $y = 7x - 5$ и найдите, при каких значениях x значения y не меньше -40 .
 б) Постройте график функции $y = 6x - 7$ и найдите, при каких значениях x значения y не больше -49 .
- 7.2.A02 а) Постройте график функции $y = -3x - 1$ и найдите, при каких значениях x значения y не больше 2 .
 б) Постройте график функции $y = -5x - 4$ и найдите, при каких значениях x значения y не меньше 16 .
- 7.2.A03 а) Постройте график функции $y = -\frac{7}{6}x + 7$ и найдите, при каких значениях x значения y больше -7 .
 б) Постройте график функции $y = -\frac{3}{5}x - 3$ и найдите, при каких значениях x значения y меньше 3 .

- 7.2.A04** а) Постройте график функции $y = \frac{4}{5}x - 4$ и найдите, при каких значениях x значения y меньше 4.
б) Постройте график функции $y = \frac{6}{5}x + 6$ и найдите, при каких значениях x значения y больше -6 .
- 7.2.A05** Постройте график функции:
а) $y = x^2 + 4x$; б) $y = x^2 - 6x$.
- 7.2.A06** а) Постройте график функции $y = x^2 + 6x + 5$. Напишите уравнение прямой, относительно которой симметричен график этой функции.
б) Постройте график функции $y = x^2 - 4x - 5$. Напишите уравнение прямой, относительно которой симметричен график этой функции.
- 7.2.A07** Постройте график функции:
а) $y = (2x + 1)^2$; б) $y = (2x - 3)^2$.
- 7.2.A08** а) Постройте график функции $y = x^2 - 2x - 3$. В скольких точках прямая $y = -4$ пересекает этот график?
б) Постройте график функции $y = x^2 + 4x + 3$. В скольких точках прямая $y = -1$ пересекает этот график?
- 7.2.A09** а) Постройте график функции $y = \frac{6}{x}$. Найдите координаты середины отрезка, соединяющего две точки этого графика с абсциссами 6 и -6 .
б) Постройте график функции $y = \frac{8}{x}$. Найдите координаты середины отрезка, соединяющего две точки этого графика с абсциссами 8 и -8 .
- 7.2.A10** а) Постройте график функции $y = -\frac{3}{x}$. Найдите координаты середины отрезка, соединяющего две точки этого графика с абсциссами 3 и -3 .
б) Постройте график функции $y = -\frac{2}{x}$. Найдите координаты середины отрезка, соединяющего две точки этого графика с абсциссами 2 и -2 .

Уровень В

- 7.2.B01** а) График линейной функции проходит через точки $A(-3; 0)$ и $B(0; -1)$. Постройте график и задайте функцию формулой.
б) График линейной функции проходит через точки $A(3; 0)$ и $B(0; -1)$. Постройте график и задайте функцию формулой.
- 7.2.B02** а) График линейной функции проходит через точки $A(3; 1)$ и $B(2; -2)$. Постройте график и задайте функцию формулой.
б) График линейной функции проходит через точки $A(2; -1)$ и $B(1; 3)$. Постройте график и задайте функцию формулой.
- 7.2.B03** а) График линейной функции проходит через точку $A(9; -18)$ и точку пересечения прямых $y = x - 7$ и $y = 8x$. Задайте функцию формулой и постройте график функции.
б) График линейной функции проходит через точку $A(-6; 12)$ и точку пересечения прямых $y = -3x$ и $y = x + 12$. Задайте функцию формулой и постройте график функции.
- 7.2.B04** а) Постройте график функции $y = \frac{x^2 - 25}{x + 5}$ и найдите, при каких значениях x значения y больше -13 .
б) Постройте график функции $y = \frac{x^2 - 49}{x + 7}$ и найдите, при каких значениях x значения y больше -15 .
- 7.2.B05** а) Постройте график функции $y = \frac{x^2 - x - 20}{x - 5}$ и найдите, при каких значениях x значения y не меньше $\frac{9}{2}$.
б) Постройте график функции $y = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ и найдите, при каких значениях x значения y не меньше $\frac{3}{2}$.
- 7.2.B06** а) Найдите k и постройте график функции $y = \frac{k}{x}$, если известно, что он проходит через точку $(-1; -2)$.
б) Найдите k и постройте график функции $y = \frac{k}{x}$, если известно, что он проходит через точку $(-2; 1)$.

7.2.В07 а) Найдите p и постройте график функции $y = -x^2 + px + 3$, если известно, что он проходит через точку $(2; -5)$.

б) Найдите p и постройте график функции $y = x^2 + px - 3$, если известно, что он проходит через точку $(-2; 5)$.

7.2.В08 а) Постройте графики функций $y = \frac{5}{x}$ и $y = 6 - x$ и найдите абсциссы общих точек построенных графиков.

б) Постройте графики функций $y = -\frac{3}{x}$ и $y = x - 4$ и найдите абсциссы общих точек построенных графиков.

7.2.В09 Определите графически, сколько решений имеет система уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} y + 3\sqrt{x} = 0, \\ y + x^2 = 3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} y - 3\sqrt{x} = 0, \\ y + x^2 = 2. \end{cases}$$

7.2.В10 Определите графически, сколько решений имеет система уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} xy = -3, \\ y = -2\sqrt{x}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} xy = 2, \\ y = 3\sqrt{x}. \end{cases}$$

Уровень С

7.2.С01 а) График квадратичной функции проходит через точки $A(4; 0)$, $B(6; 0)$ и $C(5; -1)$. Задайте функцию формулой и постройте ее график.

б) График квадратичной функции проходит через точки $A(-3; 0)$, $B(-1; 0)$ и $C(-2; -1)$. Задайте функцию формулой и постройте ее график.

7.2.С02 а) Постройте график функции $y = 6 \cdot \frac{4x^2 - 3x}{4x^3 - 3x^2}$. Напишите уравнения всех прямых, параллельных оси абсцисс, которые не имеют общих точек с данным графиком.

б) Постройте график функции $y = 3 \cdot \frac{4x^2 + 3x}{4x^3 + 3x^2}$. Напишите уравнения всех прямых, параллельных оси абсцисс, которые не имеют общих точек с данным графиком.

7.2.С03 а) Постройте график функции $y = \frac{(x+4)(x^2+3x+2)}{x+1}$.

При каких значениях m прямая $y = m$ пересекает график данной функции в единственной точке?

б) Постройте график функции $y = \frac{(x-3)(x^2-7x+10)}{x-2}$.

При каких значениях m прямая $y = m$ пересекает график данной функции в единственной точке?

7.2.С04 Постройте график функции:

$$\text{а) } y = \frac{(x+5)(x^2+4x-12)}{x^2+11x+30}; \quad \text{б) } y = \frac{(x-4)(x^2-9x+18)}{x^2-10x+24}.$$

7.2.С05 а) Изобразите множество всех точек $(x; y)$ координатной плоскости Oxy , для каждой из которых $\frac{x^2+y^2-25}{x-4} = 0$.

б) Изобразите множество всех точек $(x; y)$ координатной плоскости Oxy , для каждой из которых $\frac{25-x^2-y^2}{y+3} = 0$.

7.2.С06 а) Изобразите множество всех точек $(x; y)$ координатной плоскости Oxy , для каждой из которых $\frac{xy+4}{x+y} = 0$.

б) Изобразите множество всех точек $(x; y)$ координатной плоскости Oxy , для каждой из которых $\frac{9-xy}{x-y} = 0$.

7.2.С07 а) Изобразите множество всех точек $(x; y)$ координатной плоскости Oxy , для каждой из которых $\frac{x^2+y-1}{x+2} = 0$.

б) Изобразите множество всех точек $(x; y)$ координатной плоскости Oxy , для каждой из которых $\frac{y-x^2+4}{x-1} = 0$.

7.2.С08 а) Постройте график функции $y = \frac{x^3-2x^2}{x-2}$. При каких значениях c прямая $y = c$ пересекает построенный график в единственной точке?

б) Постройте график функции $y = -\frac{2x^2+x^3}{x+2}$. При каких значениях c прямая $y = c$ пересекает построенный график в единственной точке?

- 7.2.C09** а) Постройте график функции $y = -\frac{4(x+2)}{x^2+2x}$. При каких значениях l прямая $y = l$ не имеет с построенным графиком ни одной общей точки?
 б) Постройте график функции $y = \frac{6(x-3)}{x^2-3x}$. При каких значениях l прямая $y = l$ не имеет с построенным графиком ни одной общей точки?

- 7.2.C10** а) Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x + 6, & \text{если } x \geq 1, \\ 3x, & \text{если } x < 1. \end{cases}$$

При каких значениях m прямая $y = m$ пересекает построенный график в двух точках?

- б) Постройте график функции

$$y = \begin{cases} -\frac{3}{x}, & \text{если } x \leq -1, \\ 2 - x, & \text{если } x > -1. \end{cases}$$

При каких значениях m прямая $y = m$ пересекает построенный график в двух точках?

Уровень D

- 7.2.D01** а) Постройте график функции

$$y = \frac{(x^2 + 7x + 6)(x^2 + 6x + 8)}{x^2 + 5x + 4}.$$

При каких значениях m прямая $y = m$ пересекает график данной функции в единственной точке?

- б) Постройте график функции

$$y = \frac{(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 7x + 12)}{x^2 - 4x + 3}.$$

При каких значениях m прямая $y = m$ пересекает график данной функции в единственной точке?

- 7.2.D02** а) Постройте график функции $y = |x^2 - 6x + 5|$ и найдите, при каких значениях c прямая $y = c$ пересекает построенный график ровно в трех точках.
 б) Постройте график функции $y = |x^2 + 4x + 3|$ и найдите, при каких значениях c прямая $y = c$ пересекает построенный график ровно в трех точках.

- 7.2.D03** а) Постройте график функции $y = x^2 - 2|x| - 3$ и найдите число решений уравнения $x^2 - 2|x| - 3 = k$ в зависимости от k .
 б) Постройте график функции $y = x^2 + 4|x| - 5$ и найдите число решений уравнения $x^2 + 4|x| - 5 = k$ в зависимости от k .

- 7.2.D04** а) Постройте график функции $y = |x^2 + 2|x| - 15|$. Какое наибольшее число общих с графиком точек может иметь прямая, параллельная оси абсцисс?
 б) Постройте график функции $y = |x^2 - 4|x| - 12|$. Какое наибольшее число общих с графиком точек может иметь прямая, параллельная оси абсцисс?

- 7.2.D05** а) Наибольшее из чисел m, n обозначается $\max(m; n)$. Если числа равны, то $\max(m; n) = m = n$. Постройте график функции $y = \max(x - 2; -x^2)$;
 б) Наименьшее из чисел m и n обозначается $\min(m; n)$. Если числа равны, то $\min(m; n) = m = n$. Постройте график функции $y = \min(-5x - 4; x^2)$

- 7.2.D06** а) Наименьшее из чисел m, n и k обозначается $\min(m; n; k)$. Если числа равны, то

$$\min(m; n; k) = m = n = k.$$

Постройте график функции $y = \min(x + 2; x^2; -2x)$.

- б) Наибольшее из чисел m, n и k обозначается $\max(m; n; k)$. Если числа равны, то

$$\max(m; n; k) = m = n = k.$$

Постройте график функции $y = \max(4x - 5; -x^2; -x)$.

- 7.2.D07** а) Изобразите множество всех точек $(x; y)$ координатной плоскости Oxy , для каждой из которых

$$\frac{x^2 - 4x + y^2 - 5}{3x + 2y} = 0.$$

- б) Изобразите множество всех точек $(x; y)$ координатной плоскости Oxy , для каждой из которых

$$\frac{y^2 - 6y + x^2 + 5}{2y - 3x} = 0.$$

7.2.D08 а) Постройте график функции

$$\begin{cases} y = 2 - |x|, & \text{если } |x| \geq -2, \\ y = x^2 - 4, & \text{если } |x| < -2. \end{cases}$$

При каких значениях c прямая $y = c$ пересекает построенный график ровно в двух точках?

б) Постройте график функции

$$\begin{cases} y = |x| - 3, & \text{если } |x| \geq -3, \\ y = 9 - x^2, & \text{если } |x| < -3. \end{cases}$$

При каких значениях c прямая $y = c$ пересекает построенный график ровно в двух точках?

7.2.D09 а) Постройте график функции $y = \sqrt{6x - x^2}$. При каких значениях c прямая $y = c$ пересекает построенный график в единственной точке?

б) Постройте график функции $y = -\sqrt{4x - x^2}$. При каких значениях c прямая $y = c$ пересекает построенный график в единственной точке?

7.2.D10 а) Постройте график функции $y = \frac{x+2}{x-\frac{4}{x}}$. При каких значениях c прямая $y = c$ не имеет с построенным графиком ни одной общей точки?

б) Постройте график функции $y = \frac{x-3}{x-\frac{9}{x}}$. При каких значениях c прямая $y = c$ пересекает построенный график в единственной точке?

§ 3. Исследование функций

Уровень А

7.3.A01 Найдите наименьшее значение функции:

- а) $y = x^2 - 4x - 5$;
б) $y = x^2 + 6x - 7$.

7.3.A02 Найдите наибольшее значение функции:

- а) $y = 7 - 6x - x^2$;
б) $y = 3 - 2x - x^2$.

7.3.A03 Найдите наименьшее значение функции:

- а) $y = 2x^2 - 4x + 7$;
б) $y = 3x^2 + 6x + 1$.

7.3.A04 Найдите наибольшее значение функции:

- а) $y = -5x^2 - 10x - 7$;
б) $y = -4x^2 + 8x + 3$.

7.3.A05 Найдите промежуток убывания функции:

- а) $y = x^2 - 3x + 2$;
б) $y = x^2 - 5x + 4$.

7.3.A06 Найдите промежуток убывания функции:

- а) $y = -4 + 7x - 3x^2$;
б) $y = 7 - 3x - 4x^2$.

7.3.A07 Найдите промежуток возрастания функции:

- а) $y = 2x^2 + 5x + 3$;
б) $y = 3x^2 - 5x + 2$.

7.3.A08 Найдите промежуток возрастания функции:

- а) $y = 4 - x - 3x^2$;
б) $y = 5 - x - 4x^2$.

7.3.A09 а) Какая из функций $y = -5x$ или $y = -\frac{5}{x}$ возрастает при $x > 0$?

б) Какая из функций $y = 4x$ или $y = \frac{4}{x}$ убывает при $x < 0$?

7.3.A10 а) Какая из функций $y = 2x^2$ или $y = \frac{2}{x}$ убывает при $x > 0$?

б) Какая из функций $y = -3x^2$ или $y = -\frac{3}{x}$ возрастает при $x > 0$?

Уровень В

7.3.B01 а) Какие из функций $y = 2x^2$, $y = -\frac{2}{x}$, $y = 2 - x$ убывают при $x > 0$?

б) Какие из функций $y = -3x^2$, $y = \frac{3}{x}$, $y = x + 3$ убывают при $x < 0$?

7.3.B02 а) Какие из функций $y = 7x^2$, $y = -\frac{7}{x}$, $y = 7 - x$ возрастают при $x < 0$?

б) Какие из функций $y = -5x^2$, $y = \frac{5}{x}$, $y = 5 - x$ возрастают при $x < 0$?

- 7.3.B03** а) Найдите промежуток, на котором убывают обе функции $y = (x + 4)^2$ и $y = \frac{4}{x}$.
 б) Найдите промежуток, на котором убывают обе функции $y = -(x - 7)^2$ и $y = \frac{7}{x}$.
- 7.3.B04** а) Найдите промежуток, на котором возрастают обе функции $y = -(x + 8)^2$ и $y = -\frac{8}{x}$.
 б) Найдите промежуток, на котором возрастают обе функции $y = (x - 3)^2$ и $y = -\frac{3}{x}$.
- 7.3.B05** а) Найдите наименьшее значение функции

$$y = 5\sqrt{x^2 + 4}.$$

 б) Найдите наибольшее значение функции

$$y = -2\sqrt{x^2 + 9}.$$
- 7.3.B06** а) Найдите наибольшее значение функции

$$y = \sqrt{16 - 5x^2}.$$

 б) Найдите наименьшее значение функции

$$y = -\sqrt{25 - 3x^2}.$$
- 7.3.B07** а) Найдите наименьшее значение функции

$$y = 3 + 2\sqrt{x}.$$

 б) Найдите наибольшее значение функции

$$y = 2 - 3\sqrt{x}.$$
- 7.3.B08** а) Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{8}{\sqrt{x^2 + 4}}.$$

 б) Найдите наименьшее значение функции

$$y = -\frac{6}{\sqrt{x^2 + 9}}.$$
- 7.3.B09** а) Найдите наименьшее значение функции

$$y = -\frac{12}{x^2 + 3}.$$

 б) Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{10}{x^2 + 2}.$$

- 7.3.B10** а) Найдите наибольшее значение функции

$$y = 5 + \frac{6}{x^2 + 6}.$$

- б) Найдите наименьшее значение функции

$$y = 3 - \frac{4}{x^2 + 4}.$$

Уровень С

- 7.3.C01** а) Какая из функций $y = 2x + 3$, $y = x^2 + 10x + 16$ или $y = -\frac{5}{x}$ не является возрастающей при $x > -5$?
 б) Какая из функций $y = 2 - 3x$, $y = x^2 - 4x - 7$ или $y = \frac{2}{x}$ не является убывающей при $x < 2$?
- 7.3.C02** а) Найдите промежутки убывания функции

$$y = \begin{cases} 2x, & \text{если } x \leq 1, \\ x^2 - 4x + 5, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

 б) Найдите промежутки возрастания функции

$$y = \begin{cases} -3x, & \text{если } x \leq 2, \\ -x^2 + 6x - 14, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$
- 7.3.C03** а) Можно ли через точки $(2; 8)$, $(-8; -32)$, $(6; 24)$ провести параболу $y = ax^2 + bx + c$?
 б) Можно ли через точки $(-9; 3)$, $(12; -4)$, $(-3; 1)$ провести параболу $y = ax^2 + bx + c$?
- 7.3.C04** а) Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{x^2 + 7}{x^2 + 6}.$$

 б) Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{x^2 + 4}{x^2 + 5}.$$
- 7.3.C05** а) Функция $y = f(x)$ возрастает на всей числовой прямой, причем $f(2) = 5$. Найдите все значения x , при которых $f(x) > 5$.
 б) Функция $y = g(x)$ убывает на всей числовой прямой, причем $g(5) = 2$. Найдите все значения x , при которых $g(x) < 2$.

- 7.3.C06** а) Функция $y = f(x)$ возрастает на всей числовой прямой, а функция $y = g(x)$ убывает на всей числовой прямой, причем $f(7) = g(7)$.

Найдите все значения x , при которых $f(x) < g(x)$.

- б) Функция $y = p(x)$ возрастает на всей числовой прямой, а функция $y = r(x)$ убывает на всей числовой прямой, причем $p(-4) = r(-4)$.

Найдите все значения x , при которых $p(x) > r(x)$.

- 7.3.C07** а) Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{x^2 + 36} + \sqrt{x^2 + 49}.$$

При каких значениях x оно достигается?

- б) Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 + 64}.$$

При каких значениях x оно достигается?

- 7.3.C08** а) Найдите наибольшее значение функции

$$y = 7 - \sqrt{3x^2 + 4x - 4}.$$

При каких значениях x оно достигается?

- б) Найдите наименьшее значение функции

$$y = 6 + \sqrt{4x^2 - 4x - 3}.$$

При каких значениях x оно достигается?

- 7.3.C09** а) Найдите координаты точек прямой

$$y = -5x - 24,$$

равноудаленных от осей координат.

- б) Найдите координаты точек прямой

$$y = 6x - 35,$$

равноудаленных от осей координат.

- 7.3.C10** а) Найдите наибольшее значение функции

$$y = 5 - 4|x^2 - 7x + 6|.$$

При каких значениях x оно достигается?

- б) Найдите наименьшее значение функции

$$y = 6 + 5|x^2 - 4x + 3|.$$

При каких значениях x оно достигается?

Уровень D

- 7.3.D01** а) Парабола $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точки $(-3; 33)$; $(1; -3)$; $(0; -6)$. Найдите a , b , c и множество значений функции y .

- б) Парабола $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точки $(-3; 23)$; $(1; 3)$; $(0; -1)$. Найдите a , b , c и множество значений функции y .

- 7.3.D02** а) Функция $y = f(x)$ возрастает на всей числовой прямой, а функция $y = g(x)$ убывает на всей числовой прямой, причем $f(-3) = 2$, $g(-3) = -4$. Найдите все значения x , при которых $g(x) - f(x) > -6$.

- б) Функция $y = f(x)$ возрастает на всей числовой прямой, а функция $y = g(x)$ убывает на всей числовой прямой, причем $f(4) = -3$, $g(4) = 5$. Найдите все значения x , при которых $f(x) - g(x) < -8$.

- 7.3.D03** а) Найдите промежутки возрастания функции

$$y = 7x - |x| - 5|x - 2|.$$

- б) Найдите промежутки убывания функции

$$y = |x| + 4|x + 2| - 6x.$$

- 7.3.D04** а) Найдите наибольшее значение функции

$$y = 2\sqrt{x + 2} - x - 1.$$

- б) Найдите наименьшее значение функции

$$y = x + 2 - 4\sqrt{x - 3}.$$

- 7.3.D05** а) Найдите наибольшее значение функции

$$y = \sqrt{x^2 + 169} - \sqrt{x^2 + 16}.$$

При каких значениях x оно достигается?

- б) Найдите наибольшее значение функции

$$y = \sqrt{x^2 + 225} - \sqrt{x^2 + 16}.$$

При каких значениях x оно достигается?

- 7.3.D06** а) Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{5x^2 + 10x + 14}{x^2 + 2x + 4}.$$

При каких значениях x оно достигается?

- б) Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{3x^2 - 6x + 23}{x^2 - 2x + 5}.$$

При каких значениях x оно достигается?

7.3.D07 Найдите наименьшее значение функции:

а) $y = \sqrt{2x^2 - 7x + 3} + \sqrt{x^2 + 2x - 15}$;

б) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 5} + \sqrt{2x^2 - 8x + 17}$.

7.3.D08 а) Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{x^2 - 2x - 8} + \sqrt{3x^2 + 12x + 28}.$$

При каких значениях x оно достигается?

б) Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{2x^2 + 12x + 27} + \sqrt{x^2 - 2x - 15}.$$

При каких значениях x оно достигается?

7.3.D09 а) Найдите множество значений функции:

а) $y = \frac{3x^2 + 2x}{4x - 3}$;

б) $y = \frac{4x^2 - x}{3x - 1}$.

7.3.D10 а) Найдите координаты всех тех точек гиперболы

$y = \frac{4}{x}$, расстояние от каждой из которых до оси абсцисс в 25 раз больше расстояния до оси ординат.

б) Найдите координаты всех тех точек гиперболы

$y = \frac{9}{x}$, расстояние от каждой из которых до оси абсцисс в 16 раз больше расстояния до оси ординат.

8

ГЛАВА

ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

§1. Задачи на движение и работу

Уровень А

8.1.A01 а) Из двух городов, расстояние между которыми равно 363 км, навстречу друг другу выехали два автомобиля. Через сколько часов автомобили встретятся, если их скорости равны 57 км/ч и 64 км/ч?

б) Из двух городов, расстояние между которыми равно 108 км, навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Через сколько часов велосипедисты встретятся, если их скорости равны 15 км/ч и 12 км/ч?

8.1.A02 а) Города A , B и C соединены прямолинейным шоссе, причем город B расположен между городами A и C . Из города A в сторону города C выехал легковой автомобиль, и одновременно с ним из города B в сторону города C выехал грузовик. Через сколько часов после выезда легковой автомобиль догонит грузовик, если скорость легкового автомобиля на 23 км/ч больше скорости грузовика, а расстояние между городами A и B равно 92 км?

б) Города A , B и C соединены прямолинейным шоссе, причем город B расположен между городами A и C . Из города A в сторону города C выехал легковой автомобиль, и одновременно с ним из города B в сторону города C выехал грузовик. Через сколько часов после выезда легковой автомобиль догонит грузовик, если скорость легкового автомобиля на 17 км/ч больше скорости грузовика, а расстояние между городами A и B равно 102 км?

8.1.A03 а) Половину времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью 52 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 62 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

б) Половину времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью 48 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 68 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

- 8.1.A04** а) Первую половину трассы автомобиль проехал со скоростью 42 км/ч, а вторую — со скоростью 63 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.
б) Первую половину трассы автомобиль проехал со скоростью 46 км/ч, а вторую — со скоростью 69 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.
- 8.1.A05** а) Путешественник переплыл океан на яхте со средней скоростью 17 км/ч. Обрато он летел на самолете со скоростью 561 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути.
б) Путешественник переплыл океан на яхте со средней скоростью 18 км/ч. Обрато он летел на самолете со скоростью 630 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути.
- 8.1.A06** а) Расстояние от A до B первый автомобиль проезжает в $1\frac{2}{7}$ раза быстрее второго автомобиля. Найдите скорости автомобилей, если известно, что скорость первого на 18 км/ч больше скорости второго.
б) Расстояние от A до B первый автомобиль проезжает в $1\frac{2}{5}$ раза медленнее второго автомобиля. Найдите скорости автомобилей, если известно, что скорость первого на 22 км/ч меньше скорости второго.
- 8.1.A07** а) Один мастер может выполнить заказ за 28 ч, а другой — за 21 ч. За сколько часов выполнят заказ оба мастера, работая вместе?
б) Один мастер может выполнить заказ за 9 ч, а другой — за 18 ч. За сколько часов выполнят заказ оба мастера, работая вместе?
- 8.1.A08** а) Первая труба наполняет бак объемом 820 литров, а вторая труба — бак объемом 790 литров. Известно, что одна из труб пропускает в минуту на 3 л воды больше, чем другая. Сколько литров воды в минуту пропускает каждая труба, если баки были наполнены за одно и то же время?

- б) Первая труба наполняет бак объемом 790 литров, а вторая труба — бак объемом 750 литров. Известно, что одна из труб пропускает в минуту на 4 л воды больше, чем другая. Сколько литров воды в минуту пропускает каждая труба, если баки были наполнены за одно и то же время?
- 8.1.A09** а) Олег отвечает за час на 8 вопросов теста, а Никита — на 9. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Олег закончил позже Никиты на 10 минут. Сколько вопросов содержит тест?
б) Сергей отвечает за час на 10 вопросов теста, а Иван — на 12. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Сергей закончил позже Ивана на 30 минут. Сколько вопросов содержит тест?
- 8.1.A10** а) Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 8 часов. Через 2 часа после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. За сколько часов был выполнен весь заказ?
б) Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 12 часов. Через 4 часа после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. За сколько часов был выполнен весь заказ?

Уровень В

- 8.1.B01** а) Два человека отправляются из одного и того же места на прогулку до опушки леса, находящейся в 3,5 км от места отправления. Один идет со скоростью 2,7 км/ч, а другой — со скоростью 3,6 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от точки отправления произойдет их встреча?

б) Два человека отправляются из одного и того же места на прогулку до лесной поляны, находящейся в 4 км от места отправления. Один идет со скоростью 3,3 км/ч, а другой — со скоростью 5,5 км/ч. Дойдя до поляны, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от точки отправления произойдет их встреча?

8.1.B02 а) Моторная лодка прошла против течения 8 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 30 мин меньше, чем при движении против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 4 км/ч.

б) Моторная лодка прошла против течения 21 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 20 мин меньше, чем при движении против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 2 км/ч.

8.1.B03 а) Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 16 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Найдите расстояние, пройденное теплоходом за весь рейс, если скорость течения равна 4 км/ч, стоянка длится 2 часа, а в исходный пункт теплоход возвращается через 10 часов после отплытия из него.

б) Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 12 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Найдите расстояние, пройденное теплоходом за весь рейс, если скорость течения равна 2 км/ч, стоянка длится 4 часа, а в исходный пункт теплоход возвращается через 16 часов после отплытия из него.

8.1.B04 а) Дорога между пунктами A и B состоит из подъема и спуска, а ее длина равна 19 км. Пешеход прошел путь из A в B за 5 часов. Время его движения на спуске составило 4 часа. С какой скоростью пешеход шел на спуске, если скорость его движения на подъеме меньше скорости движения на спуске на 1 км/ч?

б) Дорога между пунктами A и B состоит из подъема и спуска, а ее длина равна 16 км. Пешеход прошел путь из A в B за 6 часов. Время его движения на спуске составило 2 часа. С какой скоростью пешеход шел на спуске, если скорость его движения на подъеме меньше скорости движения на спуске на 2 км/ч?

8.1.B05 а) Из пункта A круговой трассы, длина которой равна 80 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобилиста. Скорость первого автомобилиста равна 92 км/ч, скорость второго автомобилиста равна 68 км/ч. Через сколько минут первый автомобилист будет опережать второго ровно на 1 круг?

б) Из пункта A круговой трассы, длина которой равна 57 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобилиста. Скорость первого автомобилиста равна 81 км/ч, скорость второго автомобилиста равна 63 км/ч. Через сколько минут первый автомобилист будет опережать второго ровно на 1 круг?

8.1.B06 а) Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 90 км/ч, проезжает мимо придорожного столба за 36 с. Найдите длину поезда.

б) Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 60 км/ч, проезжает мимо придорожного столба за 24 с. Найдите длину поезда.

8.1.B07 а) Беллетрист хочет набрать на компьютере рукопись объемом 480 страниц. Если он будет набирать на 8 страниц в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 2 дня раньше. Сколько страниц в день планирует набирать беллетрист?

б) Прозаик хочет набрать на компьютере рукопись объемом 450 страниц. Если он будет набирать на 5 страниц в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 3 дня раньше. Сколько страниц в день планирует набирать прозаик?

8.1.B08 а) В помощь садовому насосу, перекачивающему 9 л воды за 4 мин, подключили второй насос, перекачивающий тот же объем воды за 7 мин. Сколько времени эти два насоса должны работать совместно, чтобы перекачать 99 л воды?

б) В помощь садовому насосу, перекачивающему 5 л воды за 2 мин, подключили второй насос, перекачивающий тот же объем воды за 3 мин. Сколько времени эти два насоса должны работать совместно, чтобы перекачать 25 л воды?

- 8.1.B09** а) Саша и Стас вскапывают грядку за 10 минут, а один Стас – за 15 минут. За сколько минут вскапывает грядку один Саша?
б) Даша и Вита пропалывают грядку за 12 минут, а одна Вита – за 20 минут. За сколько минут пропалывает грядку одна Даша?

- 8.1.B10** а) Карлсон съедает банку варенья за 10 минут, фрекен Бок – за 12 минут, а Малыш – за 15 минут. За сколько минут они съедят банку варенья втроем?
б) Винни-Пух съедает горшочек меда за 6 минут, Пятачок – за 20 минут, а ослик Иа – за 30 минут. За сколько минут они съедят горшочек меда втроем?

Уровень С

- 8.1.C01** а) Из пункта A в пункт B , отстоящий от пункта A на 27 км, отправился пешеход со скоростью 5 км/ч. Через 36 минут после этого навстречу ему из B вышел другой пешеход со скоростью 3 км/ч. Найдите расстояние от пункта B до места их встречи.
б) Из пункта A в пункт B , отстоящий от пункта A на 11 км, отправился пешеход со скоростью 4 км/ч. Через 15 минут после этого навстречу ему из B вышел другой пешеход со скоростью 6 км/ч. Найдите расстояние от пункта B до места их встречи.
- 8.1.C02** а) Из пункта A в пункт B по течению реки отправились одновременно моторная лодка и байдарка. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Последнюю $\frac{1}{13}$ часть пути моторная лодка шла с выключенным мотором, и ее скорость относительно берега была равна скорости течения. На той части пути, где моторная лодка шла с включенным мотором, ее скорость была на 5 км/ч больше скорости байдарки. Найдите скорость байдарки в неподвижной воде, если в пункт B байдарка и моторная лодка прибыли одновременно.

б) Из пункта A в пункт B по течению реки отправились одновременно моторная лодка и байдарка. Скорость течения реки равна 2 км/ч. Последнюю $\frac{1}{9}$ часть пути моторная лодка шла с выключенным мотором, и ее скорость относительно берега была равна скорости течения. На той части пути, где моторная лодка шла с включенным мотором, ее скорость была на 7 км/ч больше скорости байдарки. Найдите скорость байдарки в неподвижной воде, если в пункт B байдарка и моторная лодка прибыли одновременно.

- 8.1.C03** а) Велосипедист отправился с некоторой скоростью из города A в город B , расстояние между которыми равно 88 км. Возвращаясь из B в A , он ехал сначала с той же скоростью, но через 2 ч пути вынужден был сделать остановку на 10 мин. После этого он продолжил путь в A , увеличив скорость на 2 км/ч, и в результате затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B . Найдите скорость велосипедиста на пути из A в B .
б) Велосипедист отправился с некоторой скоростью из города A в город B , расстояние между которыми равно 32 км. Возвращаясь из B в A , он ехал сначала с той же скоростью, но через 1 ч пути вынужден был сделать остановку на 12 мин. После этого он продолжил путь в A , увеличив скорость на 4 км/ч, и в результате затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B . Найдите скорость велосипедиста на пути из A в B .
- 8.1.C04** а) Расстояние между пристанями A и B равно 70 км. Отчалив от пристани A в 7.00 утра, теплоход проплыл с постоянной скоростью до пристани B . После четырехчасовой стоянки у пристани B теплоход отправился в обратный рейс и прибыл в A в тот же день в 23.00. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч.
б) Расстояние между пристанями A и B равно 45 км. Отчалив от пристани A в 8.00 утра, теплоход проплыл с постоянной скоростью до пристани B . После трехчасовой стоянки у пристани B теплоход отправился

в обратный рейс и прибыл в A в тот же день в 19.00. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

- 8.1.C05** а) Иван и Алексей договорились встретиться в N -ске. Они едут к N -ску разными дорогами. Иван звонит Алексею и узнает, что тот находится в 350 км от N -ска и едет с постоянной скоростью 70 км/ч. Иван в момент звонка находится в 399 км от N -ска и еще должен по дороге сделать 15-минутную остановку. С какой скоростью должен ехать Иван, чтобы прибыть в N -ск одновременно с Алексеем?
- б) Сергей и Володя договорились встретиться в N -ске. Они едут к N -ску разными дорогами. Сергей звонит Володе и узнает, что тот находится в 150 км от N -ска и едет с постоянной скоростью 50 км/ч. Сергей в момент звонка находится в 192 км от N -ска и еще должен по дороге сделать 20-минутную остановку. С какой скоростью должен ехать Сергей, чтобы прибыть в N -ск одновременно с Володей?
- 8.1.C06** а) Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 90 км/ч, проезжает мимо лесополосы, длина которой равна 400 метрам, за 0,4 мин. Найдите длину поезда.
- б) Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 60 км/ч, проезжает мимо лесополосы, длина которой равна 300 метрам, за 0,5 мин. Найдите длину поезда.
- 8.1.C07** а) Ходики показывают 9 часов. Какое время будут показывать ходики, когда минутная стрелка догонит часовую стрелку в третий раз?
- б) Ходики показывают 4 часа. Какое время будут показывать ходики, когда минутная стрелка догонит часовую стрелку в восьмой раз?
- 8.1.C08** а) Расстояние между пристанями A и B равно 18 км. Из A в B по течению реки отправился плот, а через 30 мин за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в пункт B , тотчас повернула обратно и возвратилась в A . К этому времени плот прошёл 9 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 50 м/мин.

б) Расстояние между пристанями A и B равно 14 км. Из A в B по течению реки отправился плот, а через 44 мин за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в пункт B , тотчас повернула обратно и возвратилась в A . К этому времени плот прошёл 7 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 50 м/мин.

- 8.1.C09** а) Игорь и Паша могут покрасить забор за 3 часа. Паша и Володя могут покрасить этот же забор за 6 часов, а Володя и Игорь – за 4 часа. За какое время мальчики покрасят забор, работая втроем?
- б) Маша и Настя могут вымыть окно за 20 минут. Настя и Лена могут вымыть это же окно за 15 минут, а Маша и Лена – за 12 минут. За какое время девочки вымоют окно, работая втроем?
- 8.1.C10** а) Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали строить два одинаковых летних домика. В первой бригаде было 7 рабочих, а во второй – 13 рабочих. Через 8 дней после начала работы в первую бригаду перешли 7 рабочих из второй бригады, в результате чего оба домика были построены одновременно. Сколько дней потребовалось бригадам, чтобы закончить работу в новом составе?
- б) Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали строить два одинаковых летних домика. В первой бригаде было 8 рабочих, а во второй – 14 рабочих. Через 7 дней после начала работы в первую бригаду перешли 10 рабочих из второй бригады, в результате чего оба домика были построены одновременно. Сколько дней потребовалось бригадам, чтобы закончить работу в новом составе?

Уровень D

- 8.1.D01** а) Два бегуна одновременно стартовали из одного и того же места в одном направлении. Спустя 1 час, когда одному из них оставалось бежать 1 км до промежуточного финиша, ему сообщили, что второй бегун миновал промежуточный финиш 5 минут назад.

- Найдите скорость каждого бегуна, если известно, что скорость первого на 2 км/ч меньше скорости второго.
- б) Два бегуна одновременно стартовали из одного и того же места в одном направлении. Спустя 1 час, когда одному из них оставалось бежать 1,5 км до промежуточного финиша, ему сообщили, что второй бегун миновал промежуточный финиш 5 минут назад. Найдите скорость каждого бегуна, если известно, что скорость первого на 3 км/ч меньше скорости второго.
- 8.1.D02** а) Если велосипедист увеличит скорость на 5 км/ч, то получит выигрыш во времени 12 минут при прохождении некоторого пути. Если же он уменьшит скорость на 8 км/ч, то потеряет 40 минут на том же пути. Найдите скорость велосипедиста и длину пути.
- б) Если велосипедист увеличит скорость на 9 км/ч, то получит выигрыш во времени 27 минут при прохождении некоторого пути. Если же он уменьшит скорость на 5 км/ч, то потеряет 29 минут на том же пути. Найдите скорость велосипедиста и длину пути.
- 8.1.D03** а) Из пункта A в пункт B со скоростью 80 км/ч выехал первый автомобиль. Через некоторое время по тому же маршруту с постоянной скоростью отправился второй автомобиль. После остановки на 20 минут в пункте B второй автомобиль поехал с той же скоростью назад и через 48 км встретил первый автомобиль. В момент прибытия в B первого автомобиля второй автомобиль был в 120 км от B . Найдите расстояние от A до места первой встречи автомобилей, если расстояние между пунктами A и B равно 480 км.
- б) Из пункта A в пункт B с постоянной скоростью выехал первый автомобиль. Через некоторое время по тому же маршруту со скоростью 100 км/ч отправился второй автомобиль. Обогнав первый автомобиль через 150 км, второй автомобиль остановился на 1 час в B , затем поехал с той же скоростью назад и был на расстоянии 200 км от B в момент прибытия в B первого автомобиля. Найдите расстояние от B до места второй встречи автомобилей, если расстояние между A и B равно 600 км.
- 8.1.D04** а) Велосипедист движется по пути AB , состоящем из ровных участков, спусков и подъёмов. На ровной дороге скорость велосипедиста равна 10 км/ч, на подъёмах — 8 км/ч и на спусках — 16 км/ч. На дорогу из A в B велосипедист тратит 6 часов, а на обратный путь из B в A — 5 часов 30 минут. Известно, что ровная часть пути составляет 20 км. Найдите общую длину подъёмов и спусков на пути из A в B .
- б) Велосипедист движется по пути AB , состоящем из ровных участков, спусков и подъёмов. На ровной дороге скорость велосипедиста равна 15 км/ч, на подъёмах — 6 км/ч и на спусках — 18 км/ч. На дорогу из A в B велосипедист тратит 6 часов, а на обратный путь из B в A — 11 часов 20 минут. Известно, что ровная часть пути составляет 30 км. Найдите общую длину подъёмов и спусков на пути из A в B .
- 8.1.D05** а) Мальчик сбежал вниз по движущемуся эскалатору и насчитал 20 ступенек. Затем он пробежал вверх по тому же эскалатору с той же скоростью относительно эскалатора и насчитал 60 ступенек. Сколько ступенек он насчитал бы, спустившись по неподвижному эскалатору?
- б) Мальчик сбежал вниз по движущемуся эскалатору и насчитал 30 ступенек. Затем он пробежал вверх по тому же эскалатору с той же скоростью относительно эскалатора и насчитал 70 ступенек. Сколько ступенек он насчитал бы, спустившись по неподвижному эскалатору?
- 8.1.D06** а) Два бегуна одновременно стартуют из двух диаметрально противоположных точек A и B круговой дорожки стадиона. Они бегут в противоположных направлениях и встречаются в первый раз в точке M , находящейся в 50 метрах от B , во второй раз — в точке C , находящейся в 42 метрах от A . Найдите длину дорожки стадиона.
- б) Два бегуна одновременно стартуют из двух диаметрально противоположных точек A и B круговой дорожки стадиона. Они бегут в противоположных направлениях и встречаются в первый раз в точке M , находящейся в 70 метрах от B , во второй раз — в точке C , находящейся в 48 метрах от A . Найдите длину дорожки стадиона.

8.1.D07 а) Два насоса разной производительности наполняют резервуары объемом 432 л каждый. Насосы были включены одновременно, и спустя некоторое время воды в двух резервуарах оказалось 432 л. Через 6 минут после этого первый насос заполнил свой резервуар, а второй насос закончил работу на 18 минут позже. Сколько литров воды в минуту перекачивает каждый насос? Какой объем воды накачал бы первый насос за то время, которое требуется обоим насосам для заполнения одного резервуара при совместной работе?

б) Два насоса разной производительности наполняют резервуары объемом 504 л каждый. Насосы были включены одновременно, и спустя некоторое время воды в двух резервуарах оказалось 504 л. Через 7 минут после этого первый насос заполнил свой резервуар, а второй насос закончил работу на 21 минуту позже. Сколько литров воды в минуту перекачивает каждый насос? Какой объем воды накачал бы первый насос за то время, которое требуется обоим насосам для заполнения одного резервуара при совместной работе?

8.1.D08 а) Три трактора разной производительности вспахивают два поля разной площади. Третий трактор вспахивает второе поле на 5 часов быстрее, чем первый вспахивает первое поле, но на 2 часа медленнее, чем второй вспахивает первое поле. Первый и второй тракторы, работая совместно, вспахивают первое поле на 11 часов быстрее, чем третий вспахивает второе поле. За сколько часов третий трактор вспахивает второе поле?

б) Три трактора разной производительности вспахивают два поля разной площади. Третий трактор вспахивает второе поле на 4 часа быстрее, чем первый вспахивает первое поле, но на 3 часа медленнее, чем второй вспахивает первое поле. Первый и второй тракторы, работая совместно, вспахивают первое поле на 12 часов быстрее, чем третий вспахивает второе поле. За сколько часов третий трактор вспахивает второе поле?

8.1.D09 а) Трава на всем лугу растет одинаково густо и быстро. 70 коров съедают всю траву за 24 дня, а 30 коров — за 60 дней. За сколько дней съедят всю траву 20 коров?
б) Трава на всем лугу растет одинаково густо и быстро. 50 коров съедают всю траву за 36 дней, а 80 коров — за 20 дней. Стадо коров съело всю траву на лугу за 100 дней. Сколько коров было в стаде?

8.1.D10 а) Три мастера разной квалификации должны изготовить некоторое количество деталей. Один второй мастер мог бы выполнить работу на несколько часов быстрее, чем первый, а третий — на столько же часов быстрее, чем второй. Первый и второй мастера вместе выполнили бы работу за 216 часов, а первый и третий вместе — за 135 часов. Сколько часов потребуется одному первому мастеру, чтобы выполнить всю работу?

б) Три мастера разной квалификации должны изготовить некоторое количество деталей. Один второй мастер мог бы выполнить работу на несколько часов быстрее, чем первый, а третий — на столько же часов быстрее, чем второй. Первый и второй мастера вместе выполнили бы работу за 384 часа, а первый и третий вместе — за 240 часов. Сколько часов потребуется одному первому мастеру, чтобы выполнить всю работу?

§2. Задачи на проценты, части, доли

Уровень А

8.2.A01 а) Цена на товар была повышена на 24% и составила 372 рубля. Сколько стоил товар до повышения цены?
б) Цена на товар была снижена на 17% и составила 249 рублей. Сколько стоил товар до снижения цены?

8.2.A02 а) Стоимость покупки с учетом двухпроцентной скидки по дисконтной карте составила 1470 рублей. Сколько бы пришлось заплатить за покупку при отсутствии дисконтной карты?
б) Стоимость покупки с учетом трехпроцентной скидки по дисконтной карте составила 1940 рублей. Сколько бы пришлось заплатить за покупку при отсутствии дисконтной карты?

- 8.2.A03** а) До снижения цен товар стоил 300 рублей, а после снижения цен стал стоить 273 рубля. На сколько процентов была снижена цена товара?
б) До снижения цен товар стоил 400 рублей, а после снижения цен стал стоить 352 рубля. На сколько процентов была снижена цена товара?
- 8.2.A04** а) До повышения цен товар стоил 600 рублей, а после повышения цен стал стоить 678 рублей. На сколько процентов была повышена цена товара?
б) До повышения цен товар стоил 500 рублей, а после повышения цен стал стоить 545 рублей. На сколько процентов была повышена цена товара?
- 8.2.A05** а) Стоимость акций снизилась на 60%. Во сколько раз подешевели акции?
б) Стоимость акций снизилась на 84%. Во сколько раз подешевели акции?
- 8.2.A06** а) Стоимость акций выросла на 117%. Во сколько раз подорожали акции?
б) Стоимость акций выросла на 152%. Во сколько раз подорожали акции?
- 8.2.A07** а) Производство некоторого товара увеличилось в 37 раз. На сколько процентов выросло производство?
б) Производство некоторого товара увеличилось в 96 раз. На сколько процентов выросло производство?
- 8.2.A08** а) Себестоимость изделия снизилась в 8 раз. На сколько процентов снизилась себестоимость?
б) Себестоимость изделия снизилась в 16 раз. На сколько процентов снизилась себестоимость?
- 8.2.A09** а) В сосуд, содержащий 13 литров 18%-го водного раствора некоторого вещества, добавили пять литров воды. Найдите концентрацию получившегося раствора.
б) В сосуд, содержащий 11 литров 17%-го водного раствора некоторого вещества, добавили шесть литров воды. Найдите концентрацию получившегося раствора.
- 8.2.A10** а) Смешали некоторое количество 11%-го раствора некоторого вещества с таким же количеством 19%-го раствора этого же вещества. Найдите концентрацию получившегося раствора.

б) Смешали некоторое количество 14%-го раствора некоторого вещества с таким же количеством 18%-го раствора этого же вещества. Найдите концентрацию получившегося раствора.

Уровень В

- 8.2.B01** а) В июне завод выпустил 400 приборов. В августе производство снизилось на 10%, а в сентябре — еще на 10%. Сколько приборов выпустил завод в сентябре?
б) В марте на фабрике изготовили 500 ковров. В апреле производство выросло на 20%, а в мае — еще на 20%. Сколько ковров изготовили на фабрике в мае?
- 8.2.B02** а) В январе товар стоил 30000 рублей. В марте цену на товар подняли на 4%, а в июле снизили на 4%. Сколько стоил товар в июле?
б) В феврале товар стоил 20000 рублей. В мае цену на товар подняли на 6%, а в августе снизили на 6%. Сколько стоил товар в августе?
- 8.2.B03** а) На птицеферме «Курочка Ряба» восьми тонн корма курам хватает на 20 дней. На птицеферме «Серая Шейка» такого же запаса уткам хватает на 60 дней. На сколько дней хватило бы восьми тонн этого корма всем птицам вместе, если бы птицефермы объединились?
б) На птицеферме «Курочка Ряба» пяти тонн корма курам хватает на 30 дней. На птицеферме «Серая Шейка» такого же запаса уткам хватает на 150 дней. На сколько дней хватило бы пяти тонн этого корма всем птицам вместе, если бы птицефермы объединились?
- 8.2.B04** а) Семья состоит из двух человек: мужа и жены. Если бы зарплата жены увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 45%. На сколько процентов вырос бы общий доход семьи, если бы вдвое увеличилась зарплата мужа?
б) Семья состоит из двух человек: мужа и жены. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 60%. На сколько процентов вырос бы общий доход семьи, если бы вдвое увеличилась зарплата жены?

- 8.2.B05** а) Смешали семь литров 16%-го раствора некоторого вещества с тремя литрами 6%-го раствора этого же вещества. Найдите концентрацию получившегося раствора.
б) Смешали восемь литров 9%-го раствора некоторого вещества с двумя литрами 4%-го раствора этого же вещества. Найдите концентрацию получившегося раствора.
- 8.2.B06** а) В городском квартале проживало 5000 человек. Через год в результате строительства новых домов число жителей выросло на 20%, а еще через год — на 30%. Сколько человек стало проживать в квартале?
б) В городском квартале проживало 3000 человек. Через год в результате строительства новых домов число жителей выросло на 10%, а еще через год — на 20%. Сколько человек стало проживать в квартале?
- 8.2.B07** а) Численность волков в двух заповедниках составляла 210 особей. Через год обнаружили, что в первом заповеднике численность волков возросла на 10%, а во втором — на 30%. В результате общая численность волков в двух заповедниках составила 251. Сколько волков было в каждом из заповедников первоначально?
б) Численность волков в двух заповедниках составляла 230 особей. Через год обнаружили, что в первом заповеднике численность волков возросла на 10%, а во втором — на 20%. В результате общая численность волков в двух заповедниках составила 263. Сколько волков было в каждом из заповедников первоначально?
- 8.2.B08** а) Банковский вклад в мае увеличился на 10%, а в июне уменьшился на 10%, после чего на счету оказалось 10890 рублей. Найдите сумму вклада на конец апреля.
б) Банковский вклад в марте увеличился на 20%, а в мае уменьшился на 20%, после чего на счету оказалось 6720 рублей. Найдите сумму вклада на конец февраля.

- 8.2.B09** а) Настя, Лена, Вита и Маша купили лотерейный билет за 20 рублей. При этом Настя заплатила 4 рубля 10 копеек, Лена — 1 рубль 80 копеек, Вита — 2 рубля 20 копеек, а оставшуюся сумму внесла Маша. При этом девочки договорились, что выигрыш делят между собой пропорционально внесенному вкладу. На билет выпал выигрыш 2000 рублей. Какая сумма из выигрыша причитается Маше?
б) Игорь, Володя, Сережа и Паша купили лотерейный билет за 10 рублей. При этом Игорь заплатил 2 рубля 10 копеек, Володя — 1 рубль 10 копеек, Сережа — 3 рубля 10 копеек, а оставшуюся сумму внес Паша. При этом мальчики договорились, что выигрыш делят между собой пропорционально внесенному вкладу. На билет выпал выигрыш 500 рублей. Какая сумма из выигрыша причитается Паше?
- 8.2.B10** а) В красной коробке было 30 красных шаров, а в синей коробке — 30 синих шаров. 7 красных шаров переложили в синюю коробку, после чего шары в ней перемешали, а затем не глядя переложили 7 шаров в красную коробку. Чего в результате оказалось больше: синих шаров в красной коробке или красных шаров в синей коробке?
б) В зеленой коробке было 40 зеленых шаров, а в желтой коробке — 40 желтых шаров. 9 зеленых шаров переложили в желтую коробку, после чего шары в ней перемешали, а затем не глядя переложили 9 шаров в зеленую коробку. Чего в результате оказалось больше: желтых шаров в зеленой коробке или зеленых шаров в желтой коробке?

Уровень С

- 8.2.C01** а) Семья состоит из трех человек: отца, матери и сына. Если бы зарплата матери увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 30%. Если бы стипендия сына увеличилась втрое, общий доход семьи вырос бы на 6%. Сколько процентов дохода семьи составляет зарплата отца?
б) Семья состоит из трех человек: отца, матери и дочери. Если бы стипендия дочери увеличилась вдвое,

общий доход семьи вырос бы на 8%. Если бы зарплата отца увеличилась втрое, общий доход семьи вырос бы на 120%. Сколько процентов дохода семьи составляет зарплата матери?

- 8.2.C02** а) Имеется две смеси, каждая из которых состоит из веществ A и B . В первой смеси отношение масс веществ A и B равно $5:1$, а во второй смеси — $9:2$. Сколько килограммов вещества B содержится в первой смеси, если её масса составляет 102 кг? Сколько килограммов веществ A и B содержится в смеси, приготовленной из 102 кг первой смеси и 176 кг второй смеси?
- б) Имеется две смеси, каждая из которых состоит из веществ A и B . В первой смеси отношение масс веществ A и B равно $2:5$, а во второй смеси — $1:3$. Сколько килограммов вещества B содержится в первой смеси, если её масса составляет 147 кг? Сколько килограммов веществ A и B содержится в смеси, приготовленной из 147 кг первой смеси и 64 кг второй смеси?
- 8.2.C03** а) Имеется две смеси, каждая из которых состоит из веществ A и B . В первой смеси вещество A составляет 47%, а во второй смеси — 8%. Сколько килограммов вещества B содержится в первой смеси, если её масса составляет 29 кг? Сколько килограммов веществ A и B содержится в смеси, приготовленной из 29 кг первой смеси и 28 кг второй смеси?
- б) Имеется две смеси, каждая из которых состоит из веществ A и B . В первой смеси вещество A составляет 12%, а во второй смеси — 79%. Сколько килограммов вещества B содержится в первой смеси, если её масса составляет 48 кг? Сколько килограммов веществ A и B содержится в смеси, приготовленной из 48 кг первой смеси и 22 кг второй смеси?
- 8.2.C04** а) Имеются два сосуда, содержащие 30 кг и 35 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 46% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 47% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в каждом растворе?

- б) Имеются два сосуда, содержащие 10 кг и 12 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 36% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 39% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в каждом растворе?
- 8.2.C05** а) Свежий виноград содержит 80% влаги, а сушёный виноград (изюм) — 5%. Сколько требуется свежего винограда для приготовления 1 кг изюма?
- б) Свежий виноград содержит 75% влаги, а сушёный виноград (изюм) — 6%. Сколько требуется свежего винограда для приготовления 4 кг изюма?
- 8.2.C06** а) Во время загородной поездки автомобиль на каждые 100 км пути расходует на 2 л бензина меньше, чем в городе. Водитель выехал с полным баком, проехал 120 км по городу и 110 км по загородному шоссе до заправки. Заправив машину, он обнаружил, что в бак вошло 30 л бензина. Найдите расход бензина в городе (среднее число литров на 100 км пробега).
- б) Во время загородной поездки автомобиль на каждые 100 км пути расходует на 5 л бензина меньше, чем в городе. Водитель выехал с полным баком, проехал 120 км по городу и 190 км по загородному шоссе до заправки. Заправив машину, он обнаружил, что в бак вошло 37 л бензина. Найдите расход бензина в городе (среднее число литров на 100 км пробега).
- 8.2.C07** а) В первой кастрюле был один литр кофе, а во второй кастрюле — один литр молока. Из второй кастрюли в первую перелили 0,13 л молока и хорошо размешали. После этого из первой кастрюли во вторую перелили 0,13 л смеси. Чего больше: молока в кофе или кофе в молоке?
- б) В первой кастрюле был один литр кофе, а во второй кастрюле — один литр молока. Из первой кастрюли во вторую перелили 0,51 л кофе и хорошо размешали. После этого из второй кастрюли в первую перелили 0,51 л смеси. Чего больше: молока в кофе или кофе в молоке?

- 8.2.C08** а) Затраты на производство одного микропроцессора составляют 68 евроцентов. Испытания успешно проходят только 2% продукции, а остальное идет в брак. Компания, производящая процессоры, вынуждена включать все затраты в себестоимость исправных процессоров, поступивших в продажу. Найдите себестоимость (в евро) одного исправного процессора. Найдите цену одного микропроцессора, учитывая, что компания должна получить от его продажи 25% прибыли (1 евро равен 100 евроцентам).
- б) Затраты на производство одного микропроцессора составляют 75 евроцентов. Испытания успешно проходят только 5% продукции, а остальное идет в брак. Компания, производящая процессоры, вынуждена включать все затраты в себестоимость исправных процессоров, поступивших в продажу. Найдите себестоимость (в евро) одного исправного процессора. Найдите цену одного микропроцессора, учитывая, что компания должна получить от его продажи 10% прибыли (1 евро равен 100 евроцентам).
- 8.2.C09** а) В прошлом году предприятие заплатило некоторый налог, ставка которого была равна 21%. Сумма налога составила 6300 рублей. В этом году ставка налога снизилась и стала равна 4%. Какую сумму налога предприятие должно заплатить в этом году, если сумма, облагаемая налогом, увеличилась в 1,3 раза?
- б) В прошлом году предприятие заплатило некоторый налог, ставка которого была равна 18%. Сумма налога составила 5400 рублей. В этом году ставка налога снизилась и стала равна 5%. Какую сумму налога предприятие должно заплатить в этом году, если сумма, облагаемая налогом, увеличилась в 1,4 раза?
- 8.2.C10** а) Митя, Антон, Гоша и Борис купили лотерейный билет за 20 рублей. Митя заплатил 24% стоимости билета, Антон — 3 рубля 70 копеек, Гоша — 0,21 стоимости билета, а оставшуюся сумму внес Борис. Мальчики договорились, что выигрыш делят между собой пропорционально внесенному вкладу. На билет выпал выигрыш 1000 рублей. Какая сумма причитается Борису?

б) Паша, Володя, Сергей и Иван купили лотерейный билет за 20 рублей. Паша заплатил 28% стоимости билета, Володя — 4 рубля 90 копеек, Сергей — 0,07 стоимости билета, а оставшуюся сумму внес Иван. Мальчики договорились, что выигрыш делят между собой пропорционально внесенному вкладу. На билет выпал выигрыш 2000 рублей. Какая сумма причитается Ивану?

Уровень D

- 8.2.D01** а) В магазине два отдела: бакалеи и гастрономии. Если бы дневная выручка отдела гастрономии сократилась вдвое, дневная выручка магазина уменьшилась бы на 34%. На сколько процентов увеличилась бы дневная выручка магазина, если дневная выручка отдела бакалеи выросла бы втрое?
- б) В магазине два отдела: трикотажа и обуви. Если бы дневная выручка отдела трикотажа увеличилась втрое, дневная выручка магазина выросла бы на 76%. На сколько процентов уменьшилась бы дневная выручка магазина, если дневная выручка отдела обуви сократилась бы вдвое?
- 8.2.D02** а) Банк предоставляет ипотечный кредит (кредит на покупку квартиры под залог квартиры) сроком на 10 лет под 19% годовых. Это означает, что ежегодно заемщик возвращает 19% от непогашенной суммы кредита и $\frac{1}{10}$ суммы кредита. Так, в первый год заемщик выплачивает $\frac{1}{10}$ суммы кредита и 19% от всей суммы кредита, во второй год заемщик выплачивает $\frac{1}{10}$ суммы кредита и 19% от $\frac{9}{10}$ суммы кредита и т.д. Во сколько раз сумма, которую должен выплатить банку заемщик, больше суммы займа, если согласно договору досрочное погашение кредита невозможно?
- б) Банк предоставляет ипотечный кредит (кредит на покупку квартиры под залог квартиры) сроком на 20 лет под 12% годовых. Это означает, что ежегодно заемщик возвращает 12% от непогашенной суммы кредита и $\frac{1}{20}$ суммы кредита. Так, в первый год за-

емщик выплачивает $\frac{1}{20}$ суммы кредита и 12% от всей суммы кредита, во второй год заемщик выплачивает $\frac{1}{20}$ суммы кредита и 12% от $\frac{19}{20}$ суммы кредита и т.д. Во сколько раз сумма, которую должен выплатить банку заемщик, больше суммы займа, если согласно договору досрочное погашение кредита невозможно?

8.2.D03 а) В бак помещается 30 кг бензина или 36 кг моторного масла. Для приготовления горючей смеси этот бак заполнили смесью бензина с маслом, причем так, что стоимость израсходованного бензина оказалась равной стоимости израсходованного масла. Масса получившейся в баке смеси составила 31 кг, а стоимость — 500 рублей. Сколько стоит 1 кг бензина?

б) В бочку помещается 40 кг скипидара или 45 кг растительного масла. Для приготовления олифы эту бочку заполнили смесью масла со скипидаром, причем так, что стоимость израсходованного масла оказалась равной стоимости израсходованного скипидара. Масса получившейся в бочке смеси составила 44 кг, а стоимость — 320 рублей. Сколько стоит 1 кг скипидара?

8.2.D04 а) Процент числа учеников девятого класса, принявших участие в олимпиаде по математике, заключен в пределах от 96,8% до 97,2%. Найдите наименьшее возможное число учеников этого класса.

б) Процент числа школьников, получивших пятерку на экзамене по математике, заключен в пределах от 1,7% до 2,3%. Найдите наименьшее возможное число школьников, сдававших экзамен по математике.

8.2.D05 а) Бригада, состоящая из одного рабочего 1-го разряда, четырех рабочих 2-го разряда и пяти рабочих 3-го разряда, выполняет заказ за 4 дня. Бригада, состоящая из четырех рабочих 1-го разряда и одного рабочего 2-го разряда, выполняет тот же заказ за 12 дней. За сколько дней выполнит этот же заказ бригада, состоящая из одного рабочего 1-го разряда, одного рабочего 2-го разряда и одного рабочего 3-го разряда?

б) Бригада, состоящая из шести рабочих 1-го разряда, пяти рабочих 2-го разряда и четырех рабочих 3-го

разряда, выполняет заказ за 5 дней. Бригада, состоящая из одного рабочего 2-го разряда и двух рабочих 3-го разряда, выполняет тот же заказ за 20 дней. За сколько дней выполнит этот же заказ бригада, состоящая из одного рабочего 1-го разряда, одного рабочего 2-го разряда и одного рабочего 3-го разряда?

8.2.D06 а) Во время загородной поездки автомобиль расходует в $\frac{1}{3}$ раза меньше бензина, чем в городе при том же пробеге. Водитель выехал с полным баком, проехал $\frac{2}{5}$ пути по городу, а оставшуюся часть пути — по загородному шоссе до заправки. Заправив машину, он обнаружил, что в бак вошло 17 л бензина. Сколько бензина израсходовал бы автомобиль, если бы весь его путь пролегал по шоссе?

б) Во время загородной поездки автомобиль расходует в $1\frac{2}{7}$ раза меньше бензина, чем в городе при том же пробеге. Водитель выехал с полным баком, проехал 0,4 пути по городу, а оставшуюся часть пути — по загородному шоссе до заправки. Заправив машину, он обнаружил, что в бак вошло 39 л бензина. Сколько бензина израсходовал бы автомобиль, если бы весь его путь пролегал по шоссе?

8.2.D07 а) Водитель знает, что зимой его автомобиль на каждые 100 км пробега расходует на один литр бензина больше, чем летом. Какое расстояние зимой проедет водитель, израсходовав $\frac{1}{4}$ бака, если летом он может проехать 672 км, израсходовав один полный бак? Емкость бака равна 56 л.

б) Водитель знает, что зимой его автомобиль на каждые 100 км пробега расходует на один литр бензина больше, чем летом. Какое расстояние зимой проедет водитель, израсходовав $\frac{1}{5}$ бака, если летом он может проехать 840 км, израсходовав один полный бак? Емкость бака равна 70 л.

8.2.D08 а) Канистра содержит 31 л кислоты. Из нее отливают три литра кислоты и доливают три литра воды. Такую операцию повторяют n раз. Сколько кислоты останется в канистре?

б) Канистра содержит 13 л кислоты. Из нее отливают два литра кислоты и доливают два литра воды. Такую операцию повторяют n раз. Сколько кислоты останется в канистре?

8.2.D09 а) Каждый из двух сплавов состоит из веществ A и B . Первый сплав содержит 20% вещества A , а второй — 40% вещества B . Некоторое количество первого сплава и вдвое меньшее по массе количество второго сплава сплавил с пятью килограммами чистого вещества A и тремя килограммами чистого вещества B . В результате процентное содержание вещества A в новом сплаве стало больше процентного содержания вещества B во втором сплаве на 10%. Найдите массу нового сплава.

б) Каждый из двух сплавов состоит из веществ A и B . Первый сплав содержит 30% вещества A , а второй — 40% вещества B . Некоторое количество первого сплава и втрое меньшее по массе количество второго сплава сплавил с четырьмя килограммами чистого вещества A и двумя килограммами чистого вещества B . В результате процентное содержание вещества A в новом сплаве стало больше процентного содержания вещества B во втором сплаве на 10%. Найдите массу нового сплава.

8.2.D10 а) Смешав 30%-ый и 20%-ый растворы кислоты добавив четыре килограмма чистой воды, получили 10%-ый раствор кислоты. Если бы вместо четырех килограммов воды добавили четыре килограмма 70%-го раствора той же кислоты, то получили бы 50%-ый раствор кислоты. Сколько килограммов 30%-го и сколько килограммов 20%-го растворов было смешано?

б) Смешав 50%-ый и 40%-ый растворы кислоты и добавив три килограмма чистой воды, получили 30%-ый раствор кислоты. Если бы вместо трех килограммов воды добавили три килограмма 90%-го раствора той же кислоты, то получили бы 60%-ый раствор кислоты. Сколько килограммов 50%-го и сколько килограммов 40%-го растворов было смешано?

§ 3. Задачи на свойства целых чисел

Уровень А

8.3.A01 а) Можно ли 295 тюльпанов подарить 37 дамам так, чтобы у каждой дамы оказалось одно и то же число тюльпанов?

б) Можно ли 273 хризантемы подарить 39 дамам так, чтобы у каждой дамы оказалось одно и то же число хризантем?

8.3.A02 а) Масса одного телевизора равна 12 кг. Может ли общая масса всех таких телевизоров, находящихся на складе, быть равной 378 кг?

б) Масса одной стиральной машины равна 18 кг. Может ли общая масса всех таких стиральных машин, находящихся на складе, быть равной 384 кг?

8.3.A03 а) Есть 800 теннисных мячей. Какое наименьшее число мячей нужно добавить, чтобы мячи можно было распределить поровну между 73 теннисистами?

б) Есть 850 теннисных мячей. Какое наименьшее число мячей нужно добавить, чтобы мячи можно было распределить поровну между 78 теннисистами?

8.3.A04 а) Баночка йогурта стоит 5 рублей 72 копейки. Какое наибольшее число таких баночек можно купить на 40 рублей?

б) Баночка йогурта стоит 7 рублей 16 копеек. Какое наибольшее число таких баночек можно купить на 50 рублей?

8.3.A05 а) В одном контейнере можно разместить 9 одинаковых коробок. Какое наименьшее число контейнеров потребуется для того, чтобы разместить 97 таких коробок?

б) В одном контейнере можно разместить 11 одинаковых коробок. Какое наименьшее число контейнеров потребуется для того, чтобы разместить 69 таких коробок?

8.3.A06 а) Теплоход рассчитан на 800 пассажиров и 55 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 60 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

- б) Теплоход рассчитан на 800 пассажиров и 65 членом команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 50 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членом команды?
- 8.3.A07** а) На свой день рождения Маша купила 15 конфет и 9 шоколадных медалей. Какое наибольшее количество гостей Маша может пригласить к себе, чтобы и конфеты и медали можно было разделить поровну между всеми, включая ее саму?
- б) На свой день рождения Мила купила 20 пирожков и 28 пирожных. Какое наибольшее количество гостей Мила может пригласить к себе, чтобы и пирожки и пирожные можно было разделить поровну между всеми, включая ее саму?
- 8.3.A08** а) Люба пригласила гостей и хочет купить столько конфет, чтобы их можно было раздать поровну всем, включая ее саму. Но Люба не знает, сколько человек придет: 2, 3 или 6. Какое наименьшее количество конфет должно быть у Любы, чтобы она смогла осуществить свой план в любом случае?
- б) Катя пригласила гостей и хочет купить столько пирожных, чтобы их можно было раздать поровну всем, включая ее саму. Но Катя не знает, сколько гостей придет: 3, 4 или 8. Какое наименьшее количество пирожных должно быть у Кати, чтобы она смогла осуществить свой план в любом случае?
- 8.3.A09** а) Найдите стоимость одного карандаша, если известно, что среди трех следующих утверждений есть верное: 1) за три таких карандаша заплатили 7 рублей 25 копеек; 2) за три таких карандаша заплатили 7 рублей 26 копеек; 3) за три таких карандаша заплатили 7 рублей 27 копеек.
- б) Найдите стоимость одной шариковой ручки, если известно, что среди трех следующих утверждений есть верное: 1) за четыре таких ручки заплатили 9 рублей 26 копеек; 2) за четыре таких ручки заплатили 9 рублей 27 копеек; 3) за четыре таких ручки заплатили 9 рублей 28 копеек.

- 8.3.A10** а) Найдите стоимость одного фломастера, если известно, что среди трех следующих утверждений есть верное: 1) за три таких фломастера заплатили 11 рублей 33 копейки; 2) за пять таких фломастеров заплатили 15 рублей 68 копеек; 3) за семь таких фломастеров заплатили 21 рубль 56 копеек.
- б) Найдите стоимость одного ластика, если известно, что среди трех следующих утверждений есть верное: 1) за четыре таких ластика заплатили 10 рублей 22 копейки; 2) за шесть таких ластика заплатили 12 рублей 78 копеек; 3) за восемь таких ластика заплатили 16 рублей 52 копейки.

Уровень В

- 8.3.B01** а) Если сложить возраст отца и возраст сына, то получится 52. Через 8 лет отношение возраста отца к возрасту сына будет равно 3. Сколько лет отцу и сколько сыну в настоящий момент?
- б) Если сложить возраст отца и возраст сына, то получится 30. Через 7 лет отношение возраста отца к возрасту сына будет равно 3. Сколько лет отцу и сколько сыну в настоящий момент?
- 8.3.B02** а) На складе есть мешки с мукой и мешки с сахаром. Масса одного мешка с мукой равна 9 кг, а масса одного мешка с сахаром равна 18 кг. Может ли общая масса всех мешков, находящихся на складе, быть равной 2004 кг?
- б) На складе есть коробки с гречкой и коробки с рисом. Масса коробки с гречкой равна 4 кг, а масса коробки с рисом равна 8 кг. Может ли общая масса всех коробок, находящихся на складе, быть равной 2006 кг?
- 8.3.B03** а) Длины сторон прямоугольника (в сантиметрах) выражаются целыми числами. Найдите стороны прямоугольника, если его площадь равна 38 см^2 , а периметр больше 50 сантиметров.
- б) Длины сторон прямоугольника (в сантиметрах) выражаются целыми числами. Найдите стороны прямоугольника, если его площадь равна 34 см^2 , а периметр меньше 60 сантиметров.

- 8.3.В04** а) Найдите стоимость одной шоколадки, если Варя говорит, что за шесть таких шоколадок она заплатила 49 рублей 92 копейки, Тоня говорит, что за пять таких шоколадок она заплатила 41 рубль 55 копеек, Света говорит, что за четыре таких шоколадки она заплатила 33 рубля 28 копеек, и известно, что две из трех девочек ошибаются.
б) Найдите стоимость одной булочки, если Петя говорит, что за три таких булочки он заплатил 20 рублей 67 копеек, Вася говорит, что за пять таких булочек он заплатил 33 рубля 95 копеек, Гоша говорит, что за семь таких булочек он заплатил 47 рублей 53 копейки, и известно, что двое из трех мальчиков ошибаются.
- 8.3.В05** а) Найдите стоимость одного воздушного шарика, если Маша говорит, что за пять таких шариков она заплатила 22 рубля 45 копеек, Даша говорит, что за шесть таких шариков она заплатила 26 рублей 88 копеек, Глаша говорит, что за семь таких шариков она заплатила 31 рубль 43 копейки, и известно, что одна из девочек ошибается.
б) Найдите стоимость одной тетрадки, если Виталик говорит, что за четыре таких тетрадки он заплатил 21 рубль 16 копеек, Ваня говорит, что за шесть таких тетрадок он заплатил 31 рубль 68 копеек, Витя говорит, что за восемь таких тетрадок он заплатил 42 рубля 24 копейки, и известно, что один из мальчиков ошибается.
- 8.3.В06** а) 93 кг крупы требуется пересыпать в коробки вместимостью 3 кг, 6 кг и 12 кг так, чтобы в коробках не оставалось пустого места. Какое наименьшее число коробок потребуется для этого?
б) 94 кг крупы требуется пересыпать в коробки вместимостью 2 кг, 4 кг и 8 кг так, чтобы в коробках не оставалось пустого места. Какое наименьшее число коробок потребуется для этого?
- 8.3.В07** а) 350 одинаковых стержней стоят дороже 854 рублей, но дешевле 861 рубля. Найдите стоимость одного такого стержня.

- б) 150 одинаковых фломастеров стоят дороже 783 рублей, но дешевле 786 рублей. Найдите стоимость одного такого фломастера.
- 8.3.В08** а) Найдите наименьшее трехзначное число, сумма цифр которого равна 22.
б) Найдите наибольшее трехзначное число, сумма цифр которого равна 23.
- 8.3.В09** а) Можно ли 345 л молока разлить по двухлитровым, четырехлитровым и восьмилитровым бидонам так, чтобы в бидонах не оставалось пустого места?
б) Можно ли 542 л бензина разлить по трехлитровым, шестилитровым и девятилитровым канистрам так, чтобы в канистрах не оставалось пустого места?
- 8.3.В10** а) Найдите периметр треугольника, если длины двух его сторон равны 1 см и 6 см, а длина третьей стороны (в сантиметрах) выражается целым числом.
б) Найдите периметр треугольника, если длины двух его сторон равны 7 см и 1 см, а длина третьей стороны (в сантиметрах) выражается целым числом.
- Уровень С**
- 8.3.С01** а) Нина задумала четырёхзначное число, сумма цифр которого равна 14. Известно, что это число не изменится, если записать его теми же цифрами, но в обратном порядке, и что число, образованное первыми двумя его цифрами, на 27 больше числа, образованного двумя последними его цифрами. Какое число задумала Нина?
б) Лида задумала четырёхзначное число, сумма цифр которого равна 18. Известно, что это число не изменится, если записать его теми же цифрами, но в обратном порядке, и что число, образованное первыми двумя его цифрами, на 9 больше числа, образованного двумя последними его цифрами. Какое число задумала Лида?
- 8.3.С02** а) Число диагоналей выпуклого многоугольника в 5 раз больше числа его сторон. Сколько сторон у многоугольника?

- б) Число сторон выпуклого многоугольника в 7 раз меньше числа его диагоналей. Сколько сторон у многоугольника?
- 8.3.C03** а) На странице во всех строках одно и то же число букв. Если увеличить число строк и число букв в строке на 7, то число букв на странице увеличится на 476. На сколько уменьшится число букв на странице, если уменьшить число строк и число букв в строке на 4?
б) На странице во всех строках одно и то же число букв. Если увеличить число строк и число букв в строке на 7, то число букв на странице увеличится на 455. На сколько уменьшится число букв на странице, если уменьшить число строк и число букв в строке на 5?
- 8.3.C04** а) Сын младше отца в 6 раз, а через год он станет младше отца в 5 раз. Через сколько лет сын будет младше отца в 3 раза?
б) Отец старше сына в 9 раз, а через год он станет старше сына в 7 раз. Через сколько лет отец будет старше сына в 5 раз?
- 8.3.C05** а) В каждом из двух ящиков лежит 15 шаров. Число синих шаров в обоих ящиках равно 8, остальные шары — красные. Сколько красных шаров лежит в каждом ящике, если в первом ящике на каждый синий шар приходится в 2 раза меньше красных шаров, чем во втором?
б) В каждом из двух ящиков лежит 40 кубиков. Число желтых кубиков в обоих ящиках равно 14, остальные кубики — зеленые. Сколько зеленых кубиков лежит в каждом ящике, если в первом ящике на каждый желтый кубик приходится в 3 раза меньше зеленых кубиков, чем во втором?
- 8.3.C06** а) Виталий задумал двузначное число. Цифра десятков этого числа на 5 больше цифры единиц. Если разделить задуманное число на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 11. Найдите задуманное число.
б) Валентин задумал двузначное число. Цифра десятков этого числа на 1 больше цифры единиц. Если разделить задуманное число на произведение его цифр, то в частном получится 2, а в остатке 5. Найдите задуманное число.
- 8.3.C07** а) Может ли разность данного трехзначного числа и числа, записанного теми же цифрами, что и данное, но в обратном порядке, быть равной 198?
б) Может ли разность данного трехзначного числа и числа, записанного теми же цифрами, что и данное, но в обратном порядке, быть равной 270?
- 8.3.C08** а) Из трехзначного числа вычли сумму его цифр. Может ли разность оказаться равной 189?
б) Из трехзначного числа вычли сумму его цифр. Может ли разность оказаться равной 180?
- 8.3.C09** а) Прямоугольный участок выложен квадратными плитками. Если длину и ширину участка увеличить на 7 плиток, то общее число плиток станет в 3,5 раза больше числа плиток, которые будут лежать вдоль периметра участка. Сколько всего плиток на участке?
б) Прямоугольный участок выложен квадратными плитками. Если длину и ширину участка увеличить на 11 плиток, то общее число плиток станет в 5,5 раза больше числа плиток, которые будут лежать вдоль периметра участка. Сколько всего плиток на участке?
- 8.3.C10** а) 60 одинаковых ластиков стоят 110 рублей с копейками. Найдите стоимость одного такого ластика.
б) 90 одинаковых ластиков стоят 321 рубль с копейками. Найдите стоимость одного такого ластика.
- Уровень D**
- 8.3.D01** а) Ваня написал натуральное число, десятичная запись которого состоит из 31 цифры. Витя нашел сумму цифр этого числа. Затем он снова вычислил сумму цифр и поступал так до тех пор, пока не получилось число 1. Найдите остаток от деления на 9 написанного Ваней числа.
б) Ира написала натуральное число, десятичная запись которого состоит из 31 цифры. Зоя нашла сумму цифр этого числа. Затем она снова вычислила сумму цифр и поступала так до тех пор, пока не получилось число 2. Найдите остаток от деления на 3 написанного Ирой числа.

- 8.3.D02** а) Квартал застроен четырехэтажными и шестиэтажными домами, причем шестиэтажных домов меньше, чем четырехэтажных. Если число шестиэтажных домов увеличить вдвое, то число всех домов окажется больше 60. Если увеличить вдвое число четырехэтажных домов, то число всех домов окажется меньше 63. Найдите количество четырехэтажных и шестиэтажных домов в квартале.
- б) Квартал застроен шестнадцатиэтажными и одиннадцатиэтажными домами, причем одиннадцатиэтажных домов меньше, чем шестнадцатиэтажных. Если число одиннадцатиэтажных домов увеличить вдвое, то число всех домов окажется больше 33. Если увеличить вдвое число шестнадцатиэтажных домов, то число всех домов окажется меньше 36. Найдите количество шестнадцатиэтажных и одиннадцатиэтажных домов в квартале.
- 8.3.D03** а) В комнате находятся 17 человек. Может ли каждый из них быть знаком ровно с пятью другими?
- б) В комнате находятся 15 человек. Может ли каждый из них быть знаком ровно с семью другими?
- 8.3.D04** а) На шахматном турнире каждый из участников должен был сыграть ровно одну партию с каждым из прочих, но два участника выбыли из турнира, сыграв только по 4 партии. Поэтому число партий, сыгранных в турнире, оказалось равным 62. Сколько всего было участников турнира? Состоялась ли игра между выбывшими участниками?
- б) На шахматном турнире каждый из участников должен был сыграть ровно одну партию с каждым из прочих, но два участника выбыли из турнира, сыграв только по 3 партии. Поэтому число партий, сыгранных в турнире, оказалось равным 110. Сколько всего было участников турнира? Состоялась ли игра между выбывшими участниками?
- 8.3.D05** а) Человеку, родившемуся в XX веке, в 1958 году исполнилось столько лет, какова сумма двух последних цифр его года рождения. В каком году он родился?

б) Человеку, родившемуся в XX веке, в 1972 году исполнилось столько лет, какова сумма двух последних цифр его года рождения. В каком году он родился?

- 8.3.D06** а) Если построить солдат по 15 человек в шеренге, то последняя шеренга окажется неполной. Если же построить их по 14 человек в шеренге, то все шеренги окажутся полными, но их число будет больше на 1. Если же построить тех же солдат в шеренги по 9 в каждой, то последняя шеренга опять будет неполной, а число шеренг увеличится еще на 9. Сколько всего солдат?
- б) Если построить солдат по 11 человек в шеренге, то последняя шеренга окажется неполной. Если же построить их по 10 человек в шеренге, то все шеренги окажутся полными, но их число будет больше на 2. Если же построить тех же солдат в шеренги по 7 в каждой, то последняя шеренга опять будет неполной, а число шеренг увеличится еще на 10. Сколько всего солдат?
- 8.3.D07** а) Мастер делает за один час целое число деталей, большее 18, а ученик — на 10 деталей меньше. Мастер выполняет заказ за целое число часов, а три ученика вместе — на два часа быстрее. Из какого числа деталей состоит заказ?
- б) Мастер делает за один час целое число деталей, большее 5, а ученик — на 2 детали меньше. Мастер выполняет заказ за целое число часов, а два ученика вместе — на час быстрее. Из какого числа деталей состоит заказ?
- 8.3.D08** а) На станцию привезли некоторое количество контейнеров. В каждом контейнере находилось одно и то же число телевизоров (большее 1). Телевизоры перегрузили в вагоны. Получилось 13 полных вагонов и еще один вагон, в котором всего 5 телевизоров. Через несколько дней привезли такие же контейнеры. Телевизоры снова перегрузили в вагоны. На этот раз получилось 6 вагонов, причем в последнем до полного вагона не хватало одного телевизора. Сколько телевизоров вмещает один контейнер?

б) На станцию привезли некоторое количество контейнеров. В каждом контейнере находилось одно и то же число телевизоров (больше 1). Телевизоры перегрузили в вагоны. Получилось 12 полных вагонов и еще один вагон, в котором всего 5 телевизоров. Через несколько дней привезли такие же контейнеры. Телевизоры снова перегрузили в вагоны. На этот раз получилось 5 вагонов, причем в последнем до полного вагона не хватало одного телевизора. Сколько телевизоров вмещает один контейнер?

8.3.D09 а) Маша задумала трехзначное число. Сумма цифр этого числа равна 7, а сумма квадратов цифр равна 27. Если из задуманного числа вычесть 396, то получится число, записанное теми же цифрами, что и задуманное, но в обратном порядке. Какое число задумала Маша?

б) Паша задумал трехзначное число. Сумма цифр этого числа равна 8, а сумма квадратов цифр равна 24. Если из задуманного числа вычесть 198, то получится число, записанное теми же цифрами, что и задуманное, но в обратном порядке. Какое число задумал Паша?

8.3.D10 а) На складе находятся музыкальные центры двух типов. Музыкальный центр первого типа весит 12 кг, второго типа — 15 кг. Музыкальный центр первого типа стоит 8000 рублей, музыкальный центр второго типа — 12000 рублей. Общий вес музыкальных центров равен 321 кг. Найдите минимальную и максимальную возможные суммарные стоимости находящихся на складе музыкальных центров.

б) На складе находятся музыкальные центры двух типов. Музыкальный центр первого типа весит 15 кг, второго типа — 18 кг. Музыкальный центр первого типа стоит 6000 рублей, музыкальный центр второго типа — 8000 рублей. Общий вес музыкальных центров равен 279 кг. Найдите минимальную и максимальную возможные суммарные стоимости находящихся на складе музыкальных центров.

9

Уровень А

9.1.A01 а) Найдите разность арифметической прогрессии, первый член которой равен -21 , а двенадцатый равен 1 .

б) Найдите разность арифметической прогрессии, первый член которой равен -37 , а двадцатый равен 1 .

9.1.A02 а) Найдите седьмой член арифметической прогрессии, разность которой равна ее восьмому члену.

б) Найдите девятый член арифметической прогрессии, разность которой равна ее десятому члену.

9.1.A03 а) Найдите сумму первых восьми членов арифметической прогрессии, первый член которой равен -12 , а второй равен -9 .

б) Найдите сумму первых шести членов арифметической прогрессии, первый член которой равен -16 , а второй равен -12 .

9.1.A04 а) Найдите двенадцатый член арифметической прогрессии, если ее одиннадцатый член равен 15 , а десятый член равен 34 .

б) Найдите семнадцатый член арифметической прогрессии, если ее восемнадцатый член равен 25 , а девятнадцатый член равен 39 .

9.1.A05 а) Сумма седьмого и двенадцатого членов арифметической прогрессии меньше суммы ее шестого и одиннадцатого членов на 8 . Найдите разность прогрессии.

б) Сумма шестого и десятого членов арифметической прогрессии меньше суммы ее третьего и восьмого членов на 15 . Найдите разность прогрессии.

9.1.A06 а) Найдите девятый член геометрической прогрессии, если ее десятый член равен 12 , а одиннадцатый член равен 4 .

б) Найдите девятый член геометрической прогрессии, если ее восьмой член равен 24 , а седьмой член равен 8 .

- 9.1.A07** а) Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии, знаменатель которой равен 3, а третий член равен 36.
б) Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии, знаменатель которой равен 2, а четвертый член равен 64.
- 9.1.A08** а) Найдите седьмой член геометрической прогрессии, знаменатель которой равен ее восьмому члену.
б) Найдите тринадцатый член геометрической прогрессии, знаменатель которой равен ее четырнадцатому члену.
- 9.1.A09** а) Пятый член геометрической прогрессии в 5 раз больше ее первого члена. Во сколько раз тринадцатый член этой прогрессии больше ее пятого члена?
б) Четвертый член геометрической прогрессии в 4 раза больше ее первого члена. Во сколько раз десятый член этой прогрессии больше ее четвертого члена?
- 9.1.A10** а) Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если ее тридцать четвертый член равен 35, а тридцать пятый член равен 36.
б) Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если ее сорок третий член равен 44, а сорок четвертый член равен 45.

Уровень В

- 9.1.B01** а) Первый член арифметической прогрессии равен 1, а разность прогрессии равна 7. Какие из чисел 28, 55, 9150 являются членами этой прогрессии?
б) Первый член арифметической прогрессии равен 1, а разность прогрессии равна 3. Какие из чисел 27, 68, 4276 являются членами этой прогрессии?
- 9.1.B02** а) В арифметической прогрессии седьмой член равен -40 , а семнадцатый равен -50 . Найдите разность этой арифметической прогрессии.
б) В арифметической прогрессии восьмой член равен -22 , а двадцатый равен -58 . Найдите разность этой арифметической прогрессии.

- 9.1.B03** а) В арифметической прогрессии второй член равен 4, а двадцать восьмой равен 56. Найдите разность этой прогрессии и сумму 28 первых ее членов.
б) В арифметической прогрессии второй член равен 10, а тридцать второй равен 130. Найдите разность этой прогрессии и сумму 32 первых ее членов.
- 9.1.B04** а) В арифметической прогрессии второй член равен 9, а разность равна 20. Найдите десятый член этой прогрессии и сумму первых десяти ее членов.
б) В арифметической прогрессии второй член равен 11, а разность равна 30. Найдите десятый член этой прогрессии и сумму первых десяти ее членов.
- 9.1.B05** а) В арифметической прогрессии второй член равен 7, а сумма 22 первых членов равна 2035. Найдите первый член и разность этой прогрессии.
б) В арифметической прогрессии второй член равен 3, а сумма 18 первых членов равна 1539. Найдите первый член и разность этой прогрессии.
- 9.1.B06** а) Найдите знаменатель геометрической прогрессии, у которой отношения десятого члена к восьмому в 5 раз больше отношения одиннадцатого члена к десятому.
б) Найдите знаменатель геометрической прогрессии, у которой отношение седьмого члена к шестому в 7 раз меньше отношения шестого члена к четвертому.
- 9.1.B07** а) Существует ли геометрическая прогрессия, в которой восьмой член равен 12, а двенадцатый член равен -8 ?
б) Существует ли геометрическая прогрессия, в которой третий член равен 9, а девятый член равен -3 ?
- 9.1.B08** а) Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если ее тридцать пятый член в 16 раз меньше ее тридцать седьмого члена.
б) Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если ее пятьдесят первый член в 36 раз меньше ее пятьдесят третьего члена.
- 9.1.B09** а) Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если ее восемнадцатый член в 27 раз больше ее двадцать первого члена.

б) Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если ее десятый член в 8 раз больше ее тринадцатого члена.

- 9.1.B10** а) Отношение суммы третьего и восьмого членов геометрической прогрессии к сумме второго и седьмого ее членов равно 13. Найдите знаменатель прогрессии.
б) Отношение суммы шестого и одиннадцатого членов геометрической прогрессии к сумме пятого и десятого ее членов равно 7. Найдите знаменатель прогрессии.

Уровень С

- 9.1.C01** а) В арифметической прогрессии семнадцатый член равен 94, сорок первый равен -2 , а сумма первых n членов прогрессии равна нулю. Найдите n .
б) В арифметической прогрессии девятнадцатый член равен -35 , тридцать седьмой равен 1, а сумма первых n членов прогрессии равна нулю. Найдите n .
- 9.1.C02** а) Найдите все значения x , при которых числа $-6x^2$, $x+1$ и $14+4x^2$ являются последовательными членами арифметической прогрессии (в указанном порядке).
б) Найдите все значения x , при которых числа $4x^2$, $5x+10$ и $12-6x^2$ являются последовательными членами арифметической прогрессии (в указанном порядке).
- 9.1.C03** а) В арифметической прогрессии второй член равен 10, разность равна 3, а сумма первых n членов прогрессии равна 282. Найдите n .
б) В арифметической прогрессии второй член равен 5, разность равна 3, а сумма первых n членов прогрессии равна 222. Найдите n .
- 9.1.C04** а) Дана арифметическая прогрессия $\{a_n\}$. Найдите $a_1 + a_{11} + a_{14} + a_{24}$, если $a_5 + a_{20} = 26$.
б) Дана арифметическая прогрессия $\{a_n\}$. Найдите $a_1 + a_{11} + a_{12} + a_{22}$, если $a_3 + a_{20} = 24$.
- 9.1.C05** а) Найдите сумму всех членов арифметической прогрессии 2; 6; ... с седьмого по тринадцатый включительно.
б) Найдите сумму всех членов арифметической прогрессии 8; 6; ... с шестого по двенадцатый включительно.

- 9.1.C06** а) Найдите разность четырнадцатого и одиннадцатого членов геометрической прогрессии, если их сумма равна 28, а произведение третьего и двадцать второго членов этой прогрессии равно 75.
б) Найдите разность восьмого и шестого членов геометрической прогрессии, если их сумма равна 16, а произведение второго и двенадцатого членов этой прогрессии равно 28.
- 9.1.C07** а) Найдите шестой и десятый члены геометрической прогрессии, если их сумма равна 16, а произведение четырнадцатого и второго членов этой прогрессии равно 60.
б) Найдите седьмой и четырнадцатый члены геометрической прогрессии, если их сумма равна 21, а произведение десятого и одиннадцатого членов этой прогрессии равно 98.
- 9.1.C08** а) Найдите x , если известно, что числа $x-3$, $\sqrt{5x}$, $x+16$ являются последовательными членами геометрической прогрессии (в указанном порядке).
б) Найдите x , если известно, что числа $x-2$, $\sqrt{6x}$, $x+5$ являются последовательными членами геометрической прогрессии (в указанном порядке).
- 9.1.C09** а) Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если разность ее шестнадцатого и тринадцатого членов в 12 раз больше суммы двенадцатого, тринадцатого и четырнадцатого членов.
б) Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если разность ее тридцатого и двадцать седьмого членов в 30 раз больше суммы двадцать шестого, двадцать седьмого и двадцать восьмого членов.
- 9.1.C10** а) Если одиннадцатый член геометрической прогрессии увеличить в 8 раз и сложить с тринадцатым членом, то получится число, в 6 раз большее ее двенадцатого члена. Найдите знаменатель прогрессии.
б) Если тринадцатый член геометрической прогрессии увеличить в 12 раз и сложить с пятнадцатым членом, то получится число, в 7 раз большее ее четырнадцатого члена. Найдите знаменатель прогрессии.

Уровень D

- 9.1.D01** а) Дана арифметическая прогрессия $\{a_n\}$.
Найдите $\frac{a_{57}}{a_{17}}$, если $\frac{a_3}{a_8} = 2$.
б) Дана арифметическая прогрессия $\{a_n\}$.
Найдите $\frac{a_{51}}{a_{15}}$, если $\frac{a_3}{a_9} = 4$.
- 9.1.D02** а) Могут ли числа 0 ; $4\sqrt{11}$; 55 быть членами одной арифметической прогрессии?
б) Могут ли числа 0 ; $3\sqrt{3}$; 18 быть членами одной арифметической прогрессии?
- 9.1.D03** а) Между первым и вторым членами арифметической прогрессии, разность которой равна 42 , поместили 5 чисел так, что эти 7 чисел стали последовательными членами новой арифметической прогрессии. Найдите разность этой новой прогрессии.
б) Между первым и вторым членами арифметической прогрессии, разность которой равна 36 , поместили 11 чисел так, что эти 13 чисел стали последовательными членами новой арифметической прогрессии. Найдите разность этой новой прогрессии.
- 9.1.D04** а) Дана арифметическая прогрессия $\{a_n\}$. Найдите сумму первых 120 ее членов, если
 $a_{20} + a_{30} + a_{47} + a_{55} + a_{66} + a_{74} + a_{91} + a_{101} = 756$.
б) Дана арифметическая прогрессия $\{a_n\}$. Найдите сумму первых 106 ее членов, если
 $a_{10} + a_{39} + a_{47} + a_{48} + a_{59} + a_{60} + a_{68} + a_{97} = 336$.
- 9.1.D05** а) Найдите разность арифметической прогрессии, в которой первый член равен 66 , а произведение второго и двенадцатого членов является наименьшим из возможных.
б) Найдите разность арифметической прогрессии, в которой первый член равен 28 , а произведение второго и восьмого членов является наименьшим из возможных.
- 9.1.D06** а) Найдите знаменатель геометрической прогрессии, отношение суммы первых четырех членов которой к сумме первых двух членов равно $\frac{82}{81}$.

- б) Найдите знаменатель геометрической прогрессии, отношение суммы первых четырех членов которой к сумме первых двух членов равно $\frac{26}{25}$.
- 9.1.D07** а) Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии, в которой сумма квадрата девятого члена и восемнадцатого члена в 13 раз больше семнадцатого члена, а разность квадрата седьмого члена и четырнадцатого члена в 7 раз больше тринадцатого члена.
б) Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии, в которой сумма квадрата седьмого члена и четырнадцатого члена в 18 раз больше тринадцатого члена, а разность квадрата девятого члена и восемнадцатого члена в 8 раз больше семнадцатого члена.
- 9.1.D08** а) Найдите произведение двенадцатого, семнадцатого, двадцать второго и двадцать седьмого членов геометрической прогрессии, если известно, что произведение десятого и двадцать девятого ее членов равно 22 .
б) Найдите произведение одиннадцатого, двадцатого, двадцать девятого и тридцать восьмого членов геометрической прогрессии, если известно, что произведение восемнадцатого и тридцать первого ее членов равно 29 .
- 9.1.D09** а) Сумма четырнадцатого и второго членов геометрической прогрессии равна 16 , а сумма их квадратов равна 200 . Найдите восьмой член прогрессии.
б) Сумма одиннадцатого и третьего членов геометрической прогрессии равна 14 , а сумма их квадратов равна 130 . Найдите седьмой член прогрессии.
- 9.1.D10** а) Разность пятого и третьего членов геометрической прогрессии равна 4 , а разность седьмого и пятого членов равна 12 . Найдите разность девятого и седьмого членов этой прогрессии.
б) Разность седьмого и четвертого членов геометрической прогрессии равна 3 , а разность десятого и седьмого членов равна 6 . Найдите разность тринадцатого и десятого членов этой прогрессии.

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

§1. Отрезки, углы, треугольники

Уровень А

- 10.1.A01 а) Могут ли точки A , B и C быть вершинами треугольника, если $AB = 34$ см, $AC = 15$ см, $BC = 19$ см?
 б) Могут ли точки A , B и C быть вершинами треугольника, если $AB = 19$ см, $AC = 40$ см, $BC = 22$ см?
- 10.1.A02 а) Угол между прямыми a и b равен 17° , а угол между прямыми a и c равен 33° . Найдите угол между прямыми b и c .
 б) Угол между прямыми a и b равен 16° , а угол между прямыми a и c равен 31° . Найдите угол между прямыми b и c .
- 10.1.A03 а) Даны два смежных угла. Биссектриса первого из них образует угол 24° с общей стороной этих углов. Найдите величину второго из данных смежных углов.
 б) Даны два смежных угла, один из которых равен 36° . Найдите угол между биссектрисой второго из данных углов и их общей стороной.
- 10.1.A04 а) Найдите угол B треугольника ABC , если $AB = BC$, а внешний угол при вершине C равен 124° .
 б) Найдите внешний угол при вершине A треугольника ABC , если $AC = BC$, а угол ACB равен 48° .
- 10.1.A05 а) Найдите периметр равностороннего треугольника, если его средняя линия равна 7 см.
 б) Найдите среднюю линию равностороннего треугольника, если его периметр равен 12 см.
- 10.1.A06 а) В прямоугольном треугольнике один из острых углов равен 37° . Найдите больший из углов, на которые высота, проведенная к гипотенузе, делит прямой угол.
 б) В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, делит прямой угол на два угла, один из которых равен 58° . Найдите меньший угол данного треугольника.
- 10.1.A07 а) Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC , пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно. Найдите AC , если $CM = 14$ см, $CN = 18$ см, $BC = 27$ см.
- б) Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC , пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BM , если $AB = 24$ см, $BN = 21$ см, $BC = 28$ см.
- 10.1.A08 а) Прямые, содержащие отрезки AB и DC , параллельны, а отрезки AC и BD пересекаются в точке O . Найдите AO , если $CO = 36$ см, $DC = 30$ см, $AB = 25$ см.
 б) Прямые, содержащие отрезки AD и BC , параллельны, а отрезки AC и BD пересекаются в точке O . Найдите BC , если $AD = 32$ см, $DO = 20$ см, $BO = 15$ см.
- 10.1.A09 а) На стороне AC треугольника ABC взята точка M , причем $AM : MC = 3 : 5$. Найдите площадь треугольника ABC , если площадь треугольника ABM равна 48 см².
 б) На стороне AC треугольника ABC взята точка M , причем $AM : MC = 2 : 7$. Найдите площадь треугольника MBC , если площадь треугольника ABC равна 72 см².
- 10.1.A10 а) Найдите высоту равнобедренного треугольника, если его боковая сторона равна 30 см, а основание равно 36 см.
 б) Найдите боковую сторону равнобедренного треугольника, если его высота равна 30 см, а основание равно 32 см.
- 10.1.A11 а) Найдите площадь прямоугольного треугольника, если один из его катетов равен 16 см, а гипотенуза равна 34 см.
 б) Найдите площадь прямоугольного треугольника, если один из его катетов равен 28 см, а гипотенуза равна 35 см.
- 10.1.A12 а) Найдите площадь треугольника, если высота, проведенная к одной из его сторон, равна 25 см, а средняя линия, параллельная этой стороне, равна 11 см.
 б) Найдите площадь треугольника, если высота, проведенная к одной из его сторон, равна 21 см, а средняя линия, параллельная этой стороне, равна 13 см.

- 10.1.A13** а) В треугольнике ABC угол C равен 90° , $BC = 28$ см, а синус угла A равен $\frac{4}{5}$. Найдите AB .
 б) В треугольнике ABC угол A равен 90° , $AC = 15$ см, а косинус угла C равен $\frac{5}{13}$. Найдите BC .
- 10.1.A14** а) Найдите медиану прямоугольного треугольника, проведенную к гипотенузе, если гипотенуза равна 54 см.
 б) Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если медиана, проведенная к гипотенузе, равна 32 см.
- 10.1.A15** а) В прямоугольном треугольнике, один из острых углов которого равен 30° , меньший катет равен 27 см. Найдите гипотенузу.
 б) В прямоугольном треугольнике, один из острых углов которого равен 60° , гипотенуза равна 48 см. Найдите меньший катет.

Уровень В

- 10.1.B01** а) Точка C принадлежит отрезку AB , причем $AC : CB = 5 : 14$. Точка D принадлежит отрезку CB , причем $CD : DB = 3 : 4$. Найдите отношение $AD : DB$.
 б) Точка C принадлежит отрезку AB , причем $AC : CB = 10 : 7$. Точка D принадлежит отрезку AC , причем $AD : DC = 2 : 3$. Найдите отношение $AD : DB$.
- 10.1.B02** а) В треугольнике ABC углы A и B равны соответственно 48° и 76° . Найдите угол между биссектрисой и высотой, проведенными из вершины C .
 б) В треугольнике ABC углы B и C равны соответственно 64° и 24° . Найдите угол между биссектрисой и высотой, проведенными из вершины A .
- 10.1.B03** а) Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M . Найдите MC , если $AB = 14$ см, $DC = 42$ см, $AC = 56$ см.
 б) Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке N . Найдите BN , если $AB = 17$ см, $DC = 51$ см, $BD = 64$ см.
- 10.1.B04** а) Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC , пересекает стороны AB и BC в точках K и M соответственно. Найдите KM , если $BK : KA = 2 : 5$, $AC = 21$ см.

- б) Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC , пересекает стороны AB и BC в точках K и M соответственно. Найдите AC , если $BK : KA = 3 : 4$, $KM = 18$ см.
- 10.1.B05** а) Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC , пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN , если $MN = 18$ см, $AC = 54$ см, $NC = 32$ см.
 б) Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC , пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BC , если $MN = 13$ см, $AC = 52$ см, $NC = 36$ см.
- 10.1.B06** а) На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что угол BMN равен углу BCA . Найдите MN , если $AC = 48$ см, $AB = 42$ см, $BN = 28$ см.
 б) На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что угол BMN равен углу BCA . Найдите BN , если $MN = 27$ см, $AB = 52$ см, $AC = 36$ см.
- 10.1.B07** а) Средняя линия MN треугольника ABC отсекает от него треугольник MBN , площадь которого равна 32 см^2 . Найдите площадь треугольника ABC .
 б) Средняя линия MN треугольника ABC отсекает от него треугольник MCN . Найдите площадь треугольника MCN , если площадь треугольника ABC равна 76 см^2 .
- 10.1.B08** а) Найдите длину медианы BM треугольника ABC , если известны координаты вершин треугольника: $A(2; 5)$, $B(0; 0)$, $C(4; 3)$.
 б) Найдите длину медианы CP треугольника ABC , если известны координаты вершин треугольника: $A(-3; -2)$, $B(-6; 2)$, $C(0; 0)$.
- 10.1.B09** а) Стороны AB и BC треугольника ABC равны соответственно 32 см и 24 см, а высота, проведенная к стороне BC , равна 16 см. Найдите высоту, проведенную к стороне AB .

- б) Высоты треугольника ABC , проведенные к сторонам AB и AC , равны соответственно 9 см и 12 см. Найдите AC , если $AB = 24$ см.
- 10.1.B10** а) Катеты прямоугольного треугольника равны 15 см и 20 см. Найдите высоту, проведенную к гипотенузе.
б) Катет и гипотенуза прямоугольного треугольника равны 30 см и 50 см. Найдите высоту, проведенную к гипотенузе.
- 10.1.B11** а) Точка H является основанием высоты, проведенной из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC . Найдите AB , если $AH = 6$ см, $AC = 24$ см.
б) Точка H является основанием высоты, проведенной из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC . Найдите BH , если $AH = 28$ см, $CH = 7$ см.
- 10.1.B12** а) Докажите, что треугольник является прямоугольным, и найдите тангенс меньшего из его углов, если стороны треугольника равны 10 см, 24 см и 26 см.
б) Докажите, что треугольник является прямоугольным, и найдите синус меньшего из его углов, если стороны треугольника равны 12 см, 16 см и 20 см.
- 10.1.B13** а) На продолжении отрезка AB за точку B выбрана точка M так, что $AB:BM = 5:3$. Найдите координаты точки M , если известны координаты точек A и B : $A(-2; 3)$, $B(3; 8)$.
б) Точка M делит отрезок AB в отношении $AM:MB = 3:4$. Найдите координаты точки M , если известны координаты точек A и B : $A(4; 3)$, $B(11; 10)$.
- 10.1.B14** а) Углы A и B треугольника ABC равны соответственно 45° и 120° . Найдите AC , если $BC = 12\sqrt{6}$ см.
б) Углы B и C треугольника ABC равны соответственно 135° и 30° . Найдите AC , если $AB = 21\sqrt{2}$ см.
- 10.1.B15** а) Найдите косинус меньшего из углов треугольника со сторонами 10 см, 12 см и 14 см.
б) Найдите косинус большего из углов треугольника со сторонами 12 см, 14 см и 16 см.

Уровень С

- 10.1.C01** а) Точка M выбрана на боковой стороне AC равнобедренного треугольника ABC так, что $AM = 3$ см. Найдите BM , если $AB = AC = 9$ см, $BC = 6$ см.
б) Точка M выбрана на боковой стороне AC равнобедренного треугольника ABC так, что $AM = 4$ см. Найдите BM , если $AB = AC = 16$ см, $BC = 8$ см.
- 10.1.C02** а) Гипотенуза BC прямоугольного треугольника ABC равна 25 см. Найдите длину биссектрисы треугольника, проведенной из вершины C , если $AC = 7$ см.
б) Гипотенуза BC прямоугольного треугольника ABC равна 24 см. Найдите длину биссектрисы треугольника, проведенной из вершины B , если $AB = 3$ см.
- 10.1.C03** а) Точка H является основанием высоты, проведенной из вершины B прямоугольного треугольника ABC к гипотенузе AC . Найдите периметр треугольника ABC , если $AH = 6$ см, $BC = 4$ см.
б) Точка H является основанием высоты, проведенной из вершины B прямоугольного треугольника ABC к гипотенузе AC . Найдите периметр треугольника ABC , если $CH = 8$ см, $AB = 3$ см.
- 10.1.C04** а) Катеты AB и BC прямоугольного треугольника ABC равны соответственно 7 см и 10 см. Точка M лежит внутри угла ABC . Расстояние от точки M до прямой AB равно 5 см, а до прямой BC равно 4 см. Где расположена точка M — внутри треугольника ABC , на гипотенузе AC или вне треугольника?
б) Катеты AB и BC прямоугольного треугольника ABC равны соответственно 6 см и 13 см. Точка M лежит внутри угла ABC . Расстояние от точки M до прямой BC равно 3 см, а до прямой AB равно 6 см. Где расположена точка M — внутри треугольника ABC , на гипотенузе AC или вне треугольника?
- 10.1.C05** а) Медианы треугольника ABC , проведенные из вершин B и C , пересекаются под прямым углом. Найдите длину медианы треугольника, проведенной из вершины A , если $BC = 42$ см.

- б) Медианы треугольника ABC , проведенные из вершин B и C , пересекаются под прямым углом. Найдите BC , если длина медианы треугольника, проведенной из вершины A , равна 36 см.
- 10.1.C06** а) Биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекаются в точке M , а прямые, содержащие высоты треугольника, проведенные из тех же вершин, пересекаются в точке P . Найдите угол BAC , если угол BPC на 21° больше угла BMC .
б) Биссектрисы углов A и B треугольника ABC пересекаются в точке K , а прямые, содержащие высоты треугольника, проведенные из тех же вершин, пересекаются в точке H . Найдите угол ACB , если угол AHB на 18° меньше угла AKB .
- 10.1.C07** а) Биссектриса угла A треугольника ABC делит медиану, проведенную из вершины B , в отношении $5:4$, считая от вершины B . В каком отношении, считая от вершины C , эта биссектриса делит медиану, проведенную из вершины C ?
б) Биссектриса угла B треугольника ABC делит медиану, проведенную из вершины C , в отношении $7:2$, считая от вершины C . В каком отношении, считая от вершины A , эта биссектриса делит медиану, проведенную из вершины A ?
- 10.1.C08** а) Стороны AB , BC и AC треугольника ABC равны соответственно 16 см, 17 см и 22 см. Где расположено основание высоты треугольника, проведенной из вершины A : на стороне BC , на ее продолжении за точку B или на ее продолжении за точку C ?
б) Стороны AB , BC и AC треугольника ABC равны соответственно 18 см, 19 см и 26 см. Где расположено основание высоты треугольника, проведенной из вершины B : на стороне AC , на ее продолжении за точку A или на ее продолжении за точку C ?
- 10.1.C09** а) Точка P выбрана на стороне AC треугольника ABC так, что углы CBP и CAB равны. Найдите отношение площади треугольника CBP к площади треугольника ABP , если $AC:BC = 5:4$.
б) Точка P выбрана на стороне AC треугольника ABC так, что углы CBP и CAB равны. Найдите отношение $AP:PC$, если $AC:BC = 6:5$.
- 10.1.C10** а) Прямая пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках P и M соответственно. Найдите отношение площади треугольника APM к площади четырехугольника $MCBP$, если $AP:PB = 5:4$, $AM:MC = 3:5$.
б) Прямая пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках P и M соответственно. Найдите отношение площади треугольника APM к площади четырехугольника $MCBP$, если $AP:PB = 2:5$, $AM:MC = 1:4$.
- 10.1.C11** а) Точка M лежит на стороне AC треугольника ABC , а точка K делит отрезок BM в отношении $BK:KM = 7:5$. Найдите площадь четырехугольника $ABCK$, если площадь треугольника AKC равна 48 см^2 .
б) Точка M лежит на стороне AC треугольника ABC , а точка K делит отрезок BM в отношении $BK:KM = 4:9$. Найдите площадь четырехугольника $ABCK$, если площадь треугольника ABC равна 39 см^2 .
- 10.1.C12** а) На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC выбраны соответственно точки M , K и P так, что $AM:MB = 2:1$, $BK:KC = 3:2$, $CP:PA = 3:1$. Найдите площадь треугольника MPK , если площадь треугольника ABC равна 90 см^2 .
б) На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC выбраны соответственно точки M , K и P так, что $AM:MB = 1:2$, $BK:KC = 2:3$, $CP:PA = 1:3$. Найдите площадь треугольника ABC , если площадь треугольника MPK равна 60 см^2 .
- 10.1.C13** а) Вершины K и P треугольников AKB и APB лежат по одну сторону от прямой AB . Прямая PK пересекает прямую AB в точке M . Найдите, в каком отношении, считая от точки M , точка K делит отрезок PM , если площадь треугольника AKB относится к площади треугольника APB как $2:5$.

б) Вершины K и P треугольников AKB и APB лежат по одну сторону от прямой AB . Прямая PK пересекает прямую AB в точке M . Найдите, в каком отношении, считая от точки M , точка K делит отрезок PM , если площадь треугольника AKB относится к площади треугольника APB как $3 : 4$.

10.1.C14 а) Найдите площадь треугольника ABC , если известны координаты его вершин: $A(-3; -2)$, $B(-1; -7)$, $C(5; -2)$.

б) Найдите площадь треугольника ABC , если известны координаты его вершин: $A(-2; -3)$, $B(4; 2)$, $C(-2; 5)$.

10.1.C15 а) Точка M делит гипотенузу AC прямоугольного треугольника ABC в отношении $AM : MC = 2 : 3$. Найдите разложение вектора \overrightarrow{BM} по векторам \overrightarrow{BA} и \overrightarrow{BC} и длину вектора \overrightarrow{BM} , если $AB = 10$ см, $CB = 5$ см.

б) Точка M делит гипотенузу AC прямоугольного треугольника ABC в отношении $AM : MC = 3 : 5$. Найдите разложение вектора \overrightarrow{BM} по векторам \overrightarrow{BA} и \overrightarrow{BC} и длину вектора \overrightarrow{BM} , если $AB = 16$ см, $CB = 8$ см.

Уровень D

10.1.D01 а) Через вершину C равностороннего треугольника ABC проведена прямая, пересекающая сторону AB . Расстояния от вершин A и B до этой прямой равны соответственно 1 см и 7 см. Найдите длину стороны треугольника ABC .

б) Через вершину C равностороннего треугольника ABC проведена прямая, пересекающая продолжение стороны AB за точку A . Расстояния от вершин A и B до этой прямой равны соответственно 2 см и 5 см. Найдите длину стороны треугольника ABC .

10.1.D02 а) Биссектриса угла C равнобедренного треугольника ABC пересекает боковую сторону AB в точке D . Площади треугольников ACD и BCD равны соответственно 4 см² и $2,5$ см². Найдите длину основания AC треугольника ABC .

б) Биссектриса угла C равнобедренного треугольника ABC пересекает боковую сторону AB в точке D . Площади треугольников ACD и BCD равны соответственно 12 см² и $6,5$ см². Найдите длину основания AC треугольника ABC .

10.1.D03 а) Катеты AC и BC прямоугольного треугольника ABC равны соответственно 32 см и 8 см. Точка M лежит внутри угла ACB . Расстояния от точки M до прямых AC и BC равны соответственно 3 см и 20 см. В каком отношении, считая от вершины A , прямая CM делит гипотенузу треугольника?

б) Катеты AC и BC прямоугольного треугольника ABC равны соответственно 24 см и 6 см. Точка M лежит внутри угла ACB . Расстояния от точки M до прямых AC и BC равны соответственно 5 см и 4 см. В каком отношении, считая от вершины A , прямая CM делит гипотенузу треугольника?

10.1.D04 а) Биссектриса прямого угла A прямоугольного треугольника ABC делит медиану, проведенную из вершины B , в отношении $4 : 3$, считая от вершины B . Найдите площадь треугольника, если $BC = 2\sqrt{13}$ см.

б) Биссектриса острого угла B прямоугольного треугольника ABC делит медиану, проведенную из вершины острого угла C , в отношении $8 : 3$, считая от вершины C . Найдите площадь треугольника, если $AC = 2\sqrt{7}$ см.

10.1.D05 а) Найдите площадь треугольника ABC , если $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, а длина медианы, проведенной из вершины B , равна 5 см.

б) Найдите площадь треугольника ABC , если $AB = 10$ см, $BC = 24$ см, а длина медианы, проведенной из вершины B , равна 13 см.

10.1.D06 а) Точка пересечения биссектрис треугольника ABC делит биссектрису угла BAC в отношении $4 : 1$, считая от вершины A . Найдите периметр треугольника ABC , если $BC = 7$ см.

б) Точка пересечения биссектрис треугольника ABC делит биссектрису угла BAC в отношении $5 : 2$, считая от вершины A . Найдите периметр треугольника ABC , если $BC = 8$ см.

- 10.1.D07** а) Стороны AB и AC треугольника ABC равны соответственно 6 см и $3\sqrt{5}$ см. Найдите площадь треугольника, если биссектриса угла A делит высоту, проведенную из вершины B , в отношении 3 : 2, считая от вершины B .
- б) Стороны AB и BC треугольника ABC равны соответственно 8 см и $4\sqrt{15}$ см. Найдите площадь треугольника, если биссектриса угла B делит высоту, проведенную из вершины A , в отношении 4 : 1, считая от вершины A .
- 10.1.D08** а) Расстояния от вершин B и C треугольника ABC до прямой, содержащей биссектрису угла BAC , равны соответственно 4 см и 3 см. Найдите длины сторон AB и AC , если $BC = 14$ см.
- б) Расстояния от вершин B и C треугольника ABC до прямой, содержащей биссектрису угла BAC , равны соответственно 5 см и 4 см. Найдите длины сторон AB и AC , если $BC = 18$ см.
- 10.1.D09** а) Точки K и P являются основаниями высот остроугольного треугольника ABC , проведенных из вершин A и B соответственно, точка M — середина стороны AB . Найдите периметр треугольника MKP , если косинус угла ACB равен $\frac{3}{4}$, $AB = 16$ см.
- б) Точки K и P являются основаниями высот остроугольного треугольника ABC , проведенных из вершин A и B соответственно, точка M — середина стороны AB . Найдите периметр треугольника MKP , если косинус угла ACB равен $\frac{2}{5}$, $AB = 20$ см.
- 10.1.D10** а) Высоты AP и BM остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Найдите площадь четырехугольника $MCPH$, если $BM : AP = 8 : 7$, а площади треугольников AMH и BRH равны соответственно 3 см^2 и 12 см^2 .
- б) Высоты AP и BM остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Найдите площадь четырехугольника $MCPH$, если $BM : AP = 3 : 2$, а площади треугольников AMH и BRH равны соответственно 4 см^2 и 16 см^2 .

- 10.1.D11** а) На продолжении стороны BC треугольника ABC за точку C выбрана точка A_1 , на продолжении стороны AC за точку A — точка B_1 , на продолжении стороны AB за точку B — точка C_1 . Найдите отношение площади треугольника $A_1B_1C_1$ к площади треугольника ABC , если $A_1C : CB = B_1A : AC = C_1B : BA = 2 : 3$.
- б) На продолжении стороны BC треугольника ABC за точку C выбрана точка A_1 , на продолжении стороны AC за точку A — точка B_1 , на продолжении стороны AB за точку B — точка C_1 . Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника $A_1B_1C_1$, если $A_1C : CB = B_1A : AC = C_1B : BA = 3 : 2$.
- 10.1.D12** а) На стороне AC треугольника ABC выбрана точка B_1 , а на стороне AB — точка C_1 так, что $AB_1 : B_1C = 3 : 4$, $AC_1 : C_1B = 5 : 2$. Найдите, в каком отношении, считая от вершин треугольника, точка пересечения отрезков BB_1 и CC_1 делит каждый из этих отрезков.
- б) На стороне AC треугольника ABC выбрана точка B_1 , а на стороне AB — точка C_1 так, что $AB_1 : B_1C = 2 : 3$, $AC_1 : C_1B = 5 : 4$. Найдите, в каком отношении, считая от вершин треугольника, точка пересечения отрезков BB_1 и CC_1 делит каждый из этих отрезков.
- 10.1.D13** а) На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC выбраны соответственно точки M , K и P так, что $AM : MB = 4 : 1$, $BK : KC = 3 : 1$, $CP : PA = 2 : 1$. Отрезки MK и BP пересекаются в точке O . Найдите отношения $MO : OK$ и $BO : OP$.
- б) На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC выбраны соответственно точки M , K и P так, что $AM : MB = 1 : 4$, $BK : KC = 1 : 2$, $CP : PA = 1 : 3$. Отрезки MK и BP пересекаются в точке O . Найдите отношения $MO : OK$ и $BO : OP$.
- 10.1.D14** а) Найдите координаты точки, симметричной точке $A(10; 10)$ относительно прямой $y = \frac{1}{2}x$.
- б) Найдите координаты точки, симметричной точке $A(10; 10)$ относительно прямой $y = 2x$.

- 10.1.D15** а) Найдите точку оси ординат, сумма расстояний от которой до точек $A(4; 3)$ и $B(6; -4)$ минимальна.
 б) Найдите точку оси абсцисс, сумма расстояний от которой до точек $A(-3; 2)$ и $B(2; 6)$ минимальна.

§2. Многоугольники

Уровень А

- 10.2.A01** а) Один из углов параллелограмма равен 41° . Найдите остальные его углы.
 б) Один из углов параллелограмма равен 141° . Найдите остальные его углы.
- 10.2.A02** а) Один из углов параллелограмма на 12° больше другого угла. Найдите эти углы.
 б) Один из углов параллелограмма на 14° меньше другого угла. Найдите эти углы.
- 10.2.A03** а) Периметр параллелограмма равен 72 см, а одна из его сторон равна 4 см. Найдите длины остальных сторон параллелограмма.
 б) Периметр параллелограмма равен 80 см, а одна из его сторон равна 8 см. Найдите длины остальных сторон параллелограмма.
- 10.2.A04** а) Сторона параллелограмма равна 12 см, а расстояние от точки пересечения диагоналей параллелограмма до этой стороны равно 4 см. Найдите площадь параллелограмма.
 б) Сторона параллелограмма равна 14 см, а расстояние от точки пересечения диагоналей параллелограмма до этой стороны равно 3 см. Найдите площадь параллелограмма.
- 10.2.A05** а) Диагональ прямоугольника образует с одной из его сторон угол 7° . Найдите угол между прямыми, содержащими диагонали прямоугольника.
 б) Диагональ прямоугольника образует с одной из его сторон угол 13° . Найдите угол между прямыми, содержащими диагонали прямоугольника.
- 10.2.A06** а) Расстояния от точки пересечения диагоналей прямоугольника до двух его сторон равны 6 см и 9 см. Найдите площадь прямоугольника.

- б) Расстояния от точки пересечения диагоналей прямоугольника до двух его сторон равны 8 см и 11 см. Найдите площадь прямоугольника.
- 10.2.A07** а) Периметр ромба на 36 см больше его стороны. Найдите сторону ромба.
 б) Сторона ромба на 24 см меньше его периметра. Найдите сторону ромба.
- 10.2.A08** а) Найдите сторону ромба, если его диагонали равны 12 см и 16 см.
 б) Найдите сторону ромба, если его диагонали равны 10 см и 24 см.
- 10.2.A09** а) Угол между высотами ромба, проведенными из вершины тупого угла, равен 23° . Найдите углы ромба.
 б) Угол между высотами ромба, проведенными из вершины тупого угла, равен 32° . Найдите углы ромба.
- 10.2.A10** а) Найдите диагональ квадрата, если его площадь равна 288 см^2 .
 б) Найдите площадь квадрата, если его диагональ равна 14 см.
- 10.2.A11** а) Одно из оснований трапеции равно 17 см, а средняя линия равна 10 см. Найдите другое основание трапеции.
 б) Одно из оснований трапеции равно 14 см, а средняя линия равна 11 см. Найдите другое основание трапеции.
- 10.2.A12** а) Найдите высоту трапеции, если площадь трапеции равна 28 см^2 , а сумма длин оснований равна 14 см.
 б) Найдите высоту трапеции, если площадь трапеции равна 32 см^2 , а сумма длин оснований равна 16 см.
- 10.2.A13** а) Концы отрезка AB лежат по одну сторону от прямой l . Расстояние от точки A до прямой l равно 24 см, а расстояние от точки B до прямой l равно 62 см. Найдите расстояние от середины отрезка AB до прямой l .
 б) Концы отрезка AB лежат по одну сторону от прямой l . Расстояние от точки A до прямой l равно 34 см, а расстояние от точки B до прямой l равно 46 см. Найдите расстояние от середины отрезка AB до прямой l .

- 10.2.A14** а) Один из углов семиугольника равен 11° . Найдите сумму остальных его углов.
 б) Один из углов девятиугольника равен 14° . Найдите сумму остальных его углов.
- 10.2.A15** а) Найдите число сторон правильного многоугольника, каждый из углов которого равен 162° .
 б) Найдите число сторон правильного многоугольника, каждый из углов которого равен 165° .

Уровень В

- 10.2.B01** а) Стороны параллелограмма равны 10 см и 24 см, а одна из диагоналей равна 26 см. Найдите длину другой диагонали.
 б) Стороны параллелограмма равны 15 см и 20 см, а одна из диагоналей равна 25 см. Найдите длину другой диагонали.
- 10.2.B02** а) Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K . Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 7$ см, $CK = 12$ см.
 б) Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K . Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 6$ см, $CK = 14$ см.
- 10.2.B03** а) Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке, лежащей на стороне BC . Найдите AB , если $BC = 44$ см.
 б) Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке, лежащей на стороне BC . Найдите BC , если $AB = 24$ см.
- 10.2.B04** а) Диагонали параллелограмма равны 20 см и 22 см. Может ли одна из его сторон быть равной 21 см?
 б) Диагонали параллелограмма равны 24 см и 26 см. Может ли одна из его сторон быть равной 25 см?
- 10.2.B05** а) На стороне AB параллелограмма $ABCD$ отметили точку M . Найдите площадь параллелограмма, если площадь треугольника MCD равна 38 см^2 .
 б) На стороне AD параллелограмма $ABCD$ отметили точку M . Найдите площадь треугольника MCB , если площадь параллелограмма равна 42 см^2 .

- 10.2.B06** а) Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 15 см, а одна из диагоналей ромба равна 60 см. Найдите углы ромба.
 б) Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 20 см, а одна из диагоналей ромба равна 80 см. Найдите углы ромба.
- 10.2.B07** а) Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 8$ см и $CH = 2$ см. Найдите высоту ромба.
 б) Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 6$ см и $CH = 4$ см. Найдите высоту ромба.
- 10.2.B08** а) Расстояние от вершины квадрата до середины стороны, не содержащей эту вершину, равно 3 см. Найдите площадь квадрата.
 б) Расстояние от вершины квадрата до середины стороны, не содержащей эту вершину, равно 4 см. Найдите площадь квадрата.
- 10.2.B09** а) Найдите углы равнобедренной трапеции, если сумма двух из них равна 102° .
 б) Найдите углы равнобедренной трапеции, если сумма двух из них равна 52° .
- 10.2.B10** а) Одно из оснований трапеции в 17 раз меньше ее средней линии. Во сколько раз оно меньше другого основания трапеции?
 б) Одно из оснований трапеции в 16 раз меньше ее средней линии. Во сколько раз оно меньше другого основания трапеции?
- 10.2.B11** а) Основания трапеции равны 16 см и 20 см, а одна из диагоналей равна 18 см. Найдите длины отрезков, на которые точка пересечения диагоналей трапеции делит эту диагональ.
 б) Основания трапеции равны 12 см и 18 см, а одна из диагоналей равна 20 см. Найдите длины отрезков, на которые точка пересечения диагоналей трапеции делит эту диагональ.
- 10.2.B12** а) Основания трапеции равны 12 см и 18 см. Найдите длины отрезков, на которые диагонали трапеции делят ее среднюю линию.

б) Основания трапеции равны 10 см и 16 см. Найдите длины отрезков, на которые диагонали трапеции делят ее среднюю линию.

10.2.B13 а) Концы отрезка AB лежат по разные стороны от прямой l . Расстояние от точки A до прямой l равно 12 см, а расстояние от точки B до прямой l равно 36 см. Найдите расстояние от середины отрезка AB до прямой l .

б) Концы отрезка AB лежат по разные стороны от прямой l . Расстояние от точки A до прямой l равно 24 см, а расстояние от точки B до прямой l равно 30 см. Найдите расстояние от середины отрезка AB до прямой l .

10.2.B14 а) Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F . Найдите AB , если $AF = 24$ см, $BF = 10$ см.

б) Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F . Найдите AB , если $AF = 24$ см, $BF = 18$ см.

10.2.B15 а) Расстояния от середины стороны AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ до середин сторон AB и CD равны соответственно 6 см и 12 см. Найдите длины диагоналей четырехугольника $ABCD$.

б) Расстояния от середины стороны AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ до середин сторон AB и CD равны соответственно 8 см и 14 см. Найдите длины диагоналей четырехугольника $ABCD$.

Уровень С

10.2.C01 а) Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K . Найдите площадь параллелограмма, если $BC = 11$ см, а расстояние от точки K до стороны AB равно 5 см.

б) Биссектрисы углов B и C параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K . Найдите площадь параллелограмма, если $AB = 9$ см, а расстояние от точки K до стороны BC равно 7 см.

10.2.C02 а) Внутри параллелограмма $ABCD$ отметили точку M . Найдите площадь параллелограмма, если сумма площадей треугольников ABM и MCD равна 46 см².

б) Внутри параллелограмма $ABCD$ отметили точку M . Найдите площадь параллелограмма, если сумма площадей треугольников BMC и AMD равна 42 см².

10.2.C03 а) Точка M лежит на стороне AB параллелограмма $ABCD$ и делит эту сторону в отношении $AM : MB = 3 : 4$. Отрезки DM и AC пересекаются в точке F . Найдите площадь параллелограмма, если площадь треугольника AFD равна 63 см².

б) Точка M лежит на стороне BC параллелограмма $ABCD$ и делит эту сторону в отношении $BM : MC = 2 : 5$. Отрезки DM и AC пересекаются в точке F . Найдите площадь параллелограмма, если площадь треугольника CFD равна 56 см².

10.2.C04 а) Точка M является серединой боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника MCD равна 28 см².

б) Точка M является серединой боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Найдите площадь треугольника MCD , если площадь трапеции равна 26 см².

10.2.C05 а) Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает ее боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF , если $AD = 42$ см, $BC = 14$ см, $CF : DF = 4 : 3$.

б) Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает ее боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF , если $AD = 56$ см, $BC = 28$ см, $CF : DF = 5 : 2$.

10.2.C06 а) Диагонали трапеции равны 10 см и 24 см, а основания равны 7 см и 19 см. Найдите угол между прямыми, содержащими диагонали трапеции.

б) Боковые стороны трапеции равны 15 см и 20 см, а основания равны 6 см и 31 см. Найдите угол между прямыми, содержащими боковые стороны трапеции.

10.2.C07 а) Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно 60° и 135° , а $CD = 36$ см.

б) Найдите боковую сторону CD трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно 120° и 45° , а $AB = 24$ см.

- 10.2.C08** а) Биссектриса угла A прямоугольника $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K . Найдите отношение площади треугольника ABK к площади трапеции $AKCD$, если $AB : AD = 3 : 5$.
 б) Биссектриса угла A прямоугольника $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K . Найдите отношение площади трапеции $AKCD$ к площади треугольника ABK , если $AD : AB = 7 : 4$.
- 10.2.C09** а) Высота ромба, проведенная из вершины тупого угла, делит ромб на треугольник и трапецию, площади которых равны соответственно 30 см^2 и 70 см^2 . Найдите высоту ромба.
 б) Высота ромба, проведенная из вершины тупого угла, делит ромб на треугольник и трапецию, площади которых равны соответственно 40 см^2 и 60 см^2 . Найдите высоту ромба.
- 10.2.C10** а) Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если известны координаты его вершин: $A(-2; -2)$, $B(-2; 5)$, $C(2; 7)$, $D(6; -2)$.
 б) Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если известны координаты его вершин: $A(-3; 1)$, $B(-3; 9)$, $C(2; 12)$, $D(9; 1)$.
- 10.2.C11** а) Точка C_1 симметрична вершине C выпуклого четырехугольника $ABCD$ относительно середины стороны AD . Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если площадь четырехугольника $ABCC_1$ равна 37 см^2 .
 б) Точка B_1 симметрична вершине B выпуклого четырехугольника $ABCD$ относительно середины стороны AD . Найдите площадь четырехугольника $BCDB_1$, если площадь четырехугольника $ABCD$ равна 31 см^2 .
- 10.2.C12** а) Найдите косинус угла D выпуклого четырехугольника $ABCD$, если косинус угла B равен $\frac{5}{6}$, $AB = 6$, $BC = 4$, $CD = 5$, $AD = 8$.
 б) Найдите косинус угла C выпуклого четырехугольника $ABCD$, если косинус угла A равен $-\frac{2}{3}$, $AB = 2$, $BC = 3$, $CD = 7$, $AD = 6$.

- 10.2.C13** а) Сумма длин трех любых сторон четырехугольника равна 48 см . Найдите периметр четырехугольника.
 б) Сумма длин трех любых сторон четырехугольника равна 72 см . Найдите периметр четырехугольника.
- 10.2.C14** а) Сумма длин двух любых сторон пятиугольника равна 6 см . Найдите периметр пятиугольника.
 б) Сумма длин двух любых сторон семиугольника равна 4 см . Найдите периметр семиугольника.
- 10.2.C15** а) Найдите величины углов пятнадцатиугольника, если известно, что сумма двух любых его углов одинакова.
 б) Найдите величины углов двенадцатиугольника, если известно, что сумма двух любых его углов одинакова.

Уровень D

- 10.2.D01** а) Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает ее боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF , если $AD = 33 \text{ см}$, $BC = 11 \text{ см}$, а площадь трапеции $Aefd$ относится к площади трапеции $EFcb$ как $27 : 5$.
 б) Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает ее боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF , если $AD = 24 \text{ см}$, $BC = 8 \text{ см}$, а площадь трапеции $Aefd$ относится к площади трапеции $EFcb$ как $21 : 11$.
- 10.2.D02** а) Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции и пересекает ее боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF , если $AD = 12 \text{ см}$, $BC = 24 \text{ см}$.
 б) Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции и пересекает ее боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF , если $AD = 10 \text{ см}$, $BC = 15 \text{ см}$.
- 10.2.D03** а) Основания AD и BC трапеции $ABCD$ равны соответственно 9 см и 3 см , $AB = 2 \text{ см}$. Найдите длину диагонали BD , если длина диагонали AC равна 4 см .

- б) Основания AD и BC трапеции $ABCD$ равны соответственно 8 см и 4 см, $CD = 3$ см. Найдите длину диагонали AC , если длина диагонали BD равна 2 см.
- 10.2.D04** а) Биссектриса угла A трапеции $ABCD$ пересекает боковую сторону CD в точке K . Найдите AB , если $AD = 12$ см, $BC = 8$ см, $CK : KD = 3 : 4$.
б) Биссектриса угла D трапеции $ABCD$ пересекает боковую сторону AB в точке K . Найдите CD , если $AD = 14$ см, $BC = 5$ см, $AK : KB = 2 : 7$.
- 10.2.D05** а) Середина K боковой стороны CD трапеции $ABCD$ является основанием перпендикуляра к этой стороне, проведенного из вершины A . Найдите расстояние от середины стороны AB до прямой CD , если $AK = 24$ см, а площадь треугольника BCK в 6 раз меньше площади треугольника ADK .
б) Середина K боковой стороны CD трапеции $ABCD$ является основанием перпендикуляра к этой стороне, проведенного из вершины A . Найдите расстояние от середины стороны AB до прямой CD , если $AK = 18$ см, а площадь треугольника BCK в 9 раз меньше площади треугольника ADK .
- 10.2.D06** а) Углы при одном из оснований трапеции равны 19° и 71° , а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 12 см и 10 см. Найдите основания трапеции.
б) Углы при одном из оснований трапеции равны 17° и 73° , а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 14 см и 8 см. Найдите основания трапеции.
- 10.2.D07** а) Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 3 см и 4 см, а средняя линия равна 2,5 см.
б) Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 5 см и 12 см, а средняя линия равна 6,5 см.
- 10.2.D08** а) Расстояния от некоторой точки до трех вершин четырехугольника равны 1 см, 6 см и 11 см. Может ли этот четырехугольник быть квадратом?

- б) Расстояния от некоторой точки до трех вершин четырехугольника равны 2 см, 9 см и 18 см. Может ли этот четырехугольник быть квадратом?
- 10.2.D09** а) Найдите площадь четырехугольника, если его диагонали равны, а длины отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника, равны 12 см и 16 см.
б) Найдите площадь четырехугольника, если его диагонали равны, а длины отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника, равны 10 см и 18 см.
- 10.2.D10** а) Площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна 19 см^2 . Точки C_1 и C_2 симметричны точке C относительно середин отрезков AB и AD соответственно. Найдите площадь четырехугольника C_1BDC_2 .
б) Найдите площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$, если точки C_1 и C_2 симметричны точке C относительно середин отрезков AB и AD соответственно, а площадь четырехугольника C_1BDC_2 равна 38 см^2 .
- 10.2.D11** а) Длины сторон BC и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ равны соответственно 6 см и 8 см. Найдите длину отрезка, концами которого являются середины диагоналей AC и BD , если углы BCD и ADC четырехугольника $ABCD$ равны соответственно 123° и 147° .
б) Длины сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ равны соответственно 10 см и 24 см. Найдите длину отрезка, концами которого являются середины диагоналей AC и BD , если углы ABC и BCD четырехугольника $ABCD$ равны соответственно 33° и 57° .
- 10.2.D12** а) Середина M стороны AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD , если $BC = 4$ см, а углы B и C четырехугольника равны соответственно 128° и 112° .
б) Середина M стороны AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD , если $BC = 6$ см, а углы B и C четырехугольника равны соответственно 116° и 124° .

- 10.2.D13** а) Середина диагонали BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ удалена от каждой из его сторон на расстояние, равное 8 см. Найдите площадь четырехугольника, если $AC = 20$ см.
 б) Середина диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ удалена от каждой из его сторон на расстояние, равное 9 см. Найдите площадь четырехугольника, если $BD = 30$ см.
- 10.2.D14** а) Точки M и K являются соответственно серединами сторон AB и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$. Найдите площадь четырехугольника $AMCK$, если площадь четырехугольника $ABCD$ равна 6 см^2 .
 б) Точки M и K являются соответственно серединами сторон BC и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$. Найдите площадь четырехугольника $AMCK$, если площадь четырехугольника $ABCD$ равна 8 см^2 .
- 10.2.D15** а) Точки F , M и K являются соответственно серединами сторон AD , AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если $FM = 6\sqrt{3}$ см, $KF = 10$ см, а угол MFK равен 120° .
 б) Точки F , M и K являются соответственно серединами сторон AD , AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если $FM = 8\sqrt{2}$ см, $KF = 12$ см, а угол MFK равен 135° .

§ 3. Окружности

Уровень А

- 10.3.A01** а) Длина окружности равна 16π см. Найдите площадь круга, ограниченного этой окружностью.
 б) Длина окружности равна 14π см. Найдите площадь круга, ограниченного этой окружностью.
- 10.3.A02** а) Сравните площадь круга, радиус которого равен 8 см, и площадь прямоугольника со сторонами 12 см и 16 см.
 б) Сравните площадь круга, радиус которого равен 6 см, и площадь прямоугольника со сторонами 8 см и 18 см.

§ 3. Окружности

- 10.3.A03** а) Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M . Найдите MA , если $MB = 8$ см, $MC = 6$ см, $MD = 4$ см.
 б) Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M . Найдите MA , если $MB = 3$ см, $MC = 4$ см, $MD = 9$ см.
- 10.3.A04** а) Окружность с центром O касается сторон угла с вершиной A в точках B и C . Найдите угол BAC , если угол BOC равен 147° .
 б) Окружность с центром O касается сторон угла с вершиной A в точках B и C . Найдите угол BOC , если угол BAC равен 47° .
- 10.3.A05** а) Точки A и B делят окружность на две дуги, длины которых относятся как $5 : 7$. Найдите величину центрального угла, опирающегося на меньшую из дуг.
 б) Точки A и B делят окружность на две дуги, длины которых относятся как $3 : 5$. Найдите величину центрального угла, опирающегося на меньшую из дуг.
- 10.3.A06** а) Радиус окружности равен 15 см. Найдите расстояние от центра окружности до хорды, длина которой равна 18 см.
 б) Расстояние от центра окружности, радиус которой равен 20 см, до ее хорды равно 16 см. Найдите длину хорды.
- 10.3.A07** а) Отрезок AB является хордой окружности с центром O . Найдите угол между прямой AB и касательной к окружности, проходящей через точку A , если угол AOB равен 28° .
 б) Отрезок AB является хордой окружности с центром O . Найдите угол AOB , если угол между прямой AB и касательной к окружности, проходящей через точку A , равен 37° .
- 10.3.A08** а) Отрезки AB и BC являются соответственно диаметром и хордой окружности с центром O . Найдите угол AOC , если угол OCB равен 39° .
 б) Отрезки AB и BC являются соответственно диаметром и хордой окружности с центром O . Найдите угол OCB , если угол AOC равен 46° .

- 10.3.A09** а) Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон AB , BC и AC в точках M , K и P соответственно. Найдите периметр треугольника ABC , если $AP = 4$ см, $BM = 6$ см, $CK = 3$ см.
 б) Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон AB , BC и AC в точках M , K и P соответственно. Найдите периметр треугольника ABC , если $AM = 5$ см, $BK = 2$ см, $CP = 4$ см.
- 10.3.A10** а) Найдите диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если синус одного из углов треугольника равен $\frac{3}{7}$, а противолежащий этому углу катет равен 15 см.
 б) Найдите диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если косинус одного из углов треугольника равен $\frac{4}{9}$, а прилежащий к этому углу катет равен 16 см.
- 10.3.A11** а) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, если один из углов треугольника равен 120° , а расстояние от центра окружности до вершины этого угла равно 18 см.
 б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, если один из углов треугольника равен 90° , а расстояние от центра окружности до вершины этого угла равно 26 см.
- 10.3.A12** а) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, если одна из сторон треугольника равна 20 см, а расстояние от центра окружности до этой стороны равно 24 см.
 б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, если одна из сторон треугольника равна 24 см, а расстояние от центра окружности до этой стороны равно 5 см.
- 10.3.A13** а) Найдите радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, если радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен 42 см.
 б) Найдите радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, если радиус окружности, описанной около этого треугольника, равен 36 см.

- 10.3.A14** а) В квадрат вписана окружность. Найдите радиус окружности, если диагональ квадрата равна $12\sqrt{2}$ см.
 б) Около квадрата описана окружность. Найдите радиус окружности, если сторона квадрата равна $8\sqrt{2}$ см.
- 10.3.A15** а) Найдите радиус окружности, описанной около правильного шестиугольника, если радиус окружности, вписанной в этот шестиугольник, равен 18 см.
 б) Найдите радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник, если радиус окружности, описанной около этого шестиугольника, равен 12 см.

Уровень В

- 10.3.B01** а) Одна из сторон треугольника равна 24 см. Может ли радиус окружности, описанной около этого треугольника, быть равным 11 см?
 б) Радиус окружности, описанной около треугольника, равен 17 см. Может ли какая-либо из сторон этого треугольника быть равной 35 см?
- 10.3.B02** а) Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите длину хорды CD , если $AB = 10$ см, а расстояния от центра окружности до хорд AB и CD равны соответственно 12 см и 5 см.
 б) Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды CD , если $AB = 12$ см, $CD = 16$ см, а расстояние от центра окружности до хорды AB равно 8 см.
- 10.3.B03** а) Отрезки AB и BC являются хордами окружности с центром O . Найдите угол ACB , если угол ABO равен 42° .
 б) Отрезки AB и BC являются хордами окружности с центром O . Найдите угол ACB , если угол ABO равен 36° .
- 10.3.B04** а) В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Найдите угол ACD , если углы BAD и ADB равны соответственно 73° и 37° .
 б) В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Найдите угол BAD , если углы ACD и ADB равны соответственно 64° и 46° .

10.3.В05 а) Окружность с центром O касается сторон угла с вершиной A , величина которого равна 40° , в точках B и C . Найдите углы треугольника BOC .

б) Окружность с центром O касается сторон угла с вершиной A в точках B и C . Найдите углы треугольника ABC , если угол BOC равен 50° .

10.3.В06 а) На окружности последовательно отмечены восемь точек $A_1, A_2, A_3, \dots, A_8$, делящие окружность на равные дуги. Найдите величину угла $A_1A_7A_3$.

б) На окружности последовательно отмечены девять точек $A_1, A_2, A_3, \dots, A_9$, делящие окружность на равные дуги. Найдите величину угла $A_2A_9A_5$.

10.3.В07 а) Концы пересекающихся хорд AB и CD делят длину окружности в отношении

$$AC : CB : BD : DA = 2 : 3 : 5 : 10.$$

Найдите величину угла между прямыми AB и CD .

б) Концы пересекающихся хорд AB и CD делят длину окружности в отношении

$$AC : CB : BD : DA = 3 : 5 : 2 : 4.$$

Найдите величину угла между прямыми AB и CD .

10.3.В08 а) На окружности последовательно отмечены точки A, B, C и D , которые делят длину окружности в отношении $AB : BC : CD : DA = 3 : 4 : 5 : 6$. Найдите величину угла между прямыми AB и CD .

б) На окружности последовательно отмечены точки A, B, C и D , которые делят длину окружности в отношении $AB : BC : CD : DA = 6 : 5 : 4 : 3$. Найдите величину угла между прямыми AB и CD .

10.3.В09 а) Отрезки AB и AC являются хордами окружности с центром O . Найдите угол BAC , если известно, что он является острым и что углы ABO и ACO равны соответственно 23° и 32° .

б) Отрезки AB и AC являются хордами окружности с центром O . Найдите угол BOC , если известно, что он меньше развернутого и что углы ABO и ACO равны соответственно 17° и 71° .

10.3.В10 а) Вершина A выпуклого четырехугольника $ABCD$ является центром окружности, проходящей через точки B, C и D . Найдите угол BAD , если углы ABC и ADC равны соответственно 54° и 43° .

б) Вершина A выпуклого четырехугольника $ABCD$ является центром окружности, проходящей через точки B, C и D . Найдите угол BAD , если углы ABC и ADC равны соответственно 67° и 78° .

10.3.В11 а) Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке M . Найдите BM , если $CM = 14$ см.

б) Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке M . Найдите CM , если $BM = 12$ см.

10.3.В12 а) Радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, равен 5 см, а высота, проведенная к основанию, равна 8 см. Найдите площадь треугольника.

б) Радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, равен 10 см, а основание треугольника равно 12 см. Найдите площадь треугольника.

10.3.В13 а) Найдите площадь прямоугольной трапеции, боковые стороны которой равны 10 см и 16 см, если известно, что в эту трапецию можно вписать окружность.

б) Найдите площадь прямоугольной трапеции, боковые стороны которой равны 12 см и 18 см, если известно, что в эту трапецию можно вписать окружность.

10.3.В14 а) В параллелограмм вписана окружность. Найдите периметр параллелограмма, если одна из его сторон равна 5 см.

б) Около параллелограмма, одна из диагоналей которого равна 7 см, описана окружность. Найдите вторую диагональ параллелограмма.

10.3.В15 а) В трапецию, сумма длин боковых сторон которой равна 16 см, вписана окружность. Найдите среднюю линию трапеции.

б) Около трапеции, один из углов которой равен 37° , описана окружность. Найдите остальные углы трапеции.

Уровень С

10.3.С01 а) Углы B и C треугольника ABC равны соответственно 71° и 79° . Найдите BC , если радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 8 см.

- б) Углы A и B треугольника ABC равны соответственно 63° и 87° . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если $BC = 12$ см.
- 10.3.C02** а) Стороны AB и BC прямоугольника $ABCD$ равны соответственно 8 см и 12 см. Окружность с центром в вершине A и радиусом AB , делит прямоугольник на две части. Площадь какой из этих частей больше — той, что лежит вне окружности, или той, что лежит внутри окружности?
- б) Стороны AB и BC прямоугольника $ABCD$ равны соответственно 7 см и 14 см. Окружность с центром в вершине A и радиусом AB , делит прямоугольник на две части. Площадь какой из этих частей больше — той, что лежит вне окружности, или той, что лежит внутри окружности?
- 10.3.C03** а) Вершины треугольника делят описанную около него окружность на три дуги, длины которых относятся, как $6 : 7 : 23$. Найдите радиус окружности, если меньшая из сторон треугольника равна 12 см.
- б) Вершины треугольника делят описанную около него окружность на три дуги, длины которых относятся, как $4 : 9 : 11$. Найдите меньшую из сторон треугольника, если радиус окружности равен 14 см.
- 10.3.C04** а) В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания вписанной окружности с одним из катетов делит этот катет на отрезки 8 см и 7 см. Найдите диаметр описанной окружности треугольника.
- б) В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания вписанной окружности с одним из катетов делит этот катет на отрезки 6 см и 5 см. Найдите диаметр описанной окружности треугольника.
- 10.3.C05** а) Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается его сторон в точках M , K и P . Найдите углы треугольника ABC , если углы треугольника MKP равны 56° , 57° и 67° .
- б) Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается его сторон в точках M , K и P . Найдите углы треугольника MKP , если углы треугольника ABC равны 46° , 58° и 76° .
- 10.3.C06** а) Точки $A(1; 2)$, $B(5; 3)$ и $D(1; 18)$ являются тремя вершинами трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC . Известно, что около трапеции можно описать окружность. Найдите площадь трапеции.
- б) Точки $A(3; 2)$, $B(4; 7)$ и $C(16; 7)$ являются тремя вершинами трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC . Известно, что около трапеции можно описать окружность. Найдите площадь трапеции.
- 10.3.C07** а) Напишите уравнение окружности, описанной около треугольника ABC , если известны координаты вершин треугольника: $A(3; -5)$, $B(28; -5)$, $C(19; 7)$.
- б) Напишите уравнение окружности, описанной около треугольника ABC , если известны координаты вершин треугольника: $A(5; -3)$, $B(5; 22)$, $C(17; 13)$.
- 10.3.C08** а) Точка H является основанием высоты BH , проведенной из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC . Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите PK , если $BH = 14$ см.
- б) Точка H является основанием высоты BH , проведенной из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC . Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите BH , если $PK = 12$ см.
- 10.3.C09** а) Точка M делит сторону AC треугольника ABC в отношении $AM : MC = 5 : 8$. Окружность с диаметром BM проходит через середину стороны BC . Найдите AC , если $BM = 4$ см.
- б) Точка M делит сторону AC треугольника ABC в отношении $AM : MC = 7 : 9$. Окружность с диаметром BM проходит через середину стороны BC . Найдите BM , если $AC = 8$ см.
- 10.3.C10** а) Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B . Найдите диаметр окружности, если $AB = 9$ см, $AC = 12$ см.
- б) Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B . Найдите AC , если диаметр окружности равен 10 см, $AB = 16$ см.

- 10.3.C11** а) Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C . Найдите длину отрезка KP , если $AK = 6$ см, а сторона AC в 1,5 раза больше стороны BC .
- б) Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C . Найдите длину отрезка KP , если $AP = 5$ см, а сторона BC в 2,5 раза меньше стороны AB .
- 10.3.C12** а) Окружность радиуса 2 см, центр O которой лежит на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC , касается его катетов. Найдите площадь треугольника ABC , если $OA = \sqrt{5}$ см.
- б) Окружность радиуса 3 см, центр O которой лежит на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC , касается его катетов. Найдите площадь треугольника ABC , если $OB = \sqrt{10}$ см.
- 10.3.C13** а) Медианы AM и BE треугольника ABC пересекаются в точке O . Найдите длину третьей медианы треугольника, если $AM = BE = 7$ см, а точки O , M , E и C лежат на одной окружности.
- б) Медианы AM и BE треугольника ABC пересекаются в точке O . Найдите длину третьей медианы треугольника, если $AM = BE$, $AB = 8\sqrt{3}$ см, а точки O , M , E и C лежат на одной окружности.
- 10.3.C14** а) Радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 7 см, а ее центром является точка O . Центрами окружностей, описанных около треугольников AOB , BOC и COA являются точки O_1 , O_2 и O_3 . Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник $O_1O_2O_3$.
- б) Центром окружности, описанной около треугольника ABC , является точка O . Центрами окружностей, описанных около треугольников AOB , BOC и COA являются точки O_1 , O_2 и O_3 . Радиус окружности, вписанной в треугольник $O_1O_2O_3$, равен 5 см. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

- 10.3.C15** а) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы ABD и ACD равны. Найдите величину угла при вершине A четырехугольника, если углы DBC и CDB равны соответственно 53° и 64° .
- б) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы DBC и DAC равны. Найдите величину угла при вершине D четырехугольника, если углы BAC и BCA равны соответственно 42° и 37° .

Уровень D

- 10.3.D01** а) В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведенную из вершины B , в отношении 5 : 4, считая от точки B . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если $BC = 12$ см.
- б) Радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 13 см, $BC = 24$ см. Найдите, в каком отношении, считая от вершины B , биссектриса угла A делит высоту, проведенную из этой вершины.
- 10.3.D02** а) Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает стороны AB и BC в точках K и P соответственно. Найдите радиус окружности, если угол ABC равен 81° , $AC = 6$ см, а угол AKC в 10 раз больше угла KAP .
- б) Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает стороны AB и BC в точках K и P соответственно. Отрезки AP и KC пересекаются в точке F . Найдите радиус окружности, если угол ABC равен 58° , угол AKC меньше угла AFC на 32° , $AC = 8$ см.
- 10.3.D03** а) Точка D является основанием высоты, проведенной из вершины тупого угла A треугольника ABC к стороне BC . Окружность с центром в точке D и радиусом DA пересекает стороны AB и AC в точках P и M соответственно. Найдите AC , если $AB = 9$ см, $AP = 8$ см, $AM = 6$ см.
- б) Точка D является основанием высоты, проведенной из вершины тупого угла B треугольника ABC к стороне AC . Окружность с центром в точке D и радиусом DB пересекает стороны BA и BC в точках P и M соответственно. Найдите BA , если $BC = 12$ см, $BP = 6$ см, $BM = 10$ см.

- 10.3.D04** а) В треугольнике ABC угол B равен 120° , а длина стороны AB на $7\sqrt{3}$ см меньше полупериметра треугольника. Найдите радиус окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC .
 б) В треугольнике ABC угол C равен 60° , а длина стороны AC на $4\sqrt{3}$ см меньше полупериметра треугольника. Найдите радиус окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC .
- 10.3.D05** а) В параллелограмме $ABCD$ длина диагонали BD равна 4 см, угол C равен 15° . Окружность, описанная около треугольника ABD , касается прямой CD . Найдите площадь параллелограмма.
 б) В параллелограмме $ABCD$ длина диагонали AC равна 6 см, угол B равен 75° . Окружность, описанная около треугольника ACD , касается прямой BC . Найдите площадь параллелограмма.
- 10.3.D06** а) В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны соответственно 36 см и 12 см, а сумма углов при основании AD равна 90° . Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD , если $AB = 10$ см.
 б) В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны соответственно 50 см и 30 см, а сумма углов при основании AD равна 90° . Найдите радиус окружности, проходящей через точки C и D и касающейся прямой AB , если $CD = 16$ см.
- 10.3.D07** а) Вершины четырехугольника $ABCD$ разбивают описанную около него окружность на дуги AB , BC , CD , DA , длины которых относятся как 6 : 17 : 6 : 7 соответственно. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если $AC = 8$ см.
 б) Вершины четырехугольника $ABCD$ разбивают описанную около него окружность на дуги AB , BC , CD , DA , длины которых относятся как 3 : 10 : 3 : 8 соответственно. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если $BD = 10$ см.
- 10.3.D08** а) Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M . Найдите длину медианы, проведенной к стороне BC , если угол BAC равен 47° , угол BMC равен 133° , $BC = 4\sqrt{3}$ см.

- б) Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M . Найдите BC , если медиана, проведенная к стороне BC , равна $3\sqrt{3}$ см, а углы BAC и BMC равны соответственно 54° и 126° .
- 10.3.D09** а) В треугольнике ABC сторона AB на 4 см больше стороны BC . Медиана BE делит треугольник ABC на два треугольника. В каждый из этих треугольников вписана окружность. Найдите расстояние между точками касания окружностей с медианой BE .
 б) В треугольнике ABC сторона AB на 6 см меньше стороны BC . Медиана BE делит треугольник ABC на два треугольника. В каждый из этих треугольников вписана окружность. Найдите расстояние между точками касания окружностей с медианой BE .
- 10.3.D10** а) Окружность радиуса 12 см касается внешним образом второй окружности в точке C . Прямая, проходящая через точку C , пересекает первую окружность в точке A , а вторую окружность — в точке B . Найдите радиус второй окружности, если $AC = 6$ см, $BC = 7$ см.
 б) Окружность радиуса 8 см касается внешним образом второй окружности радиуса 10 см в точке C . Прямая, проходящая через точку C , пересекает первую окружность в точке A , а вторую окружность — в точке B . Найдите BC , если $AC = 4$ см.
- 10.3.D11** а) Окружность радиуса 4 см касается внешним образом второй окружности в точке B . Общая касательная к этим окружностям, проходящая через точку B , пересекается с некоторой другой их общей касательной в точке A . Найдите радиус второй окружности, если $AB = 6$ см.
 б) Окружность радиуса 8 см касается внешним образом окружности радиуса 18 см в точке B . Общая касательная к этим окружностям, проходящая через точку B , пересекается с некоторой другой их общей касательной в точке A . Найдите длину отрезка AB .
- 10.3.D12** а) Две касающиеся внешним образом в точке K окружности, радиусы которых равны 5 см и 15 см, вписаны в угол с вершиной A . Общая касательная к этим окружностям, проходящая через точку K , пересекает стороны угла в точках B и C . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

б) Две касающиеся внешним образом в точке K окружности, радиусы которых равны 4 см и 12 см, вписаны в угол с вершиной A . Общая касательная к этим окружностям, проходящая через точку K , пересекает стороны угла в точках B и C . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

10.3.D13 а) Две окружности касаются друг друга внешним образом и касаются третьей окружности, радиус которой равен 14 см, внутренним образом, причем центры всех трех окружностей не лежат на одной прямой. Найдите периметр треугольника с вершинами в центрах окружностей.

б) Две окружности касаются друг друга внешним образом и касаются третьей окружности, радиус которой равен 11 см, внутренним образом, причем центры всех трех окружностей не лежат на одной прямой. Найдите периметр треугольника с вершинами в центрах окружностей.

10.3.D14 а) Три окружности, радиусы которых равны 2 см, 3 см и 10 см, попарно касаются внешним образом. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершинами которого являются центры этих трех окружностей.

б) Три окружности, радиусы которых равны 4 см, 8 см и 12 см, попарно касаются внешним образом. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершинами которого являются центры этих трех окружностей.

10.3.D15 а) Две окружности, радиусы которых равны 36 см и 49 см, касаются внешним образом друг друга и касаются некоторой прямой. Найдите радиус меньшей из окружностей, касающейся двух данных окружностей и этой прямой.

б) Две окружности, радиусы которых равны 25 см и 64 см, касаются внешним образом друг друга и касаются некоторой прямой. Найдите радиус большей из окружностей, касающейся двух данных окружностей и этой прямой.

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКЕ

Уровень А

11.1.A01 а) Гарантийный срок нового телевизора 1 год. Вероятность отказа телевизора в течение этого срока равна 0,0059. Завод изготовил и продал 6000 таких телевизоров. Найдите приближенное число рекламаций (сообщений о неисправностях), которые поступят в гарантийный отдел завода. Результат округлите до целых.

б) Гарантийный срок нового телевизора 1 год. Вероятность отказа телевизора в течение этого срока равна 0,0118. Завод изготовил и продал 7000 таких телевизоров. Найдите приближенное число рекламаций (сообщений о неисправностях), которые поступят в гарантийный отдел завода. Результат округлите до целых.

11.1.A02 а) Из ящика, где хранятся 15 синих и 11 красных карандашей, продавец не глядя вынимает 1 карандаш. Какова вероятность того, что этот карандаш окажется синего цвета?

б) Из ящика, где хранятся 19 синих и 15 красных карандашей, продавец не глядя вынимает 1 карандаш. Какова вероятность того, что этот карандаш окажется синего цвета?

11.1.A03 а) Найдите моду, медиану и среднее арифметическое выборки

15,9; 14,1; 27; 14,1; 14,4; 29,3; 14,1; 32,5; 26; 35.

б) Найдите моду, медиану и среднее арифметическое выборки

43,9; 44,5; 32; 44,5; 44,8; 31,3; 44,5; 25,1; 34,6; 22,9.

11.1.A04 а) В среднем из 5000 куриных яиц в инкубаторе появляется 4957 здоровых цыплят. Найдите вероятность появления на свет здорового цыпленка.

б) В среднем из 5000 куриных яиц в инкубаторе появляется 4959 здоровых цыплят. Найдите вероятность появления на свет здорового цыпленка.

- 11.1.A05 а) Авиакомпания продает билеты в 5 зарубежных стран. В таблице приведены сведения о продажах билетов за июнь прошлого года. Считая, что факторы, влияющие на продажи авиабилетов, за год не изменились, найдите вероятность того, что в июне этого года первый покупатель приобретет билет в Бельгию. Результат округлите до сотых!

Страна	Число проданных билетов
Тунис	197
Бельгия	321
Греция	207
Финляндия	352
Южная Корея	112

- б) Авиакомпания продает билеты в 5 зарубежных стран. В таблице приведены сведения о продажах билетов за июнь прошлого года. Считая, что факторы, влияющие на продажи авиабилетов, за год не изменились, найдите вероятность того, что в июне этого года первый покупатель приобретет билет в Грецию. Результат округлите до сотых.

Страна	Число проданных билетов
Тунис	276
Бельгия	221
Греция	217
Финляндия	367
Южная Корея	107

- 11.1.A06 а) В страховой компании застраховано от ущерба 2500 автомобилей. За год в различных дорожно-транспортных происшествиях ущерб был причинен 29 застрахованным автомашинам. Найдите относительную частоту повреждения автомобилей в результате ДТП.
б) В страховой компании застраховано от ущерба 1600 автомобилей. За год в различных дорожно-транспортных происшествиях ущерб был причинен 37 застрахованным автомашинам. Найдите относительную частоту повреждения автомобилей в результате ДТП.

- 11.1.A07 а) Все изготовленные на заводе микропроцессоры проходят проверку. Из партии в 1000 штук исправных процессоров оказалось 57. Найдите относительную частоту изготовления неисправных процессоров.
б) Все изготовленные на заводе микропроцессоры проходят проверку. Из партии в 1000 штук исправных процессоров оказалось 47. Найдите относительную частоту изготовления неисправных процессоров.
- 11.1.A08 а) Выборка 130; 141; 151; 142; 129; 144; 129; 147; 145; 150 содержит сведения о росте (в сантиметрах) каждого из 10 обследованных школьников. Найдите моду, медиану и размах ряда.
б) Выборка 168; 159; 148; 154; 169; 156; 169; 150; 151; 147 содержит сведения о росте (в сантиметрах) каждого из 10 обследованных школьников. Найдите моду, медиану и размах ряда.
- 11.1.A09 а) Частота рождения кролика-альбиноса в процентах составляет 1%. За год в питомнике появилось на свет 1400 кроликов. Сколько примерно среди них было альбиносов?
б) Частота рождения кролика-альбиноса в процентах составляет 1%. За год в питомнике появилось на свет 400 кроликов. Сколько примерно среди них было альбиносов?
- 11.1.A10 а) Каждые полчаса гидролог замеряет температуру воды в водоеме и получает следующий ряд значений: 12,8; 13,1; 12,7; 13,2; 12,7; 13,3; 12,6; 12,9; 12,7; 13; 12,7. Найдите моду, медиану и размах этого ряда.
б) Каждые полчаса гидролог замеряет температуру воды в водоеме и получает следующий ряд значений: 14,6; 15,2; 14,7; 15,1; 14,7; 15; 14,8; 15,3; 14,7; 14,6; 14,7. Найдите моду, медиану и размах этого ряда.

Уровень В

- 11.1.B01 а) Мила складывала в шкатулку только двухрублевые монеты. Однажды Даша взяла из шкатулки 15 двухрублевых монет и взамен положила туда 30 монет по одному рублю. После этого вероятность вынуть из шкатулки наудачу двухрублевую монету стала равна $\frac{11}{26}$. Сколько монет было в шкатулке?

б) Мила складывала в шкатулку только двухрублевые монеты. Однажды Даша взяла из шкатулки 7 двухрублевых монет и взамен положила туда 14 монет по одному рублю. После этого вероятность вынуть из шкатулки наудачу двухрублевую монету стала равна $\frac{31}{45}$. Сколько монет было в шкатулке?

11.1.В02 а) Выпускники экономического факультета устроились на работу в три различных компании: 19 человек работают в банке “Вера”, 28 — в фирме “Надежда” и 37 — в банке “Софья”. Найдите вероятность того, что случайно встреченный выпускник работает в банке.

б) Выпускники экономического факультета устроились на работу в три различных компании: 35 человек работают в банке “Ниф-Ниф”, 27 — в фирме “Наф-Наф” и 46 — в банке “Нуф-Нуф”. Найдите вероятность того, что случайно встреченный выпускник работает в банке.

11.1.В03 а) Авиакомпания продает билеты в 5 зарубежных стран. В таблице приведены сведения о продажах билетов за июль прошлого года. Считая, что факторы, влияющие на продажи авиабилетов, за год не изменились, найдите вероятность того, что в июле этого года первый покупатель приобретет билет в европейское государство. Результат округлите до сотых.

Страна	Число проданных билетов
Египет	356
Италия	206
Испания	180
Франция	320
Япония	123

б) Авиакомпания продает билеты в 5 зарубежных стран. В таблице приведены сведения о продажах билетов за июль прошлого года. Считая, что факторы, влияющие на продажи авиабилетов, за год не изменились, найдите вероятность того, что в июле этого года первый покупатель приобретет билет в европейское

государство. Результат округлите до сотых.

Страна	Число проданных билетов
Египет	171
Италия	248
Испания	248
Франция	420
Япония	122

11.1.В04 а) Мишень представляет собой три круга (один внутри другого), радиусы которых равны 1, 7 и 8 см. Стрелок выстрелил не целясь и попал в мишень. Найдите вероятность того, что он попал в средний круг, но не попал в маленький круг.

б) Мишень представляет собой три круга (один внутри другого), радиусы которых равны 4, 5 и 7 см. Стрелок выстрелил не целясь и попал в мишень. Найдите вероятность того, что он попал в средний круг, но не попал в маленький круг.

11.1.В05 а) Путь в Комарово последовательно проходит через Мухино, Пчелкино и Шмелевое. По расписанию за день с вокзала отправляется 12 электричек до Мухино, 5 — до Пчелкино, 9 — до Шмелевого и 1 — до Комарово. Все электрички движутся со всеми остановками, а других электричек нет. Дачник успел на отходящую электричку, но не успел посмотреть, до какой станции она идет. Считая, что отправление каждой из указанных электричек равновероятно, найдите вероятность того, что дачник сможет доехать в этой электричке до Пчелкино.

б) Путь в Осетрово последовательно проходит через Щукино, Ершово и Лещиное. По расписанию за день с вокзала отправляется 6 электричек до Щукино, 2 — до Ершово, 4 — до Лещиное и 3 — до Осетрово. Все электрички движутся со всеми остановками, а других электричек нет. Дачник успел на отходящую электричку, но не успел посмотреть, до какой станции она идет. Считая, что отправление каждой из указанных электричек равновероятно, найдите вероятность того, что дачник сможет доехать в этой электричке до Ершово.

- 11.1.В06** а) Стрелок делает выстрел не целясь и попадает в квадратный лист бумаги со стороной 12 см, на котором нарисована мишень, состоящая из двух кругов. Известно, что радиусы кругов равны 1 и 6 см. Найдите вероятность события “стрелок попал в малый круг или не попал в большой”.
- б) Стрелок делает выстрел не целясь и попадает в квадратный лист бумаги со стороной 10 см, на котором нарисована мишень, состоящая из двух кругов. Известно, что радиусы кругов равны 1 и 3 см. Найдите вероятность события “стрелок попал в малый круг или не попал в большой”.
- 11.1.В07** а) Середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба. В этом прямоугольнике были выбраны случайным образом 2700 различных точек. Найдите наиболее вероятное число точек, принадлежащих ромбу.
- б) Середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба. В этом прямоугольнике были выбраны случайным образом 5300 различных точек. Найдите наиболее вероятное число точек, принадлежащих ромбу.
- 11.1.В08** а) Вероятность ошибочного соединения на телефонной станции равна 0,0012. Найдите приближенное число сделанных за сутки соединений, если 47 из них оказались ошибочными. Результат округлите до сотен.
- б) Вероятность ошибочного соединения на телефонной станции равна 0,0005. Найдите приближенное число сделанных за сутки соединений, если 49 из них оказались ошибочными. Результат округлите до сотен.
- 11.1.В09** а) В некотором городе из 5000 появившихся на свет младенцев оказалось 2489 мальчиков. Найдите относительную частоту рождения девочек.
- б) В некотором городе из 2000 появившихся на свет младенцев оказалось 1077 мальчиков. Найдите относительную частоту рождения девочек.

- 11.1.В10** а) Чтобы определить численность птиц в популяции, ученые-орнитологи выловили 125 птиц и окольцевали их. Через несколько дней ученые снова выловили 75 птиц и среди них нашли 2 окольцованных. Чему равна приближенная численность популяции? Результат округлите до десятков.
- б) Чтобы определить численность птиц в популяции, ученые-орнитологи выловили 100 птиц и окольцевали их. Через несколько дней ученые снова выловили 125 птиц и среди них нашли 7 окольцованных. Чему равна приближенная численность популяции? Результат округлите до десятков.

Уровень С

- 11.1.С01** а) Фигура задана на координатной плоскости следующими условиями: $|x| \leq 7$; $|y| \leq 4$. Центр круга радиуса 1 принадлежит этой фигуре. Найдите вероятность того, что весь круг содержится в данной фигуре.
- б) Фигура задана на координатной плоскости следующими условиями: $|x| \leq 6$; $|y| \leq 5$. Центр круга радиуса 3 принадлежит этой фигуре. Найдите вероятность того, что весь круг содержится в данной фигуре.
- 11.1.С02** а) Из отрезка $[0; 1]$ наугад выбирается два числа x и y . Найдите вероятность того, что $y \leq 0,2x$.
- б) Из отрезка $[0; 1]$ наугад выбирается два числа x и y . Найдите вероятность того, что $y \leq 0,6x$.
- 11.1.С03** а) Эксперимент состоит в подбрасывании игрального кубика, грани которого помечены числами от 1 до 6. Вероятности выпадения всех граней одинаковы. Найдите вероятность того, что при двух бросаниях сумма выпавших очков будет равна 4.
- б) Эксперимент состоит в подбрасывании игрального кубика, грани которого помечены числами от 1 до 6. Вероятности выпадения всех граней одинаковы. Найдите вероятность того, что при двух бросаниях сумма выпавших очков будет равна 5.
- 11.1.С04** а) В Миргороде всего 17 улиц. При этом 8 из них идут параллельно друг другу с севера на юг, а остальные проходят параллельно друг другу с запада на восток.

Любые две улицы разных направлений пересекаются. Утром два регулировщика движения встали на два различных перекрестка. Найдите вероятность того, что они стоят на одной улице.

б) В Миргороде всего 15 улиц. При этом 5 из них идут параллельно друг другу с севера на юг, а остальные проходят параллельно друг другу с запада на восток. Любые две улицы разных направлений пересекаются. Утром два регулировщика движения встали на два различных перекрестка. Найдите вероятность того, что они стоят на одной улице.

11.1.C05 а) Грани игрального кубика сточены таким образом, что вероятность выбросить одну из граней с 1, 3 или 4 очками равна $\frac{1}{14}$, а вероятность выбросить одну из граней с 2 или 5 очками равна $\frac{2}{7}$. Найдите вероятность того, что за два бросания на кубике выпадет сумма 12 очков.

б) Грани игрального кубика сточены таким образом, что вероятность выбросить одну из граней с 1, 3 или 4 очками равна $\frac{1}{18}$, а вероятность выбросить одну из граней с 2 или 5 очками равна $\frac{2}{9}$. Найдите вероятность того, что за два бросания на кубике выпадет сумма 12 очков.

11.1.C06 а) Олег складывал в коробочку только двухрублевые монеты. Однажды Гоша взял из коробочки 5 двухрублевых монет и взамен положил туда 10 монет по одному рублю каждая. После этого вероятность вынуть из шкатулки наудачу двухрублевую монету оказалось в 3 раза больше, чем рублевую. Сколько монет было в шкатулке?

б) Ваня складывал в коробочку только двухрублевые монеты. Однажды Миша взял из коробочки 17 двухрублевых монет и взамен положил туда 34 монеты по одному рублю каждая. После этого вероятность вынуть из шкатулки наудачу двухрублевую монету оказалось в 2 раза больше, чем рублевую. Сколько монет было в шкатулке?

11.1.C07 Из отрезка $[0; 1]$ наугад выбирается два числа x и y . Найдите вероятность того, что:
а) $y \leq 4x$. б) $y \leq 5,6x$.

11.1.C08 а) На 8 карточках из 12 написана буква "м", на остальных – буква "а". Четыре карточки наугад выкладывают в ряд. Какова вероятность того, что получится слово "мама"?

б) На 6 карточках из 16 написана буква "а", на остальных – буква "п". Четыре карточки наугад выкладывают в ряд. Какова вероятность того, что получится слово "папа"?

11.1.C09 а) В течение четверти оценки Никиты распределились следующим образом: двоек – 5, троек – 2, четверок – 4 и пятерок – 4. Учитель предложил на выбор три способа выведения четвертной оценки.

Первый способ: четвертная оценка равна среднему арифметическому полученных оценок с последующим округлением до целых при необходимости.

Второй способ: четвертная оценка равна моде ряда полученных оценок.

Третий способ: четвертная оценка равна медиане всего ряда полученных оценок с округлением до целых при необходимости.

Какой из способов является наиболее выгодным и какой – наименее выгодным для Никиты?

б) В течение четверти оценки Олега распределились следующим образом: двоек – 2, троек – 3, четверок – 0 и пятерок – 4. Учитель предложил на выбор три способа выведения четвертной оценки.

Первый способ: четвертная оценка равна среднему арифметическому полученных оценок с последующим округлением до целых при необходимости.

Второй способ: четвертная оценка равна моде ряда полученных оценок.

Третий способ: четвертная оценка равна медиане всего ряда полученных оценок с округлением до целых при необходимости.

Какой из способов является наиболее выгодным и какой – наименее выгодным для Олега?

11.1.C10 а) Лесникам нужно определить число деревьев на участке леса площадью 200 га. Для этого они выбрали несколько делянок и подсчитали число деревьев на каждой. В таблице приведены результаты подсчетов. Найдите приближенное число деревьев на всем участке. Сколько на этом участке лиственных деревьев?

Площадь делянки (га)	Число хвойных деревьев	Число лиственных деревьев
0,01	25	16
0,01	35	18
0,02	20	27
0,06	26	30

б) Лесникам нужно определить число деревьев на участке леса площадью 200 га. Для этого они выбрали несколько делянок и подсчитали число деревьев на каждой. В таблице приведены результаты подсчетов. Найдите приближенное число деревьев на всем участке. Сколько на этом участке лиственных деревьев?

Площадь делянки (га)	Число хвойных деревьев	Число лиственных деревьев
0,03	24	14
0,02	23	10
0,03	17	35
0,02	28	27

Уровень D

11.1.D01 а) Даны 4 отрезка. Их длины равны 16 см, 10 см, 3 см и 12 см. Какова вероятность того, что из трех случайно выбранных отрезков можно составить треугольник?
б) Даны 4 отрезка. Их длины равны 27 см, 15 см, 7 см и 18 см. Какова вероятность того, что из трех случайно выбранных отрезков можно составить треугольник?

11.1.D02 а) Вероятность того, что автобус подойдет к остановке на протяжении 30 минут, равна $\frac{1}{5}$. Найдите вероятность того, что автобус подойдет в течение часа.
б) Вероятность того, что автобус подойдет к остановке на протяжении 20 минут, равна $\frac{3}{5}$. Найдите вероятность того, что автобус подойдет в течение часа.

11.1.D03 а) В правом кармане у Мальвины лежит 3 синих и 7 красных леденцов, а в левом — 2 синих и 8 красных. Чтобы угостить Буратино, Мальвина достала из одного кармана два леденца, которые оказались разных цветов. Найдите вероятность того, что Мальвина достала леденцы из правого кармана.

б) В правом кармане у Мальвины лежит 8 синих и 5 красных леденцов, а в левом — 9 синих и 6 красных. Чтобы угостить Буратино, Мальвина достала из одного кармана два леденца, которые оказались разных цветов. Найдите вероятность того, что Мальвина достала леденцы из правого кармана.

11.1.D04 а) Буратино посадил в центре прямоугольного листка бумаги размером 18 см на 27 см круглую кляксу. Через минуту он посадил вторую такую же кляксу, которая также целиком оказалась на листке. Найдите вероятность того, что вторая клякса не соприкасается с первой, если радиус каждой кляксы равен 0,5 см.

б) Буратино посадил в центре прямоугольного листка бумаги размером 18 см на 27 см круглую кляксу. Через минуту он посадил вторую такую же кляксу, которая также целиком оказалась на листке. Найдите вероятность того, что вторая клякса не соприкасается с первой, если радиус каждой кляксы равен 0,4 см.

11.1.D05 а) Грани игрального кубика сточены таким образом, что вероятность выбросить одну из граней с 1, 3 или 4 очками равна $\frac{1}{4}$, а вероятность выбросить одну из граней с 2 или 6 очками равна $\frac{1}{20}$. Найдите вероятность того, что за два бросания на кубике выпадет сумма 11 очков.

б) Грани игрального кубика сточены таким образом, что вероятность выбросить одну из граней с 1, 3 или 4 очками равна $\frac{1}{8}$, а вероятность выбросить одну из граней с 2 или 6 очками равна $\frac{1}{4}$. Найдите вероятность того, что за два бросания на кубике выпадет сумма 11 очков.

11.1.D06 а) В прошлом году инженерно-экономический факультет выпустил 37 инженеров, 48 экономистов и 29 инженеров-экономистов. Однажды выпускник прошлого года, специальность которого “Инженер-экономист”, встретил своего однокурсника. Найдите вероятность того, что этот однокурсник изучал инженерное дело.

б) В прошлом году инженерно-экономический факультет выпустил 47 инженеров, 46 экономистов и 17 инженеров-экономистов. Однажды выпускник прошлого года, специальность которого “Инженер-экономист”, встретил своего однокурсника. Найдите вероятность того, что этот однокурсник изучал инженерное дело.

11.1.D07 а) В некотором клубе — 19 членов, причем 9 из них блондины, а остальные — брюнеты. Гуляя по городу, один из блондинов, состоящих в клубе, встретил по очереди двух других членов клуба. Найдите вероятность того, что первый встреченный был блондином, а второй — брюнетом.

б) В некотором клубе — 23 члена, причем 17 из них блондины, а остальные — брюнеты. Гуляя по городу, один из блондинов, состоящих в клубе, встретил по очереди двух других членов клуба. Найдите вероятность того, что первый встреченный был блондином, а второй — брюнетом.

11.1.D08 а) Чтобы найти площадь неправильной плоской фигуры, с нее сняли бумажную копию в масштабе 1 : 10. Затем копию наклеили на квадратный лист картона со стороной 1 м и подвергли этот лист равномерному и неприцельному обстрелу дробью. Подсчитав число попаданий, обнаружили 960 отверстий в листе; из них 640 отверстий оказалось внутри копии фигуры. Найдите приближенно площадь данной фигуры. Результат округлите до сотых.

б) Чтобы найти площадь неправильной плоской фигуры, с нее сняли бумажную копию в масштабе 1 : 20. Затем копию наклеили на квадратный лист картона со стороной 1 м и подвергли этот лист равномерному

и неприцельному обстрелу дробью. Подсчитав число попаданий, обнаружили 1210 отверстий в листе; из них 570 отверстий оказалось внутри копии фигуры. Найдите приближенно площадь данной фигуры. Результат округлите до сотых.

11.1.D09 а) Мальчик записал в блокноте некоторую выборку из 6 чисел, но неаккуратно вырвал листок, и в результате последнее число оказалось утрачено. Сохранились первые числа: $-3; 2; 4,5; -2; 2,5$. Восстановите утраченное число, если известно, что медиана выборки равна 1.

б) Мальчик записал в блокноте некоторую выборку из 6 чисел, но неаккуратно вырвал листок, и в результате последнее число оказалось утрачено. Сохранились первые числа: $1; -1; -4; 1,5; -6$. Восстановите утраченное число, если известно, что медиана выборки равна -2 .

11.1.D10 а) Школьник обнаружил, что число оценок, которые он получил по математике за год, равно 20. При этом в дневнике записаны следующие оценки: пятерок — 10, двоек, троек и четверок по 3. Одна оценка не записана. Когда школьник спросил об этой оценке у учителя, тот сказал только, что среднее арифметическое ряда оценок — целое число. Какая оценка не записана у ученика в дневнике?

б) Школьник обнаружил, что число оценок, которые он получил по математике за год, равно 32. При этом в дневнике записаны следующие оценки: пятерок — 16, двоек, троек и четверок по 5. Одна оценка не записана. Когда школьник спросил об этой оценке у учителя, тот сказал только, что среднее арифметическое ряда оценок — целое число. Какая оценка не записана у ученика в дневнике?

ПРИЛОЖЕНИЕ 3
ПРИМЕРНЫЕ ВАРИАНТЫ
ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ РАБОТ

Экзаменационные работы по алгебре
для общеобразовательных классов

Экзаменационная работа 1

Вариант 1

1. Найдите значение выражения $\sqrt{65^2 - 56^2}$.

2. Сократите дробь $\frac{15x^4y^6z^9}{5x^3y^2z^4}$.

3. Решите уравнение

$$\frac{3x^2 + 5x + 2}{3} = \frac{5x^2 + 2x + 3}{5}$$

4. Решите неравенство

$$3(2x - 3) - 2(3x - 2) \leq 1 - 4x.$$

5. Решите систему уравнений

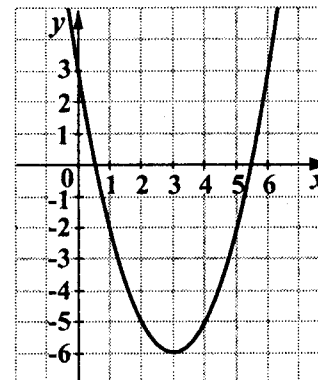
$$\begin{cases} \frac{1}{x-7} = \frac{1}{y-5}, \\ 5x + 7y = 58. \end{cases}$$

6. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} (x+6)^2 < (x+4)^2, \\ 6x + 13 > 5x - 7. \end{cases}$$

7. По графику квадратичной функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке, найдите:

- 1) значение y при $x = 4$;
- 2) значения x , при которых $y = -2$;
- 3) наименьшее значение функции;
- 4) промежутки возрастания и убывания функции.



8. В январе товар стоил 30000 рублей. В марте цену на товар подняли на 4%, а в июле снизили на 4%. Сколько стоил товар в июле?
9. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{y^2 + 81}.$$

10. Решите неравенство $\frac{1}{x-7} > \frac{1}{x+8}$.

Вариант 2

1. Найдите значение выражения $\sqrt{58^2 - 42^2}$.

2. Сократите дробь $\frac{54x^7y^3z^5}{6x^2yz^4}$.

3. Решите уравнение

$$\frac{4x^2 + 7x + 3}{4} = \frac{7x^2 + 3x + 4}{7}$$

4. Решите неравенство

$$4(3x - 4) - 3(4x - 3) \leq 1 - 5x.$$

5. Решите систему уравнений

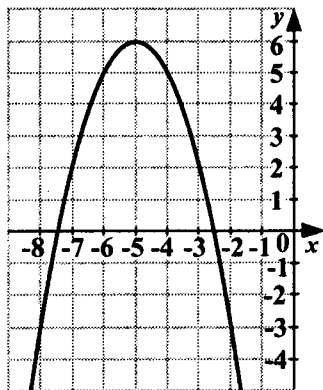
$$\begin{cases} \frac{1}{x-9} = \frac{1}{y-3}, \\ 4x + 9y = 50. \end{cases}$$

6. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} (x+5)^2 < (x+3)^2, \\ 5x+12 > 4x-9. \end{cases}$$

7. По графику функции
- $y = f(x)$
- , изображенному на рисунке, найдите:

- 1) значение y при $x = -4$;
- 2) значения x , при которых $y = 2$;
- 3) наибольшее значение функции;
- 4) промежутки возрастания и убывания функции.



8. В феврале товар стоил 20000 рублей. В мае цену на товар подняли на 6%, а в августе снизили на 6%. Сколько стоил товар в августе?
9. Найдите наименьшее значение выражения

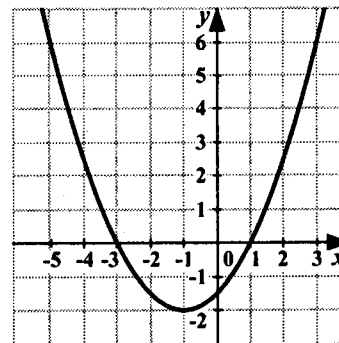
$$\sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{y^2 + 25}.$$

10. Решите неравенство
- $\frac{1}{x-8} < \frac{1}{x+7}$
- .

Экзаменационная работа 2

Вариант 1

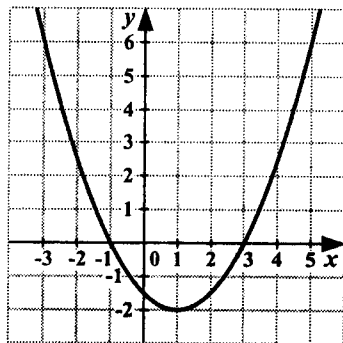
1. Вынесите за скобки общий множитель $x^{56}y^{54} - x^{55}y^{55}$.
2. Решите уравнение $\frac{x-4}{x+4} = 5$.
3. Сравните $\sqrt{308} - \sqrt{92}$ и $\sqrt{972} - \sqrt{46}$.
4. Решите систему уравнений $\begin{cases} 5x + y = -2, \\ 7x - y = -10. \end{cases}$
5. По графику квадратичной функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке, найдите:
 - 1) значения x , при которых значение y равно 6;
 - 2) наименьшее значение $f(x)$.



6. Решите неравенство $\frac{5}{3x-2} < \frac{4}{2-3x}$.
7. Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2 + 9x + 8 \leq 0, \\ -0,3x \geq 2,4. \end{cases}$
8. Отношение суммы третьего и восьмого членов геометрической прогрессии к сумме второго и седьмого ее членов равно 13. Найдите знаменатель прогрессии.
9. Постройте график функции $y = \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$. При каких значениях c прямая $y = c$ пересекает построенный график в единственной точке?
10. Решите систему уравнений $\begin{cases} (x-2y)^2 = 11(x-2y), \\ 2x + y = 50. \end{cases}$

Вариант 2

1. Вынесите за скобки общий множитель $x^{34}y^{32} - x^{33}y^{33}$.
2. Решите уравнение $\frac{x+3}{x-3} = 4$.
3. Сравните $\sqrt{668} - \sqrt{97}$ и $\sqrt{878} - \sqrt{44}$.
4. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x + y = 13, \\ 4x - y = 15. \end{cases}$
5. По графику квадратичной функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке, найдите:
 - 1) значения x , при которых значение y равно 6;
 - 2) наименьшее значение $f(x)$.



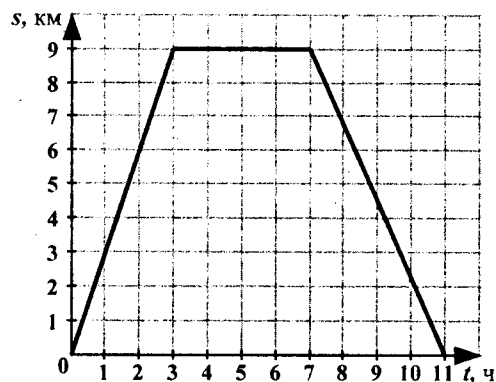
6. Решите неравенство $\frac{2}{4x-3} > \frac{3}{3-4x}$.
7. Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2 + 7x + 6 \leq 0, \\ -0,7x \geq 4,2. \end{cases}$
8. Отношение суммы шестого и одиннадцатого членов геометрической прогрессии к сумме пятого и десятого ее членов равно 7. Найдите знаменатель прогрессии.
9. Постройте график функции $y = -\frac{2x^2 + x^3}{x+2}$. При каких значениях c прямая $y = c$ пересекает построенный график в единственной точке?
10. Решите систему уравнений $\begin{cases} (3x - y)^2 = 9(3x - y), \\ x + 3y = 40. \end{cases}$

Экзаменационная работа 3

Вариант 1

1. Решите неравенство $5x - 7 \geq 7x - 5$.
2. Сравните $56,78 \cdot 10^6$ и $5,687 \cdot 10^7$.
3. Упростите $\frac{x-49}{\sqrt{x}-7}$.
4. Решите уравнение $\frac{y^2 - 25}{4y + 20} = 0$.
5. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4x - 3y = -4, \\ 4x - y = 3. \end{cases}$
6. Постройте график функции $y = -\frac{3}{x}$. Найдите координаты середины отрезка, соединяющего две точки этого графика с абсциссами 3 и -3 .
7. Беллетрист хочет набрать на компьютере рукопись объемом 480 страниц. Если он будет набирать на 8 страниц в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 2 дня раньше. Сколько страниц в день планирует набирать беллетрист?
8. Решите систему неравенств $\begin{cases} \frac{14}{16x^2 - 9} > 0, \\ 4x - 3 < 0. \end{cases}$
9. Решите неравенство $\frac{1}{2-x} < \frac{x^2 - 5}{x-2}$.
10. Рыбак отправился на озеро, где провел некоторое время, после чего вернулся домой. На рисунке изображен график его движения (по горизонтальной оси откладывается время t в часах; по вертикальной — расстояние s от дома в километрах). Используя график, ответьте на вопросы:
 - 1) Сколько времени рыбак провел на озере?

- 2) На каком расстоянии от дома находится озеро?
 3) Когда скорость рыбака была больше: на пути от дома к озеру или от озера к дому?



Вариант 2

- Решите неравенство $3x - 8 \geq 8x - 3$.
- Сравните $4,567 \cdot 10^9$ и $45,76 \cdot 10^8$.
- Упростите $\frac{x - 25}{\sqrt{x} - 5}$.
- Решите уравнение $\frac{y^2 - 9}{4y + 12} = 0$.
- Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + y = 3, \\ 3x + 4y = -2. \end{cases}$$
- Постройте график функции $y = -\frac{2}{x}$. Найдите координаты середины отрезка, соединяющего две точки этого графика с абсциссами 2 и -2.
- Прозаик хочет набрать на компьютере рукопись объемом 450 страниц. Если он будет набирать на 5 страниц в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 3 дня раньше. Сколько страниц в день планирует набирать прозаик?

8. Решите систему неравенств

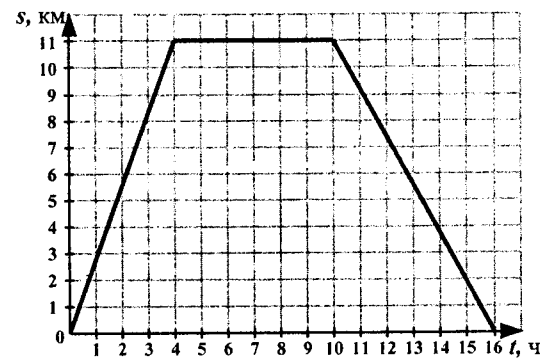
$$\begin{cases} \frac{19}{4x^2 - 25} > 0, \\ 2x - 5 < 0. \end{cases}$$

9. Решите неравенство

$$\frac{2}{3-x} < \frac{x^2 - 11}{x-3}.$$

10. Рыбак отправился на озеро, где провел некоторое время, после чего вернулся домой. На рисунке изображен график его движения (по горизонтальной оси откладывается время t в часах; по вертикальной — расстояние s от дома в километрах). Используя график, ответьте на вопросы:

- Сколько времени рыбак провел на озере?
- На каком расстоянии от дома находится озеро?
- Когда скорость рыбака была больше: на пути от дома к озеру или от озера к дому?



Экзаменационная работа 4

Вариант 1

1. Решите уравнение $\frac{3}{4}x = 3\frac{3}{4}$.
2. Решите неравенство $\frac{5}{3x+2} \leq 0$.
3. Между какими последовательными натуральными числами заключено число $\sqrt{168}$?
4. Сократите дробь

$$\frac{24x^{10} - 24y^{24}}{10y^{24} - 10x^{10}}$$

5. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^2 - 4x - 5.$$

6. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{15}{3-5x} > \frac{17}{3-5x}, \\ \frac{2+3x}{4} < 5. \end{cases}$$

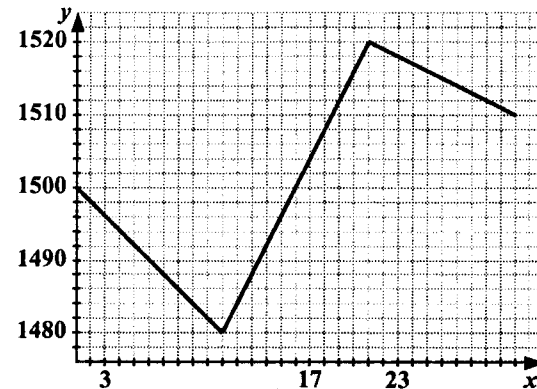
7. Смешали семь литров 16%-го раствора некоторого вещества с тремя литрами 6%-го раствора этого же вещества. Найдите концентрацию получившегося раствора.

8. Решите систему

$$\begin{cases} 3x^2 - y = 7, \\ 5y - 3x^2 = -23. \end{cases}$$

9. Найдите $\sqrt{b+30}$, если $\sqrt{b-30} = 2$.

10. На графике представлено изменение курса акций компании сотовой связи (по оси абсцисс откладываются числа августа, а по оси ординат — стоимость одной акции в рублях). Иван и Леонид приобрели акции компании 3 августа. Иван купил 50 акций и продал их 17 августа, а Леонид купил 30 акций и продал их 23 августа. Кто из них получил больший доход? На сколько рублей его доход выше, чем доход другого?



Вариант 2

1. Решите уравнение $\frac{2}{9}x = 4\frac{2}{9}$.
2. Решите неравенство $\frac{4}{2x+3} \geq 0$.
3. Между какими последовательными натуральными числами заключено число $\sqrt{170}$?

4. Сократите дробь

$$\frac{18x^{12} - 18y^{18}}{12y^{18} - 12x^{12}}$$

5. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^2 + 6x - 7.$$

6. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{12}{1-4x} > \frac{19}{1-4x}, \\ \frac{3+4x}{3} < 5. \end{cases}$$

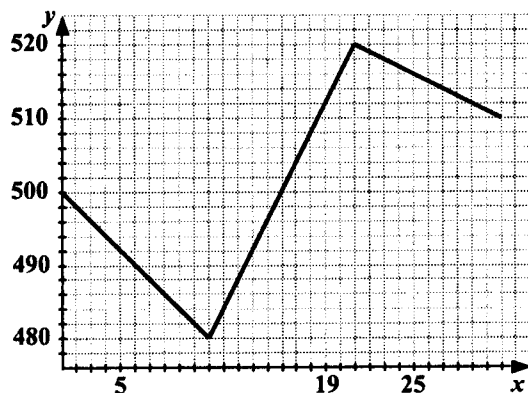
7. Смешали восемь литров 9%-го раствора некоторого вещества с двумя литрами 4%-го раствора этого же вещества. Найдите концентрацию получившегося раствора.

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5x^2 - 4y = 17, \\ 6y - 5x^2 = -23. \end{cases}$$

9. Найдите $\sqrt{b+28}$, если $\sqrt{b-28} = 5$.

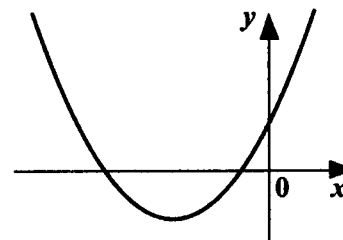
10. На графике представлено изменение курса акций компании телекоммуникационной связи (по оси абсцисс откладываются числа мая, а по оси ординат — стоимость одной акции в рублях). Борис и Андрей приобрели акции компании 5 мая. Борис купил 50 акций и продал их 19 мая, а Андрей купил 10 акций и продал их 25 мая. Кто из них получил больший доход? На сколько рублей его доход выше, чем доход другого?



Экзаменационная работа 5

Вариант 1

1. Найдите значение выражения $(162^2 - 161^2) : 323$.
2. Упростите $\frac{a\sqrt{17}}{17\sqrt{a}}$.
3. Баночка йогурта стоит 5 рублей 72 копейки. Какое наибольшее число таких баночек можно купить на 40 рублей?
4. Решите уравнение $\frac{4}{x} - \frac{11}{4x} = 15$.
5. Решите систему неравенств $\begin{cases} 4x + 9 \leq 9x + 4, \\ 1,7x < 51. \end{cases}$
6. Постройте график функции $y = x^2 - 2x - 3$. В скольких точках прямая $y = -4$ пересекает этот график?
7. Решите неравенство $\frac{4}{4x^2 - 9} > 0$.
8. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + 5y = (x - 2)^2 - 20, \\ 4x + y = -8. \end{cases}$
9. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ задана графиком.

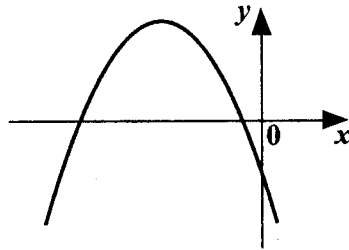


Определите знаки коэффициентов a , b и c .

10. Найдите разность четырнадцатого и одиннадцатого членов геометрической прогрессии, если их сумма равна 28, а произведение третьего и двадцать второго членов этой прогрессии равно 75.

Вариант 2

1. Найдите значение выражения $(133^2 - 132^2) : 265$.
2. Упростите $\frac{a\sqrt{11}}{11\sqrt{a}}$.
3. Баночка йогурта стоит 7 рублей 16 копеек. Какое наибольшее число таких баночек можно купить на 50 рублей?
4. Решите уравнение $\frac{3}{x} - \frac{19}{5x} = 16$.
5. Решите систему неравенств $\begin{cases} 5x + 8 \leq 8x + 5, \\ 2,3x < 46. \end{cases}$
6. Постройте график функции $y = x^2 + 4x + 3$. В скольких точках прямая $y = -1$ пересекает этот график?
7. Решите неравенство $\frac{9}{9x^2 - 4} < 0$.
8. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + 3y = (x + 1)^2 + 12, \\ 2x - 5y = -17. \end{cases}$
9. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ задана графиком.



Определите знаки коэффициентов a , b и c .

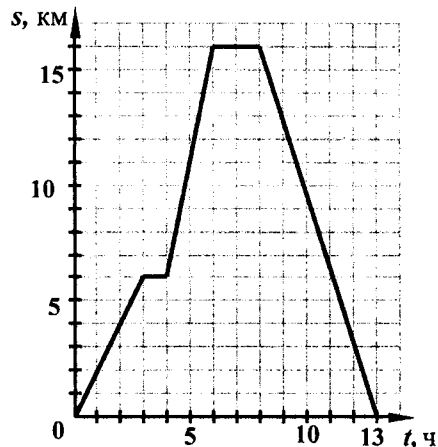
10. Найдите разность восьмого и шестого членов геометрической прогрессии, если их сумма равна 16, а произведение второго и двенадцатого членов этой прогрессии равно 28.

Экзаменационные работы по алгебре
для классов с углубленным изучением математики

Экзаменационная работа 1

Вариант 1

1. Сравните произведения $688 \cdot 690$ и $689 \cdot 687$, не вычисляя их значений.
2. Упростите $\frac{\sqrt{(x+3)(y+5)}}{\sqrt{-3-x}}$.
3. Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{x^2}{13x+14y} = 14, \\ 13x+14y = 14. \end{cases}$
4. Решите двойное неравенство $3x^2 - 4x + 3 \leq 2x^2 - 3x + 4 \leq 4x^2 - 5x + 5$.
5. Решите уравнение $\frac{x^2}{x-5} - \frac{x}{5-x} = \frac{30}{x-5}$.
6. Решите неравенство $(x^2 - 6x + 5)(x + 3)^2 \leq 0$.
7. Турист собрался в поход. В походе он сделал два привала и после второго привала вернулся на турбазу. На рисунке изображен график движения туриста (по горизонтальной оси откладывается время в часах; по вертикальной — расстояние от турбазы в километрах). Используя график, ответьте на вопросы:
 - 1) Сколько времени турист потратил на привалы?
 - 2) С какой скоростью (в км/ч) он шел от первого до второго привала?
 - 3) Какова средняя скорость туриста за все время движения (время на привалы не учитывать)?



8. Сын младше отца в 6 раз, а через год он станет младше отца в 5 раз. Через сколько лет сын будет младше отца в 3 раза?
9. Решите неравенство $(2x - 3)^6 < (3 - 2x)^3$.
10. Найдите все пары $(a; b)$ целых чисел a и b , для которых $(a + 3b)\sqrt{3} = (a + b + 2)\sqrt{7}$.

Вариант 2

1. Сравните произведения $685 \cdot 687$ и $686 \cdot 684$, не вычисляя их значений.
2. Упростите $\frac{\sqrt{(x+5)(y+4)}}{\sqrt{-5-x}}$.
3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^2}{11x+12y} = 12, \\ 11x+12y = 12. \end{cases}$$
4. Решите двойное неравенство

$$5x^2 - 6x - 1 \leq 4x^2 - 3x - 2 \leq 6x^2 - 7x + 2.$$

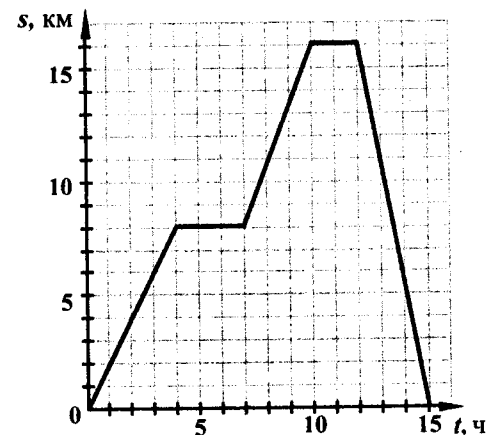
5. Решите уравнение

$$\frac{x^2}{x-2} - \frac{7x}{2-x} = \frac{18}{x-2}.$$

6. Решите неравенство

$$(x^2 - 5x + 4)(x + 2)^2 \leq 0.$$

7. Турист собрался в поход. В походе он сделал два привала и после второго привала вернулся на турбазу. На рисунке изображен график движения туриста (по горизонтальной оси откладывается время в часах; по вертикальной — расстояние от турбазы в километрах). Используя график, ответьте на вопросы:
 - 1) Сколько времени турист потратил на привалы?
 - 2) С какой скоростью (в км/ч) он шел от первого до второго привала?
 - 3) Какова средняя скорость туриста за все время движения (время на привалы не учитывать)?



8. Отец старше сына в 9 раз, а через год он станет старше сына в 7 раз. Через сколько лет отец будет старше сына в 5 раз?
9. Решите неравенство $(3x - 4)^6 < (4 - 3x)^3$.
10. Найдите все пары $(a; b)$ целых чисел a и b , для которых $(a + b + 4)\sqrt{5} = (3a - b)\sqrt{2}$.

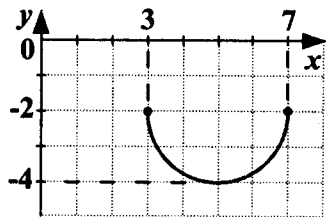
Экзаменационная работа 2

Вариант 1

- Разложите на множители $2m^2 + 5m + 3$.
- Решите уравнение $\frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 5x + 4} = 0$.
- Упростите $\sqrt{4\frac{5}{11}} - \sqrt{7\frac{4}{11}} + \sqrt{1\frac{5}{11}} - \sqrt{3\frac{3}{11}}$.
- Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-1)^2 = x^2 + y^2 + 1, \\ 6y + x = 25. \end{cases}$$
- Решите неравенство $\frac{(4x-3)^2}{7x^2+3} \geq \frac{x^2}{7x^2+3}$.
- Определите графически, сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} xy = -3, \\ y = -2\sqrt{x}. \end{cases}$
- Решите систему неравенств

$$\begin{cases} (x^2 - 4x + 3)^2 \leq 0, \\ x^3 + x^2 > 35. \end{cases}$$
- Найдите x , если известно, что числа $x-3$, $\sqrt{5x}$, $x+16$ являются последовательными членами геометрической прогрессии (в указанном порядке).
- График функции, изображенный на рисунке, является полуокружностью. Задайте функцию формулой.



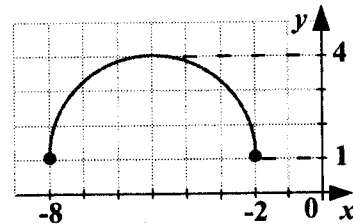
- Сравните $\frac{1}{372} + \frac{2}{373} + \frac{3}{374} + \frac{4}{375}$ и $\frac{1}{37}$.

Вариант 2

- Разложите на множители $4m^2 + 9m + 5$.
- Решите уравнение $\frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + x - 12} = 0$.
- Упростите $\sqrt{1\frac{17}{19}} - \sqrt{2\frac{11}{19}} + \sqrt{1\frac{6}{19}} - \sqrt{3\frac{7}{19}}$.
- Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-4)^2 = x^2 + y^2 + 4, \\ 7y + x = 23. \end{cases}$$
- Решите неравенство $\frac{x^2}{3x^2+7} \geq \frac{(3x-2)^2}{3x^2+7}$.
- Определите графически, сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} xy = 2, \\ y = 3\sqrt{x}. \end{cases}$
- Решите систему неравенств

$$\begin{cases} (x^2 - 3x - 4)^2 \leq 0, \\ x^3 + x^2 > 47. \end{cases}$$
- Найдите x , если известно, что числа $x-2$, $\sqrt{6x}$, $x+5$ являются последовательными членами геометрической прогрессии (в указанном порядке).
- График функции, изображенный на рисунке, является полуокружностью. Задайте функцию формулой.



- Сравните $\frac{1}{482} + \frac{2}{483} + \frac{3}{484} + \frac{4}{485}$ и $\frac{1}{48}$.

Экзаменационная работа 3

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$(x - 0,5)^2 = (x + 0,04)^2.$$

2. Сравните
- $(3 \cdot 10^{-2})^3$
- и 0,000027.

3. Упростите
- $x + \sqrt{(x - 11)^2}$
- , если
- $x < 11$
- .

4. Какие из функций
- $y = 2x^2$
- ,
- $y = -\frac{2}{x}$
- ,
- $y = 2 - x$
- убывают при
- $x > 0$
- ?

5. В арифметической прогрессии седьмой член равен
- -40
- , а семнадцатый равен
- -50
- . Найдите разность этой арифметической прогрессии.

6. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{(x+4)^2}{5x^2+4} > \frac{(x+5)^2}{5x^2+4}, \\ 0,9x > -8,1. \end{cases}$$

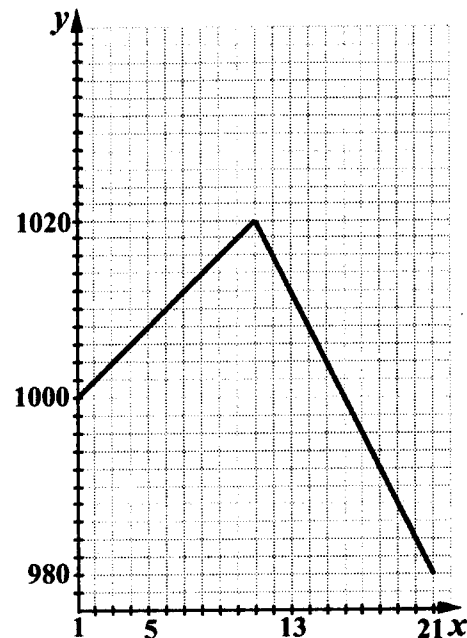
7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{y} - 18\frac{y}{x} = 3, \\ x + 3y = 9. \end{cases}$$

8. Решите неравенство

$$(3x^2 - 4x + 1)^4 \geq (2x^2 - 3x + 3)^4.$$

9. 1 июня брокер приобрел акции алюминиевого комбината. На графике представлено изменение курса этих акций (по оси абсцисс откладываются числа июня, считая от дня покупки, по оси ординат — стоимость одной акции в рублях). 5 июня брокер продал 60% этих акций, а 13 июня — продал остальные. Сколько процентов прибыли принесла брокеру эта биржевая операция?



10. Банк предоставляет ипотечный кредит (кредит на покупку квартиры под залог квартиры) сроком на 10 лет под 19% годовых. Это означает, что ежегодно заемщик возвращает 19% от непогашенной суммы кредита и
- $\frac{1}{10}$
- суммы кредита. Так, в первый год заемщик выплачивает
- $\frac{1}{10}$
- суммы кредита и 19% от всей суммы кредита, во второй год заемщик выплачивает
- $\frac{1}{10}$
- суммы кредита и 19% от
- $\frac{9}{10}$
- суммы кредита и т.д. Во сколько раз сумма, которую должен выплатить банку заемщик, больше суммы займа, если согласно договору досрочное погашение кредита невозможно?

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$(x + 0,06)^2 = (x - 0,2)^2.$$

2. Сравните
- $(11 \cdot 10^{-3})^2$
- и 0,000121.

3. Упростите
- $x - \sqrt{(12 - x)^2}$
- , если
- $x > 12$
- .

4. Какие из функций
- $y = -3x^2$
- ,
- $y = \frac{3}{x}$
- ,
- $y = x + 3$
- убывают при
- $x < 0$
- ?

5. В арифметической прогрессии восьмой член равен
- -22
- , а двадцатый равен
- -58
- . Найдите разность этой арифметической прогрессии.

6. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{(x+6)^2}{7x^2+6} > \frac{(x+7)^2}{7x^2+6}, \\ 0,13x > -1,69. \end{cases}$$

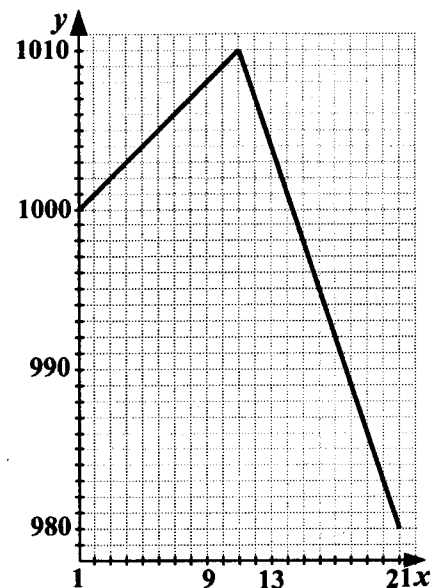
7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{y} - 16\frac{y}{x} = 6, \\ x + 2y = 10. \end{cases}$$

8. Решите неравенство

$$(3x^2 - 7x + 2)^4 \geq (2x^2 - 5x + 10)^4.$$

9. 1 июля брокер приобрел акции деревообрабатывающего комбината. На графике представлено изменение курса этих акций (по оси абсцисс откладываются числа июля, считая от дня покупки, по оси ординат — стоимость одной акции в рублях). 9 июля брокер продал 40% этих акций, а 13 июля — продал остальные. Сколько процентов прибыли принесла брокеру эта биржевая операция?



10. Банк предоставляет ипотечный кредит (кредит на покупку квартиры под залог квартиры) сроком на 20 лет под 12% годовых. Это означает, что ежегодно заемщик возвращает 12% от непогашенной суммы кредита и
- $\frac{1}{20}$
- суммы кредита. Так, в первый год заемщик выплачивает
- $\frac{1}{20}$
- суммы кредита и 12% от всей суммы кредита, во второй год заемщик выплачивает
- $\frac{1}{20}$
- суммы кредита и 12% от
- $\frac{19}{20}$
- суммы кредита и т.д. Во сколько раз сумма, которую должен выплатить банку заемщик, больше суммы займа, если согласно договору досрочное погашение кредита невозможно?

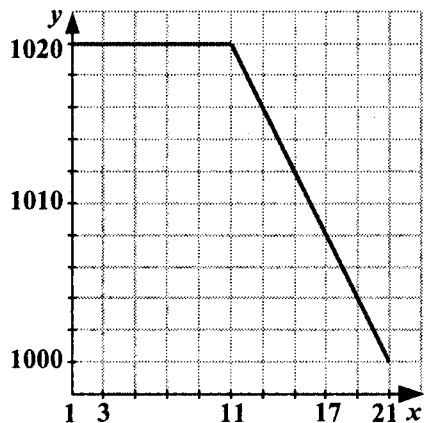
Экзаменационная работа 4

Вариант 1

1. Упростите $\frac{\sqrt{2,8} \cdot \sqrt{4,2}}{\sqrt{0,24}}$.
2. Сократите дробь $\frac{27x^3 + 8y^3}{9x^2 - 6xy + 4y^2}$.
3. Решите уравнение $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$.
4. Решите неравенство

$$\frac{6}{x(x-3)} < \frac{5}{x(3-x)}$$

5. 1 февраля брокер купил 50 акций некоторой компании. На графике представлено изменение курса этих акций (по оси абсцисс откладываются числа февраля, считая от дня покупки, по оси ординат — стоимость одной акции в рублях). 3 февраля брокер продал 20 акций, а оставшиеся акции — он продал 17 февраля. Найдите убыток, который принесла брокеру эта сделка.



6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x+12)(y+13) = 0, \\ \frac{13x+12y}{y+13} = 24. \end{cases}$$

7. Из пункта A в пункт B , отстоящий от пункта A на 27 км, отправился пешеход со скоростью 5 км/ч. Через 36 минут после этого навстречу ему из B вышел другой пешеход со скоростью 3 км/ч. Найдите расстояние от пункта B до места их встречи.
8. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} (x-5)^2 \geq 0, \\ 16-x^2 \geq 0, \\ 5x-x^2 \geq 0. \end{cases}$$
9. Найдите натуральное число a , если из трех следующих утверждений два верны, а одно — нет:
 - 1) остаток от деления числа a на число 13 равен 9;
 - 2) остаток от деления числа a на число 13 равен 10;
 - 3) a — одно из чисел 61 или 63.
10. Найдите наименьшее значение функции

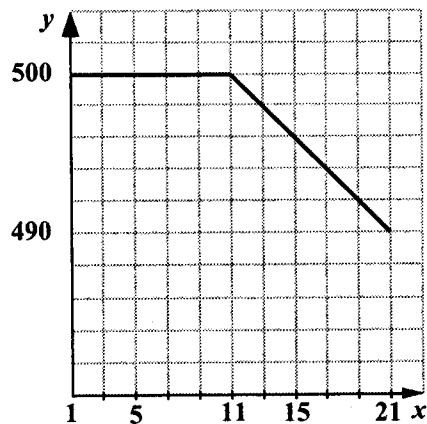
$$y = \sqrt{x^2 - 6x + 8} + \sqrt{x^2 + 3x - 15}.$$

Вариант 2

1. Упростите $\frac{\sqrt{1,8} \cdot \sqrt{6,3}}{\sqrt{0,14}}$.
2. Сократите дробь $\frac{8x^3 + 125y^3}{4x^2 - 10xy + 25y^2}$.
3. Решите уравнение $9x^4 + 8x^2 - 1 = 0$.
4. Решите неравенство

$$\frac{5}{x(x-2)} > \frac{4}{x(2-x)}$$

5. 1 марта брокер купил 90 акций некоторой компании. На графике представлено изменение курса этих акций (по оси абсцисс откладываются числа марта, считая от дня покупки, по оси ординат — стоимость одной акции в рублях). 5 марта брокер продал 10 акций, а оставшиеся акции — он продал 15 марта. Найдите убыток, который принесла брокеру эта сделка.



6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x+11)(y+12) = 0, \\ \frac{12x+11y}{y+12} = 22. \end{cases}$$

7. Из пункта A в пункт B , отстоящий от пункта A на 11 км, отправился пешеход со скоростью 4 км/ч. Через 15 минут после этого навстречу ему из B вышел другой пешеход со скоростью 6 км/ч. Найдите расстояние от пункта B до места их встречи.

8. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{(x-6)^2}{25-x^2} \geq 0, \\ 6x-x^2 \geq 0. \end{cases}$$

9. Найдите натуральное число a , если из трех следующих утверждений два верны, а одно — нет:

- 1) остаток от деления числа a на число 12 равен 8;
- 2) остаток от деления числа a на число 12 равен 9;
- 3) a — одно из чисел 56 или 58.

10. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{x^2 - 4x + 5} + \sqrt{2x^2 - 8x + 17}.$$

Экзаменационная работа 5

Вариант 1

1. Решите уравнение $21x^2 - 4x - 1 = 0$.
2. Решите неравенство $(3x - 7)^2 \geq (7x - 3)^2$.
3. Найдите значение выражения $16a^2 - 24ab + 9b^2 - 4a + 3b$, если $a = \frac{3}{4}b$.
4. Не вычисляя произведение, проверьте равенство $0,9477 \cdot 0,774 = 0,7335199$.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x+2y)^2 - (3x+y)^2 = 8, \\ y - 2x = 4. \end{cases}$$

6. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{8}{\sqrt{x^2 + 4}}$.

7. Решите систему неравенств $\begin{cases} \frac{1}{x-4} < \frac{1}{x+8}, \\ \frac{1}{x+6} > \frac{1}{x-5}. \end{cases}$

8. Имеются два сосуда, содержащие 30 кг и 35 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 46% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 47% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в каждом растворе?

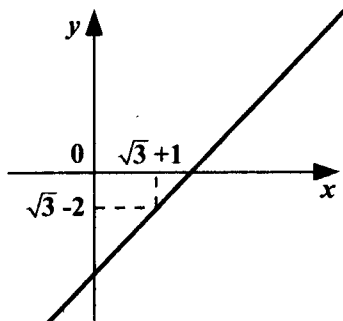
9. Известно, что из следующих трех утверждений два истинны, а одно — ложно:

- 1) наименьшее значение выражения A равно 17;
- 2) наибольшее значение выражения A равно 9;
- 3) A — одно из выражений

$$23 - \frac{16}{(x-12)^2 + 4} \quad \text{или} \quad 5 + \frac{16}{(x-12)^2 + 4}.$$

Какое утверждение является ложным?

10. Функция $y = ax + b$ задана графиком. Найдите $y(3)$, если известно, что a и b – целые числа.



Вариант 2

- Решите уравнение $24x^2 - 2x - 1 = 0$.
- Решите неравенство $(5x - 4)^2 \geq (4x - 5)^2$.
- Найдите значение выражения $9a^2 + 30ab + 25b^2 + 3a + 5b$, если $a = -\frac{5}{3}b$.
- Не вычисляя произведение, проверьте равенство $0,8368 \cdot 0,863 = 0,7221585$.
- Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (2x - y)^2 - (x + 3y)^2 = -9, \\ 3x + 2y = -1. \end{cases}$$

6. Найдите наименьшее значение функции $y = -\frac{6}{\sqrt{x^2 + 9}}$.

7. Решите систему неравенств $\begin{cases} \frac{1}{x-6} < \frac{1}{x+9}, \\ \frac{1}{x+7} > \frac{1}{x-7}. \end{cases}$

8. Имеются два сосуда, содержащие 10 кг и 12 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 36% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 39% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в каждом растворе?

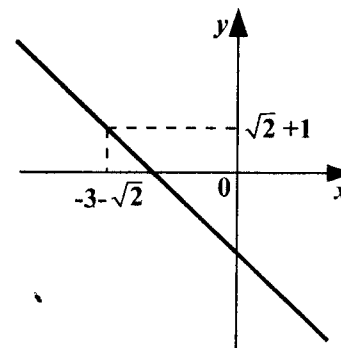
9. Известно, что из следующих трех утверждений два истинны, а одно – ложно:

- наименьшее значение выражения A равно 6;
- наибольшее значение выражения A равно 0;
- A – одно из выражений

$$11 - \frac{9}{(x-2)^2 + 3} \quad \text{или} \quad -3 + \frac{9}{(x-2)^2 + 3}.$$

Какое утверждение является ложным?

10. Функция $y = ax + b$ задана графиком. Найдите $y(3)$, если известно, что a и b – целые числа.



СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Таблица квадратов двузначных натуральных чисел

		Единицы									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Д е с я т к и	1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
	2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
	3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
	4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
	5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
	6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
	7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
	8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
	9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ГЛАВА 1. ЧИСЛОВЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ	9
§1. Действия с целыми числами	9
§2. Действия с дробями	13
§3. Действия с корнями	18
ГЛАВА 2. БУКВЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ	23
§1. Действия с многочленами	23
§2. Действия с алгебраическими дробями	28
§3. Действия с иррациональными выражениями	33
ГЛАВА 3. УРАВНЕНИЯ	38
§1. Целые алгебраические уравнения	38
§2. Дробно-рациональные уравнения	41
§3. Иррациональные уравнения	46
ГЛАВА 4. НЕРАВЕНСТВА	50
§1. Целые алгебраические неравенства	50
§2. Дробно-рациональные неравенства	53
§3. Иррациональные неравенства	57
ГЛАВА 5. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ	61
§1. Системы целых алгебраических уравнений	61
§2. Системы рациональных уравнений	66
§3. Системы иррациональных уравнений	71
ГЛАВА 6. СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ	76
§1. Системы целых алгебраических неравенств	76
§2. Системы дробно-рациональных неравенств	80
§3. Системы иррациональных неравенств	86
ГЛАВА 7. ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ	93
§1. Чтение графиков	93
§2. Построение графиков	123
§3. Исследование функций	130
ГЛАВА 8. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ	137
§1. Задачи на движение и работу	137
§2. Задачи на проценты, части, доли	149
§3. Задачи на свойства целых чисел	161
ГЛАВА 9. ПРОГРЕССИИ	171

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ	178
§1. Отрезки, углы, треугольники	178
§2. Многоугольники	190
§3. Окружности	200
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКЕ	213
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. ПРИМЕРНЫЕ ВАРИАНТЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ РАБОТ	226
Экзаменационные работы по алгебре для общеобразовательных классов	226
Экзаменационные работы по алгебре для классов с углубленным изучением математики	239
СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ	253