Учебники серии «МГУ — школе» позволят учащимся получить хорошее базовое образование и помогут выработать правильный взгляд на основы научного знания. Это важно. Большинство школьных предметов — фундамент Здания Науки. Лучше сразу понять, как он устроен, чтобы потом, при изучении верхних этажей, не возвращаться к исследованию фундамента.

Учебники серии «МГУ — школе» пишут опытные школьные учителя вместе с профессорами и преподавателями Московского университета.

Надеюсь, что учеба по этим книгам принесет школьникам как пользу, так и удовольствие.

Ректор
Московского
университета
академик

В. Садовничий

Алгебра

Учебник для 8 класса общеобразовательных учреждений

Рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации

3-е издание

«Просвещение»
ОАО «Московские учебники»
2006

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72
А45

Авторы: С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин

Рецензенты: кафедра геометрии и методики преподавания математики Владимирского педагогического университета, кандидат педагогических наук, профессор *В. Д. Степанов*, доцент *В. П. Покровский*, методист кабинета математики Владимирского областного института усовершенствования учителей *В. Н. Фуфыкин*

Условные обозначения в учебнике:

^{0} — наиболее легкие задания, предназначенные для устной работы;
* — задания повышенной трудности.

Алгебра: учеб. для 8 кл. общеобразоват. учреждений/
А45 [С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин].— 3-е изд.— М.: Просвещение, АО «Московские учебники», 2006.— 287 с.: ил.— **ISBN 5-7853-0551-8**

Учебник представляет собой новый тип учебника, который содержит материал как для общеобразовательных классов, так и для классов с углубленным изучением математики. Учащиеся могут переходить с одной программы обучения на другую, не меняя книги.

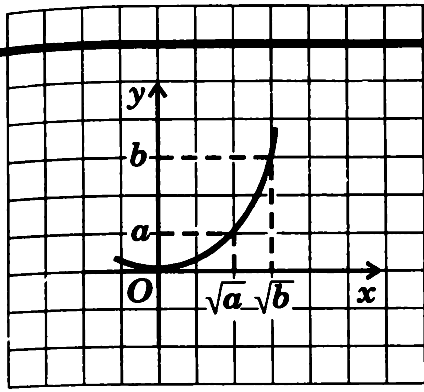
Главы заканчиваются дополнительным материалом, в котором приводятся «Исторические сведения» и «Задания для повторения», содержащие много вычислительных упражнений и текстовых задач.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72

ISBN 5-7853-0551-8

ГЛАВА I

ПРОСТЕЙШИЕ ФУНКЦИИ КВАДРАТНЫЕ КОРНИ



§ 1. ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

1.1. Числовые неравенства

Действительные числа подчинены следующим правилам:

Правило 1. **Для любых действительных чисел a и b имеет место только одно из соотношений**

$$a=b,\ a>b,\ a<b.$$

Например, для чисел 6 и 10 верно неравенство $6<10$, но не верны равенство $6=10$ и неравенство $6>10$.

Заметим, что если $a>b$, то $b<a$.

Неравенства одного знака называют *одноименными*, например неравенства $-2<5$ и $3<11$ одноименные, $-5>-10$ и $10>-3$ одноименные.

Правило 2. **Для любых действительных чисел a и b, таких, что $a<b$, найдется такое действительное число c, что $a<c$ и $c<b$, или, что то же самое, $a<c<b$.**

Например, для чисел 1,2 и 1,3 существует число 1,22, такое, что $1{,}2<1{,}22<1{,}3$.

Правило 3. **Для любых действительных чисел a, b и c из неравенств $a<b$ и $b<c$ следует неравенство $a<c$ (свойство транзитивности неравенств).**

Например, из неравенств $\frac{8}{9}<1$ и $1<\frac{4}{3}$ следует, что $\frac{8}{9}<\frac{4}{3}$.

Правило 4. **Для любых действительных чисел a, b и c из неравенства $a<b$ следует неравенство $a+c<b+c$.**

Это означает, что знак неравенства не изменится, если к правой и левой частям неравенства прибавить одно и то же число.

Например, прибавим к правой и левой частям верного неравенства $6<11$ по -4, получим верное неравенство

$$6-4<11-4, \text{ или } 2<7.$$

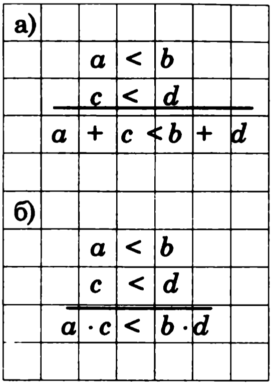


Рис. 1

Правило 5. **Для любых действительных чисел a и b и любого положительного числа c из неравенства $a<b$ следует неравенство $ac<bc$.**

Это означает, что знак неравенства не изменится, если правую и левую части неравенства умножить на одно и то же положительное число.

Например, умножим правую и левую части верного неравенства $-6<2$ на 3, получим верное неравенство $-6\cdot3<2\cdot3$, или $-18<6$.

Из перечисленных выше пяти правил вытекают следующие ***свойства неравенств:***

Свойство 1. **Если числа a, b, c и d таковы, что $a<b$ и $c<d$, то $a+c<b+d$.**

Это означает, что верные одноименные неравенства можно почленно складывать (рис. 1, *а*).

Действительно, из условия $a<b$ на основании правила 4 следует, что $a+c<b+c$, а из условия $c<d$ на основании того же правила 4 следует, что $b+c<b+d$. Теперь, применяя правило 3, получаем $a+c<b+d$.

Свойство 2. **Если положительные числа a, b, c и d таковы, что $a<b$ и $c<d$, то $ac<bd$.**

Это означает, что верные одноименные неравенства, правые и левые части которых положительны, можно почленно перемножать (рис. 1, *б*).

Действительно, для положительных чисел a, b, c и d на основании правила 5 из условия $a<b$ получаем $ac<bc$, а из условия $c<d$ получаем $bc<bd$. Теперь на основании правила 3 получаем $ac<bd$.

Свойство 3. **Если числа a и b таковы, что $a<b$, то $-a>-b$.**

В самом деле, прибавив к левой и правой частям неравенства $a<b$ число $(-b-a)$, на основании правила 4 получим

$$a+(-b-a)<b+(-b-a),$$

откуда следует, что $-b<-a$, или $-a>-b$.

Свойство 4. **Если c — отрицательное число и числа a и b таковы, что $a<b$, то $ac>bc$.**

Это означает, что знак неравенства изменится на противоположный, если обе части неравенства умножить на одно и то же отрицательное число.

Действительно, из неравенства $a<b$ следует, что $-a>-b$. Умножив это неравенство на положительное число $-c$, получим

$$(-a)\cdot(-c)>(-b)\cdot(-c),$$

откуда $ac>bc$.

Свойство 5. **Если положительные числа a и b таковы, что $a<b$, то $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.**

В самом деле, умножив неравенство $a<b$ на положительное число $\frac{1}{ab}$, получим на основании правила 5 после сокращений нужное неравенство

$$\frac{1}{b}<\frac{1}{a}, \text{ или } \frac{1}{a}>\frac{1}{b}.$$

Свойство 6. **Если положительные числа a и b таковы, что $a<b$, то $a^2<b^2$.**

Это свойство следует из свойства 2 при условии $c=a$ и $d=b$.

Выше употреблялись знаки равенства ($=$) и строгого неравенства ($<$ и $>$). Иногда возникает необходимость в нестрогих неравенствах.

Пример. В эту зиму температура в Москве не опускалась ниже -30 °C. Если температуру обозначить буквой t, то в любой день зимы либо $t>-30$ °C, либо $t=-30$ °C, что записывают так: $t\geqslant -30$ °C.

Приведем определения нестрогих неравенств $a\leqslant b$ и $a\geqslant b$.

Числовое неравенство $a\leqslant b$ выражает, что либо $a<b$, либо $a=b$. Неверно оно лишь в случае $a>b$.

Запись $a\leqslant b$ читают или «a не больше b», или «a меньше или равно b».

Числовое неравенство $a\geqslant b$ выражает, что либо $a>b$, либо $a=b$.

Запись $a\geqslant b$ читают «a не меньше b» или «a больше или равно b».

Например, неравенства $5\leqslant 6$ и $4\geqslant 2^2$ оба верные, а неравенства $9\leqslant 7$ и $3\geqslant 4$ оба неверные.

Для нестрогих неравенств справедливы приведенные выше правила 3—5 и свойства 1—6, если в них знак строгого неравенства заменить на знак нестрогого неравенства. Сформулируем одно из свойств.

Свойство 6.* **Если положительные числа a и b таковы, что $a\leqslant b$, то $a^2\leqslant b^2$.**

Мы уже отмечали, что если $a<b$ и $b<c$, то пишут $a<b<c$.

Подобным образом, если $a\leqslant b$ и $b<c$, то пишут $a\leqslant b<c$; если $a<b$ и $b\leqslant c$, то пишут $a<b\leqslant c$; если $a\leqslant b$ и $b\leqslant c$, то пишут $a\leqslant b\leqslant c$.

Неравенства $a<b<c$, $a\leqslant b<c$, $a<b\leqslant c$, $a\leqslant b\leqslant c$ называют ***двойными неравенствами.***

1°. Какие неравенства можно:
а) складывать; б) перемножать?

2°. В каком случае неравенство $a \geqslant b$:
а) верно; б) неверно?

3. Сравните:
а) 5 и 9; б) -5 и -9; в) $2{,}5 \cdot 4$ и 10;
г) 1,2 и 1,(2); д) $-6{,}7$ и 1; е) $-5{,}(4)$ и $-5{,}4$.

4. Укажите число, большее одного из данных чисел и меньшее другого. Ответ запишите в виде двойного неравенства:
а) 3 и 5; б) -25 и -29;
в) 2,5 и 2,6; г) 2,4 и 2,(4);
д) $-3{,}71$ и $-3{,}72$; е) 0,(5) и 0,(6).

5. Сделайте вывод на основании двух верных неравенств. *Например,* $3<15$ и $15<20$, *значит,* $3<20$.
а) $-5<0$ и $0<2$;
б) $-2<0$ и $0<2$;
в) $2>1$ и $1>0$;
г) $2{,}(1)>2$ и $2>1{,}(6)$;
д) $-3{,}(7)>-4$ и $-4>-7$;
е) $0{,}(5)<0{,}(6)$ и $0{,}(6)<0{,}(67)$;
ж) $\frac{5}{6}<1$ и $1<\frac{9}{8}$;
з) $\frac{7}{16}<\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}<\frac{8}{15}$.

6. Из данного верного неравенства получите новое верное неравенство, прибавив к обеим частям неравенства одно и то же число:
а) $15<20$; б) $5>4$; в) $2{,}5<3$;
г) $1{,}1<1{,}2$; д) $1{,}3\geqslant 1{,}2$; е) $5\leqslant 6$.

7. Из данного верного неравенства получите новое верное неравенство, умножив обе части неравенства на одно и то же положительное число:
а) $15<20$; б) $5>4$; в) $-2{,}5<3$;
г) $1{,}1<1{,}2$; д) $1{,}3\geqslant 1{,}2$; е) $-5\leqslant 6$.

8. Сложите верные числовые неравенства:
а) $14>11$ и $10>9$; б) $-2>-3$ и $3>2$;
в) $-6<-5$ и $2<3$; г) $-8\leqslant 0$ и $8\leqslant 9$.

9. Перемножьте верные числовые неравенства:
а) $14>10$ и $2>1$; б) $5>3$ и $6>5$;
в) $6<7$ и $2<3$; г) $8<9$ и $1<2$.

10. Из данного верного неравенства получите верное неравенство, в котором каждое число заменено на противоположное. *Например, так как* $19>13$, *то* $-19<-13$.
а) $3>0$; б) $5>-1$; в) $-9<-1$;
г) $-5\leqslant -1$; д) $9\geqslant -2$; е) $0\leqslant 3$.

11. Умножьте обе части верного неравенства на одно и то же отрицательное число:

а) $1<2$; б) $5>4{,}5$; в) $6{,}5\leqslant 6{,}9$;
г) $1{,}1<1{,}2$; д) $1{,}3\geqslant 1{,}2$; е) $5\leqslant 6$.

Верно ли полученное неравенство?

12. Запишите неравенство, которое получится, если числа в левой и правой частях неравенства заменить на обратные. *Например, так как* $5<6$, *то* $\frac{1}{5}>\frac{1}{6}$.

а) Так как $6>3$, то ...; б) так как $7\leqslant 10$, то ...;
в) так как $2<4$, то ...; г) так как $11<12$, то ...;
д) так как $13\geqslant 12$, то ...; е) так как $15\leqslant 26$, то ... .

Верно ли полученное неравенство?

13. Сравните:

а) 2^2 и 9^2; б) 5^2 и 6^2;
в) 4^2 и 10^2; г) $1{,}3^2$ и $1{,}5^2$;
д) $7{,}28^2$ и $8{,}37^2$; е) $5{,}4^2$ и $4{,}5^2$;
ж) $(-2)^2$ и $(-3)^2$; з) 4^2 и $(-4)^2$;
и) $(-4)^2$ и 1^2; к) $(-1)^2$ и $(-1{,}4)^2$;
л) $(-4{,}9)^2$ и $(-7)^2$; м) 4^2 и $(-5)^2$.

14*. Докажите, что:

а) если $a>b$ и $c>d$, то $a-d>b-c$ (рис. 2, *а*);
б) если $a<b$ и $c<d$, то $a-d<b-c$.

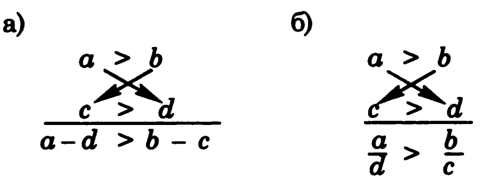


Рис. 2

15*. Докажите для положительных чисел a, b, c и d, что:

а) если $a>b$ и $c>d$, то $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$ (рис. 2, *б*);

б) если $a<b$ и $c<d$, то $\frac{a}{d}<\frac{b}{c}$.

16. Докажите, что если $a<b<0$, то $a^2>b^2$.

17. Верно ли неравенство:

а) $6{,}7272\leqslant 6{,}(72)<6{,}7273$;
б) $-0{,}3131<-0{,}(3)\leqslant -0{,}3132$?

18*. Солдат построили не по росту, но с четким разделением на ряды и колонки. В каждом ряду выбрали самого высокого, а из всех высоких — самого низкого. В каждой колонке выбрали самого низкого, а из всех низких — самого высокого. Кто же выше ростом: самый низкий из высоких или самый высокий из низких?

Указание. Рассмотрите случаи, когда два выбранных солдата стоят: 1) в одном ряду; 2) в одной колонке; 3) в разных рядах и колонках.

19. Сравните, запишите результат в виде неравенства и укажите на координатной оси числа:

а) -5 и $0{,}31$; б) $15{,}75$ и $5{,}176$;

в) $-\pi$ и π^2; г) $-5\frac{1}{3}$ и $4{,}01$.

20. Укажите хотя бы три числа, находящиеся на координатной оси между числами:

а) $3{,}11$ и $3{,}12$; б) $2{,}082$ и $2{,}081$;

в) $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{9}$; г) $3{,}5$ и $3\frac{4}{9}$.

21. а) Сколько чисел находится между двумя неравными числами на координатной оси?

б) Каждой ли точке координатной оси поставлено в соответствие число?

в) Каждому ли числу поставлена в соответствие точка координатной оси?

1.2. Множества чисел

Пусть даны координатная ось x и два действительных числа a и b, удовлетворяющие неравенству $a<b$. Числа a и b можно рассматривать как координаты двух различных точек оси x, которые мы условились также называть точками a и b (рис. 3).

Множество точек оси x, состоящее из точек a и b и всех точек, находящихся между ними (см. рис. 3), называют отрезком от a до b и обозначают $[a; b]$.

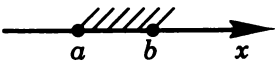


Рис. 3

Таким образом, **отрезок $[a; b]$** — *это множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих двойному неравенству*

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

Точки a и b называют концами отрезка $[a; b]$. Концы отрезка $[a; b]$ принадлежат этому отрезку.

Если из отрезка $[a; b]$ исключить оба его конца, то получим множество точек, которое обозначают $(a; b)$ и называют интервалом от a до b.

Таким образом, **интервал $(a; b)$** — *это множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих двойному неравенству*

$$a < x < b.$$

Если из отрезка $[a; b]$ исключить точку b, то получим множество точек, которое обозначают $[a; b)$ и называют полуинтервалом от a до b, включая a.

Таким образом, **полуинтервал $[a; b)$** — *это множество всех действительных чисел, удовлетворяющих двойному неравенству*

$$a \leqslant x < b,$$

а **полуинтервал $(a; b]$** *есть множество всех действительных чисел, удовлетворяющих двойному неравенству*

$$a < x \leqslant b.$$

Пример 1. Отрезок $[-1; 3]$ — это множество всех действительных чисел, удовлетворяющих двойному неравенству $-1 \leqslant x \leqslant 3$ (рис. 4, *а*).

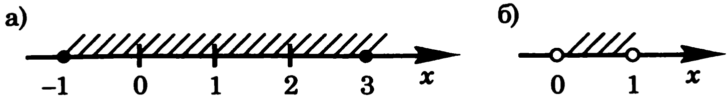


Рис. 4

Пример 2. Интервал $(0; 1)$ — это множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих двойному неравенству $0 < x < 1$ (рис. 4, *б*).

Замечание. Концы промежутков, входящие в рассматриваемое множество, отмечают черными точками, а не входящие — кружками.

Пример 3. Полуинтервал $[1; 2)$ — это множество всех действительных чисел, удовлетворяющих двойному неравенству $1 \leqslant x < 2$ (рис. 5, *а*).

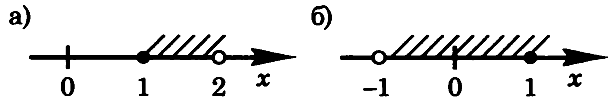


Рис. 5

Пример 4. Полуинтервал $(-1; 1]$ — это множество всех действительных чисел, удовлетворяющих двойному неравенству $-1 < x \leqslant 1$ (рис. 5, *б*).

Если точка x движется по координатной оси x в положительном направлении и при этом ее координата может принимать сколь угодно большие значения, то говорят, что эта *точка стремится к плюс бесконечности*, и обозначают $x \to +\infty$.

Аналогично если точка x движется по координатной оси в отрицательном направлении и при этом ее координата x такова, что число $|x|$ может быть сколь угодно большим, то говорят, что эта *точка стремится к минус бесконечности*, и обозначают $x \to -\infty$.

Выше считалось, что a и b — числа (или точки оси x), но термин «интервал» понимают также в более широком смысле, заменяя a на $-\infty$ или b на $+\infty$.

Интервал $(a; +\infty)$, *где* a *— данное число,— это множество всех действительных чисел* x, *удовлетворяющих неравенству* $x>a$, *или множество всех точек оси* x, *имеющих координаты* $x>a$.

Интервал $(-\infty; a)$, *где* a *— данное число,— это множество всех действительных чисел* x, *удовлетворяющих неравенству* $x<a$, *или множество всех точек оси* x, *имеющих координаты* $x<a$.

Наконец, интервал $(-\infty; +\infty)$ *— это множество всех действительных чисел или множество всех точек оси* x.

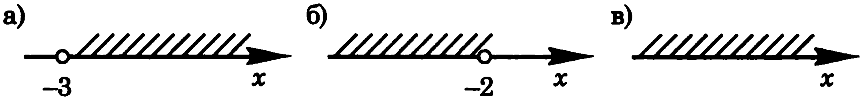


Рис. 6

Например, на рисунке 6, *а* показан интервал $(-3; +\infty)$, на рисунке 6, *б* — интервал $(-\infty; -2)$, на рисунке 6, *в* — интервал $(-\infty; +\infty)$.

Таким образом, интервал $(a; b)$ может быть конечным, если a и b — данные числа (или точки оси x), но может быть и бесконечным, если a или b соответственно $-\infty$ или $+\infty$.

Отрезок $[a; b]$ всегда конечный. Отрезок определяется данными числами a и b (или точками оси x).

Полуинтервалы $[a; b)$ и $(a; b]$ также могут быть бесконечными.

Полуинтервал $[a; +\infty)$ *— это множество всех действительных чисел* x, *удовлетворяющих неравенству* $x\geqslant a$, *или множество всех точек оси* x, *имеющих координаты* $x\geqslant a$.

Полуинтервал $(-\infty; b]$ *— это множество всех действительных чисел* x, *удовлетворяющих неравенству* $x\leqslant b$, *или множество всех точек оси* x, *имеющих координаты* $x\leqslant b$.

Например, на рисунке 7, *а* показан полуинтервал $[5; +\infty)$, на рисунке 7, *б* — полуинтервал $(-\infty; -3]$.

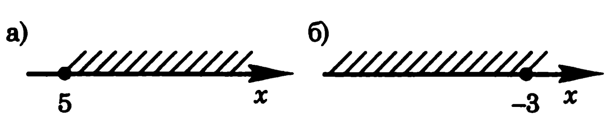


Рис. 7

Иногда для числовых отрезков, интервалов, полуинтервалов используют общее название — **числовые промежутки**.

Кроме отрезков, интервалов и полуинтервалов, рассматривают и другие множества чисел, их часто обозначают буквами A, B, C, ... Некоторые множества имеют специальные обозначения. Например, $\boldsymbol{N}$ — множество натуральных чисел, $\boldsymbol{Z}$ — множество целых чисел, $\boldsymbol{Q}$ — множество рациональных чисел, $\boldsymbol{R}$ — множество действительных чисел, $\boldsymbol{R}_+$ — множество действительных неотрицательных чисел.

Тот факт, что число принадлежит или не принадлежит множеству чисел, записывают с помощью специальных знаков: $\in$ (принадлежит) и $\notin$ (не принадлежит).

Например, $-5 \in \boldsymbol{Z}$ (число -5 принадлежит множеству целых чисел), $-5 \notin \boldsymbol{N}$ (число -5 не принадлежит множеству натуральных чисел).

22°. а) Какое множество чисел называют отрезком, интервалом, полуинтервалом?

б) Что означает запись $x \to +\infty$, $x \to -\infty$?

23°. Назовите все целые числа, принадлежащие множеству чисел:

а) $[-3; 1]$; б) $(-3; 1)$; в) $[-3; 1)$; г) $(-3; 1]$;
д) $[-2; 3]$; е) $(-2; 3)$; ж) $[-2; 3)$; з) $(-2; 3]$.

Как называют каждое из этих множеств?

24°. Назовите три целых числа, принадлежащие множеству чисел:

а) $[0; +\infty)$; б) $(0; +\infty)$; в) $(-\infty; 1)$; г) $(-\infty; 1]$.

25°. Прочитайте название числового промежутка и изобразите его на координатной прямой:

а) $[3; 5]$; б) $(3; 5)$; в) $[3; 5)$;
г) $(3; 5]$; д) $[-2; +\infty)$; е) $(-2; +\infty)$;
ж) $(-\infty; -2)$; з) $(-\infty; -2]$.

26. Запишите обозначение:

а) отрезка от 2 до 4;
б) интервала от 2 до 4;
в) полуинтервала от 2 до 4, включая 4;
г) полуинтервала от 2 до 4, включая 2;
д) интервала от 5 до $+\infty$;
е) полуинтервала от 5 до $+\infty$;
ж) интервала от $-\infty$ до 0;
з) полуинтервала от $-\infty$ до 0.

Изобразите указанное множество чисел на координатной оси.

27. Принадлежит ли число -2 множеству чисел (сделайте запись с помощью знаков $\in$ и $\notin$):

а) $[-3; 0]$; б) $(-2; 3)$; в) $(-\infty; -2]$; г) $(-2; +\infty]$;
д) $\boldsymbol{N}$; е) $\boldsymbol{Z}$; ж) $\boldsymbol{Q}$; з) $\boldsymbol{R}$?

28. Принадлежит ли число $\frac{2}{3}$ множеству чисел (сделайте запись с помощью знаков $\in$ и $\notin$):

а) $(0;\ 1]$; б) $[1;\ 2]$; в) $(-\infty;\ \frac{2}{3}]$; г) $(\frac{2}{3};\ +\infty)$;

д) $\boldsymbol{N}$; е) $\boldsymbol{Z}$; ж) $\boldsymbol{Q}$; з) $\boldsymbol{R}$?

29. Запишите числовой промежуток, изображенный на рисунке 8.

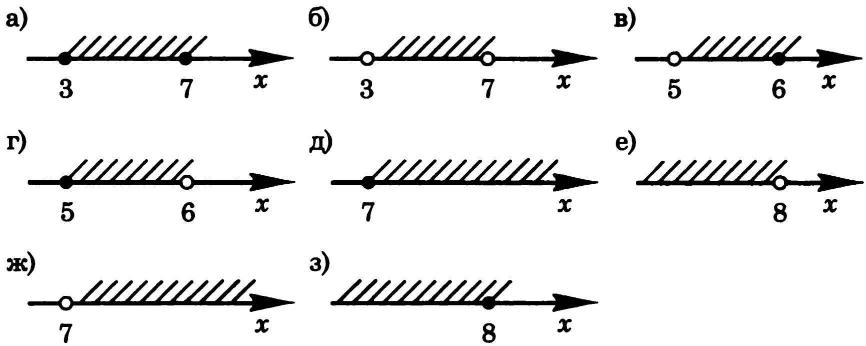


Рис. 8

30⁰. Какому из числовых промежутков, изображенных на рисунке 8, соответствует неравенство:

а) $x \geqslant 7$; б) $x > 7$; в) $x \leqslant 8$;

г) $x < 8$; д) $3 < x < 7$; е) $3 \leqslant x \leqslant 7$;

ж) $5 \leqslant x < 6$; з) $5 < x \leqslant 6$?

31. Запишите указанное на рисунке 9 числовое множество с помощью знаков неравенства.

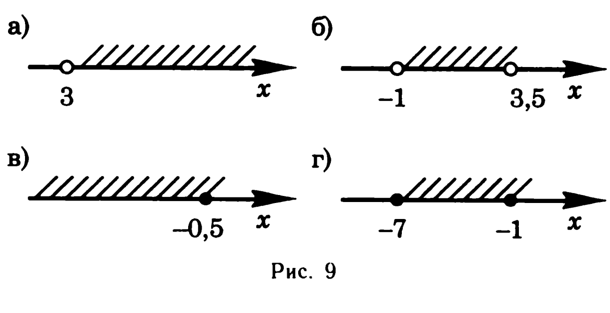


Рис. 9

32. Укажите на координатной оси числа:

а) меньшие 3; б) большие -5;

в) не большие 2; г) не меньшие 0;

д) большие 7, но меньшие 10;

е) большие -5, но меньшие -1.

Обозначьте полученное множество чисел.

33. Укажите на координатной оси:

а) отрезок $[2;\ 5]$; б) интервал $(-2;\ 0)$.

Запишите его с помощью двойного неравенства.

34. Изобразите на координатной оси числовые промежутки.

а) $[-2;\ 3]$ и $[0;\ 2]$; б) $\left[\frac{1}{3};\ 3\right]$ и $[-2;\ 0{,}3]$;

в) $(-4;\ 0{,}29)$ и $\left(\frac{2}{7};\ 5\right)$;

г) $\left(-0{,}44;\ \frac{13}{40}\right)$ и $\left(-\frac{3}{7};\ -\frac{1}{4}\right)$.

Имеют ли они общие точки?

Если да, то запишите общую часть (пересечение) этих множеств.

1.3. Декартова система координат на плоскости

Зададим на плоскости две взаимно перпендикулярные оси координат — ось x и ось y — с точкой пересечения O, являющейся начальной точкой каждой из этих осей, и равными единичными отрезками.

Говорят, что этим на плоскости определена *прямоугольная система координат xOy*. Ее называют еще **декартовой системой координат** по имени французского математика и философа Декарта, который ввел в математику это важное понятие.

Ось x называют **осью абсцисс**, а ось y — **осью ординат**. Точку O пересечения осей координат называют *началом системы координат*. Плоскость, на которой задана декартова система координат, называют **координатной плоскостью**.

Обычно ось абсцисс изображают в виде горизонтальной прямой, направленной вправо, а ось ординат — в виде вертикальной прямой, направленной вверх (рис. 10).

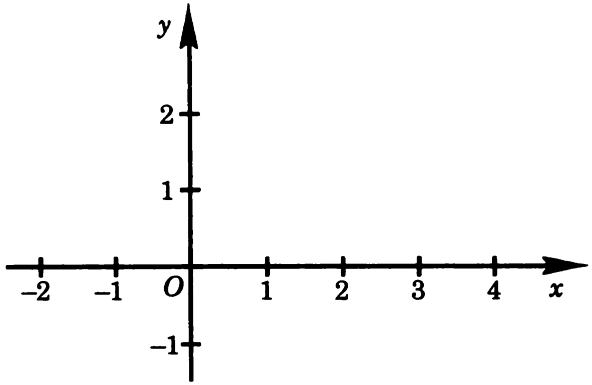


Рис. 10

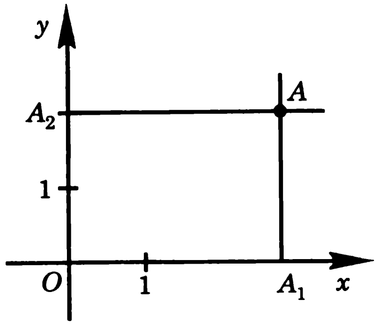


Рис. 11

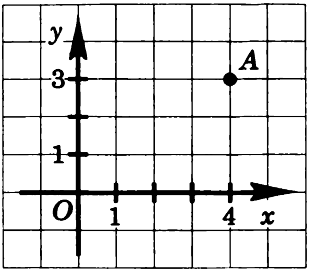


Рис. 12

Пусть A есть произвольная точка координатной плоскости. Проведем через точку A прямые, параллельные осям координат (рис. 11). Прямая, параллельная оси y, пересечет ось x в точке A_1, а прямая, параллельная оси x, пересечет ось y в точке A_2. **Абсциссой точки** A называют координату x точки A_1 на оси x. **Ординатой точки** A называют координату y точки A_2 на оси y. Абсциссу x и ординату y точки A называют **координатами точки** A.

Координаты точки записывают в скобках рядом с буквой, обозначающей эту точку: $A\,(x;\ y)$, причем на первом месте пишут абсциссу, а на втором — ординату. Например, точка A, изображенная на рисунке 12, имеет абсциссу $x=4$ и ординату $y=3$, поэтому пишут $A\,(4;\ 3)$. На рисунке 13 изображена прямоугольная система координат xOy и точки $O\,(0;\ 0)$, $B\,(-1;\ 1)$, $C\,(-3;\ -4)$, $D\,(4;\ -4)$, $E\,(6;\ 0)$, $F\,(0;\ 5)$.

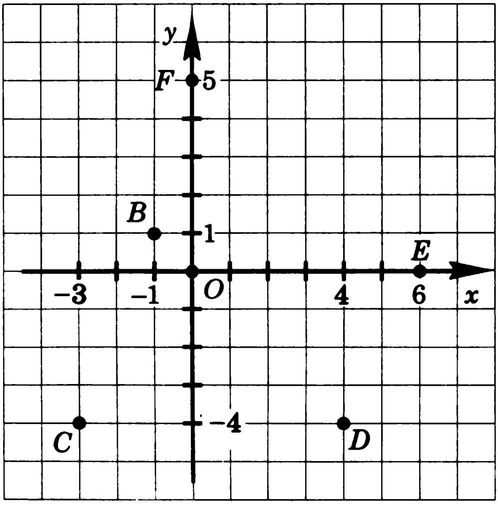


Рис. 13

Важно отметить, что *если на плоскости задана прямоугольная система координат, то каждой точке A плоскости приводится в соответствие пара чисел (x; y) — пара координат точки A, и в то же время произвольную пару чисел (x; y) можно рассматривать как пару координат некоторой точки A плоскости.*

Нужно иметь в виду, что если пара состоит из разных чисел, то, поменяв эти числа местами, получим другую пару, определяющую другую точку плоскости. Поэтому часто пару координат $(x; y)$ точки A называют упорядоченной парой чисел.

Итак, если на плоскости задана прямоугольная система координат xOy, то:

1) *каждой точке плоскости поставлена в соответствие упорядоченная пара чисел (пара координат точки);*

2) *разным точкам плоскости поставлены в соответствие разные упорядоченные пары чисел;*

3) *каждая упорядоченная пара чисел соответствует некоторой точке плоскости.*

Прямоугольная система координат xOy разделяет плоскость на четыре части, называемые **координатными углами**, или **координатными четвертями**, или просто **четвертями**. Обозначим их римскими цифрами I, II, III, IV (рис. 14).

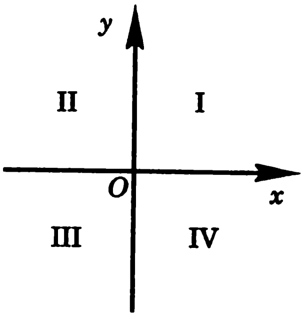


Рис. 14

Если исключить точки, лежащие на осях координат, то можно сказать, что:

точки I четверти имеют координаты $(x; y)$, такие, что $x>0$, $y>0$;

точки II четверти имеют координаты $(x; y)$, такие, что $x<0$, $y>0$;

точки III четверти имеют координаты $(x; y)$, такие, что $x<0$, $y<0$;

точки IV четверти имеют координаты $(x; y)$, такие, что $x>0$, $y<0$.

Например, точка $B(-2; 5)$ на рисунке 15 принадлежит II четверти, точка $D(4; -2)$ принадлежит IV четверти.

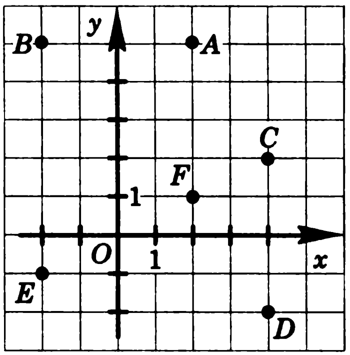


Рис. 15

Если точка лежит на оси y, то ее абсцисса равна нулю; если абсцисса точки равна нулю, то точка лежит на оси y. Если точка лежит на оси x, то ее ордината равна нулю; если ордината точки равна нулю, то точка лежит на оси x.

Две точки $A_1(x_1;\ y_1)$ и $A_2(x_2;\ y_2)$ *симметричны относительно оси ординат* (*оси* y), если их координаты удовлетворяют равенствам
$$x_1=-x_2 \text{ и } y_1=y_2.$$

Две точки $A_1(x_1;\ y_1)$ и $A_2(x_2;\ y_2)$ *симметричны относительно оси абсцисс* (*оси* x), если их координаты удовлетворяют равенствам
$$x_1=x_2 \text{ и } y_1=-y_2.$$

Две точки $A_1(x_1;\ y_1)$ и $A_2(x_2;\ y_2)$ *симметричны относительно начала координат* (*точки* O), если их координаты удовлетворяют равенствам
$$x_1=-x_2 \text{ и } y_1=-y_2.$$

Например, на рисунке 15 точки A и B симметричны относительно оси ординат, точки C и D симметричны относительно оси абсцисс, точки E и F симметричны относительно начала координат.

35°. Для каких точек координатной плоскости:
а) абсцисса равна нулю; б) ордината равна нулю;
в) абсцисса положительна; г) ордината положительна?

36°. Какими свойствами обладают:
а) координаты точек I, II, III, IV четвертей;
б) координаты точек, симметричных относительно оси x, оси y, начала координат?

37°. Назовите абсциссу и ординату точки:
а) $A(-2;\ 3)$; б) $B(3;\ -2)$;
в) $C(6;\ 5)$; г) $D(-2;\ -6)$.
Какой координатной четверти принадлежит эта точка?

38. Определите по координатам точки, в какой четверти координатной плоскости она расположена:
а) $(12;\ 5)$; б) $(-3;\ -4)$;
в) $(7;\ -3)$; г) $(-8;\ 13)$.

39. Постройте точку, симметричную точке:
а) $A(1;\ 3)$ относительно оси y;
б) $B(-2;\ -1)$ относительно оси x;
в) $C(3;\ -2)$ относительно точки $O(0;\ 0)$.

40. Постройте данную точку и точки, симметричные ей относительно оси x, оси y, начала координат $O(0;\ 0)$:
а) $A(3;\ 5)$; б) $B(-4;\ 2)$;
в) $C(-4;\ -3)$; г) $D(3;\ -5)$.
Определите координаты построенных точек.

41. Каким свойством обладают точки:
а) $A(3;\ 2)$ и $B(-3;\ 2)$;
б) $C(2;\ 5)$ и $D(2;\ -5)$;
в) $M(-4;\ 3)$ и $N(4;\ -3)$;
г) $E(-3;\ 1)$ и $F(-3;\ -1)$;
д) $P(4;\ 5)$ и $Q(-4;\ -5)$;
е) $X(-6;\ 7)$ и $Y(6;\ 7)$?

42. а) Постройте точки с координатами (1; 4), (2; 7), (3; 10). Эти точки лежат на одной прямой. Проведите эту прямую.

б) Отметьте на этой прямой еще две точки, обозначьте их буквами A и B и запишите их координаты.

в) Точка $C(2{,}3;\ 7{,}9)$ также лежит на этой прямой. Покажите примерное ее расположение.

г) Постройте точку $D(1{,}5;\ 5{,}5)$. Лежит ли она на этой прямой?

д) Точка $E(6;\ y)$ лежит на этой прямой. Найдите y.

е) Точка $K(x;\ 16)$ лежит на этой прямой. Найдите x.

43. а) Постройте прямоугольник $ABCD$ по координатам его вершин: $A(0;\ 0)$, $B(0;\ 8)$, $C(5;\ 8)$, $D(5;\ 0)$. Найдите периметр и площадь прямоугольника $ABCD$.

б) Постройте квадрат $ABCD$ по координатам трех его вершин: $A(-2;\ -1)$, $B(-2;\ 2)$, $C(1;\ 2)$. Найдите координаты вершины D, периметр и площадь квадрата $ABCD$.

44*. Докажите, что точки $A(m;\ n)$ и $B(n;\ m)$ симметричны относительно прямой, делящей I и III координатные углы пополам.

Замечание. Точки A и B называют симметричными относительно прямой a, если эта прямая является серединным перпендикуляром к отрезку AB. Точка прямой a считается симметричной сама себе относительно этой прямой.

1.4. Понятие функции

Пример 1. Из геометрии известно, что объем куба равен кубу длины его ребра. Это утверждение носит общий характер, оно относится к любому кубу. Запишем его в виде равенства в общем виде. Пусть a — длина ребра куба, V — его объем. Тогда указанное геометрическое свойство можно записать следующим образом:

$$V=a^3\ (a>0). \qquad (1)$$

Неравенство, записанное в скобках, означает, что указанное свойство рассматривается только для положительных значений a, потому что длина ребра куба есть положительное число.

Равенством (1) пользуются как формулой, при помощи которой вычисляется объем любого конкретного куба. Мы видим, что каждому значению длины ребра a в силу закона, выражаемого формулой (1), соответствует определенное значение объема V. В таком случае говорят, что **V есть функция от a**, определенная для положительных значений a. Говорят еще, что V есть функция от a, определенная на множестве положительных чисел a.

Н. И. Лобачевский

П. Дирихле

Пример 2. Из физики известно, что при прямолинейном движении тела с постоянной скоростью, например 80 км/ч, путь s км, пройденный этим телом за время t ч, вычисляется по формуле

$$s=80t \ (t \geqslant 0). \tag{2}$$

Здесь каждому неотрицательному значению t в силу закона, выражаемого формулой (2), соответствует определенное значение s. Поэтому и в этом случае говорят, что **s есть функция от t**, определенная для неотрицательных значений t или определенная на множестве неотрицательных чисел t.

Приведем общее определение *функции*.

Пусть M есть некоторое множество чисел и пусть каждому числу x из M в силу некоторого (вполне определенного) закона приведено в соответствие (одно) число y, тогда говорят, что y есть функция от x, определенная на множестве M;

при этом x называют **независимой переменной** или **аргументом**, а y — **зависимой переменной** или **функцией** *от x*, *множество M* — **областью определения функции.**

Это определение функции предложено великим русским математиком Н. И. Лобачевским (1792—1856) и немецким математиком П. Дирихле (1805—1859).

Примером функции может служить зависимость

$$y=3x.$$

В этом примере закон зависимости переменной y от переменной x заключается в том, что каждому числу x приводится в соответствие число y, равное $3x$. Говорят еще, что функция, выражающая эту зависимость, *задана формулой*

$$y=3x.$$

Вот еще примеры функций, заданных формулами

$$y=-2x, \ y=3x-4, \ y=x^2.$$

Указанные функции заданы (определены) для любых значений x, т. е. для любых действительных чисел x, или, как говорят, на множестве всех действительных чисел.

Буквы x и y нередко заменяют другими буквами.

Например, площадь S квадрата есть функция

$$S = a^2 \ (a > 0)$$

от длины его стороны a, определенная на множестве положительных чисел.

Чтобы указать, что y есть функция от x, пишут

$$y = f(x),$$

где буква f характеризует то правило, по которому получаются значения y, соответствующие данным x.

Иногда для того, чтобы подчеркнуть, что y зависит от x, вместо y пишут $y(x)$.

Число, соответствующее числу x_0 для данной функции $y(x)$, называют **значением** этой **функции в точке** x_0 и обозначают $y(x_0)$. Если функция записана в виде $y = f(x)$, то это число обозначают $f(x_0)$.

Например, для функции $y = 2x$ пишут

$$y(1) = 2, \qquad y(2) = 4, \qquad y(-3) = -6,$$

или

$$f(1) = 2, \qquad f(2) = 4, \qquad f(-3) = -6.$$

При этом говорят, например, что значение данной функции в точке 1 равно 2 или «игрек от 1 равен 2», или «эф от 1 равно 2», и т. д.

Чтобы задать функцию, нужно указать способ (правило, закон), с помощью которого для каждого значения аргумента x можно найти соответствующее значение функции y.

Функция может быть задана формулой. Выше рассмотрены такие примеры.

Функция может быть задана таблицей. Например, если измерять температуру воздуха через каждый час, то каждому моменту времени $t = 0, 1, 2, \ldots, 24$ будет соответствовать определенное число T. Это соответствие можно записать в виде таблицы.

t	0	1	2	3	...	14	...	24
T	16	16	15	15		25		17

Таким образом, T есть функция от t, определенная на множестве целых чисел от 0 до 24 и заданная таблицей. Закон, в силу которого каждому t из этого множества соответствует T, определяется в данном случае не формулой, а таблицей.

Функция может быть задана и при помощи графика. Об этом будет рассказано в следующем пункте.

45. Пусть дана функция $y=f(x)$. Что называют:
а) независимой переменной или аргументом;
б) зависимой переменной или функцией;
в) областью определения функции?

46. а) Функция задана формулой $y=2x+7$. Назовите зависимую и независимую переменные. Вычислите: $y(3)$, $y(-2)$, $y(0)$. Результаты запишите в таблицу. *Например,* если $x=-5$, то $y=2\cdot(-5)+7=-10+7=-3$.

x	-5			
y	-3			

б) Задана функция $y=x^2$. Вычислите: $y(0)$, $y(2)$, $y(-2)$, $y(-1)$, $y(0{,}4)$, $y\left(\frac{3}{4}\right)$. Решение оформите в виде таблицы.

47. Функция задана формулой $y=3x-1$. Верно ли равенство:
а) $y(2)=3$; б) $y(5)=17$;
в) $y\left(\frac{1}{3}\right)=0$; г) $y(-1)=-3$?

48. Приведите три примера функций, заданных формулами. Назовите зависимую и независимую переменные.

49. Функция задана формулой $y=1-4x$.
а) Найдите: $y(6)$, $y(-7)$, $y(0{,}5)$, $y\left(\frac{2}{3}\right)$.
б) Верно ли равенство: $y(5)=19$, $y(-2)=9$, $y(0)=1$, $y(-0{,}5)=2$, $y\left(-\frac{3}{4}\right)=4$?

50. Задайте функцию формулой, если закон зависимости y от x для $x>0$ заключается в том, что каждому x соответствует y:
а) в 2 раза больший; б) меньший на 2;
в) больший на 5; г) в 4 раза больший;
д) меньший в 7 раз; е) равный удвоенному квадрату x.

51. Вычислите значения функции $y=3x$, взяв значения x от -2 до 2 через 0,5. Решение оформите в виде таблицы.

52. Вычислите значения функции $y=x^2$, взяв значения x от -1 до 1 через 0,2. Решение оформите в виде таблицы.

53. а) Человек идет со скоростью 4 км/ч. Запишите путь s, пройденный человеком, как функцию от времени t. Составьте таблицу, показывающую пройденный путь за время от 0 до 3 ч через каждые 20 мин.
б) Запишите площадь S квадрата как функцию от длины стороны этого квадрата a.

в) Запишите стоимость s лотерейных билетов как функцию от количества k проданных билетов, если один билет стоит 3 р.

г) Запишите количество изготовленных деталей d как функцию от времени t, если за 1 ч изготавливают 4 детали.

54. Дана функция $y=2x-5$. При каком значении аргумента x значение функции будет равно 5, -3, 0, -5?

55. Какой формулой может быть задана функция, если:

а) значениям x, равным 0, 1, 2, 3, 4, 5, соответствуют значения y, равные 0, 5, 10, 15, 20, 25;

б) значениям x, равным 1, 2, 3, 4, 5, 6, соответствуют значения y, равные 2,5; 5; 7,5; 10; 12,5; 15?

56. Функция задана формулой $y=\frac{1}{x}$.

а) Вычислите: $y(1)$, $y(2)$, $y(5)$, $y(0{,}5)$, $y\left(\frac{1}{3}\right)$.

б) Задайте функцию таблицей для указанных выше значений x.

57. Функция задана таблицей:

а)

x	1	2	3	4	5	6
y	1	3	5	7	9	11

б)

x	0	1	2	3	4	5
y	-5	-4	-3	-2	-1	0

Какой формулой можно задать эту функцию?

1.5. Понятие графика функции

Функция может быть задана при помощи графика. Например, чтобы узнать, как изменяется температура воздуха, на метеорологических станциях пользуются прибором, называемым термографом. Термограф состоит из барабана, вращающегося вокруг своей оси при помощи часового механизма, и латунной прогнутой коробки, чувствительной к изменению температуры. При повышении температуры она разгибается, а прикрепленное к ней при помощи системы рычажков самопишущее перо поднимается вверх. При понижении температуры перо опускается. На барабан навертывается соответствующим образом разграфленная бумажная лента, на которой перо вычерчивает непрерывную линию — график функции, выражающей зависимость между временем и температурой воздуха. При помощи этого графика можно без вычислений определять значения температуры T для каждого момента времени t.

Каждая функция, заданная при помощи формулы, имеет в декартовой системе координат свой график. Об этом будет идти речь впереди.

На рисунке 16 изображен график температуры воздуха в системе координат tOT, где t — время, а T — температура. С его помощью можно без вычислений определить значения температуры T для каждого момента времени t. Для этого на оси абсцисс надо отметить точку t и восставить из нее перпендикуляр к оси абсцисс до пересечения с графиком. Ордината точки пересечения есть значение функции $T(t)$.

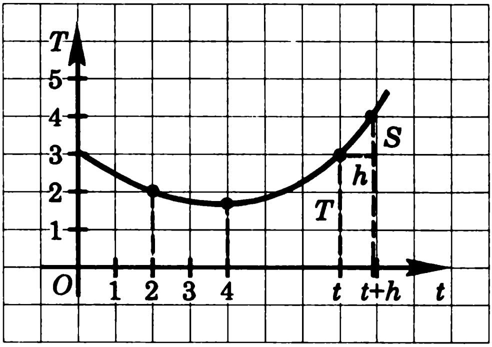


Рис. 16

Можно еще сказать, что график функции $T(t)$ в системе координат tOT есть совокупность точек вида $(t;\ T(t))$ для всех t из рассматриваемого промежутка времени.

Наш график есть непрерывная линия, т. е. она получена одним непрерывным движением пера без отрыва его острия от бумаги, поэтому функцию T от t называют **непрерывной**. Это свойство непрерывности функции можно охарактеризовать еще так: *малому изменению аргумента t соответствует малое изменение функции T.*

На рисунке 16 на оси абсцисс отмечены значения времени t и $t+h$, которым соответствуют значения температуры T и $T+S$. Число h называют **приращением аргумента** t, а число S — **приращением функции** T.

Мы видим, что малому h соответствует малое S.

Температура T при непрерывном изменении времени t изменяется непрерывно, без скачков.

Но возможны и другие ситуации.

Например, представим себе, что по прямой линии движется шарик со скоростью $v=5$ м/с. Через 7 с он ударяется о стену и затем движется обратно со скоростью $v=5$ м/с.

Можно считать, что скорость v шарика зависит от времени t следующим образом:

$$v=5 \text{ для } t\leqslant 7,$$
$$v=-5 \text{ для } t>7.$$

График этой функции изображен на рисунке 17.

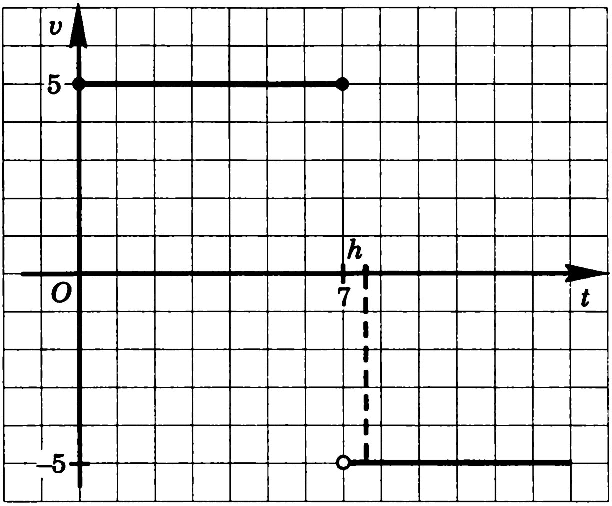


Рис. 17

Получилась линия с разрывом при $t=7$. В момент времени $t=7$ скорость равнялась 5. Но если к 7 добавить положительное как угодно малое h, то в момент $7+h$ скорость уже будет равна -5. Приращение S равно -10. Теперь уже малому h не соответствует малое S.

В данном случае функция v от t не является непрерывной, она имеет *разрыв* при $t=7$.

Графиком функции $y=f(x)$ называют множество точек координатной плоскости xOy вида $(x; f(x))$, где x — любое число из области определения функции.

Если график функции — непрерывная линия, то функцию называют непрерывной. Можно сказать и так: *функцию $y=f(x)$ называют непрерывной, если малому изменению аргумента x соответствует малое изменение функции y.*

В дальнейшем будут приведены примеры графиков функций, заданных конкретными формулами.

58°. Можно ли функцию задать при помощи графика? Приведите пример.

59°. а) Что называют графиком функции?

б) Какую функцию называют непрерывной?

в) Существуют ли разрывные функции?

60. В 6 ч утра из поселка на озеро, находящееся в 6 км от поселка, отправились рыбачить отец и сын. Туда шли пешком, а обратно ехали на попутной машине. На рисунке 18 изображен график их движения. Определите с помощью графика:

а) в какое время рыболовы пришли к озеру;

б) как долго они могли удить рыбу;

в) сколько времени занял у них обратный путь;

г) с какой скоростью они шли пешком;

д) с какой скоростью ехала машина.

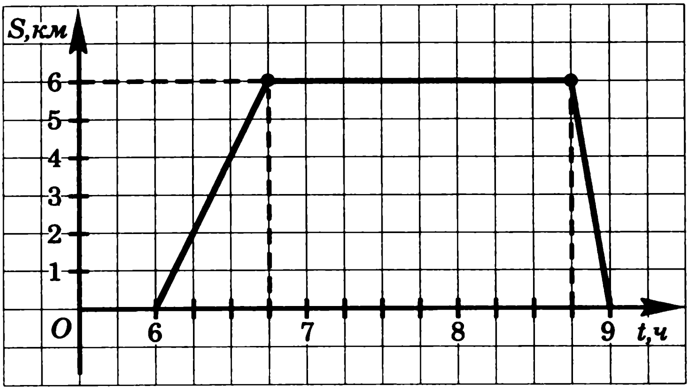


Рис. 18

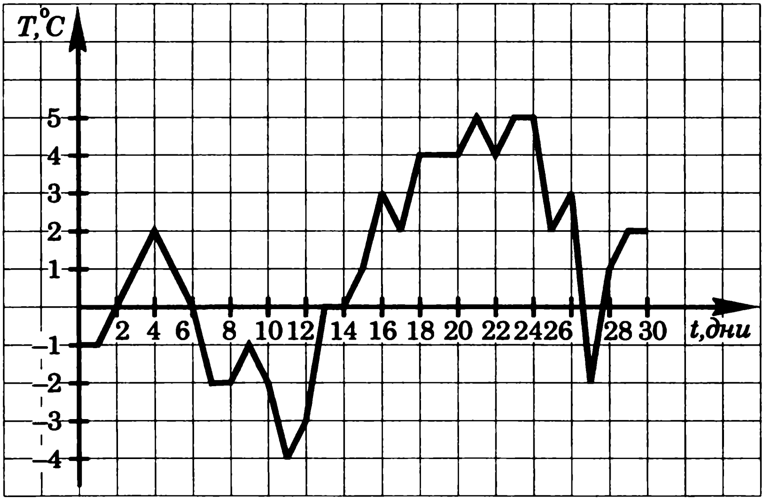


Рис. 19

61. На рисунке 19 приведен график изменения температуры воздуха в течение одного месяца. Измерения проводились один раз в день.

а) Какая температура была 4, 8, 12, 21, 27 числа?

б) В какие дни температура была выше 0° С?
в) В какие дни температура была ниже 0° С?
г) Составьте таблицу температур за вторую неделю месяца.

62. По данным, приведенным в таблице, постройте график изменения температуры воздуха в течение двух недель. T — температура воздуха в градусах по Цельсию, t — дни.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
T	−6	−5	−5	−2	0	1	0	2	4	5	1	0	−2	1

а) Сколько дней температура была не выше 0° С?
б) Сколько дней температура была не ниже 0° С?

§ 2. ФУНКЦИИ $y=x$, $y=x^2$, $y=\frac{1}{x}$

2.1. Функция $y=x$ и ее график

Зададим на плоскости прямоугольную систему координат xOy и прямую, делящую первый и третий координатные углы пополам. Пусть $A(x;\ y)$ есть произвольная точка этой прямой.

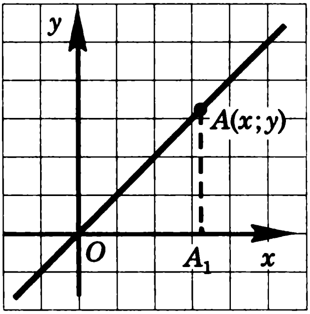


Рис. 20

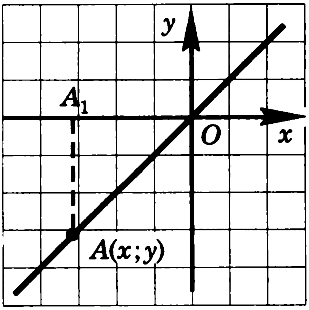


Рис. 21

На рисунке 20 отмечена точка A данной прямой, имеющая положительную абсциссу x. Пусть прямая, проходящая через точку A и параллельная оси Oy, пересекает ось Ox в точке A_1. Тогда

$$OA_1=x, \qquad A_1A=y.$$

На рисунке 21 отмечена точка A данной прямой, имеющая отрицательную абсциссу x. Пусть прямая, проходящая через точку A и параллельная оси Oy, пересекает ось Ox в точке A_1. Но теперь

$$OA_1=-x, \qquad A_1A=-y.$$

В каждом из этих случаев треугольник OA_1A прямоугольный и его острый угол A_1OA равен 45°. Но тогда треугольник OA_1A равнобедренный и $OA_1 = A_1A$, откуда

$$y = x. \qquad (1)$$

Мы получили равенство (1), выражающее зависимость между абсциссой x и ординатой y произвольной точки A данной прямой. Впрочем, при выводе этого равенства мы исключили случай, когда точка A совпадает с началом координат O. Но в этом случае равенство (1) тоже выполняется, так как в этом случае $x=0$ и $y=0$.

Итак, любая точка $A(x;\ y)$ рассматриваемой биссектрисы имеет координаты, удовлетворяющие равенству (1). Но верно и обратное утверждение: если точка $A(x;\ y)$ такова, что $y = x$, то она лежит на биссектрисе первого и третьего координатных углов.

В самом деле, рассмотрим сначала точку $A(x;\ y)$, такую, что $x > 0$.

Обращаясь к рисунку 20, получим, что $OA_1 = x = y = A_1A$. Значит, прямоугольный треугольник OA_1A равнобедренный, следовательно, каждый из его острых углов равен 45°. Но тогда точка $A(x;\ y)$ находится на биссектрисе первого координатного угла. Если же $x < 0$, то, обращаясь к рисунку 21, получим, что $y < 0$ и что точка $A(x;\ y)$ находится на биссектрисе третьего координатного угла.

Таким образом:

если точка $A(x;\ y)$ лежит на биссектрисе первого и третьего координатных углов, то $y = x$;

если же точка $A(x;\ y)$ такова, что $y = x$, то она лежит на биссектрисе первого и третьего координатных углов.

Говорят, что *биссектриса первого и третьего координатных углов есть график функции $y = x$.*

Говорят также, что *биссектриса первого и третьего координатных углов имеет в системе координат xOy уравнение $y = x$.*

Итак, *функция $y = x$ определена для любых действительных x*, т. е. область определения этой функции есть множество $\boldsymbol{R}$. Графиком функции $y = x$ является прямая — биссектриса I и III координатных углов.

63⁰. а) Что является графиком функции $y = x$?
б) Какое уравнение имеет биссектриса I и III координатных углов?

64⁰. Принадлежат ли графику функции $y = x$ точки:
а) $A(5;\ 5)$; б) $C(5;\ -5)$; в) $O(0;\ 0)$;
г) $M(3;\ 10)$; д) $N(100;\ 100)$; е) $K(-6;\ -6)$?

65⁰. Сколько точек достаточно отметить в системе координат xOy для построения графика функции $y = x$?

66°. Постройте график функции $y=x$. Определите по графику:

а) значения y, соответствующие x, равным 0, 1, -2, 3, 4;
б) значения x, соответствующие y, равным 0, -1, 2, -4, 5.

67. При каких значениях x для точек графика $y=x$ выполняется неравенство:

а) $y>0$; б) $y\geqslant 0$; в) $y<0$; г) $y\leqslant 0$?

68°. Определите по графику функции $y=x$, как изменяется (увеличивается или уменьшается) y с увеличением x.

69. Точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ принадлежат графику функции $y=x$. Верно ли, что:

а) если $x_1>x_2$, то $y_1>y_2$; б) если $x_1<x_2$, то $y_1<y_2$?

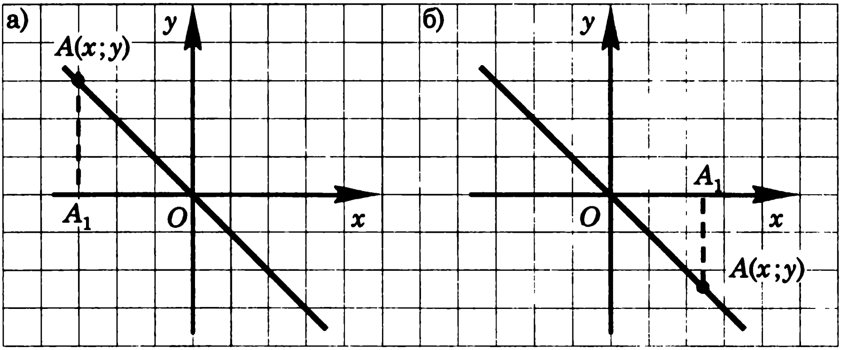


Рис. 22

70*. На биссектрисе II и IV координатных углов отметили точку $A(x; y)$ (рис. 22). Докажите, что для координат этой точки в каждом случае выполняется равенство $y=-x$.

71*. Пусть для координат точки $A(x; y)$ выполняется равенство $y=-x$. Докажите, что эта точка лежит на биссектрисе II и IV координатных углов.

72. Принадлежит ли графику функции $y=-x$ точка:

а) $A(6; -6)$; б) $O(0; 0)$;
в) $B(5; 5)$; г) $C(5; -5)$;
д) $D(100; -100)$; е) $E(-20; -20)$;
ж) $M(-3; 3)$; з) $N(7; -7)$?

73. Постройте график функции $y=-x$. Определите по графику:

а) значения y, соответствующие x, равным 0, 2, -3, 4;
б) значения x, соответствующие y, равным 0, 1, -2, 3, -5;
в) при каких значениях x $y>0$, $y\geqslant 0$, $y<0$, $y\leqslant 0$;
г) как изменяется y с увеличением x.

74. Точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ принадлежат графику функции $y=-x$. Верно ли, что:

а) если $x_1>x_2$, то $y_1<y_2$;

б) если $x_1<x_2$, то $y_1>y_2$?

75°. Какому из графиков функций $y=x$ и $y=-x$ принадлежат точки $A(n; n)$ и $B(n; -n)$, если n — любое действительное число? Назовите координаты таких точек.

2.2. Функция $y=x^2$

Функция $y=x^2$ определена для любых действительных x, т. е. область определения этой функции есть множество $\boldsymbol{R}$.

Так как квадрат любого действительного числа — неотрицательное число, то y принимает только неотрицательные значения.

Сформулируем и обоснуем некоторые *свойства* функции $y=x^2$.

1) Если $x=0$, то $y=0$.

Это свойство очевидно.

2) Если $x>0$, то $y>0$.

В самом деле, если $x>0$, то $y=x^2=x\cdot x$ есть произведение положительных чисел. Поэтому $y>0$.

3) Для неотрицательных значений x функция $y=x^2$ возрастает, т. е. большему значению x соответствует большее значение y. Иначе говоря, если x_1 и x_2 — неотрицательные числа и $x_1<x_2$, $y_1=x_1^2$, $y_2=x_2^2$, то $y_1<y_2$.

В самом деле, если $x_1=0$ и $x_1<x_2$, то $x_1^2=0$, а $x_2^2>0$ по свойству 2 неравенств (см. п. 1.1), т. е. $x_1^2<x_2^2$, или $y_1<y_2$.

Если же $x_1>0$ и $x_1<x_2$, то по свойству 6 неравенств (см. п. 1.1) для положительных чисел x_1 и x_2 из неравенства $x_1<x_2$ следует неравенство $x_1^2<x_2^2$, или $y_1<y_2$.

4) Если положительное x, неограниченно возрастая, стремится к $+\infty$, то и $y=x^2$ стремится к $+\infty$, т. е.

$$y\to+\infty \text{ при } x\to+\infty.$$

В самом деле, пусть x стремится к $+\infty$, принимая натуральные значения $n=1, 2, 3, 4, 5, \ldots$. Тогда $y=x^2$ будет соответственно принимать значения $n^2=1, 4, 9, 16, 25, \ldots$ и, очевидно, тоже стремиться к $+\infty$.

Для промежуточных (не целых) значений x тоже справедливо это свойство.

5) При изменении знака аргумента x на противоположный соответствующее ему значение функции $y=x^2$ не изменяется, т. е. $y(-x)=y(x)$.

В самом деле, $(-x)^2=x^2$ для любого действительного x. Функцию, обладающую этим свойством, называют **четной функцией**.

Таким образом, функция $y=x^2$ — четная функция.

6) Функция $y=x^2$ непрерывна, т. е. малому изменению x соответствует малое изменение y.

Этот факт становится очевидным для положительных x, если, например, считать, что y — это площадь квадрата со стороной x. Ясно, что малое изменение стороны квадрата влечет малое изменение его площади.

В качестве следствия этих основных свойств функции $y=x^2$ легко обосновать и такие ее свойства:

а) *если* $x<0$, *то* $y>0$;

б) *если* $x\to-\infty$, *то* $y\to+\infty$;

в) *для неположительных значений* x *функция* $y=x^2$ *убывает*, т. е. большему неположительному значению x соответствует меньшее значение y.

76⁰. а) Что значит, что функция $y=x^2$ возрастает для неотрицательных значений x?

б) Что значит, что функция $y=x^2$ четная?

в) Сформулируйте основные свойства функции $y=x^2$.

77. Покажите, что из свойств 2 и 5 функции $y=x^2$ следует, что $y>0$ для всех $x\neq 0$.

78. Покажите, что из свойств 3 и 5 функции $y=x^2$ следует, что для неположительных значений x функция $y=x^2$ убывает, т. е. если $x_1<x_2\leqslant 0$ и $y_1=x_1^2$, $y_2=x_2^2$, то $y_1>y_2$.

79. Площадь квадрата S вычисляется по известной формуле $S=a^2$, где a — сторона квадрата. Вычислите S при заданных значениях a. Решение оформите в виде таблицы.

a	1	2	2,5	3	3,1	4	4,3
S							

80. Запишите таблицу значений функции $y=x^2$ при изменении x:

а) через 1 на отрезке $[0;\ 15]$;

б) через 1 на отрезке $[-15;\ 0]$;

в) через 0,1 на отрезке $[0;\ 1]$;

г) через 0,1 на отрезке $[-1;\ 0]$;

д) через 0,01 на отрезке $[0;\ 0{,}1]$;

е) через 0,01 на отрезке $[-0{,}1;\ 0]$.

Замечание. При вычислении значений функции можно использовать формулу квадрата суммы. *Например,*

$$3{,}1^2=(3+0{,}1)^2=9+0{,}6+0{,}01=9{,}61.$$

81. Сравните значения числовых выражений:

а) $1{,}17^2$ и $1{,}18^2$; б) $1{,}18^2$ и $1{,}19^2$;

в) $2{,}31^2$ и $2{,}32^2$; г) $2{,}71^2$ и $2{,}72^2$.

82. Сравните y_1 и y_2 для функции $y=x^2$, если:

а) $x_1=0{,}5$, $x_2=0{,}6$; б) $x_1=7{,}1$, $x_2=6{,}3$;

в) $x_1=0{,}9$, $x_2=1$; г) $x_1=10{,}2$, $x_2=9{,}8$.

83. Вычислите значения функции $y=x^2$ при:

а) x, равном -20, -15, -10, -5, 0;

б) x, равном $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{6}$;

в) x, равном $-0{,}1$; $-0{,}2$; $-0{,}3$; $-0{,}4$; $-0{,}5$.

84. Задана функция $y=x^2$. Определите $y(x)$, записав решение следующим образом: $y(-0{,}8)=(-0{,}8)^2=0{,}8^2=0{,}64$.

а) $y(-1{,}2)$, $y(0)$, $y(-2{,}5)$;

б) $y(-0{,}9)$, $y(-1{,}1)$, $y(-0{,}1)$.

85⁰. Определите знак значения функции $y=x^2$ при следующих значениях x:

а) $0{,}2$; $1{,}5$; -3; $-0{,}2$; б) $-8{,}1$; -100; $0{,}31$; 100.

86. Является ли функция $y=x^2$ возрастающей на отрезке $[a;\ b]$, если:

а) $a=-3$; $b=3$; б) $a=-1$, $b=1$;

в) $a=1$, $b=4$; г) $a=0$; $b=0{,}5$;

д) $a=-2$, $b=-1$; е) $a=-3$, $b=0$?

2.3. График функции $y=x^2$

Графиком функции $y=x^2$ является множество точек координатной плоскости xOy с координатами $(x;\ x^2)$, где x — любое действительное число.

Чтобы построить график функции

$$y=x^2, \tag{1}$$

надо для каждого действительного числа x вычислить соответствующее значение y по формуле (1) и полученные точки $(x;\ y)$ отметить на плоскости в заданной декартовой системе координат. Совокупность всех этих точек и образует график функции $y=x^2$.

Однако эту работу до конца выполнить невозможно, потому что указанных точек бесконечно много. Все же график функции $y=x^2$ можно построить приближенно.

Зададим побольше отдельных положительных значений x и вычислим соответствующие им по формуле (1) значения y. Ниже приведена таблица для некоторых значений x из отрезка $[0;\ 3]$.

x	0	0,3	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	0	0,09	0,25	1	2,25	4	6,25	9

Точки, соответствующие парам $(x;\ y)$ таблицы, отметим на плоскости в заданной прямоугольной системе координат xOy. Получилась точечная линия, расположенная над отрезком $[0;\ 3]$ оси x (рис. 23). Соединим эти точки плавной непрерывной линией, такой, что ордината y ее подвижной точки возрастает вместе с абсциссой (рис. 23). Полученную непрерывную линию можно рассматривать как приближенный график функции $y=x^2$ на отрезке $[0;\ 3]$ изменения x.

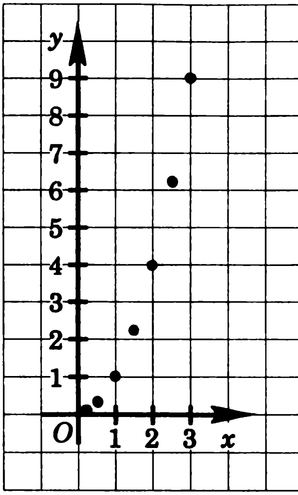


Рис. 23

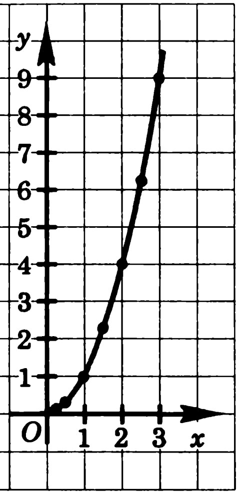


Рис. 24

Отметим, что изображенный на рисунке 24 график отражает свойства 1, 2, 3, 6 функции $y=x^2$, сформулированные в предыдущем пункте.

Свойство 6 указывает на то, что график функции $y=x^2$ должен представлять собой непрерывную линию. Поэтому мы и соединили точки нашей точечной линии непрерывной линией.

Легко представить себе, как выглядит график функции $y=x^2$ для больших положительных x. Если абсцисса точки этого графика стремится к $+\infty$, то ее ордината y по свойству 4 тоже стремится к $+\infty$. При этом надо иметь в виду, что y стремится к $+\infty$ гораздо быстрее, чем x. Если, например, x принимает значения 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., то y соответственно равен квадратам этих чисел: 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...

В силу свойства 5 функции $y=x^2$ точки графика $y=x^2$ с абсциссами x и $-x$ имеют равные ординаты, поэтому график функции $y=x^2$ симметричен относительно оси y. Таким образом, *ось y является* **осью симметрии** *графика $y=x^2$.*

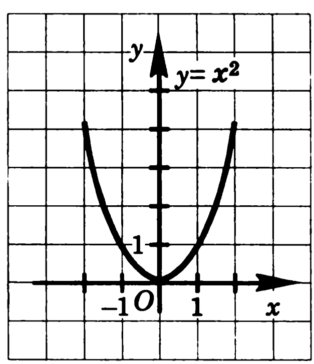


Рис. 25

График функции $y=x^2$ изображен на рисунке 25.

Линию, являющуюся графиком функции $y=x^2$, называют **параболой**. Часто мы будем говорить коротко «парабола $y=x^2$».

В дальнейшем мы узнаем, что графики функций вида

$$y=ax^2+bx+c,$$

где a, b, c — данные числа и $a \neq 0$, также называют параболами.

Точку пересечения параболы с ее осью симметрии называют **вершиной параболы**. В случае $y=x^2$ это точка $O(0; 0)$.

Рассматривая параболу $y=x^2$, можно непосредственно увидеть ряд свойств функции $y=x^2$.

В самом деле, парабола $y=x^2$ проходит через начало координат. Это свойство 1 функции $y=x^2$.

Точки параболы $y=x^2$, кроме ее вершины, находятся выше оси x. Для точек с абсциссой $x>0$ это свойство 2.

Если точка $A(x; y)$ параболы движется по ней так, что ее абсцисса x положительна и возрастает, то ее ордината y тоже возрастает. Это свойство 3.

Парабола $y=x^2$ есть непрерывная линия (свойство 6), симметричная относительно оси y (свойство 5). Но мы видим также из графика, что если абсциссы x точек параболы отрицательны и возрастают, то ординаты y убывают, т. е. бо́льшим отрицательным значениям x соответствуют ме́ньшие значения y. Это следует также из свойств 3 и 5.

87⁰. а) Что называют графиком функции $y=x^2$?

б) Как построить график функции $y=x^2$?

в) Как называют линию, являющуюся графиком функции $y=x^2$?

г) В чем заключается свойство непрерывности этого графика?

д) Какую точку называют вершиной параболы $y=x^2$?

е) Какая прямая является осью симметрии параболы $y=x^2$?

88. Задана функция $y=x^2$.

а) При каких значениях x определена данная функция?

б) Вычислите значения y, взяв значения x от -3 до 3 через единицу. Решение оформите в виде таблицы.

в) Постройте систему координат xOy, взяв за единицу масштаба 1 см. Постройте точки с вычисленными координатами и соедините полученные точки непрерывной линией.

г) В каких четвертях располагается график функции $y=x^2$? Какие значения принимает функция $y=x^2$?

89. Заполните таблицу значений функции $y=x^2$ и постройте ее график.

x	0	$\pm\frac{1}{4}$	$\pm\frac{1}{2}$	± 1	$\pm 1\frac{1}{2}$	± 2	$\pm 2\frac{1}{2}$	± 3	$\pm 3\frac{1}{2}$	± 4
$y=x^2$										

90. Определите с помощью графика функции $y=x^2$:

а) значения y, если x равен $\frac{1}{4}$; 0,3; 1,3;

б) значения x, если y равен 1; 1,2; 3,5;

в) $y(0)$, $y(5)$, $y(1,6)$, $y(4,7)$;

г) значения x, если $y(x)=3$, $y(x)=6$;

д) значения y, если $x>0$, $x>3$, $x<-2$;

е) значения y, если $-1<x<1$, $-2<x<5$, $-\frac{1}{2}<x<7$.

91. Принадлежит ли точка $A(x; y)$ графику функции $y=x^2$, если:

а) $x=1$, $y=5$;
б) $x=3$, $y=9$;
в) $x=1,5$, $y=2\frac{1}{4}$;
г) $x=-2$, $y=4$;
д) $x=-0,4$, $y=1,6$;
е) $x=1\frac{1}{2}$, $y=4,5$?

92. Дана функция $y=x^2$. При каких значениях x:

а) $y>0$;
б) $y=0$;
в) $y<0$;
г) функция возрастает;
д) функция убывает?

2.4. Функция $y=\frac{1}{x}$

Функция $y=\frac{1}{x}$ *определена для любых действительных* x *за исключением* $x=0$, *т. е. область определения функции* $y=\frac{1}{x}$ *есть множество всех действительных чисел, кроме нуля.*

Сначала рассмотрим эту функцию только для положительных x.

Отметим следующие ее *свойства*:

1) Если $x>0$, то $y>0$.

2) Для положительных x функция $y=\frac{1}{x}$ является убывающей, т. е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, или если $0<x_1<x_2$, то $y_1>y_2$, где $y_2=\frac{1}{x_2}$, $y_1=\frac{1}{x_1}$.

Докажем эти утверждения.

При $x>0$ числитель дроби $\frac{1}{x}$ и ее знаменатель — положительные числа, поэтому $y=\frac{1}{x}>0$.

Пусть для положительных x_1 и x_2 выполняется неравенство $x_1<x_2$. Тогда на основании свойства 5 (см. п. 1.1) заключаем, что $\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}$, т. е. $y_1>y_2$.

3) Если положительное x стремится к нулю, то $y=\frac{1}{x}$ стремится к $+\infty$, а если x стремится к $+\infty$, то $y=\frac{1}{x}$ стремится к нулю, т. е.

$$y=\frac{1}{x}\to+\infty \text{ при } x\to 0\ (x>0),$$

$$y=\frac{1}{x}\to 0 \text{ при } x\to+\infty.$$

Это свойство проиллюстрируем на примерах.

Если положительное x стремится к нулю, пробегая значения $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$, то функция $y=\frac{1}{x}$ соответственно пробегает значения 1, 2, 3, 4, 5, ..., т. е. $y\to+\infty$.

Если же $x\to+\infty$, пробегая значения 1, 2, 3, 4, ... , то соответственно y стремится к нулю, пробегая значения $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$.

4) Функция $y=\frac{1}{x}$ непрерывна для положительных x, т. е. малому изменению положительного аргумента x соответствует малое изменение функции y.

Проиллюстрируем это свойство на примере.

Пусть спортсмену надо пробежать дистанцию 1 км. Будем считать, что он бежит всю дистанцию с постоянной скоростью v км/с. Тогда весь путь он пробежит за t с, причем

$$t=\frac{1}{v}. \qquad (1)$$

Здесь время t есть функция скорости v. Очевидно, что малое изменение скорости дает малое изменение времени, затраченного на путь. Поэтому функция, заданная формулой (1), непрерывная функция (напомним: в формуле (1) $v>0$).

Благодаря этому свойству для положительных x график функции $y=\frac{1}{x}$ есть непрерывная линия, т. е. он может быть изображен непрерывным движением карандаша.

93^0. а) Для каких x определена функция $y=\frac{1}{x}$?

б) Является ли функция $y=\frac{1}{x}$ убывающей для положительных x?

в) К чему стремится $y=\frac{1}{x}$, когда положительное x стремится к нулю?

г) К чему стремится $y=\frac{1}{x}$, когда x стремится к $+\infty$?

д) Является ли функция $y=\frac{1}{x}$ непрерывной для положительных x?

94. Площадь прямоугольника равна 1 м^2.

а) Какие значения могут принимать длины сторон? Приведите примеры.

б) Найдите длины сторон этого прямоугольника, если длина одной из них равна: 2 м, 3 м, $\frac{1}{4}$ м, $\frac{1}{5}$ м.

в) Составьте формулу зависимости между длинами сторон данного прямоугольника.

95^0. а) Если увеличить скорость равномерного движения в 2 раза, то как изменится время прохождения заданного расстояния?

б) Если в 4 раза уменьшить объем, занимаемый газом, то как изменится плотность газа?

в) Если уменьшить время изготовления одной детали в 3 раза, то как изменится количество деталей, изготовленных за смену?

96. Вычислите значения функции $y=\frac{1}{x}$ при x, равном 1, 2, 3, 4, 5, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$. Результаты занесите в таблицу.

97. Дана функция $y=\frac{1}{x}$. Вычислите:

а) $y(1)$; б) $y(2)$; в) $y(3)$; г) $y(6)$;

д) $y\left(\frac{1}{2}\right)$; е) $y\left(\frac{1}{3}\right)$; ж) $y\left(\frac{1}{6}\right)$; з) $y\left(\frac{1}{10}\right)$.

98. Сравните дроби:

а) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{10}$ и $\frac{1}{11}$.

99. Дана функция $y=\frac{1}{x}$. Сравните:

а) $y(1)$ и $y(2)$; б) $y(2)$ и $y(3)$;

в) $y(1)$ и $y(5)$; г) $y(1)$ и $y(3)$;

д) $y(12)$ и $y(5)$; е) $y(4)$ и $y(3)$.

2.5. График функции $y=\frac{1}{x}$

Построим график функции $y=\frac{1}{x}$ для положительных x. Для этого вычислим значение $y=\frac{1}{x}$, соответствующее каждому положительному числу x, и полученные точки $(x; y)$ отметим на плоскости, где задана декартова система координат xOy. Совокупность всех этих точек образует график функции $y=\frac{1}{x}$ для положительных x.

Однако эту работу до конца выполнить невозможно, потому что указанных точек бесконечно много. Все же график нашей функции можно построить приближенно.

Зададим побольше положительных значений x и вычислим соответствующие им по формуле $y=\frac{1}{x}$ значения y. Ниже приведена такая таблица для некоторых значений x.

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	1	2	3	4
y	2	3	4	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

Отметим на плоскости в системе координат xOy точки, соответствующие парам чисел $(x; y)$, приведенным в таблице (рис. 26).

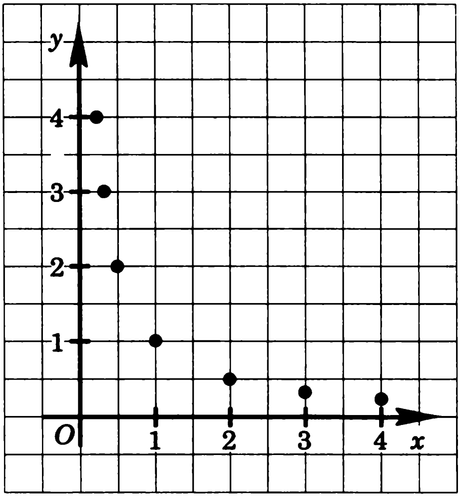


Рис. 26

Соединим эти точки плавной непрерывной линией, такой, что ордината y ее подвижной точки убывает вместе с возрастанием ее абсциссы (рис. 27). Полученную непрерывную линию можно рассматривать как приближенный график функции $y=\frac{1}{x}$ для положительных x.

Отметим, что изображенный на рисунке 27 график отражает свойства 1, 2, 3, 4 функции $y=\frac{1}{x}$, сформулированные в предыдущем пункте.

Действительно, график функции $y=\frac{1}{x}$ для положительных x расположен над осью Ox, что соответствует свойству 1.

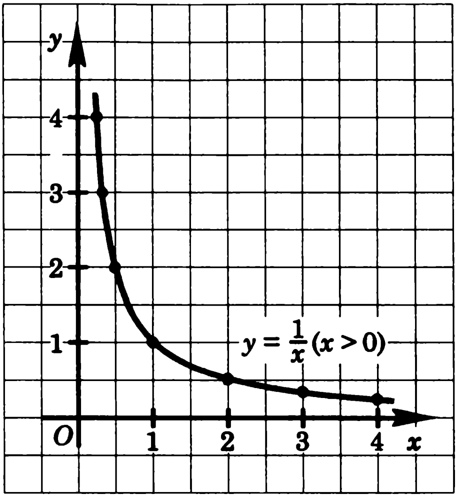


Рис. 27

Если увеличивается абсцисса x точки, движущейся по графику, то ордината y этой точки уменьшается, что соответствует свойству 2.

Свойство 3 заключается в том, что если $x \to +\infty$, то $y \to 0$. Если же $x \to 0$ $(x>0)$, то $y \to +\infty$. Оно тоже в какой-то мере отражено на рисунке 27.

Наконец, на основании свойства 4 наш график должен быть непрерывной линией, поэтому мы и соединили полученные точки непрерывной линией.

Областью определения функции $y=\frac{1}{x}$ является множество чисел x, отличных от нуля, или, выражаясь геометрическим языком, множество точек оси Ox, отличных от нулевой точки. Это множество симметрично относительно нулевой точки. Кроме того, для любого x из этого множества выполняется равенство

$$y(-x)=\frac{1}{(-x)}=-\left(\frac{1}{x}\right)=-y(x), \qquad (1)$$

т. е. при изменении знака x на противоположный соответствующее значение функции изменяется на противоположное.

Функцию, обладающую таким свойством, называют **нечетной функцией**.

Функция $y=\frac{1}{x}$ — нечетная функция. В силу свойства (1) точки графика $y=\frac{1}{x}$ с абсциссами x и $-x$ имеют противоположные ординаты, поэтому график функции $y=\frac{1}{x}$ симметричен относительно начала координат.

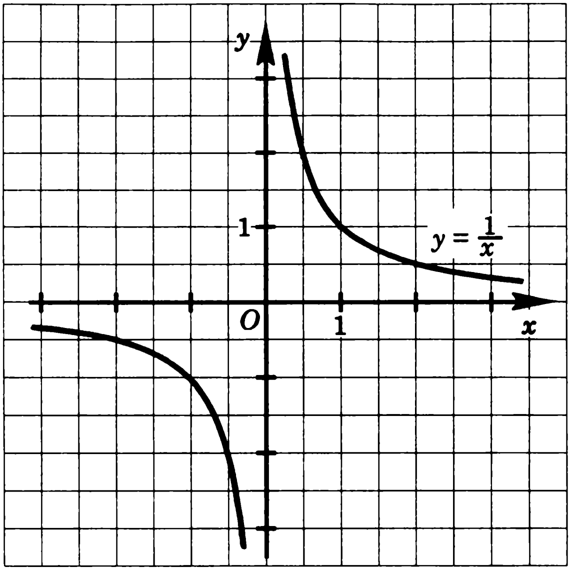


Рис. 28

Поэтому для построения графика функции $y=\frac{1}{x}$ для отрицательных x надо изобразить линию, симметричную уже построенной кривой относительно начала координат.

График функции $y=\frac{1}{x}$ для всех x из ее области определения изображен на рисунке 28.

Линию, являющуюся графиком функции $y=\frac{1}{x}$, *называют* **гиперболой**.

Отметим, что гипербола $y=\frac{1}{x}$ состоит из двух частей, называемых *ветвями гиперболы*. Одна из них расположена над положительным лучом оси Ox (без точки $x=0$), а другая — под отрицательным лучом оси Ox (без точки $x=0$). Из графика функции $y=\frac{1}{x}$ (рис. 28) видно, что функция $y=\frac{1}{x}$ для отрицательных x обладает следующими свойствами:

1) Если $x<0$, то $y<0$.

2) Для отрицательных x функция $y=\frac{1}{x}$ убывает.

3) Если отрицательное x стремится к нулю, то $y=\frac{1}{x}$ стремится к $-\infty$, а если x стремится к $-\infty$, то $y=\frac{1}{x}$ стремится к нулю, т. е.

$$y=\frac{1}{x}\to-\infty \text{ при } x\to 0 \ (x<0),$$

$$y=\frac{1}{x}\to 0 \text{ при } x\to -\infty.$$

4) Для отрицательных x функция $y=\frac{1}{x}$ непрерывна.

Доказательства этих свойств мы опускаем.

100°. а) Какова область определения функции $y=\frac{1}{x}$?

б) Как называют график функции $y=\frac{1}{x}$?

в) Сколько ветвей имеет гипербола?

г) Является ли функция $y=\frac{1}{x}$ непрерывной, нечетной?

101. Дана функция $y=\frac{1}{x}$. Какие значения принимает y при $x>0$, при $x<0$? Вычислите:

а) $y(1)$, $y(3)$, $y(5)$, $y(10)$;

б) $y(-1)$, $y(-2)$, $y(-8)$, $y(-9)$;

в) $y\left(\frac{1}{2}\right)$, $y\left(\frac{1}{3}\right)$, $y\left(1\frac{1}{2}\right)$;

г) $y(1{,}5)$, $y\left(-5\frac{1}{2}\right)$, $y\left(-3\frac{1}{3}\right)$.

102. а) Возрастает или убывает функция $y=\frac{1}{x}$ на промежутках $[1;\ +\infty)$, $(0;\ 1]$, $(-\infty;\ 0)$.

б) При каких значениях x функция $y=\frac{1}{x}$ не определена? Может ли эта функция принять значение 0?

103. Докажите, что функция $y=\frac{1}{x}$ является:

а) нечетной; б) убывающей при $x<0$.

104. Расположите значения функции $y=\frac{1}{x}$ в порядке возрастания:

$y(1)$, $y(-3)$, $y(1{,}5)$, $y(-1)$, $y(3)$, $y\left(\frac{2}{3}\right)$, $y(-0{,}8)$, $y\left(-\frac{1}{3}\right)$, $y\left(5\frac{1}{2}\right)$.

105. Дана функция $y=\frac{1}{x}$. В системе координат с единичными отрезками, равными 1 см, постройте точки $\left(x; \frac{1}{x}\right)$ при x, равном 1, 2, 3, 4, $1\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$. Соедините полученные точки непрерывной линией. Отметьте точки с абсциссами 5, 6, 7, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$.

Используя построенную линию и нечетность функции $y=\frac{1}{x}$, постройте левую ветвь гиперболы.

106. С помощью графика функции $y=\frac{1}{x}$ определите:

а) значения y, если x равен 0,2; 0,3; 0,8;
б) значения y, если x равен $-3{,}5$; $-1{,}8$; $-0{,}4$;
в) значения x, если $y(x)=3$, $y(x)=5$, $y(x)=-2$;
г) значения y, если $x>0$, $x>2$, $x<-3$;
д) значения y, если $0<x<1$, $-3<x<-1$.

107. Принадлежит ли графику функции $y=\frac{1}{x}$ точка:

а) $A(2;\ 0{,}5)$; б) $B(4;\ -1)$;
в) $C(-25;\ -0{,}04)$; г) $D(6;\ 0{,}7)$?

108*. Функция $y=\frac{1}{x}$ является убывающей на интервале $(-\infty;\ 0)$, а также на интервале $(0;\ +\infty)$. Но эта функция не является убывающей на всей своей области определения. Объясните почему.

109*. Постройте график функции:

а) $y=\frac{-1}{x}$; б) $y=\frac{2}{x}$; в) $y=\frac{-2}{x}$;
г) $y=\frac{6}{x}$; д) $y=\frac{-8}{x}$; е) $y=\frac{4}{x}$.

110*. В каких координатных углах расположены точки графика $y=\frac{k}{x}$ при $k>0$, $k<0$?

§ 3. КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

3.1. Понятие квадратного корня

В геометрии иногда решается задача: площадь квадрата равна b, найти длину его стороны. Эта задача есть частный случай более общей задачи. Для данного действительного числа b найти действительное число a, такое, что $a^2=b$. Покажем, что эта задача имеет решение, только если b — неотрицательное число.

Зададим действительное число a. Возведя его в квадрат, получим действительное число $b=a^2$, которое называют *квадратом числа a*. Покажем, что b — число неотрицательное.

В самом деле, если $a=0$, то $b=a^2=0\cdot 0=0$.
Если $a>0$, то, умножив неравенство $a>0$ на положительное число a, получим

$$b=a^2>0.$$

Если же $a<0$, то, умножив это неравенство на отрицательное число a, получим

$$b=a^2>0.$$

Итак, показано, что для любого действительного числа a справедливо неравенство $a^2\geqslant 0$, т. е. **квадрат любого действительного числа — число неотрицательное.**

Из сказанного следует, что *нет такого действительного числа, квадрат которого был бы равен отрицательному числу.*

Теперь покажем, используя график функции $y=x^2$, что для любого неотрицательного числа b существует действительное число a, такое, что

$$a^2=b.$$

При $b=0$ нам надо найти такое число a, что $a^2=0$. Но тогда $a=0$, потому что, как показано выше, $0^2=0$; если же $a\neq 0$, то $a^2>0$. Итак, существует единственное число 0, квадрат которого равен числу $b=0$.

Пусть теперь $b>0$. Построим в прямоугольной системе координат xOy график функции $y=x^2$. Отложим от начала координат вверх по оси y отрезок длиной b и через верхний его конец проведем прямую, параллельную оси x. Эта прямая пересекает параболу $y=x^2$ в двух точках A и B (рис. 29).

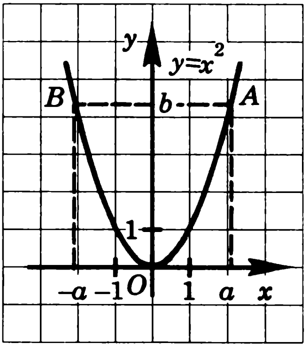


Рис. 29

Пусть абсцисса точки A есть число a. Тогда абсцисса точки B есть число $(-a)$, потому что точки A и B симметричны относительно оси y. Очевидно, что квадраты чисел a и $(-a)$ равны b:

$$a^2=(-a)^2=b.$$

При этом нет других действительных чисел, квадрат которых равнялся бы b.

Квадратным корнем **из данного числа называют такое число, квадрат которого равен данному числу.**

Из сказанного следует, что:

1) существует и притом только два квадратных корня из любого положительного числа b. Они равны по абсолютной величине, но имеют разные знаки, т. е. один из корней положительный, а другой отрицательный (на рисунке 29: a — положительный корень, $(-a)$ — отрицательный корень из числа b);

2) квадратный корень из нуля единственный, он равен нулю;

3) нет действительного числа — квадратного корня из отрицательного числа.

Замечание 1. В дополнениях к главе II будут введены корни квадратные из отрицательных чисел, но это будут уже не действительные числа, а так называемые комплексные числа.

Замечание 2. Говорят, что квадратный корень из отрицательного числа не существует, подразумевая под этим, что нет действительного числа, квадрат которого есть отрицательное число.

Пример 1. Числа 17 и -17 — квадратные корни из 289, потому что $17^2=(-17)^2=289$.

Пример 2. Числа $\frac{1}{7}$ и $-\frac{1}{7}$ — квадратные корни из $\frac{1}{49}$, потому что $\left(\frac{1}{7}\right)^2=\left(-\frac{1}{7}\right)^2=\frac{1}{49}$.

Пример 3. Числа $\frac{5}{3}$ и $-\frac{5}{3}$ — квадратные корни из $\frac{25}{9}$, потому что $\left(\frac{5}{3}\right)^2=\left(-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$.

Пример 4. Числа 0 — единственный квадратный корень из 0.

Пример 5. Нет действительных квадратных корней из -4.

111°. а) Может ли быть отрицательным числом квадрат действительного числа?

б) Что называют квадратным корнем из данного числа?

в) Сколько существует квадратных корней из положительного числа, из нуля?

г) Существуют ли действительные числа — квадратные корни из отрицательных чисел?

112. Найдите сторону квадрата, если его площадь равна:

а) 25 см^2; б) 1 м^2; в) 400 мм^2;
г) 49 дм^2; д) 16 км^2; е) 1 га.

113. Покажите с помощью графика функции $y=x^2$, что:

а) существуют два действительных квадратных корня из числа 3;

б) существует единственный квадратный корень из числа 0;

в) не существует действительных квадратных корней из числа -5.

114°. Найдите число, квадрат которого равен:

а) 4; б) 100; в) -6; г) 81;
д) $-0{,}25$; е) 0; ж) 0,09; з) 1,21.

115. Докажите, что:

а) число 11 есть квадратный корень из 121;

б) число -13 есть квадратный корень из 169;

в) число 1,7 не является квадратным корнем из 2,39;

г) число $-0{,}7$ не является квадратным корнем из $-0{,}49$.

116. Найдите квадратные корни из числа:

а) 10 000; б) 3600; в) 640 000; г) 1 000 000;
д) $\frac{1}{4}$; е) $\frac{1}{9}$; ж) $\frac{25}{36}$; з) $\frac{16}{49}$.

Докажите правильность решения.

117. Проверьте, является ли число:

а) 42 квадратным корнем из 1764;

б) -19 квадратным корнем из 361.

3.2. Арифметический квадратный корень

Арифметическим квадратным корнем **из данного неотрицательного числа b называют такое неотрицательное число, квадрат которого равен b.**

Это число обозначают $\sqrt{b}$ и читают «арифметический квадратный корень из числа b».

Вычислим несколько арифметических квадратных корней:

$$\sqrt{0}=0,\ \sqrt{1}=1,\ \sqrt{4}=2,\ \sqrt{9}=3,\ \sqrt{16}=4,$$

$$\sqrt{25}=5,\ \sqrt{\frac{1}{49}}=\frac{1}{7},\ \sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{5}{3}.$$

Подчеркнем, что арифметический квадратный корень из нуля равен нулю, а арифметический квадратный корень из положительного числа — число положительное.

Иногда вместо слов «арифметический квадратный корень из числа» говорят «арифметическое значение квадратного корня из числа», или «арифметический корень второй степени из числа».

Часто выражение $\sqrt{b}$ для $b \geqslant 0$ мы будем называть просто квадратным корнем из b, опуская для краткости прилагательное «арифметический», но подразумевая его. Для $b<0$ выражение $\sqrt{b}$ не имеет смысла.

Среди двух квадратных корней из положительного числа b один арифметический, равный $\sqrt{b}$, а другой равен $-\sqrt{b}$.

Зато квадратный корень из 0 только один: $\sqrt{0}=0$.

Значит, *для каждого неотрицательного числа b существует, и притом только один, арифметический квадратный корень.*

На рисунке 30 число 0 — арифметический квадратный корень из числа 0, 1 — арифметический квадратный корень из 1, $\sqrt{2}$ — арифметический квадратный корень из 2, 2 — арифметический квадратный корень из 4, $\sqrt{b}$ — арифметический квадратный корень из положительного числа b.

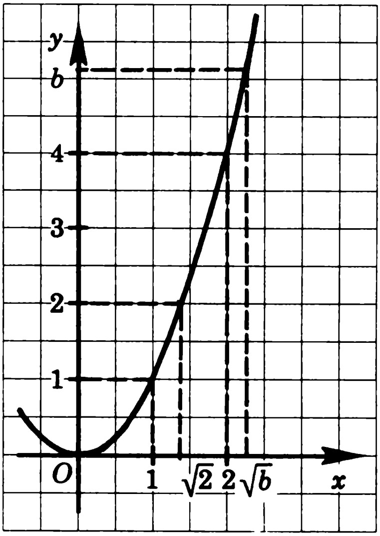


Рис. 30

Как видно из рисунка 31, если неотрицательные числа b_1 и b_2 таковы, что $b_1<b_2$, то $\sqrt{b_1}<\sqrt{b_2}$.

Другими словами: **из двух неотрицательных чисел больше то, квадрат которого больше.**

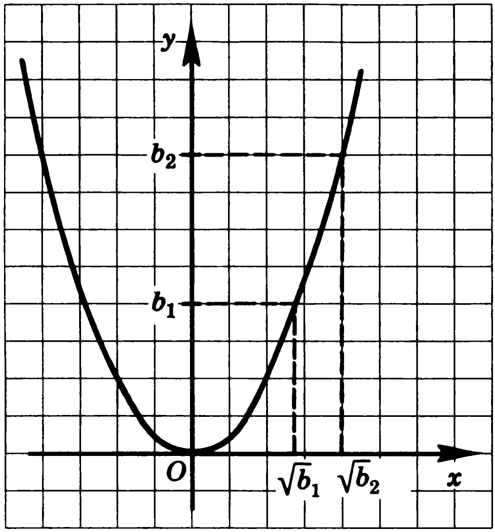


Рис. 31

Из сказанного следует также, что **арифметические квадратные корни из равных неотрицательных чисел равны.** Можно сказать и так: если квадраты неотрицательных чисел равны, то эти числа равны.

118⁰. а) Что называют арифметическим квадратным корнем из данного числа?

б) Сколько существует арифметических квадратных корней из данного числа?

в) Могут ли быть равными арифметические квадратные корни из неравных чисел?

г) Верно ли, что $(\sqrt{b})^2 = b$, где $b \geqslant 0$?

119⁰. Найдите арифметические квадратные корни[1]:

а) $\sqrt{9}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{0}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{81}$, $\sqrt{121}$, $\sqrt{400}$, $\sqrt{144}$;

б) $\sqrt{0{,}49}$, $\sqrt{0{,}25}$, $\sqrt{0{,}04}$, $\sqrt{0{,}0016}$, $\sqrt{\frac{1}{9}}$, $\sqrt{\frac{1}{25}}$, $\sqrt{\frac{1}{81}}$, $\sqrt{\frac{1}{1600}}$.

Вычислите **(120—122)**:

120. а) $2+\sqrt{1}$; б) $15-\sqrt{36}$; в) $\sqrt{9}+\sqrt{4}$;

г) $\sqrt{16}+\sqrt{25}$; д) $\sqrt{49}-\sqrt{1}$; е) $\sqrt{81}-\sqrt{49}$;

ж) $\sqrt{100}-\sqrt{36}$; з) $\sqrt{144}-\sqrt{121}$; и) $\sqrt{0{,}36}+\sqrt{0{,}49}$.

---

[1] При выполнении этого и следующих упражнений удобно пользоваться таблицей квадратов.

121. а) $2\cdot\sqrt{81}$; б) $\frac{1}{3}\cdot\sqrt{100}$; в) $\sqrt{4}\cdot\sqrt{0{,}25}$;
г) $\sqrt{0{,}16}\cdot\sqrt{9}$; д) $\sqrt{0{,}27}:\sqrt{3}$; е) $\sqrt{49}:\sqrt{0{,}01}$;
ж) $\sqrt{\frac{1}{9}}\cdot\sqrt{81}$; з) $\sqrt{0{,}36}:\sqrt{\frac{1}{36}}$; и) $\sqrt{1{,}69}:\sqrt{0{,}0625}$.

122. а) $5\cdot\sqrt{4}\cdot 3$; б) $2\sqrt{9}+3\sqrt{16}$;
в) $\sqrt{13-3\cdot 3}$; г) $\sqrt{7^2-26:2}$;
д) $\frac{1}{3}\sqrt{5^2+22:2}$; е) $3\sqrt{0{,}64}-5\sqrt{1{,}21}$.

123°. Имеет ли смысл выражение:
а) $-\sqrt{25}$; б) $\sqrt{-25}$; в) $\sqrt{0}$; г) $\sqrt{1-5}$?

124. Найдите, если возможно, число, арифметический квадратный корень из которого равен:
а) 7; б) 0,2; в) -2; г) -100.

Вычислите **(125—126)**:

125. а) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; б) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$; в) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; г) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$.

126. а) $\sqrt{900}$, $\sqrt{6400}$, $\sqrt{810000}$, $\sqrt{250000}$, $\sqrt{16000000}$;
б) $\sqrt{0{,}64}$, $\sqrt{0{,}0064}$, $\sqrt{0{,}0009}$, $\sqrt{0{,}000016}$, $\sqrt{0{,}000004}$;
в) $\sqrt{256}$, $\sqrt{729}$, $\sqrt{196}$, $\sqrt{625}$, $\sqrt{289}$, $\sqrt{361}$.

127. Докажите, что:
а) $\sqrt{4}>1$; б) $\sqrt{3}>1$; в) $2<\sqrt{5}$;
г) $1{,}4<\sqrt{2}$; д) $1{,}7<\sqrt{3}$; е) $1{,}8>\sqrt{3}$;
ж) $1<\sqrt{2}<2$; з) $1<\sqrt{3}<2$.

128. Сравните числа:
а) $\sqrt{100}$ и $\sqrt{81}$; б) $\sqrt{100}$ и $\sqrt{121}$; в) $\sqrt{4}$ и 3;
г) $\frac{1}{5}$ и $\sqrt{0{,}25}$; д) 2 и $\sqrt{\frac{9}{16}}$; е) $\frac{1}{5}$ и $\sqrt{\frac{4}{49}}$;
ж) $\sqrt{0{,}09}$ и $\sqrt{\frac{4}{25}}$; з) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ и $\sqrt{\frac{64}{49}}$; и) $\sqrt{\frac{1}{4}}$ и $\frac{1}{4}$.

129. Вычислите:
а) $(\sqrt{2})^2$; б) $(\sqrt{3})^2$; в) $(\sqrt{13})^2$; г) $(\sqrt{17})^2$.

130. Найдите два последовательных натуральных числа, между которыми заключено число:
а) $\sqrt{13}$; б) $\sqrt{17}$; в) $\sqrt{23}$; г) $\sqrt{39}$.

3.3. Квадратный корень из натурального числа

Квадрат натурального числа есть натуральное число. Но не всякое натуральное число есть квадрат некоторого натурального числа.

Среди первых 20 натуральных чисел только 4 являются квадратами натуральных чисел — это 1, 4, 9 и 16.

Среди первых 1000 натуральных чисел имеется 31 квадрат, т. е. примерно 3%. Вот они:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961.

Если же рассмотреть натуральные числа, не большие 10 000, то среди них имеется всего 100 чисел, т. е. 1%, являющихся квадратами натуральных чисел, а именно:

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \ldots,\ 100^2.$$

Если извлечь арифметические квадратные корни из каждого из этих чисел, то получатся соответственно числа:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 100.$$

Мы видим, что среди больших натуральных чисел очень редко попадаются квадраты натуральных чисел.

Теорема. *Если натуральное число не является квадратом некоторого натурального числа, то оно является квадратом иррационального числа.*

Доказательство. Пусть N — натуральное число, не являющееся квадратом натурального числа. Предположим, что $\sqrt{N}$ есть число рациональное, т. е. что

$$\sqrt{N}=\frac{p}{q}, \tag{1}$$

где p и q — натуральные числа. Будем считать, что эта дробь несократимая, иначе мы предварительно ее сократили бы. После возведения равенства (1) в квадрат получим

$$N=\frac{p^2}{q^2}. \tag{2}$$

Если здесь $q=1$, то $N=p^2$, т. е. N — квадрат натурального числа, что противоречит условию. Если же $q>1$, то левая часть равенства (2) есть натуральное число, а правая — несократимая дробь, что невозможно.

Следовательно, наше предположение неверно, т. е. $\sqrt{N}$ есть число иррациональное. Теорема доказана.

Таким образом, квадратные корни

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{6},\ \sqrt{7},\ \sqrt{8},\ \sqrt{10},\ \sqrt{11},\ \sqrt{12},\ \ldots$$

есть иррациональные числа.

131°. Может ли быть рациональным числом квадратный корень из: а) простого числа; б) натурального числа?

132. а) Выпишите натуральные числа, меньшие 150, которые являются квадратами натуральных чисел.

б) Имеются ли квадраты натуральных чисел среди натуральных чисел от 150 до 200?

133. Является ли квадратом натурального числа число:
а) 7; б) 27; в) 0; г) -5;
д) $\frac{9}{4}$; е) 100; ж) -16; з) 49?

134*. Докажите, что не существует рационального числа, квадрат которого равен:
а) 5; б) 7; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{3}$.

135*. Докажите иррациональность числа:
а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{5}$; в) $\sqrt{7}$; г) $\sqrt{11}$;
д) $\sqrt{6}$; е) $\sqrt{8}$; ж) $\sqrt{10}$; з) $\sqrt{12}$.

136. Является ли число рациональным, иррациональным:
а) $\sqrt{4}$; б) $\sqrt{13}$; в) $\sqrt{16}$; г) $\sqrt{17}$;
д) $-\sqrt{9}$; е) $\sqrt{20}$; ж) $\sqrt{25}$; з) $\sqrt{0}$?

Докажите, что значение данного выражения — число рациональное (**137—138**):

137. а) $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)$; б) $(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)$;
в) $(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})$; г) $(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{6}-\sqrt{5})$.

138. а) $(\sqrt{2}+1)^2+(\sqrt{2}-1)^2$; б) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$;
в) $(\sqrt{7}-1)^2+(\sqrt{7}+1)^2$; г) $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2+(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$;
д) $(\sqrt{7}-2)^2+4\sqrt{7}$; е) $(\sqrt{8}+3)^2-6\sqrt{8}$.

139. Докажите, что для любого $a \geqslant 0$ выполняется равенство
$(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})=1$.

3.4*. Приближенное вычисление квадратных корней

Мы знаем, что $\sqrt{2}$ есть иррациональное число. Следовательно, его десятичное разложение

$$\sqrt{2}=\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3...$$

бесконечное непериодическое.

Покажем, как вычисляется число α_0 и как вычисляются последовательно цифры α_1, α_2, α_3, ...

Из двойного неравенства

$$1<2<4$$

следует, что

$$\sqrt{1}<\sqrt{2}<\sqrt{4}, \text{ т. е. } 1<\sqrt{2}<2.$$

Значит,

$$\alpha_0=1, \text{ т. е. } \sqrt{2}=1,\alpha_1\alpha_2\alpha_3... \ .$$

Будем теперь искать α_1. Для этого рассмотрим числа

$$1{,}0;\ 1{,}1;\ 1{,}2;\ 1{,}3;\ \ldots;\ 1{,}9;\ 2,$$

где-то между ними находится число $\sqrt{2}$. Чтобы узнать, между какими из них, будем последовательно возводить их в квадрат:

$$1{,}0^2=1;\ 1{,}1^2=1{,}21;\ 1{,}2^2=1{,}44;$$
$$1{,}3^2=1{,}69;\ 1{,}4^2=1{,}96;\ 1{,}5^2=2{,}25.$$

Дальше вычислять не надо: мы видим, что

$$1{,}4^2<2<1{,}5^2,$$

или

$$1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5.$$

Это показывает, что $\alpha_1=4$, т. е. $\sqrt{2}=1{,}4\alpha_2\alpha_3\ldots$.

Чтобы найти α_2, вычислим квадраты чисел:

$$1{,}40^2=1{,}96;\ 1{,}41^2=1{,}9881;\ 1{,}42^2=2{,}0164.$$

Мы видим, что

$$1{,}41^2<2<1{,}42^2,$$

т. е.

$$1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42.$$

Поэтому $\alpha_2=1$, т. е. $\sqrt{2}=1{,}41\alpha_3\alpha_4\ldots$.

Итак, мы нашли целую часть и первые две цифры после запятой в десятичном разложении $\sqrt{2}$, или приближенное значение $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2}\approx 1{,}41$$

с недостатком с точностью до второго знака после запятой. Продолжая этот процесс, мы будем находить приближенные значения $\sqrt{2}$ с тем количеством цифр после запятой, которое нам понадобится, другими словами, вычислим $\sqrt{2}$ с точностью до любого необходимого нам знака после запятой:

$$\sqrt{2}=1{,}4142135\ldots\ .$$

Этот процесс можно применить к приближенному вычислению арифметического квадратного корня из любого натурального числа, не являющегося квадратом натурального числа.

Но обычно такие вычисления не делают. Существуют подробные таблицы для приближенных значений квадратных корней из натуральных чисел.

Кроме того, с помощью калькулятора можно моментально узнать, чему приближенно равен квадратный корень из данного натурального числа.

140. Для каждого из чисел 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 найдите:
а) наибольшее натуральное число, квадрат которого не больше данного числа;
б) наименьшее натуральное число, квадрат которого не меньше данного числа.

141. Найдите приближенное значение квадратного корня из числа с точностью до 0,01:
а) 3; б) 5; в) 6; г) 7;
д) 8; е) 10; ж) 11; з) 12.

142. Вычислите с точностью до 1:
а) $\sqrt{174}$; б) $\sqrt{242}$; в) $\sqrt{357}$; г) $\sqrt{413}$.

143. Вычислите с точностью до 0,1:
а) $\sqrt{23}$; б) $\sqrt{31}$; в) $\sqrt{45}$; г) $\sqrt{53}$.

144. Вычислите с точностью до третьего знака после запятой:
а) $\sqrt{6}$; б) $\sqrt{8}$; в) $\sqrt{10}$; г) $\sqrt{11}$.
Проверьте результаты по таблице квадратных корней.

145. Используя таблицу квадратных корней, вычислите:
а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{5}$; в) $\sqrt{13}$; г) $\sqrt{72}$;
д) $\sqrt{97}$; е) $\sqrt{1,2}$; ж) $\sqrt{2,8}$; з) $\sqrt{5,1}$;
и) $\sqrt{12,3}$; к) $\sqrt{43,1}$; л) $\sqrt{841}$; м) $\sqrt{784}$;
н) $\sqrt{1225}$; о) $\sqrt{1849}$; п) $\sqrt{3249}$; р) $\sqrt{431}$;
с) $\sqrt{689}$; т) $\sqrt{1578}$; у) $\sqrt{2578}$; ф) $\sqrt{4774}$.

146. Проверьте справедливость неравенства:
а) $6,0<\sqrt{37}<6,1$; б) $4,3<\sqrt{19}<4,4$;
в) $11,0<\sqrt{123}<11,1$; г) $21,3<\sqrt{456}<21,4$.

147. Какое число является более точным приближением $\sqrt{11}$:
а) 3 или 4; б) 3,3 или 3,4;
в) 3,31 или 3,32; г) 3,316 или 3,317?

3.5. Свойства арифметических квадратных корней

Теорема. *Пусть a и b — любые неотрицательные числа, c — положительное число, тогда справедливы равенства*

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}, \qquad (1)$$

$$\sqrt{\frac{a}{c}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}. \qquad (2)$$

Для любого действительного числа a верно равенство

$$\sqrt{a^2}=|a|. \qquad (3)$$

Доказательство. Левая и правая части равенства (1) — неотрицательные числа, и их квадраты равны одному и тому же числу ab:

$$(\sqrt{ab})^2 = ab,$$
$$(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab.$$

Но тогда, как мы знаем из п. 3.2, и сами числа равны.

Равенство (2) доказывается так же, как и равенство (1). Возводим в квадрат его левую и правую части:

$$\left(\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^2 = \frac{a}{c},$$
$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}\right)^2 = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{c})^2} = \frac{a}{c}.$$

Так как квадраты чисел $\sqrt{\frac{a}{c}}$ и $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}$ равны, то левая часть равенства (2) равна правой.

Квадрат любого действительного числа неотрицателен, поэтому в левой части равенства (3) действительно записан арифметический корень из неотрицательного числа.

По определению арифметического квадратного корня $(\sqrt{a^2})^2 = a^2$. Покажем теперь, что $|a|^2 = a^2$. В самом деле,

если $a \geqslant 0$, то $|a| = a$, и потому $|a|^2 = a^2$;

если $a < 0$, то $|a| = -a$, и потому $|a|^2 = (-a)^2 = a^2$.

Итак, мы доказали, что квадрат левой части равенства (3) равен квадрату его правой части и поскольку эти части неотрицательны, то они равны между собой.

Теорема доказана.

Отметим, что равенство (1) означает, что *корень из произведения неотрицательных чисел равен произведению корней из этих чисел*. Равенство (2) означает, что *корень из частного от деления неотрицательного числа на положительное равен частному корней из этих чисел*.

Заметим, что в этих формулировках мы для краткости вместо слов «арифметический квадратный корень» написали просто «корень».

Равенства (1), (2) и (3) помогают упрощать числовые выражения, содержащие квадратные корни.

Пример 1. $\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$.

Пример 2. $\sqrt{\frac{27}{25}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 3}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} \cdot \sqrt{\frac{3}{1}} = \frac{3}{5}\sqrt{3}$.

Пример 3. $\sqrt{8} \cdot \sqrt{32} = \sqrt{8 \cdot 32} = \sqrt{16^2} = 16$.

Пример 4. $(2\sqrt{8} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2})(\sqrt{72} + \sqrt{20} - 4\sqrt{2}) =$
$= (2\sqrt{4}\sqrt{2} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2})(\sqrt{2}\sqrt{36} + \sqrt{4}\sqrt{5} - 4\sqrt{2}) =$

$=(4\sqrt{2}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2})(6\sqrt{2}+2\sqrt{5}-4\sqrt{2})=$
$=(3\sqrt{5}-3\sqrt{2})(2\sqrt{5}+2\sqrt{2})=6(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})=$
$=6((\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2)=6(5-2)=18.$

Преобразование $\sqrt{16\cdot 5}=4\sqrt{5}$ называют **вынесением множителя из-под знака корня**, обратное преобразование $4\sqrt{5}=\sqrt{16\cdot 5}$ называют **внесением множителя под знак корня.**

Преобразование $\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ называют **освобождением от знака корня в знаменателе или освобождением от иррациональности в знаменателе.**

148^0. а) Чему равно произведение квадратных корней из неотрицательных чисел?

б) Чему равен $\sqrt{a^2}$ для положительного числа a?

в) Чему равно частное квадратных корней из положительных чисел?

г) Перечислите свойства арифметических квадратных корней.

д) Если $a<0$, то является ли выражение $\sqrt{a^2}$ арифметическим квадратным корнем?

149. Вычислите:

а) $\sqrt{4^2}$; б) $\sqrt{3{,}1^2}$; в) $\sqrt{(-1)^2}$; г) $\sqrt{(-5)^2}$;
д) $\sqrt{1{,}13^2}$; е) $\sqrt{(-7{,}2)^2}$; ж) $\sqrt{(-0{,}3)^2}$; з) $\sqrt{(-57{,}1)^2}$.

150. При каких значениях x справедливо равенство[1]:

а) $\sqrt{x^2}=x$; б) $\sqrt{x^2}=|x|$; в) $\sqrt{x^2}=-x$; г) $\sqrt{x^2}=0$?

151. Упростите выражение:

а) $\sqrt{a^2}$, если $a\geqslant 0$; б) $\sqrt{b^2}$, если $b<0$;
в) $\sqrt{m^2}$, если $m=0$; г) $\sqrt{n^2}$, если $n<0$;
д) $\sqrt{(x+1)^2}$, если $x+1>0$;
е) $\sqrt{(m-2)^2}$, если $m-2\geqslant 0$;
ж) $\sqrt{(3a+1)^2}$, если $3a+1\geqslant 0$;
з) $\sqrt{(p-4)^2}$, если $p-4<0$.

Вычислите **(152—153)**:

152. а) $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$; б) $\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}$; в) $\sqrt{\left(1\frac{1}{5}\right)^2}$; г) $\sqrt{\left(-2\frac{1}{3}\right)^2}$.

[1] Далее всегда буквами будем обозначать числа. Напомним, что числа под знаком корня неотрицательны, а знаменатели дробей не обращаются в нуль.

153*. а) $\sqrt{2^4}$; б) $\sqrt{3^4}$; в) $\sqrt{2^6}$; г) $\sqrt{3^6}$;
д) $\sqrt{(-2)^8}$; е) $\sqrt{(-3)^8}$; ж) $\sqrt{a^4}$; з) $\sqrt{m^6}$.
Указание. Подкоренное выражение преобразуйте в степень с показателем 2.

154*. Упростите выражение:

а) $\sqrt{x^2+2x+1}$; б) $\sqrt{a^2+2a+1}$;
в) $\sqrt{1-2m+m^2}$; г) $\sqrt{4-4p+p^2}$;
д) $\sqrt{a^4+2a^2+1}$; е) $\sqrt{9-6q^2+q^4}$;
ж) $\sqrt{4x^2-12x+9}$; з) $\sqrt{25+30a+9a^2}$.

155. Вычислите:

а) $\sqrt{4\cdot 9}$; б) $\sqrt{9\cdot 16}$; в) $\sqrt{16\cdot 25}$;
г) $\sqrt{25\cdot 49}$; д) $\sqrt{25\cdot 36\cdot 9}$; е) $\sqrt{49\cdot 64\cdot 100}$.

Вынесите множитель из-под знака корня **(156—158)**.
Например: $\sqrt{8}=\sqrt{4\cdot 2}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

156. а) $\sqrt{12}$; б) $\sqrt{18}$; в) $\sqrt{20}$; г) $\sqrt{24}$; д) $\sqrt{27}$;
е) $\sqrt{28}$; ж) $\sqrt{32}$; з) $\sqrt{45}$; и) $\sqrt{50}$; к) $\sqrt{72}$.

157. а) $\sqrt{108}$; б) $\sqrt{147}$; в) $\sqrt{162}$; г) $\sqrt{245}$;
д) $\sqrt{275}$; е) $\sqrt{363}$; ж) $\sqrt{396}$; з) $\sqrt{576}$;
и) $\sqrt{676}$; к) $\sqrt{972}$; л) $\sqrt{54756}$; м) $\sqrt{831744}$.

Указание. В сложных случаях полезно разложить подкоренное выражение на простые множители и выделить квадраты этих множителей, если они имеются.

Например: $\sqrt{2160}$

$$\begin{array}{r|ll}
2160 & 2 & \multirow{2}{*}{$)\,2^2$} \\
1080 & 2 & \\
540 & 2 & \multirow{2}{*}{$)\,2^2$} \\
270 & 2 & \\
135 & 5 & \\
27 & 3 & \multirow{2}{*}{$)\,3^2$} \\
9 & 3 & \\
3 & 3 & \\
 & 1 &
\end{array}$$

1-й способ. $\sqrt{2160}=$
$=\sqrt{2^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 3\cdot 5}=$
$=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{3\cdot 5}=$
$=2\cdot 2\cdot 3\cdot\sqrt{15}=12\sqrt{15}$.

2-й способ. $\sqrt{2160}=$
$=\sqrt{2^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 3\cdot 5}=$
$=\sqrt{(2\cdot 2\cdot 3)^2\cdot 15}=$
$=\sqrt{(2\cdot 2\cdot 3)^2}\cdot\sqrt{15}=12\sqrt{15}$.

158*. а) $\sqrt{a^4}$; б) $\sqrt{x^3}$; в) $\sqrt{m^5}$;
г) $\sqrt{p^7}$; д) $\sqrt{a^2b^2}$; е) $\sqrt{m^2\cdot 4n^2}$;
ж) $\sqrt{x^4y^2}$; з) $\sqrt{9p^2q^4}$; и) $\sqrt{25a^6b^2}$;
к) $\sqrt{16xy^3}$; л) $\sqrt{49pq^2a^5}$; м) $\sqrt{121m^4n^3k^2}$.

Вычислите **(159—160)**:

159. а) $\sqrt{8\cdot 50}$; б) $\sqrt{27\cdot 12}$; в) $\sqrt{18\cdot 50}$;
г) $\sqrt{32\cdot 72}$; д) $\sqrt{40\cdot 55\cdot 22}$; е) $\sqrt{21\cdot 35\cdot 15}$;
ж) $\sqrt{6\cdot 30\cdot 245}$; з) $\sqrt{245\cdot 27\cdot 60}$; и) $\sqrt{242\cdot 98}$.

160. а) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}$; б) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{75}$;
в) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{45}$; г) $\sqrt{98}\cdot\sqrt{50}$;
д) $\sqrt{40}\cdot\sqrt{10}$; е) $\sqrt{27000}\cdot\sqrt{30}$;
ж) $\sqrt{640}\cdot\sqrt{1000}$; з) $\sqrt{25000}\cdot\sqrt{1000}$.

161. Внесите множитель под знак корня:
а) $2\sqrt{2}$; б) $-3\sqrt{2}$;
в) $4\sqrt{5}$; г) $-10\sqrt{5}$;
д) $a\sqrt{4}$, $a\geqslant 0$; е) $mn\sqrt{5}$, $m\geqslant 0$, $n\geqslant 0$;
ж) $2x\sqrt{6}$, $x\leqslant 0$; з) $3pq\sqrt{2}$, $p\geqslant 0$, $q\geqslant 0$;
и) $x^2\sqrt{3}$; к) $a^3\sqrt{7}$, $a\geqslant 0$;
л) $m^2n\sqrt{4}$, $n\leqslant 0$; м) $5c^2d^3\sqrt{2}$, $d\geqslant 0$.

162*. Вынесите множитель из-под знака корня:
а) $\sqrt{\frac{2}{9}}$; б) $\sqrt{\frac{3}{16}}$; в) $\sqrt{\frac{40}{81}}$; г) $\sqrt{\frac{72}{25}}$;
д) $\sqrt{12\frac{1}{2}}$; е) $\sqrt{1\frac{1}{4}}$; ж) $\sqrt{\frac{x^3}{9}}$; з) $\sqrt{\frac{7a}{16b^2}}$;
и) $\sqrt{\frac{3m^3n^2}{4a^2b}}$; к) $\sqrt{\frac{25x^2y^3}{mn^7}}$; л) $\sqrt{\frac{0,1x}{10y^2}}$; м) $\sqrt{\frac{5m^3}{0,5n}}$.

163. Вычислите:
а) $\sqrt{\frac{49}{81}}$; б) $\sqrt{\frac{64}{100}}$; в) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$; г) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; д) $\sqrt{\frac{169}{841}}$.

164*. Вынесите множитель из-под знака корня:
а) $\sqrt{\frac{1}{2}}$; б) $\sqrt{\frac{1}{3}}$; в) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; г) $\sqrt{\frac{3}{5}}$; д) $\sqrt{\frac{6}{7}}$;
е) $\sqrt{\frac{8}{12}}$; ж) $\sqrt{\frac{1}{6a}}$; з) $\sqrt{\frac{1}{3x}}$; и) $\sqrt{\frac{a}{m}}$; к) $\sqrt{\frac{n}{p}}$.

165. Преобразуйте выражение так, чтобы под знаком корня стояло целое число:
а) $\sqrt{3\frac{1}{3}}$; б) $\sqrt{1\frac{5}{6}}$; в) $\sqrt{2\frac{1}{5}}$; г) $\sqrt{2\frac{1}{3}}$; д) $\sqrt{8\frac{1}{3}}$.

Например: $\sqrt{2\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{5}{2}}=\sqrt{\frac{10}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

166. Зная приближенное значение $\sqrt{6} \approx 2{,}449$, вычислите приближенно:

а) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; б) $\sqrt{\frac{3}{2}}$; в) $\sqrt{\frac{3}{8}}$; г) $\sqrt{\frac{2}{27}}$.

167. Освободитесь от знака корня в знаменателе:

а) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{6}}$; б) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$; в) $\frac{\sqrt{7x}}{\sqrt{7}}$; г) $\frac{\sqrt{6x}}{\sqrt{2x}}$;

д) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{6x}}$; е) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5x}}$; ж) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$; з) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

168. Сравните числа:

а) $3\sqrt{2}$ и $2\sqrt{3}$; б) $10\sqrt{20}$ и $20\sqrt{10}$;

в) $3\sqrt{0{,}5}$ и $2\sqrt{0{,}5}$; г) $5\sqrt{0{,}3}$ и $7\sqrt{0{,}3}$;

д) $3\sqrt{10}$ и $4\sqrt{6}$; е) $6\sqrt{3}$ и $5\sqrt{4}$;

ж) $7\sqrt{5}$ и $5\sqrt{7}$; з) $2\sqrt{30}$ и $5\sqrt{5}$;

и) $12\sqrt{10}$ и $10\sqrt{12}$.

169. Расположите в порядке возрастания числа:

а) $\sqrt{32}$, $\sqrt{30}$, $3\sqrt{3}$, $5\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{72}$;

б) $0{,}2\sqrt{48}$, $0{,}9\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{12}$, $1\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

170. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\frac{1}{2}\sqrt{8}$; б) $\frac{1}{3}\sqrt{27}$; в) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{27}{8}}$; г) $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{96}{5}}$.

171. Упростите выражение:

а) $2\sqrt{2}+3\sqrt{2}$;

б) $2\sqrt{8}-3\sqrt{2}$;

в) $\sqrt{a}-5\sqrt{a}$;

г) $a\sqrt{x}-3\sqrt{x}$;

д) $2\sqrt{a}+3\sqrt{a}-\sqrt{4a}$;

е) $\sqrt{2}+3\sqrt{32}+\frac{1}{2}\sqrt{128}-6\sqrt{18}$;

ж) $(3\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{50}-2\sqrt{72})\cdot\sqrt{2}$;

з) $(7\sqrt{2}-5\sqrt{6}-3\sqrt{8}+4\sqrt{20})\cdot 3\sqrt{2}$;

и) $(8+3\sqrt{5})(2-\sqrt{5})$;

к) $(3-\sqrt{2})(2+3\sqrt{2})$;

л) $(2\sqrt{6}+5\sqrt{3}-7\sqrt{2})(\sqrt{6}-2\sqrt{3}+4\sqrt{2})$;

м) $(\sqrt{12}-1)(\sqrt{12}+1)$;

н) $(7-\sqrt{3})(\sqrt{3}+7)$; о) $(\sqrt{20}-3)(3+2\sqrt{5})$.

172. Разложите на множители:

а) $\sqrt{x}+x$; б) $a-\sqrt{a}$; в) $a\sqrt{3}-b\sqrt{3}$;
г) $3\sqrt{a}-3\sqrt{b}$; д) $x\sqrt{y}-y\sqrt{x}$; е) $m\sqrt{n}+n\sqrt{m}$;
ж) $\sqrt{a^3}+2a$; з) $3mn-\sqrt{m^3n^2}$; и) $xy-\sqrt{x^2y}$.

173. Сократите дробь:

а) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{10}$; б) $\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; в) $\frac{\sqrt{5}+5}{\sqrt{5}}$;

г) $\frac{7\sqrt{3}-21}{14\sqrt{3}}$; д) $\frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}$; е) $\frac{m-\sqrt{m}}{2\sqrt{m}}$.

174. Возведите в степень:

а) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$; б) $(a-b\sqrt{x})^2$; в) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$;
г) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$; д) $(1+3\sqrt{2})^2$; е) $(-1+4\sqrt{3})^2$.

175*. Освободитесь от иррациональности в знаменателе:

а) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$; б) $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$; в) $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$;

г) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$; д) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; е) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ I

1. Множества

Множество — это собрание каких-либо предметов, вещей, понятий, называемых его *элементами*. В математике это множества чисел (натуральных, целых, действительных и др.), множества точек, фигур и т. п.

Множества обозначают латинскими буквами A, B, C, ... Если a является элементом множества A, то пишут $a \in A$ и говорят «a принадлежит A». Если b не является элементом множества A, то пишут $b \notin A$ и говорят «b не принадлежит A».

Если любой элемент множества A является элементом множества B, то A называют *подмножеством* множества B. Пишут $A \subset B$ и говорят «A подмножество B».

Если A состоит только из одного элемента a, то различают множество $A=\{a\}$ и элемент a множества $\{a\}$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называют *пустым множеством*. Его обозначают знаком $\varnothing$ и считают, что пустое множество является подмножеством любого множества.

Множество, состоящее из конечного числа элементов, называют *конечным*. Элементы конечного множества, состоящего из n элементов, можно занумеровать:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n.$$

Множество называют *бесконечным*, если для любого сколь угодно большого натурального n в этом множестве найдется более чем n элементов.

Например, множество $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

бесконечно. Множество $\boldsymbol{R}$ действительных чисел тоже бесконечно.

Объединением множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих либо множеству A, либо множеству B. Объединение множеств A и B обозначают $A \cup B$. Знак $\cup$ происходит от первой буквы латинского слова *union* (объединение, союз).

Пересечением множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов, каждый из которых принадлежит и множеству A, и множеству B. Пересечение множеств A и B обозначают $A \cap B$.

Например, пусть $A=[0;\ 2]$, $B=[1;\ 3]$. Тогда

$$A \cup B=[0;\ 2] \cup [1;\ 3]=[0;\ 3],$$
$$A \cap B=[0;\ 2] \cap [1;\ 3]=[1;\ 2].$$

Говорят, что множества A и B имеют равные (одинаковые) мощности, если между элементами $a \in A$ и $b \in B$ можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Например, между элементами множества $A=\{1, 2, 3\}$ и множества $B=\{1, 4, 9\}$ можно установить взаимно-однозначное соответствие

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \uparrow\downarrow & \uparrow\downarrow & \uparrow\downarrow \\ 1 & 4 & 9 \end{array}$$

Эти множества имеют равные мощности.

Говорят, что мощность множества A меньше мощности множества B, если между элементами этих множеств нельзя установить взаимно-однозначное соответствие, но существует подмножество $B' \subset B$, такое, что между элементами A и B' можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Если A и B — конечные множества и A состоит из n_1 элементов, а B — из n_2 элементов, то, очевидно, мощности A и B равны, если $n_1=n_2$, и мощность A меньше мощности B, если $n_1<n_2$.

Мощность конечного множества A меньше мощности бесконечного множества B: ведь A состоит из конечного числа элементов, а в B существует больше чем n элементов для любого натурального n.

Множество $\boldsymbol{N}$ всех натуральных чисел имеет мощность одинаковую с множеством всех четных натуральных чисел. Ведь имеет место взаимно-однозначное соответствие

$$n \leftrightarrows 2n, \quad n=1, 2, 3, \ldots .$$

Получился пример бесконечного множества, имеющего одинаковую мощность со своей частью.

Вот еще пример. Множество всех натуральных чисел и множество всех целых неотрицательных чисел имеют одинаковую мощность. Взаимную однозначность между элементами этих множеств можно осуществить так:

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, \ldots \\ \uparrow\downarrow & \uparrow\downarrow & \uparrow\downarrow & \uparrow\downarrow & \uparrow\downarrow \\ 0, & 1, & 2, & 3, & 4, \ldots \end{array}$$

Уравнение $a+x=b$, где a и b — натуральные числа, не всегда разрешимо, т. е. не всегда имеет решение в множестве натуральных чисел, но всегда имеет решение в множестве целых чисел.

Уравнение $a+x=b$, где a и b — обыкновенные дроби, не всегда разрешимо в множестве обыкновенных дробей, но всегда имеет решение в множестве рациональных чисел.

Уравнение $ax=b$, где a и b — целые числа и $a\neq 0$, не всегда разрешимо в множестве целых чисел, но всегда разрешимо в множестве рациональных чисел.

Если данная арифметическая операция (сложение, вычитание, умножение, деление) применима к двум числам из данного множества и в результате дает число из этого же множества, то говорят, что *множество замкнуто относительно этой операции*. В противном случае говорят, что оно *незамкнуто относительно этой операции*.

Например, множество натуральных чисел замкнуто относительно сложения и умножения, незамкнуто относительно вычитания и деления; множество целых чисел замкнуто относительно сложения, вычитания и умножения, незамкнуто относительно деления; множество рациональных чисел замкнуто относительно всех арифметических операций (деление на нуль запрещено).

Принцип Дирихле. Пусть A — конечное множество из n натуральных чисел, каждое из которых не превышает число k, и $k<n$. Тогда в A есть равные числа. Ведь если бы все числа множества A были различны, то среди них обязательно было бы число, большее k, но по условию этого нет.

Принцип Дирихле был применен ранее при доказательстве периодичности десятичного разложения рационального числа.

Прямым произведением $A\times B$ множеств A и B называют множество всех пар $(x;\ y)$, где $x\in A$, $y\in B$.

Например, координатную плоскость $\boldsymbol{R}_2$ можно рассматривать как прямое произведение $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}'$ двух действительных осей $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{R}'$, где $x\in\boldsymbol{R}$, $y\in\boldsymbol{R}'$.

Если конечные множества A и B имеют m и n элементов соответственно, то их прямое произведение содержит $m\cdot n$ элементов, так как с каждым из элементов множества A можно образовать n пар с элементами множества B.

176. $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$ соответственно множества натуральных, целых, рациональных и действительных чисел.

а) Запишите, используя принятые обозначения, какому из этих множеств принадлежит, а какому не принадлежит число:

1) 3; 2) -5; 3) $\frac{3}{7}$; 4) π; 5) $\sqrt{2}$.

б) Запишите, используя принятые обозначения, подмножеством каких из множеств $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$ является множество:

1) $\boldsymbol{N}$; 2) $\boldsymbol{Z}$; 3) $\boldsymbol{Q}$; 4) $\boldsymbol{R}$.

в) Упростите запись:

1) $\boldsymbol{N} \cup \boldsymbol{Z}$; 2) $\boldsymbol{N} \cap \boldsymbol{Z}$; 3) $\boldsymbol{Z} \cup \boldsymbol{Q}$; 4) $\boldsymbol{Z} \cap \boldsymbol{Q}$.

177. Даны множества: $A=\{1, 2, 3\}$ и $B=\{2, 3, 4, 5\}$.

а) Из каких элементов состоит множество:

1) $A \cup B$; 2) $A \cap B$; 3) $A \times B$?

б) Составьте множество C, состоящее из пяти элементов, для которого выполняется условие: $A \cap C = C \cap B$.

в) Запишите все подмножества множеств A и B, определите число подмножеств каждого из этих множеств.

178. Даны два множества: $A=[1; 3]$ и $B=[2; 4]$.

а) Изобразите на координатной оси множество:

1) $A \cup B$; 2) $A \cap B$.

б) Изобразите в системе xOy все точки, координаты которых $(x; y)$ являются элементами множества $A \times B$.

179*. Докажите, что:

а) множества $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{Z}$ имеют одинаковую мощность;

б) множества точек двух любых отрезков имеют одинаковую мощность;

в) множества $(0; 1)$ и $\boldsymbol{R}$ имеют одинаковую мощность.

180. Является ли замкнутым относительно операции сложения, вычитания, умножения, деления множество:

а) четных натуральных чисел;

б) нечетных натуральных чисел;

в) четных целых чисел;

г) нечетных целых чисел?

2. Исторические сведения

Алгебра оперирует с буквенными выражениями. Буква в алгебре часто означает произвольное число, принадлежащее некоторому множеству чисел. Отсюда небольшой шаг к тому, чтобы под буквой в алгебре понимать переменную величину, пробегающую некоторое множество чисел. Величины, связанные между собой, например, при помощи алгебраического равенства, определяют функцию.

Мы уже отмечали, что определение функции, данное в этом учебнике, принадлежит великому русскому математику Н. И. Лобачевскому (1792—1856) и немецкому математику П. Дирихле (1805—1859).

Н. И. Лобачевский был профессором и ректором Казанского университета. Он создал новую геометрию, носящую теперь его имя. Однако Н. И. Лобачевский интересовался не только геометрией, он внес также существенный вклад в математический анализ. Отвечая на вопрос, что такое функция, он дал следующее определение:

«Это общее понятие требует, чтобы функцией от x называть число, которое дается для каждого x и вместе с x постепенно изменяется. Значение функции может быть дано аналитическим выражением, или условием, которое подает средства испытывать все числа и выбирать одно из них, или, наконец, зависимость может существовать и оставаться неизвестной. Обширный вид теории допускает существование зависимости только в том смысле, чтобы числа, одно с другим в связи, принимать как бы данными вместе».

Система координат дает возможность изобразить функцию графически — в виде линии. И наоборот может оказаться, что линия, изображенная в системе координат, есть график некоторой функции. Но тогда изучение линии может быть сведено к изучению соответствующей функции. Таким образом мы изучали прямую, параболу, гиперболу и в дальнейшем будем изучать другие линии.

Впервые метод координат к изучению геометрических вопросов применил французский математик и философ Р. Декарт (1596—1650). Это привело к созданию новой науки — аналитической геометрии. Например, графические методы решения линейных уравнений относятся к аналитической геометрии.

Слово «координаты» составлено из двух латинских слов: *со (сит)* — приставка, означающая «совместно», и *ordinatus*, что значит «упорядоченный», «определенный». Значит, координаты — это заданные совместно в определенном порядке числа.

Еще ученые Вавилона (более 4000 лет назад) умели находить приближенное значение квадратного корня из любого натурального числа. Правило, применявшееся в Вавилоне, таково: чтобы извлечь корень из натурального числа c, его разлагают на сумму a^2+b (число a должно быть наибольшим, для которого $a^2<c$), тогда квадратный корень из c приближенно вычисляют по формуле

$$\sqrt{c}=\sqrt{a^2+b}\approx a+\frac{b}{2a}.$$

Например:

$$\sqrt{1620}=\sqrt{40^2+20}\approx 40+\frac{20}{2\cdot 40}=40+\frac{1}{4}=40{,}25.$$

Грекам был известен вавилонский метод приближенного нахождения квадратного корня. Например, у Герона Александрийского написано:

$$\sqrt{160}=\sqrt{144+16}\approx 12+\frac{16}{2\cdot 12}=12\frac{2}{3}.$$

Существует и точный способ извлечения квадратного корня из числа, являющегося квадратом натурального числа. Он был известен в России еще во времена Л. Ф. Магницкого.

Запишем подробнее этот способ извлечения квадратного корня:

$$\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{6'55'36}=256 \\
 & \underline{4} \\
45 & 255 \\
5 & \underline{225} \\
506 & 3036 \\
6 & \underline{3036} \\
 & \quad 0
\end{array}$$

Цифры данного числа разобьем на пары. Из числа 6 извлечем квадратный корень, получим 2 (с недостатком). Этот результат возведем в квадрат и полученное число вычтем из числа 6, снесем следующую пару цифр 55. Слева от числа 255 напишем удвоенный результат (4) и припишем к нему такую цифру, чтобы при умножении полученного числа на эту цифру получилось число, меньшее или равное числу 255. Припишем 5, так как $45\cdot 5=225<255$, а $46\cdot 6=276>255$. Вторая цифра результата 5. Вычислим разность $255-225=30$ и снесем следующую пару цифр 36. Слева от числа 3036 напишем удвоенный результат (50) и припишем к нему такую цифру, чтобы при умножении полученного числа на эту цифру получилось число, меньшее или равное числу 3036. Припишем 6, так как $506\cdot 6=3036$. Третья цифра результата 6.

Ответ: $\sqrt{65536}=256$.

3. Задания для повторения

Вычислите **(181—182)**:

181. а) $(+1)+(-2)+(-4)+(+5)$;

б) $(-3)+(+1)+(-2)+(-3)+(+4)+(+3)$;

в) $(8{,}24-13{,}73)\cdot\left(0{,}2-\frac{1}{5}\right)$;

г) $0{,}2+0{,}02+0{,}002+0{,}0002$;

д) $-\frac{1}{100}-\frac{1}{10}-\frac{1}{1000}-\frac{1}{10000}$;

е) $(-0{,}014)+4{,}6+(-0{,}086)$.

182. а) $48\cdot(0{,}6\cdot5-2{,}875)\cdot0{,}25$;
б) $7\cdot4+(0{,}22:11+0{,}58)$;
в) $0{,}09\cdot37-1{,}37-1{,}96$;
г) $0{,}44\cdot25+0{,}75\cdot3{,}2$;
д) $(64\cdot4\cdot0{,}125-7{,}8)\cdot12$;
е) $(1{,}215+1{,}499+1{,}75)\cdot99$;
ж) $4{,}25\cdot3+1{,}25:5$;
з) $8{,}48:4-0{,}3\cdot0{,}4$;
и) $2{,}25:(10-1:0{,}2)$;
к) $(1{,}24+3{,}08):5$;
л) $(1{,}075-1{,}05):0{,}25$;
м) $(0{,}072:0{,}5):0{,}012$.

183. Найдите значение числового выражения:
а) $4{,}575:0{,}005+8{,}5:0{,}1$;
б) $21{,}5:(0{,}105+0{,}02)$;
в) $15{,}2:1{,}9+0{,}51:0{,}17+0{,}48:0{,}08$;
г) $5:4-4:5+0{,}5:0{,}4-0{,}4:0{,}5$;
д) $4\frac{2}{21}\cdot10-19\frac{20}{21}$;
е) $24\frac{8}{41}:4-18\frac{5}{41}:3$;
ж) $\frac{3}{4}:\frac{5}{6}+2\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}-1:1\frac{1}{9}$;
з) $7\frac{1}{2}\cdot2\frac{2}{3}-12\frac{1}{4}:\frac{7}{2}+3\frac{3}{8}+2\frac{3}{4}$.

Вычислите **(184—186)**:

184. а) $2\frac{3}{4}:\left(1\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right):3\frac{1}{6}$;
б) $\left(\frac{2}{15}+1\frac{7}{12}\right)\cdot\frac{30}{103}-\left(2:2\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{9}{32}$;
в) $\left(\frac{1}{2}+0{,}8-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(3+5\frac{8}{25}-0{,}12\right)$;
г) $\left(2\frac{3}{4}+0{,}15-1\frac{8}{25}\right):\left(2\frac{1}{2}-1\frac{3}{4}+0{,}04\right)$;
д) $\left(2{,}314-\frac{1}{4}\right):\frac{1}{50}+\left(1\frac{11}{16}+0{,}7125\right):3$;
е) $1{,}456:\frac{7}{25}+\frac{5}{16}:0{,}125+4\frac{1}{2}\cdot0{,}8$;
ж) $3\frac{3}{4}\cdot1\frac{1}{5}+(2{,}55+2{,}7):\left(0{,}1-\frac{1}{80}\right)$;
з) $3{,}075:1{,}5-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{25}+3{,}26\right)$;
и) $\left(1\frac{11}{24}+\frac{13}{36}\right)\cdot1{,}44-\frac{8}{15}\cdot0{,}5625$;
к) $2{,}88\cdot\frac{35}{72}+\left(1{,}0625-\frac{5}{12}\right)\cdot16$.

185. а) $\dfrac{0{,}72-0{,}104-0{,}112\cdot0{,}5}{0{,}063:1{,}26\cdot1{,}4}$;
б) $\dfrac{28{,}4\cdot2{,}5-1{,}34}{1{,}08:1{,}5+6{,}3:0{,}28}$;
в) $\dfrac{20{,}15-6\cdot0{,}5+16{,}3}{(0{,}2+11{,}8)\cdot0{,}5}$;
г) $\dfrac{(7{,}63-5{,}13)\cdot0{,}4}{3{,}17+6{,}83}$.

186. а) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}+0{,}4+0{,}375\right)\cdot\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}\cdot75}$;
б) $\dfrac{2{,}4\cdot3\frac{3}{4}+2\frac{2}{11}\cdot4{,}125}{5\frac{5}{6}\cdot2\frac{4}{7}}$;

в) $\dfrac{3,5+4\frac{2}{3}+2\frac{2}{15}}{1\frac{1}{20}+4,1}$; г) $\dfrac{3\frac{1}{3}\cdot 1,9+19,5:4\frac{1}{2}}{\frac{62}{75}-\frac{4}{25}}$;

д) $\dfrac{\left(1,5+2\frac{1}{3}+3\frac{3}{4}\right)\cdot 3,3}{14-15\frac{1}{6}:2}$; е) $\dfrac{\left(0,3125\cdot 1\frac{1}{5}+\frac{11}{40}\right):1,3}{\left(\frac{18}{25}-0,39\right):\frac{33}{50}}$.

187. а) Составьте таблицу квадратов натуральных чисел от 1 до 20.

б) Сколько цифр может иметь квадрат однозначного числа, двузначного числа?

в) Сколько цифр может иметь квадрат трехзначного, четырехзначного, n-значного числа?

188. Выбрав удобный единичный отрезок, укажите на координатной оси числа:

а) 1; 0,1; 0,3; 0,5; 1,2;

б) -2; $-1,5$; $-0,5$; $-0,2$; $-0,05$;

в) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{3}{8}$;

г) $-1\frac{1}{3}$; $-1\frac{1}{6}$; $-\frac{2}{3}$; $-\frac{5}{6}$; $-\frac{11}{12}$.

189. На числовой прямой отмечено несколько точек. Сумма чисел, соответствующих этим точкам, равна $-1,5$. Каждую из указанных точек переместили по координатной оси на две единицы влево, после чего сумма чисел стала равной $-15,5$. Сколько было точек?

190. а) Представьте в виде произведения степеней простых чисел произведение $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 13\cdot 14\cdot 15$.

б) Найдите наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель для чисел:

1) $5^2\cdot 7^4$ и $490\cdot 175$; 2) $2^5\cdot 3\cdot 7$, $3^4\cdot 5^4\cdot 7^2$ и 10000.

в) На какую наибольшую степень числа 7 делится произведение $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 99\cdot 100$?

191. а) Квадраты каких неравных чисел равны?

б) В каком случае $(a+b)^2$ не положительное число?

в) Между какими целыми числами заключены квадраты всех правильных положительных дробей?

192. Запишите выражение, используя обозначение степени:

а) $7\cdot 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7$; б) $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$;

в) $\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)$; г) $1,3\cdot 1,3\cdot 1,3\cdot 1,3\cdot 1,3$;

д) $a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot b$; е) $x\cdot y\cdot x\cdot x\cdot x\cdot y\cdot y\cdot y$;

ж) $\left(\frac{m}{4}\right)\cdot\left(\frac{m}{4}\right)\cdot\left(\frac{m}{4}\right)\cdot\left(\frac{m}{4}\right)$; з) $(ab)\cdot(ab)\cdot(ab)$;

и) $(x+y)\cdot(x+y)$; к) $\frac{m-n}{3}\cdot\frac{m-n}{3}\cdot\frac{m-n}{3}$.

193. Упростите выражение:

а) $a^3 \cdot a^2$; б) $b \cdot b^2 \cdot b^3$; в) $y \cdot y^2 \cdot y^3 \cdot y^4$;

г) $ab \cdot ab^2$; д) $x^2y \cdot x^3y^2$; е) $2xy \cdot 4x^2y^3$;

ж) $\frac{2}{3} x^2y^3z \cdot 2\frac{1}{3} x^3yz$;

з) $\frac{3}{4} a^3bc^2 \cdot 2\frac{1}{2} abc^2$.

194. Используя свойства степени, раскройте скобки:

а) $(a^2)^3$; б) $(a^3)^3$; в) $(x^4)^2$; г) $(x^2)^4$;

д) $(2a^2)^2$; е) $(3b^5)^2$; ж) $(xy^2)^3$; з) $(a^2bc^3)^2$;

и) $\left(\frac{1}{2} x^7\right)^4$; к) $\left(\frac{3}{4} y^5\right)^3$; л) $(0{,}5a)^2$; м) $(1{,}2z^4)^2$;

н) $(ab^2c^3)^4$; о) $(3ab)^2$; п) $(2ab^5)^6$; р) $(1{,}1a^2b^7c^{11})^4$.

195. Сравните:

а) 10^{20} и 90^{10}; б) $0{,}1^{10}$ и $0{,}3^{20}$.

Упростите выражение (**196—200**):

196. а) $m^3 \cdot m^2 + m \cdot m^4$; б) $x^6 \cdot x \cdot x^2 + x^3 \cdot x^3 \cdot x^3$;

в) $2x \cdot xy - 3x^2 \cdot \frac{1}{2} y$; г) $\frac{1}{3} p^2q \cdot 6q^2 - 7pq^2 \cdot \frac{1}{5} pq$;

д) $(2mn^2)^3 - 3m^2n^6m$; е) $(5xy^3)^2 - (2xy^3)^2$;

ж) $(3x^2y^4)^3 + 7x^4y^3 \cdot \frac{1}{14} x^2y^9$; з) $(0{,}8a^2b)^2 - 3ab^2 \cdot 0{,}5a^3$.

197. а) $12ab + 5ab - 7ab$; б) $8xy - yx + 6xy$;

в) $2a^2 - 1\frac{1}{3} a^2 - 5\frac{2}{3} a^2$; г) $0{,}2pq + 7{,}9pq - 5{,}3qp$;

д) $2m^3n^2 - 5n \cdot 2m^3 \cdot n + 3m^3 \cdot n \cdot n$;

е) $5a^2b^2b - ab \cdot 3ab^2 - 2ab^2 \cdot 3ba$;

ж) $7x - (x + 5)$; з) $12a - (3b - 5a)$;

и) $(6m^2 - 2n) - (5n - m^2)$; к) $(3p + 10q^2) - (2q^2 + 5p)$.

198. а) $(a + b - c) \cdot 4$; б) $3(a - b + c)$;

в) $2x \cdot (-7a - 3b + 2c)$; г) $(3a^2b - 2ab^2 + b^3) \cdot 2a^2b^2$;

д) $(-2abc) \cdot (5a - 7b - 3c)$;

е) $(-5ab + 7ac - bc) \cdot (-2abc)$;

ж) $(2a - 3b) \cdot (3x - 2y)$; з) $(5a - 7b) \cdot (-8y + 2x)$;

и) $(5a - b) \cdot (-2a - 3b)$; к) $(-3b - 5b) \cdot (7a - b)$.

199. а) $(3ab - 2ac) - (5ab - 7ac) + (2ac - 3ab) - (7ac - 5ab)$;

б) $(4m - 2p + 3q) - (4p - 2q + 3m) + (4q - 2m + 3p)$;

в) $5x - 3y - (3x + 6y) + (7x - y) - (8x - 15y)$;

г) $20a - (4b - 5c) + (-17a + 3b - c) - (2a - 2b - 16c)$.

200. а) $x(x + y) - y(x - y)$; б) $2(a + b) + 3(a - b)$;

в) $3(x - 2y) + 2(x - 3y)$; г) $m(p + 2q) - p(m - 3q)$;

д) $(a+2)(a-1)-(a+1)(a-2)$;
е) $(x+4)(x-2)-(x+2)(x-1)$;
ж) $(a+2)(a-1)-(a+3)(a-2)$;
з) $(n+7)(n-5)-(n+9)(n-7)$;
и) $(x^2-2x+5)(x^2+x-3)$;
к) $(x^2-3x+7)(-3+5x+2x^2)$.

Представьте в виде многочлена **(201—202)**:

201. а) $(x+y)^2$; б) $(a-8)^2$; в) $(2a-3b)^2$;
г) $\left(xy+\frac{1}{2}y\right)^2$; д) $(5m^2-2n^3)^2$; е) $(0{,}2p^3+3q^4)^2$.

202. а) $(y+x)^3$; б) $(m-n)^3$; в) $(5+a)^3$;
г) $(3a-b)^2$; д) $(10-x^2)^3$; е) $(x^2+y^2)^3$.

Преобразуйте в квадрат двучлена **(203—204)**:

203. а) x^2+2x+1; б) a^2-6a+9;
в) $4-4x+x^2$; г) $49x^2-14x+1$;
д) x^6+4x^3+4; е) x^4+10x^2+25.

204. а) $x^2+x+\frac{1}{4}$; б) $0{,}09+0{,}6a+a^2$;
в) $121x^4+44x^2+4$; г) $2{,}56k^2-9{,}6kp+9p^2$;
д) $64a^2b^2+48abc+9c^2$; е) $9a^2b^4+30ab^2c+25c^2$.

Разложите на множители **(205—207)**:

205. а) $4ax-2bx$; б) $2a^2-2a$;
в) $48xy-3bxy^2$; г) $85ab-170a$;
д) $mx-nx+px$; е) $8abx-6acy-10a$;
ж) $14anx-21bny-7n$; з) $63xy-84y^2+98y$.

206. а) m^2-n^2; б) $1-x^2$; в) $64x^2-1$;
г) $81-9a^2$; д) m^4-n^2; е) $121-9p^4$;
ж) $9a^2b^2-y^2$; з) $4a^2b^2-9c^2$; и) $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}y^2$;
к) $0{,}81b^4-a^2c^2$; л) a^3+b^3; м) x^3-1;
н) a^6+b^6; о) m^6-n^6; п) $27p^3-8q^3$.

207. а) $(x+1)^2-4x^2$; б) $x^2+2xy+y^2-1$;
в) $(a-4)^2-16$; г) $p^2-2pq+q^2-4$;
д) $36m^2-(m+9)^2$; е) $9-x^2-2xy-y^2$;
ж) $81q^2-(p+6q)^2$; з) $4-a^2-2ab-b^2$.

208. Сократите дробь:

а) $\frac{24}{42}$; б) $\frac{168}{256}$; в) $\frac{26ax}{39a^2}$; г) $\frac{17x^2y^3}{51xy^5}$;

д) $\frac{16a^2b^3c^5}{24a^3bc^3}$; е) $\frac{120m^2n^5pq}{450m^5np^2q^4}$; ж) $\frac{x-1}{1-x}$; з) $\frac{6x^3y^2(a-b)}{9xy^3(b-a)}$.

209. Упростите выражение:

а) $\dfrac{2x-4y}{x^2-4y^2}$; б) $\dfrac{(3-a)^2}{a^2-3a}$; в) $\dfrac{m^2-n^2}{(n-m)^2}$; г) $\dfrac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$.

210. Преобразуйте выражение в алгебраическую дробь:

а) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2}$; б) $x-\dfrac{1}{a}$; в) $\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{1}{a+b}$;

г) $\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{x}$; д) $\dfrac{a}{x-1}-\dfrac{2}{1-x}$; е) $\dfrac{m}{m-n}+\dfrac{n}{n-m}$;

ж) $\dfrac{m}{n}\cdot\dfrac{n^2}{2m}$; з) $\dfrac{a}{2x}:\dfrac{3a}{8xy}$; и) $3a\cdot\dfrac{b}{a}$;

к) $7x:\dfrac{x^2}{2y^2}$; л) $\dfrac{a+1}{3}\cdot\dfrac{7a}{a+1}$; м) $\dfrac{x-2}{4x}:\dfrac{2-x}{3x^2}$.

211. а) Если a и b — стороны прямоугольника, то что определяют формулы $A=a\cdot b$, $D=2(a+b)$?

б) Если P — цена товара (стоимость 1 кг), а M — его количество (кг), то что выражает формула $A=P\cdot M$?

в) Если x — число мест в одном ряду зрительного зала кинотеатра, y — число рядов в этом зале, то что выражает формула $M=xy$?

г) Если k — сторона квадрата, то что выражают формулы $A=k^2$, $B=4k$?

д) Если v — скорость поезда, t — время движения, то что выражает формула $A=v\cdot t$?

212. Используя рисунок 32, объясните, что выражает формула:

$A=ab-a^2$; $A=ab+a^2$.

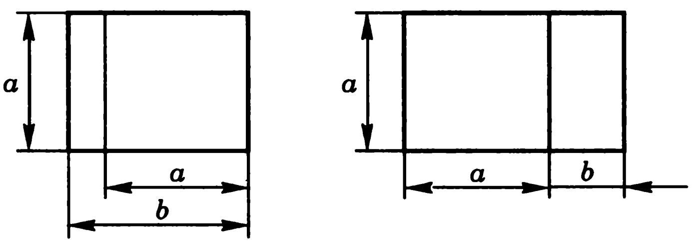


Рис. 32

213*. Считая a и b данными числами, решите уравнение относительно x:

а) $4x+a=6x-8$; б) $3x+a=4x-2b+3a$;

в) $5a+6x=8x-3a$; г) $7a-b-4x=3b+5x-2a$;

д) $2(x+a)=3(x-a)$; е) $5(x-b)=2(a-x)$;

ж) $a-(a+b)x=(2-a)x-(3+bx)$;

з) $3x-a(b+x)=a(b-x)-2(a-x)$.

Решите систему уравнений **(214—216)**:

214. а) $\begin{cases} x+y=13, \\ y=x-4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x+4y=230, \\ y=5x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 13x-14y=27, \\ 13x=2y+15; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 8x-9y=1, \\ 3y=4x+1; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x-3y=12, \\ 2x+4y=90; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x+y=8, \\ 3x+4y=7; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x-3y=4, \\ 5x+3y=-1; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 2x+5y=25, \\ 4x+3y=15; \end{cases}$

и) $\begin{cases} 4x+3y=-4, \\ 6x+5y=1; \end{cases}$ к) $\begin{cases} 2x-3y=5, \\ 7x+5y=2; \end{cases}$

л) $\begin{cases} 4x-7y=2, \\ 2x+3y=1; \end{cases}$ м) $\begin{cases} 4x+4y=1, \\ 3x+3y=-5. \end{cases}$

215. а) $\begin{cases} x-2y=5, \\ 2x+3y=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-y=2, \\ 2x+2y=5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x-5y=4, \\ 2x+6y=3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x+3y=2, \\ 5x-2y=3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=1, \\ \frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y=2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y=-5, \\ \frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y=1. \end{cases}$

216. а) $\begin{cases} \frac{1}{3}y=\frac{1}{2}x-1, \\ \frac{1}{4}y=\frac{2}{5}x-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-\frac{5}{3}y=4, \\ 3x-\frac{7}{2}y=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y=6, \\ 3x-4y=4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{x}{7}-\frac{y}{3}=-1, \\ \frac{5x}{3}-\frac{35y}{12}=0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3(3x-y)+\frac{2}{5}(x-2y)=17, \\ 5x+y=3; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 2(2y-x)+\frac{1}{7}(y+3x)=1, \\ 5y+x=7; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \dfrac{x+3y}{2}=\dfrac{x-2y}{3}+31, \\ x+y=\dfrac{3}{4}(x-y)+27; \end{cases}$ з) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x}{3}=1, \\ x-\dfrac{x+y}{2}=3; \end{cases}$

и) $\begin{cases} \dfrac{3x-2y}{5}+\dfrac{5x-3y}{3}=x+1, \\ \dfrac{2x-3y}{3}+\dfrac{4x-3y}{2}=y+1; \end{cases}$

к) $\begin{cases} \dfrac{2x-y+3}{3}-\dfrac{x-2y+3}{4}=4, \\ \dfrac{3x-4y+3}{4}+\dfrac{4x-2y-9}{3}=4. \end{cases}$

217. а) Как представить проценты в виде десятичной дроби?
б) Как заменить десятичную дробь процентами?
в) Как найти несколько процентов данного числа?
г) Как найти число по данным его процентам?

218. Определите:
а) 25% от 100; б) 50% от 1,2; в) 30% от 200;
г) 20% от 30; д) 6% от 30; е) 3% от 4,2.

219. а) Морская вода содержит 5% (по массе) соли. Сколько килограммов пресной воды нужно добавить к 50 кг морской воды, чтобы содержание соли в полученной воде составило 2%?

б) Сплав меди и олова массой 10 кг содержит 45% меди. Сколько чистого олова нужно добавить к этому сплаву, чтобы получившийся новый сплав имел 40% меди?

220. а) До просушки зерна влажность его была 20%. 10 ц этого зерна просушили, после чего его масса уменьшилась на 100 кг. Определите влажность зерна после просушки.

б) Хранившееся на складе зерно имело влажность 20%. После просушки влажность его стала 15%. Какова стала масса зерна после просушки, если при первоначальной влажности зерна было 50 т?

Замечание. Влажность зерна показывает содержание в нем воды в процентах.

221. а) При проверке влажность зерна оказалась равной 23%, а после просушки 12%. На сколько процентов стало легче зерно после просушки?

б) Семена попали под дождь и стали на 20% тяжелее. Когда их просушили, они потеряли в массе 20%. Вернулись ли они к первоначальной массе?

222*. Производительность труда рабочего при выполнении некоторой работы увеличилась на p%. На сколько процентов сократилось время выполнения этой работы, если:
а) $p=25$; б) $p=20$?

223*. а) Время изготовления некоторой детали уменьшилось на 40%. На сколько процентов увеличилась производительность труда?

б) Объем строительных работ увеличился на 80%. На сколько процентов нужно увеличить число рабочих для выполнения этой работы за то же время, если производительность труда будет увеличена на 20%?

224*. а) Цена книги снизилась на столько процентов, на сколько копеек она снизилась. Какова первоначальная цена книги?

б) Две автомашины разных марок имеют максимальные скорости 160 км/ч и 140 км/ч. На сколько процентов скорость второй машины меньше скорости первой? На сколько процентов скорость первой машины больше скорости второй?

225. На координатной оси укажите одно рациональное и одно иррациональное число, расположенные между числами:

а) 0,5 и 0,(5); б) 0,272999143... и 0,2730015... .

226. Каким числом — рациональным или иррациональным — является значение выражения:

а) $1+\sqrt{3}$; б) $1-\sqrt{5}$;

в) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$; г) $\sqrt{16}-\sqrt{23}$?

227. Укажите два иррациональных числа:

а) разность которых является рациональным числом;

б) произведение которых является рациональным числом;

в) сумма которых является рациональным числом.

228. Верно ли утверждение, что квадратный корень из рационального числа:

а) всегда является иррациональным числом;

б) может быть целым числом;

в) может быть конечной десятичной дробью;

г) может быть бесконечной периодической десятичной дробью?

229. Дана функция $y=x^2$. Какими числами — рациональными или иррациональными — являются абсциссы точек графика этой функции, если ординаты этих точек: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10? Найдите приближенные значения иррациональных абсцисс с недостатком с точностью до 0,01.

230. Найдите приближенно с недостатком значение выражения, ограничившись двумя знаками после запятой:

а) $1+\sqrt{3}$; б) $1+\sqrt{5}$; в) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$; г) $\sqrt{2}+\sqrt{7}$.

231. Сравните значения выражений (без вычисления корней):

а) $5\sqrt{12}$ и $3\sqrt{27}$; б) $\sqrt{27}$ и $3\sqrt{2}$;

в) $2\sqrt{50}$ и $3\sqrt{32}$; г) $3\sqrt{\frac{3}{8}}$ и $\sqrt{\frac{3}{2}}$;

д) $2\sqrt{\frac{4}{75}}$ и $3\sqrt{\frac{25}{243}}$; е) $5\sqrt{\frac{45}{72}}$ и $4\sqrt{\frac{45}{32}}$.

232. Упростите выражение:

а) $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$; б) $\sqrt{(5-\sqrt{5})^2}$;

в) $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$; г) $\sqrt{(\sqrt{10}-4)^2}$.

233. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{3(2-\sqrt{5})^2}$; б) $\sqrt{18(\sqrt{3}-2)^2}$;

в) $\sqrt{32(2-\sqrt{7})^4}$; г) $\sqrt{48(\sqrt{5}-3)^4}$.

234. Верно ли равенство:

а) $\sqrt{3\frac{3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}$; б) $\sqrt{6\frac{6}{35}}=6\sqrt{\frac{6}{35}}$;

в) $\sqrt{4\frac{1}{2}}=4\sqrt{\frac{1}{2}}$?

235. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\frac{2}{3}a\sqrt{72a^3b}$; б) $\frac{3}{x}\sqrt{\frac{a^5x^2}{18}}$; в) $x^3\sqrt{\frac{12a^2b}{49x^4}}$;

г) $\frac{x}{4}\sqrt{\frac{64a^2b^4}{81x^3y^5}}$; д) $\sqrt{\frac{(\sqrt{2}-2)^2}{8}}$; е) $\sqrt{\frac{20}{(1-\sqrt{3})^2}}$;

ж) $\sqrt{\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{5})^2}}$; з) $\sqrt{\frac{(\sqrt{7}-3)^2}{(\sqrt{10}-3)^2}}$.

Упростите выражение **(236—238)**:

236. а) $10\sqrt{\frac{2}{5}}-0{,}5\sqrt{160}+3\sqrt{1\frac{1}{9}}$;

б) $15\sqrt{\frac{3}{5}}-0{,}5\sqrt{60}+2\sqrt{3\frac{3}{4}}$;

в) $2\sqrt{8\frac{1}{2}}-\sqrt{136}-5\sqrt{1\frac{9}{25}}$;

г) $6\sqrt{2\frac{1}{3}}-\sqrt{84}+4\sqrt{1\frac{5}{16}}$.

237. а) $\left(2\sqrt{\frac{3}{5}}+\sqrt{\frac{3}{8}}\right)\left(\sqrt{\frac{3}{8}}-2\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$;

б) $\left(3\sqrt{\frac{5}{6}}-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\left(3\sqrt{\frac{5}{6}}+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$;

в) $(\sqrt{13+5\sqrt{4{,}2}}+\sqrt{13-5\sqrt{4{,}2}})^2$;

г) $(\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}})^2$.

238. а) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; б) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}-\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}}$;

в) $\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(4-\sqrt{15})}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; г) $\frac{(\sqrt{75}+\sqrt{50})(5-2\sqrt{6})}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

239. Представьте выражение в виде разности квадратов и разложите его на множители ($a>0$, $b>0$):

а) a^2-b; б) $a-b^2$; в) $a-b$; г) $a-1$;
д) $2-3a$; е) $5b-7$; ж) $ab-1$; з) $a-bx^2$.

240. Извлеките квадратный корень из двучлена, представив данное выражение в виде квадрата двучлена:

а) $3+2\sqrt{2}$; б) $4-2\sqrt{3}$; в) $7+2\sqrt{10}$;
г) $7+4\sqrt{3}$; д) $10-2\sqrt{21}$; е) $7-\sqrt{24}$.

241. Упростите выражение:

а) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}$; б) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$;
в) $\sqrt{7+\sqrt{24}}-\sqrt{7-\sqrt{24}}$;
г) $\sqrt{10-2\sqrt{21}}+\sqrt{10+2\sqrt{21}}$.

242. Освободитесь от иррациональности в знаменателе:

а) $\frac{2}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{6}{\sqrt{3}}$; в) $\frac{1}{\sqrt{x-y}}$; г) $\frac{a+b}{\sqrt{a+b}}$;
д) $\frac{x+3}{\sqrt{x^2-9}}$; е) $\frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}}$; ж) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$; з) $\frac{1}{1-\sqrt{2}}$;
и) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-5}$; к) $\frac{a}{\sqrt{a}-a}$; л) $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; м) $\frac{m-n}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$;
н) $\frac{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}-\sqrt{x+3}}$; о) $\frac{\sqrt{a-b}-\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}}$.

243. Докажите справедливость равенства:

а) $\frac{1}{3+2\sqrt{2}}+\frac{1}{3-2\sqrt{2}}=6$;
б) $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}-\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

244. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}+1\right):\left(1-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)$;
б) $\left(\sqrt{a}-\frac{1}{1+\sqrt{a}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}+1}{1-\sqrt{a}-a}$;
в) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y}$;
г) $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-6}-\frac{3}{\sqrt{m}+6}+\frac{m}{36-m}$.

245. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x}=3$; б) $\sqrt{x}=0$; в) $\sqrt{x}=-1$;

г) $\sqrt{2x}=1$; д) $\sqrt{4x-1}=1$; е) $\sqrt{x+2}=1$;

ж) $\sqrt{3x-8}=6$; з) $\sqrt{1+5x}=7$; и) $\sqrt{x-3}-2=0$.

246. Записали одну за другой четыре последовательные цифры, затем первые две поменяли местами. Полученное таким образом четырехзначное число является квадратом натурального числа. Найдите это число.

247*. Одновременно были зажжены две свечи одинаковой длины: одна свеча потолще (сгорающая за 4 ч), другая потоньше (сгорающая за 2 ч). Через некоторое время обе свечи потушили. Оказалось, что огарок толстой свечи в 3 раза длиннее огарка тонкой свечи. Сколько времени горели свечи?

248. а) Одна бригада может выполнить задание за 36 дней, а вторая — за 45 дней. За сколько дней выполнят это задание обе бригады, работая вместе?

б) Через первую трубу бассейн наполняется за 16 мин, а через вторую трубу — за 48 мин. За сколько минут наполнится бассейн, если открыть обе трубы?

в) Легковая машина проезжает расстояние между двумя городами за 42 мин, а грузовая — за 56 мин. Однажды эти машины выехали одновременно навстречу друг другу из этих городов. Через сколько минут они встретились?

249. Через первую трубу бассейн наполняется за a мин, через вторую трубу — за b мин. За сколько минут наполнится бассейн через обе эти трубы?

Решите задачу в общем виде, получите ответ для указанных значений a и b:

а) $a=12$, $b=36$; б) $a=14$, $b=35$.

250. Через первую трубу бассейн наполняется за a ч, через вторую трубу — за b ч, через третью трубу — за c ч. За сколько часов бассейн наполнится через три трубы при их совместной работе, если:

а) $a=21$, $b=24$, $c=28$; б) $a=12$, $b=20$, $c=30$?

251. Бак наполняют через три трубы: через первую трубу за a ч, через вторую трубу за c ч, а через все три трубы за x ч. За сколько часов бак наполнится через одну третью трубу, если:

а) $a=12$, $c=28$, $x=6$; б) $a=9$, $c=30$, $x=5$?

252. Некоторое расстояние автомобиль преодолел в гору со скоростью 42 км/ч, а с горы — со скоростью 56 км/ч. Какова средняя скорость движения автомобиля на всем участке пути?

Решение. Здесь требуется узнать, с какой постоянной скоростью можно проехать тот же путь за то же время.

Пусть длина участка пути равна s км. Тогда в оба конца автомобиль проехал $2s$ км, затратив на весь путь $\frac{s}{42}+\frac{s}{56}=\frac{s}{24}$ ч. Средняя скорость движения равна: $2s:\frac{s}{24}=48$ км/ч.

253. Некоторое расстояние автомобиль преодолевает в гору со скоростью a км/ч, а с горы — со скоростью b км/ч. Какова средняя скорость движения автомобиля на всем участке пути, если:

а) $a=40$, $b=60$; б) $a=30$, $b=45$?

254. Лодка от A до B плывет по течению a ч, а от B до A (против течения) b ч. Сколько часов будет плыть бревно от A до B, если:

а) $a=3$, $b=4$; б) $a=2$, $b=3$?

255. Даны два куска с различным содержанием олова. Первый, массой 300 г, содержит 20% олова. Второй, массой 200 г, содержит 40% олова. Сколько процентов олова будет содержать сплав, полученный из этих кусков?

256. Найдите процентное содержание p олова в сплаве, полученном из двух кусков массами m_1 и m_2, содержащих соответственно p_1 и p_2 процента олова, если:

а) $m_1=15$, $p_1=40$, $m_2=35$, $p_2=20$;

б) $m_1=35$, $p_1=40$, $m_2=15$, $p_2=20$.

257*. Докажите, что в предыдущей задаче из условия $p_1<p_2$ следует, что $p_1<p<p_2$.

258. Имеется два куска сплава олова и свинца. Первый, массой m_1 г, содержит p_1% олова, второй содержит p_2% олова. Сколько граммов от второго куска надо добавить к первому, чтобы получить сплав с содержанием олова p%, если:

а) $m_1=300$, $p_1=40$, $p_2=60$, $p=56$;

б) $m_1=180$, $p_1=45$, $p_2=70$, $p=60$?

259. Кусок сплава меди и цинка массой 36 кг содержит 45% меди. Сколько килограммов меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный новый сплав содержал 60% меди?

260. Имеется кусок сплава меди с оловом общей массой 12 кг, содержащий 45% меди. Сколько килограммов олова надо прибавить к этому куску сплава, чтобы получившийся новый сплав содержал 40% меди?

261. Сколько чистой воды нужно добавить к 300 г морской воды, содержащей 4% соли, чтобы получить воду, содержащую 3% соли?

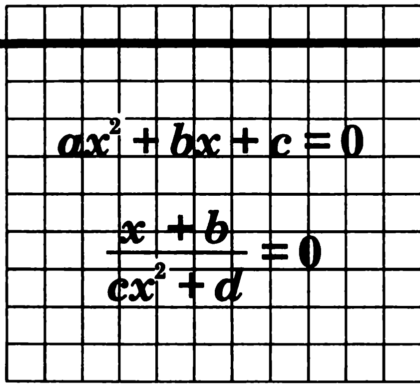
262. Сколько чистого серебра нужно добавить к 200 г серебра 835-й пробы, чтобы получить серебро 875-й пробы?

Замечание. 1 г сплава серебра 835-й пробы содержит 0,835 г серебра.

263. Имеются два куска, содержащие 60% и 40% олова. По скольку граммов от каждого куска надо взять, чтобы получить 600 г сплава, содержащего 45% олова?

264. Имеются два куска, содержащие p_1 и p_2 процента олова. По скольку граммов от каждого куска надо взять, чтобы получить m г сплава, содержащего p% олова, если:
а) $m=450$, $p_1=70$, $p_2=40$, $p=60$;
б) $m=600$, $p_1=80$, $p_2=65$, $p=75$?

265. *Из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого.* У некоторого человека были для продажи вина двух сортов. Первое ценою 10 гривен ведро, второе же по 6 гривен. Захотелось ему сделать из тех двух вин, взяв по части, третье вино, чтобы ему цена была по 7 гривен. Какие части надлежит из тех двух вин взять к наполнению ведра третьего вина ценою в 7 гривен?



ГЛАВА II

КВАДРАТНЫЕ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 4. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

4.1. Квадратный трехчлен

Многочлен относительно x вида

$$ax^2+bx+c, \tag{1}$$

где a, b, c — данные числа и $a \neq 0$, называют **квадратным трехчленом**. Число a называют коэффициентом при x^2, число b — коэффициентом при x, число c — свободным членом.

Число $D=b^2-4ac$ называют **дискриминантом квадратного трехчлена** (1).

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right]. \tag{2}$$

Доказательство. Вынося за скобки число a (по условию отличное от нуля) и выделяя в скобках полный квадрат, получим

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+2\cdot x\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]=$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right].$$

Отметим, что *равенство* (2) *есть тождество*, так как оно превращается в верное числовое равенство для любого числового значения x.

На практике обычно формулой (2) не пользуются, а в каждом конкретном случае повторяют рассуждения, используемые при доказательстве этой формулы.

Например:

а) $2x^2+4x+34=2(x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2-1^2+17)=2[(x+1)^2+16]$;

б) $3x^2+18x+27=3(x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2)=3(x+3)^2$;

в) $2x^2-4x-16=2(x^2-2\cdot x\cdot 1+1^2-1^2-8)=2[(x-1)^2-9]$.

Теорема 2. *Если дискриминант D квадратного трехчлена ax^2+bx+c положителен, то этот квадратный трехчлен можно разложить на множители:*

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2), \tag{3}$$

где

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}. \tag{4}$$

Доказательство. В теореме 1 показано, что справедливо равенство (2). Так как $D>0$, то существует квадратный корень из D и выполняется равенство

$$\frac{D}{4a^2}=\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2.$$

Следовательно,

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2\right]. \tag{5}$$

В квадратных скобках в правой части равенства (5) записана разность квадратов. Применив формулу разности квадратов, получим

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\sqrt{D}}{2a}\right]\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\sqrt{D}}{2a}\right]=$$

$$=a\left[x-\left(\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right)\right]\left[x-\left(\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right)\right].$$

Но тогда, если обозначить

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a},$$

то получим требуемое разложение (3).

Отметим, что *равенство* (3) *есть тождество*, так как оно превращается в верное числовое равенство для любого числового значения x.

Множители $(x-x_1)$ и $(x-x_2)$ называют *линейными множителями*, поэтому разложение (3) часто называют **разложением квадратного трехчлена на линейные множители**.

Отметим, что так как $D>0$, то эти линейные множители разные.

Пример. Разложим на линейные множители квадратный трехчлен

$$2x^2-3x+1. \tag{6}$$

Решение. Так как $D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot 1=1>0$, то согласно теореме 2 квадратный трехчлен (6) можно разложить на линейные множители.

Вычислим числа x_1 и x_2:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\cdot 2}=1,$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\cdot 2}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, $2x^2-3x+1=2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$.

Теорема 3. *Если дискриминант D квадратного трехчлена ax^2+bx+c равен нулю, то этот квадратный трехчлен можно разложить на два одинаковых линейных множителя.*

Доказательство. Как следует из теоремы 1, если $D=0$, то

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Это равенство и означает, что квадратный трехчлен разложен на два одинаковых линейных множителя.

Теорема 4. *Если дискриминант D квадратного трехчлена ax^2+bx+c отрицателен, то этот трехчлен отличен от нуля для любого значения x и его нельзя разложить на линейные множители.*

Доказательство. В самом деле, если $D<0$, то $\frac{-D}{4a^2}>0$, и так как $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geqslant 0$ для любого x, то выражение в квадратных скобках в равенстве (2) положительно для любого x:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{-D}{4a^2}\right)>0.$$

Умножим это неравенство на a и получим

$$ax^2+bx+c>0, \text{ если } a>0,$$

и

$$ax^2+bx+c<0, \text{ если } a<0.$$

Первое утверждение теоремы 4 доказано.

Второе утверждение докажем от противного.

Пусть дискриминант квадратного трехчлена ax^2+bx+c отрицателен ($D<0$) и этот трехчлен можно записать в виде произведения $a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 — действительные числа. Тогда при $x=x_1$ и $x=x_2$ это произведение равно нулю, а значит, и сам трехчлен равен нулю, что противоречит ранее доказанному. Следовательно, при условии $D<0$ квадратный трехчлен нельзя разложить на линейные множители.

Итак, квадратный трехчлен:

1) при $D>0$ разлагается на два разных линейных множителя;

2) при $D=0$ разлагается на два одинаковых линейных множителя;

3) при $D<0$ не разлагается на линейные множители.

266⁰. Что называют квадратным трехчленом, дискриминантом квадратного трехчлена?

267. Приведите пример квадратного трехчлена, дискриминант которого:

а) больше нуля; б) равен нулю; в) меньше нуля.

268⁰. Назовите коэффициенты a, b и c квадратного трехчлена:

а) $3x^2+4x+5$; б) $2x^2-5x-7$; в) $-5x^2+3x-1$;
г) $6x^2+x-2$; д) x^2-x+7; е) $-x^2+x+1$.

269. Составьте квадратный трехчлен с данными коэффициентами:

а) $a=3$, $b=4$, $c=5$; б) $a=5$, $b=-2$, $c=6$;
в) $a=1$, $b=-1$, $c=2$; г) $a=-1$, $b=3$, $c=-2$.

270. Вычислите дискриминант квадратного трехчлена:

а) $2x^2+5x+3$; б) $2x^2-5x+3$; в) $2x^2+5x-3$;
г) $2x^2-5x-3$; д) x^2-4x+5; е) x^2+6x+9;
ж) x^2+2x+1; з) $-3x^2+5x-2$; и) x^2+2x+2.

271. Выделите полный квадрат:

а) $x^2-4x+5=x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2-2^2+5=(x-2)^2+1$;
б) $2x^2+6x-5=2(x^2+3x-2{,}5)=$
$$=2\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2-2{,}5\right)=2((x+1{,}5)^2-4{,}75);$$
в) $x^2-8x+17$; г) x^2+4x+4; д) x^2+5x-6;
е) x^2-3x+2; ж) $2x^2-8x+7$; з) $-4x^2+4x-3$;
и) $3x^2-2x+1$; к) $3x^2-6x+1$; л) $-2x^2-8x+10$.

272⁰. Разлагается ли квадратный трехчлен на линейные множители, если его дискриминант:

а) положителен; б) равен нулю; в) отрицателен?

273⁰. Каким должен быть дискриминант квадратного трехчлена, чтобы он разлагался на линейные множители:

а) разные; б) одинаковые?

274. Выясните, разлагается ли квадратный трехчлен на линейные множители:

а) x^2-4x+3; б) x^2-4x+4; в) x^2+4x+5;
г) $3x^2-4x+1$; д) $5x^2-6x+1$; е) $4x^2+4x+2$.

275. Разложите квадратный трехчлен на линейные множители:

а) $2x^2-5x+3$; б) $3x^2+5x-2$; в) $5x^2-2x-3$;
г) x^2-7x+6; д) x^2+6x-7; е) x^2+x-2.

Указание. Воспользуйтесь равенством

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$.

276. Разложите квадратный трехчлен на линейные множители, если это возможно (если нет, то укажите причину):

а) $x^2+8x+15$; б) $4x^2-4x+1$; в) $2x^2-3x+4$.

277. Докажите, что значения квадратного трехчлена при любых значениях x отличны от нуля.

Например, $x^2+2x+3=x^2+2x+1+2=(x+1)^2+2>0$ *при любых* x;

$-x^2-4x-5=-(x^2+4x+4+1)=$
$=-((x+2)^2+1)<0$ *при любых* x.

а) $3x^2-x+1$; б) $-5x^2+2x-10$;
в) $-x^2+5x-7$; г) $x^2+6x+10$.

278. Докажите, что найдется такое значение x, при котором значение квадратного трехчлена x^2-7x+6:

а) положительно; б) отрицательно; в) равно нулю.

4.2. Понятие квадратного уравнения

Квадратным уравнением с неизвестным x называют уравнение, левая часть которого есть квадратный трехчлен относительно x, а правая — нуль.

Квадратное уравнение называют также **уравнением второй степени**.

Следующие уравнения

$$2x^2-3x-7=0, \quad 2x^2-3=0, \quad x^2-4x=0,$$
$$-x^2+11=0, \quad -5x^2+3x+5=0$$

служат примерами квадратных уравнений с неизвестным x.

Рассмотрим *квадратное уравнение с одним неизвестным*, записанное *в общем виде*

$$\mathbf{ax^2+bx+c=0,} \tag{1}$$

где a, b и c — заданные числа ($a\neq0$). Число a называют *коэффициентом при* x^2, число b — *коэффициентом при* x, число c — *свободным членом уравнения* (1). Выражения ax^2, bx и c называют *членами уравнения* (1). Число $D=b^2-4ac$ называют **дискриминантом квадратного уравнения** (1).

Так, в уравнении

$$2x^2-3x-7=0$$

2 — коэффициент при x^2, -3 — коэффициент при x, -7 — свободный член, $D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-7)=65$ — его дискриминант; в уравнении

$$x^2-3=0$$

1 — коэффициент при x^2, 0 — коэффициент при x, -3 — свободный член, $D=0^2-4\cdot 1\cdot(-3)=12$ — его дискриминант.

Напомним, что **корнем** (или решением) **уравнения** с неизвестным x *называют число, при подстановке которого в уравнение вместо x получается верное числовое равенство.*

Например, число 0 является корнем уравнения

$$2x^2-7x=0,$$

ибо если подставить 0 вместо x, то получим верное числовое равенство

$$2\cdot 0^2-7\cdot 0=0.$$

Решить уравнение — это значит найти все его корни или показать, что их нет. В следующих пунктах будет показано, как надо решать квадратное уравнение, т. е. находить его корни.

В дополнениях к главе II будут введены так называемые комплексные числа, тогда мы увидим, что уравнения, которые мы рассматриваем, *всегда имеют корни.* В одних случаях они являются действительными числами, в других — комплексными. Но сейчас речь о комплексных числах не идет, и мы будем говорить, что *данное уравнение не имеет корней*, если оно не имеет действительных корней.

При решении уравнений приходится умножать или делить обе части уравнения на не равное нулю число, а также переносить члены уравнения из одной его части в другую. В результате будет получаться уравнение, **равносильное** прежнему, т. е. уравнение, имеющее те и только те корни, что и прежнее уравнение. Доказательство этих утверждений такое же, как и для линейных уравнений.

279°. а) Какое уравнение называют квадратным уравнением?
б) Укажите среди следующих уравнений квадратные или равносильные квадратным:

1) $3x^2-2x+1=0$; 2) $4=x^2$;
3) $2x-8=0$; 4) $x(x-1)=3$;
5) $\frac{1}{x}-2=0$; 6) $x^2+3x=0$;
7) $-0{,}5x+\sqrt{3}\,x^2-7=0$; 8) $12x-3x^3+5=0$.

280⁰. Для квадратных уравнений в задании 279, б) определите коэффициенты a, b и свободный член c.

281⁰. Назовите члены квадратного уравнения и коэффициенты при x^2, при x и свободный член:

а) $2x^2+3x-5=0$; б) $x^2-5x+1=0$;
в) $x^2-9=0$; г) $x^2-9x=0$.

282. Составьте квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$, если его коэффициенты равны:

а) $a=2,\ b=3,\ c=4$; б) $a=3,\ b=-3,\ c=1$;
в) $a=-1,\ b=0{,}5,\ c=\frac{1}{3}$; г) $a=5,\ b=2,\ c=0$;
д) $a=1,\ b=0,\ c=7$; е) $a=-\frac{1}{3},\ b=0,\ c=-8$.

283. Вычислите дискриминант квадратного уравнения:

а) $2x^2-3x-5=0$; б) $x^2+5x+1=0$;
в) $9x^2-6x+1=0$; г) $x^2+x+1=0$.

284. Проверьте, является ли число 0 корнем уравнения:

а) $x^2-5x=0$; б) $x^2+1=0$;
в) $5x^2-6x+1=0$; г) $x^2-5=0$;
д) $x^2+x=0$; е) $x^2+10x+0{,}1=0$.

285. Проверьте, является ли хотя бы одно из чисел 1 или -1 корнем уравнения:

а) $x^2+x=0$; б) $x^2-5x+4=0$;
в) $x^2-4x+4=0$; г) $x^2-x=0$;
д) $x^2+6x+5=0$; е) $x^2-1=0$.

286. Выберите из чисел -1, $-\frac{1}{3}$, 0, 1, 2 корни уравнения:

а) $x^2-x-2=0$; б) $x^2+x=0$;
в) $3x^2=-x$; г) $3x^2+5x=2$;
д) $4x-5=-6-3x^2$; е) $2x+x^2=-2-x$.

287. Подберите хотя бы один корень уравнения:

а) $x^2-4=0$; б) $x^2-4x=0$;
в) $3x^2-2x-1=0$; г) $5x^2-x-6=0$.

288⁰. Какие уравнения называют равносильными?

289. Равносильны ли уравнения:

а) $2x^2=5x$ и $2x^2-5x=0$;
б) $7x^2=28$ и $x^2=4$;
в) $x^2-8x+8=3x^2-8$ и $x^2+4x-8=0$;
г) $(x-1)(x+5)=2(x-1)$ и $x+4=1$;
д) $x^2+3x-5=x^2+4$ и $3x-5=4$;
е) $(x-2)x=x$ и $x-1=2$?

4.3. Неполное квадратное уравнение

Квадратное уравнение

$$ax^2+bx+c=0 \ (a\neq 0)$$

называют **неполным**, если у него $b=0$ или $c=0$. В этом пункте рассматривается решение неполных квадратных уравнений.

Пример 1. Решим уравнение

$$x^2=0. \qquad (1)$$

Существует только одно число 0, квадрат которого равен 0. Следовательно, уравнение (1) имеет единственный корень $x_0=0$.

Неполное квадратное уравнение, у которого $b=c=0$, т. е. уравнение

$$ax^2=0 \ (a\neq 0)$$

равносильно уравнению (1) и, следовательно, также имеет единственный корень $x_0=0$.

Пример 2. Решим уравнение

$$x^2-5=0. \qquad (2)$$

Это уравнение равносильно уравнению

$$x^2=5.$$

Следовательно, нам надо найти все числа, квадраты которых равны числу 5. Таких чисел только два: $\sqrt{5}$ и $-\sqrt{5}$.

Таким образом, уравнение (2) имеет два корня:

$$x_1=\sqrt{5} \text{ и } x_2=-\sqrt{5}$$

и других корней не имеет.

Но можно рассуждать иначе. Уравнение (2) можно записать в виде

$$x^2-(\sqrt{5})^2=0$$

или в виде

$$(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})=0,$$

откуда видно, что числа $x_1=\sqrt{5}$ и $x_2=-\sqrt{5}$ являются корнями уравнения (2). Других корней уравнение (2) не имеет, так как если в него вместо x подставить любое число, отличное от $\sqrt{5}$ и $-\sqrt{5}$, то левая часть уравнения (2) будет отлична от 0.

Пример 3. Решим уравнение

$$x^2+7=0. \qquad (3)$$

Очевидно, что это уравнение не имеет корней. Ведь квадрат любого действительного числа x_0 неотрицателен, и, следовательно, x_0^2+7 есть положительное число. Другими словами, никакое действительное число x_0 не может быть корнем уравнения (3). Мы решили уравнение (3), а именно показали, что оно не имеет действительных корней.

Неполное квадратное уравнение, у которого $b=0$, имеет вид

$$ax^2+c=0 \quad (a \neq 0). \tag{4}$$

Это уравнение равносильно уравнению

$$x^2+\frac{c}{a}=0. \tag{5}$$

Ясно, что если $\frac{c}{a}$ есть число положительное, то, как и в примере 3, уравнение (5), а значит, и уравнение (4) не имеют корней.

Пусть теперь $\frac{c}{a}$ есть число отрицательное. Уравнение (5) равносильно уравнению

$$x^2-\left(-\frac{c}{a}\right)=0. \tag{6}$$

Так как число $\left(-\frac{c}{a}\right)$ положительно, то уравнение (6), а значит, и уравнение (4) равносильны уравнению

$$\left(x-\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)\left(x+\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)=0,$$

которое имеет два корня:

$$x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ и } x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

и других корней не имеет.

При $c=0$ уравнение (4), как мы знаем, имеет единственный корень $x=0$.

Пример 4. Решим уравнение

$$x^2-3x=0. \tag{7}$$

Перепишем уравнение (7) в виде

$$x(x-3)=0. \tag{8}$$

Это уравнение имеет, очевидно, корни $x_1=0$ и $x_2=3$. Других корней оно не имеет, ибо если в него подставить вместо x любое число, отличное от 0 и 3, то в левой части уравнения (8) получится число, не равное 0.

Неполное квадратное уравнение, у которого $c=0$, $b \neq 0$, имеет вид

$$ax^2+bx=0 \quad (a \neq 0,\ b \neq 0). \tag{9}$$

Это уравнение равносильно уравнению

$$x^2+\frac{b}{a}x=0. \tag{10}$$

Так же как и в примере 4, показывается, что уравнение (10), а значит, и уравнение (9) имеют два корня:

$$x_1=0 \text{ и } x_2=-\frac{b}{a}$$

и других корней не имеют.

Приведенные примеры показывают, что квадратное уравнение может иметь один или два корня, а может и не иметь корней.

В следующем пункте мы увидим, что *любое квадратное уравнение имеет либо два корня, либо один, либо не имеет корней.*

290°. Какое уравнение называют неполным квадратным уравнением?

291°. Сколько корней может иметь неполное квадратное уравнение:

а) $ax^2+c=0$ $(a\neq 0,\ c\neq 0)$; б) $ax^2+bx=0$ $(a\neq 0,\ b\neq 0)$?

292°. Решите уравнение:

а) $3(x-1)=0$; б) $2x^2=0$;
в) $x(x-1)=0$; г) $(x+3)x=0$;
д) $(x-3)(x+2)=0$; е) $(x+5)(x-7)=0$;
ж) $3x(x-0{,}5)=0$; з) $0{,}5x(2+x)=0$;
и) $3(x-8)(5+x)=0$; к) $0{,}8(x+1)(x-4)=0$.

293. Решите уравнение:

а) $x^2-4x=0$; б) $x^2+6x=0$; в) $3x^2+x=0$;
г) $x^2-0{,}5x=0$; д) $2x+3x^2=0$; е) $x-2x^2=0$;
ж) $7x^2=5x$; з) $3x=11x^2$; и) $\frac{1}{2}x^2-3x=0$.

Решите уравнение **(294—296)**:

294. а) $2x^2=3$,
$x^2=1{,}5$,
$x^2-1{,}5=0$,
$x^2-(\sqrt{1{,}5})^2=0$,
$(x-\sqrt{1{,}5})(x+\sqrt{1{,}5})=0$,
$x_1=\sqrt{1{,}5}$, $x_2=-\sqrt{1{,}5}$.
Ответ: $-\sqrt{1{,}5}$; $\sqrt{1{,}5}$.

б) $x^2-9=0$;
в) $x^2-25=0$;
г) $16-x^2=0$;
д) $49-x^2=0$;
е) $3+x^2=0$;
ж) $8-2x^2=0$;
з) $3-12x^2=0$;

и) $7=28x^2$; к) $\frac{1}{4}+x^2=0$; л) $x^2-\frac{4}{9}=0$.

295. а) $x^2-3=0$; б) $x^2-5=0$; в) $\frac{1}{3}x^2-1=0$;
г) $\frac{1}{5}x^2-10=0$; д) $4x^2-3=0$; е) $5x^2+2=0$;
ж) $x^2=2304$; з) $x^2-31{,}36=0$; и) $0{,}001x^2=40$.

296. а) $4x^2+6x=7x^2-12x$; б) $1{,}2x-0{,}5x^2=4x^2-0{,}8x$;
в) $0{,}76x^2+1{,}4x=0$; г) $0{,}6x^2+\sqrt{3}\,x=0$;
д) $0{,}07x^2-50=2{,}1x-50$; е) $9x^2-10x=7x^2-15x$;
ж) $-0{,}5x^2+\sqrt{5}\,x=0$; з) $\frac{2}{3}x^2=5x$.

297⁰. Запишите общий вид квадратного уравнения:
а) один корень которого равен нулю, а другой не равен нулю;
б) оба корня которого равны нулю;
в) корни которого равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку.
Как решается каждое из этих уравнений?

298. Запишите квадратное уравнение, корни которого:
а) 0 и 0; б) 0 и 4; в) -1 и 7;
г) 0,5 и 8; д) -5 и $+5$; е) $-\sqrt{7}$ и $\sqrt{7}$;
ж) 5 и 3; з) -1 и 9.

299*. Решите уравнение:
а) $(x-1)^2+(x+1)^2=2$;
б) $(x-7)(x+3)+(x-1)(x+5)+26=0$;
в) $(3x-8)^2-(4x-6)^2+(5x-2)(x+2)=24$;
г) $(2x-5)(3x-4)-(3x+4)(x-2)-10x-28=0$;
д) $(x+2)(x-3)(x-1)=x(x+1)(x+6)+6$.

300*. Решите уравнение:
а) $(x-1)^2-1=0$; б) $(x+2)^2-4=0$;
в) $\frac{4x^2-1}{3}-\frac{3x^2+8}{5}=1$; г) $\frac{5x^2-48}{8}-\frac{33-2x^2}{6}=3\frac{5}{6}$;
д) $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{16}$; е) $(3x+1{,}5)(3x-1{,}5)=54$;
ж) $\frac{3x^2-4x}{2}=\frac{5x^2-x}{3}$; з) $\frac{2x-3x^2}{5}-\frac{7x^2-x}{4}=\frac{x^2}{2}$.

301. а) При каких числовых значениях m существуют корни уравнения $x^2+m=0$?
б) Напишите квадратное уравнение, один из корней которого равен нулю.
в) При каком числовом значении k уравнение $10x^2+4x-k=0$ имеет корень 0?

302. а) Квадрат натурального числа равен утроенному этому же числу. Найдите такое число.
б) Квадрат натурального числа в два раза меньше самого числа. Найдите это число.

303*. Решите уравнение относительно x, считая m и n данными числами:
а) $m^2x^2-n^2=0$; б) $m^2x^2-4=0$;
в) $mx^2-\frac{1}{m}=0$; г) $nx^2-\frac{m^2}{n}=0$.

4.4. Решение квадратного уравнения общего вида

В этом пункте мы рассмотрим решение квадратного уравнения, записанного в общем виде

$$ax^2+bx+c=0 \ (a\neq 0). \tag{1}$$

Теорема 1. *Если дискриминант квадратного уравнения* (1) *положителен, то оно имеет два различных корня*:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{2}$$

и других корней не имеет.

Доказательство. Как показано в п. 4.1, если $D>0$, то справедливо равенство

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где числа x_1 и x_2 определяются равенствами (2). Поэтому уравнение (1) можно записать в виде

$$a(x-x_1)(x-x_2)=0 \ (a\neq 0). \tag{3}$$

Очевидно, что уравнение (3) имеет корни x_1 и x_2 и других корней не имеет, потому что если подставить в его левую часть вместо x любое число, отличное от x_1 и x_2, то получится число, отличное от нуля. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если дискриминант квадратного уравнения* (1) *равен нулю, то оно имеет единственный корень*

$$x_0=-\frac{b}{2a}$$

и других корней не имеет.

Доказательство. Как показано в п. 4.1, если $D=0$, то справедливо равенство

$$ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2,$$

где $x_0=-\frac{b}{2a}$. Поэтому уравнение (1) можно записать в виде

$$a(x-x_0)^2=0 \ (a\neq 0). \tag{4}$$

Очевидно, что уравнение (4) имеет корень x_0 и других корней не имеет, потому что если подставить в его левую часть вместо x любое число, отличное от x_0, то получится число, отличное от нуля. Теорема доказана.

Теорема 3. *Если дискриминант квадратного уравнения* (1) *отрицателен, то оно не имеет корней.*

Доказательство. Как показано в п. 4.1, если $D<0$, то для любого x выполняется одно из неравенств:

$$ax^2+bx+c>0, \text{ если } a>0,$$

или

$$ax^2+bx+c<0, \text{ если } a<0.$$

Это означает, что при $D<0$ не существует действительного числа, обращающего левую часть уравнения (1) в нуль, т. е. при $D<0$ уравнение (1) не имеет действительных корней. Теорема доказана.

Итак, *квадратное уравнение* (1):

1) *имеет два различных корня, если его дискриминант больше нуля;*

2) *имеет единственный корень, если его дискриминант равен нулю;*

3) *не имеет корней, если его дискриминант меньше нуля.*

Замечание 1. Если дискриминант уравнения (1) положителен, то формулы (2) для корней этого уравнения часто записывают в виде одной формулы

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}. \qquad (5)$$

Замечание 2. Если $D=0$, то формула (5) остается справедливой. В этом случае она дает единственный корень

$$x_0=-\frac{b}{2a},$$

или, как говорят, два совпадающих корня:

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}.$$

В дальнейшем при решении квадратных уравнений мы не будем повторять приведенное выше рассуждение, а будем пользоваться формулой (5).

Вот несколько примеров.

Пример 1. Решим уравнение

$$3x^2+2x-2=0. \qquad (6)$$

Вычислим дискриминант уравнения (6):

$$D=b^2-4ac=2^2-4\cdot3\cdot(-2)=28>0.$$

Следовательно, уравнение (6) имеет два корня, которые вычисляются по формуле

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{28}}{2\cdot3}=\frac{-2\pm2\sqrt{7}}{2\cdot3}=\frac{-1\pm\sqrt{7}}{3},$$

т. е. уравнение (6) имеет два корня:

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{7}}{3} \text{ и } x_2=\frac{-1-\sqrt{7}}{3}.$$

Пример 2. Решим уравнение

$$25x^2-30x+9=0. \qquad (7)$$

Вычислим дискриминант уравнения (7):

$$D = b^2 - 4ac = (-30)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 9 = 0.$$

Следовательно, уравнение (7) имеет единственный корень, который можно вычислить по формуле

$$x_0 = x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{30 \pm 0}{2 \cdot 25} = \frac{30}{50} = 0{,}6,$$

т. е. уравнение (7) имеет единственный корень 0,6, или, как говорят, два совпадающих корня:

$$x_1 = x_2 = 0{,}6.$$

Пример 3. Решим уравнение

$$2x^2 - 4x + 3 = 0. \qquad (8)$$

Вычислим дискриминант уравнения (8):

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -8 < 0.$$

Следовательно, уравнение (8) не имеет корней.

Замечание. Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ называют также корнями квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

304°. Что называют дискриминантом квадратного уравнения?

305°. Сколько корней имеет квадратное уравнение, если дискриминант:

а) положителен; б) равен нулю; в) отрицателен?

306. По какой формуле можно найти корни квадратного уравнения, если его дискриминант неотрицателен?

307. Выпишите коэффициенты при x и x^2 и свободный член, вычислите дискриминант и укажите число корней уравнения:

а) $x^2 - 10x + 21 = 0$; б) $x^2 - 2x + 2 = 0$;
в) $2x^2 - 3x - 5 = 0$; г) $-2x^2 + 7x - 3 = 0$;
д) $4x - x^2 - 1 = 0$; е) $3 + 2x^2 - 7x = 0$;
ж) $\frac{x^2}{3} - 7x = 1$; з) $\frac{x^2}{2} - 3{,}5 = 2x$;
и) $x^2 = \frac{x}{2} - 1$; к) $4 - 4x + x^2 = 0$.

308. Решите уравнение:

а) $x^2 - 6x + 8 = 0$; б) $x^2 + 5x + 6 = 0$;
в) $x^2 - x - 2 = 0$; г) $x^2 + x - 6 = 0$;
д) $x^2 + 4x + 15 = 0$; е) $x^2 + 4x + 4 = 0$;
ж) $5x^2 + 8x - 9 = 0$; з) $4x^2 - 8x + 3 = 0$;
и) $3x^2 - 5x - 2 = 0$; к) $5x^2 - 6x + 1 = 0$.

309. Решите уравнение, предварительно приведя коэффициенты уравнения к целочисленному виду, умножив левую и правую части уравнения на одно и то же число:

а) $x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0$; б) $x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}=0$;

в) $x^2-8-\frac{x}{3}=0$; г) $x^2+\frac{x}{7}-50=0$;

д) $x^2-2{,}5x+1=0$; е) $x^2-5\frac{1}{5}x+1=0$.

Решите уравнение **(310—313)**:

310. а) $2x^2=5+3x$; б) $-x^2+14x-48=0$;
в) $-7x^2+2x=-329$; г) $x^2+x-5=0$;
д) $2x^2-17x-9=0$; е) $7x^2+13x-3=0$;
ж) $9x^2-20=24x$; з) $4x^2-4x=15$.

311. а) $(x+8)(x-9)=-52$; б) $(x-1)(2x+3)=7$;
в) $(x+1)(x+2)=(2x-1)(2x-10)$;
г) $(x-1)(x-2)=(3x+1)(x-2)$;
д) $\frac{x^2}{5}-\frac{2x}{3}=\frac{x+5}{6}$; е) $\frac{5(x^2-1)}{4}=\frac{x}{6}-2$;
ж) $\frac{x^2}{6}-\frac{2x}{3}=\frac{3x-10}{4}$; з) $\frac{x-3}{4}+\frac{2x+3}{6}=\frac{x^2-11}{12}$.

312. а) $(x+3)(x-2)+(x+2)^2=3x+10$;
б) $(x-5)^2+(3-x)^2-4(x+5)(3-x)-48=(x+1)^2$;
в) $(x-1)(x-2)(x-3)-(x^2+3)(x-5)+2x=33$;
г) $8x^2+11+\frac{x}{7}=\frac{1-5x}{7}$; д) $1{,}2x^2-0{,}8x-3{,}1=0$;
е) $0{,}3x^2+2{,}3x-3{,}4=0$.

313. а) $x^2+6x+8=0$; б) $x^2-10x+9=0$;
в) $x^2-3x=1{,}75$; г) $x^2+x=2$;
д) $x^2-6x+6=0$; е) $x^2+8x+2=0$;
ж) $x^2-3x+1=0$; з) $x^2-5x-1=0$;
и) $x^2+8x+15=0$; к) $x^2+5x-6=0$.

314*. Докажите, что корни уравнения $ax^2+bx+c=0$ при $D\geqslant 0$ можно вычислять по формуле

$$x_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{D}{4}}}{a}, \text{ где } \frac{D}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac.$$

Решите по этой формуле уравнение:
а) $x^2-8x+7=0$; б) $x^2+2x-8=0$;
в) $x^2+2x-3=0$; г) $3x^2-10x+8=0$;
д) $8x^2-10x+3=0$; е) $24x^2-10x+1=0$;
ж) $3x^2-8x+5=0$; з) $5x^2+8x+3=0$.

315. При каком числовом значении m уравнение имеет два совпадающих корня:

а) $x^2+mx+3=0$; б) $2x^2-mx-2=0$;

в) $3x^2-2x+m=0$; г) $x^2=mx+m$?

316*. Решите уравнение:

а) $ax^2-2x+1=0$, если число a таково, что $a\leqslant 1$ и $a\neq 0$;

б) $x^2-4x+4a=0$, если число a таково, что $a\leqslant 1$.

317*. Для какого числа a уравнение $x^2+2x+a=0$:

а) имеет два различных корня;

б) имеет единственный корень;

в) не имеет корней?

318*. Решите уравнение для каждого действительного числа a:

а) $x^2-3ax+2a^2=0$; б) $ax^2-2x+1=0$;

в) $x^2-4x+4a=0$; г) $x^2+2x+a=0$.

4.5. Приведенное квадратное уравнение

Квадратное уравнение с коэффициентом 1 при x^2 называют приведенным квадратным уравнением.

Следующие уравнения

$$x^2-2x+7=0, \qquad x^2=0,$$
$$x^2-5=0, \qquad x^2-3x=0$$

служат примерами приведенных квадратных уравнений.

Приведенное квадратное уравнение в общем виде обычно записывают так:

$$\mathbf{x^2+px+q=0,} \tag{1}$$

где p и q — данные числа. Число p — коэффициент при x, а q — свободный член.

Таким образом, уравнение (1) можно рассматривать как частный случай квадратного уравнения общего вида

$$ax^2+bx+c=0, \tag{2}$$

где $a=1$, $b=p$, $c=q$.

Дискриминант уравнения (1) равен:

$$D=b^2-4ac=p^2-4q. \tag{3}$$

Пусть $D>0$, тогда, как мы знаем, уравнение (1) имеет два корня, вычисляемые по формуле

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\,. \tag{4}$$

Пусть теперь $D=0$, тогда уравнение (1) имеет единственный корень, или, как говорят, два совпадающих корня:

$$x_1=x_2=-\frac{p}{2}. \qquad (5)$$

Если же $D<0$, то, как мы знаем, уравнение (1) не имеет действительных корней.

Обычно в случае приведенного уравнения (1) вместо дискриминанта D рассматривается выражение $\frac{D}{4}=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$, имеющее тот же знак, что и D. При этом формулу корней приведенного квадратного уравнения (4) записывают так:

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{D}{4}}. \qquad (6)$$

Мы показали, что:

1) если $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q>0$, то уравнение (1) имеет два корня, вычисляемые по формуле (6);

2) если $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=0$, то уравнение (1) имеет два совпадающих корня, вычисляемые по той же формуле (6) или, что все равно, по формуле (5);

3) если $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q<0$, то уравнение (1) не имеет корней.

Пример. Решим уравнение $x^2-8x+7=0$.

Решение. Вычислим $\frac{D}{4}$:

$$\frac{D}{4}=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=(-4)^2-7=9>0.$$

Уравнение имеет два корня:

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{D}{4}}=4\pm\sqrt{9}=4\pm3;\ x_1=1,\ x_2=7.$$

Ответ: 1 и 7.

319°. Какое уравнение называют приведенным квадратным уравнением?

320. По какой формуле можно найти корни приведенного квадратного уравнения, если его дискриминант неотрицателен?

Решите уравнение **(321—324)**:

321. а) $x^2-6x+8=0$; б) $x^2-2x-15=0$;
в) $x^2+6x+8=0$; г) $x^2+2x-15=0$;
д) $x^2+20x+51=0$; е) $x^2-22x-23=0$;
ж) $x^2-20x-69=0$; з) $x^2+22x+21=0$.

322. а) $x^2-4x+4=0$; б) $x^2-8x+20=0$;

в) $x^2-2\frac{1}{2}x+1=0$; г) $x^2+3\frac{1}{3}x+1=0$;

д) $x^2+16x+48=0$; е) $x^2-9x-22=0$;

ж) $x^2+8x+71=0$; з) $x^2+12x+40=0$.

323. а) $x^2-x-2=0$; б) $x^2-5x-24=0$;

в) $x^2-3x+2=0$; г) $x^2-13x+42=0$;

д) $x^2+x-2=0$; е) $x^2-x-6=0$;

ж) $x^2+14x+48=0$; з) $x^2+17x+66=0$.

324. а) $3x^2-4x-4=0$; б) $2x^2-8x-20=0$;

в) $4x^2+6x+9=0$; г) $4x^2+12x+9=0$;

д) $16x^2+21x-22=0$; е) $18x^2-x-1=0$;

ж) $7x^2-x-1=0$; з) $14x^2+11x-3=0$.

4.6. Теорема Виета

Пусть дано приведенное квадратное уравнение

$$x^2+px+q=0. \tag{1}$$

Теорема Виета. *Если приведенное квадратное уравнение (1) имеет неотрицательный дискриминант, то сумма корней этого уравнения равна коэффициенту при x, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.*

Иначе говоря, если x_1 и x_2 — корни уравнения (1), то

$$\begin{aligned} x_1+x_2&=-p,\\ x_1x_2&=q. \end{aligned} \tag{2}$$

Формулы (2) называют **формулами Виета** в честь французского математика Ф. Виета (1540—1603).

Ф. Виет

Замечание 1. Подчеркнем, что здесь при $D=0$ подразумевается, что уравнение (1) имеет *два совпадающих корня.*

Доказательство. Корни уравнения (1) при неотрицательном дискриминанте вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} x_1&=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},\\ x_2&=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}. \end{aligned} \tag{3}$$

Сложив равенства (3), получим

$$x_1+x_2=\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)+\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)=-p.$$

Перемножив равенства (3) и применив формулу разности квадратов, получим

$$x_1x_2=\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)=$$
$$=\left(-\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2=\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q=q.$$

Теорема Виета доказана.

Справедлива также теорема, обратная *теореме Виета. Если для чисел x_1, x_2, p, q справедливы формулы (2), то x_1 и x_2 — корни уравнения (1).*

Например, пользуясь формулами (2), преобразуем выражение

$$(x-x_1)(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=x^2+px+q.$$

Теперь видно, что числа x_1 и x_2 обращают в нуль выражение x^2+px+q, следовательно, x_1 и x_2 — корни уравнения

$$x^2+px+q=0.$$

Замечание 2. Теорему Виета можно сформулировать и для квадратного уравнения общего вида

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0), \tag{4}$$

используя его равносильность приведенному уравнению

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Если квадратное уравнение общего вида (4) имеет неотрицательный дискриминант и если x_1 и x_2 — корни уравнения (4), то

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},$$
$$x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

Теорема Виета и теорема, обратная ей, часто применяются при решении различных задач.

Пример 1. Напишем приведенное квадратное уравнение, корнями которого являются числа 1 и -3.

Иначе говоря, найдем числа p и q, такие, чтобы уравнение $x^2+px+q=0$ имело корни $x_1=1$ и $x_2=-3$.

По формулам Виета $\quad -p=x_1+x_2=-2,$

$$q=x_1x_2=-3.$$

Следовательно, искомое уравнение имеет вид

$$x^2+2x-3=0.$$

Пример 2. Не решая уравнения

$$x^2-364x+497=0, \qquad (5)$$

определим знаки его корней.

Дискриминант этого уравнения положителен, так как

$$\frac{D}{4}=182^2-497>0.$$

Значит, уравнение имеет два корня: x_1 и x_2. По теореме Виета $x_1x_2=497$, т. е. произведение корней положительно. Корни имеют одинаковые знаки: либо $x_1>0$ и $x_2>0$, либо $x_1<0$ и $x_2<0$.

Но по теореме Виета $x_1+x_2=364$, т. е. сумма корней также положительна. Следовательно, уравнение (5) имеет два положительных корня.

Пример 3.* Вычислим значение выражения $x_1^2+x_2^2$, где x_1 и x_2 — корни уравнения

$$x^2-3x+1=0. \qquad (6)$$

Вычислим дискриминант $D=b^2-4ac=9-4=5$. Уравнение (6) действительно имеет два корня, но вычислять их для решения задачи не нужно. Преобразуем выражение

$$x_1^2+x_2^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2.$$

Так как $x_1+x_2=-p$, $x_1x_2=q$, то

$$x_1^2+x_2^2=(-p)^2-2q=3^2-2\cdot 1=9-2=7.$$

325°. Сформулируйте:

а) теорему Виета; б) теорему, обратную теореме Виета.

326. Запишите формулы Виета.

327. Докажите теорему Виета:

а) для приведенного квадратного уравнения;

б) для неприведенного квадратного уравнения.

328. Определите, имеет ли уравнение корни (если имеет, то укажите их сумму и произведение):

а) $x^2-x+1=0$; б) $x^2+x+3=0$;

в) $x^2+3x-2=0$; г) $x^2-3x+2=0$;

д) $x^2-2x+1=0$; е) $x^2+4x+4=0$.

329. Составьте приведенное квадратное уравнение, если известны сумма L и произведение K его корней:

а) $L=3$, $K=-28$; б) $L=-3$, $K=-18$;

в) $L=-3{,}5$, $K=2{,}5$; г) $L=\frac{5}{6}$, $K=\frac{1}{6}$;

д) $L=0$, $K=-9$; е) $L=4$, $K=4$.

330. Составьте двумя способами приведенное квадратное уравнение, если известны его корни:

а) 1 и 5; б) -2 и 3; в) 4 и 6;

г) -3 и -6; д) 0,5 и 4; е) 1,2 и -5;

ж) 1 и -1; з) 5 и 5.

Например: $x_1=2,\ x_2=3.$
1-й способ. $1\cdot(x-2)(x-3)=...=x^2-5x+6.$
2-й способ. $p=-(2+3)=-5,\ q=2\cdot3=6$, *т. е. искомое уравнение* $x^2-5x+6=0.$

331. Составьте квадратное уравнение по его корням:

а) 2 и $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}$ и 5;
в) $\sqrt{7}$ и $-\sqrt{7}$; г) 0 и 5;
д) $1-\sqrt{2}$ и $1+\sqrt{2}$; е) $2-\sqrt{5}$ и $2+\sqrt{5}$.

332. Не решая уравнения, определите знаки его корней. Проверьте решение, вычислив корни:

а) $x^2-7x+12=0$; б) $x^2+7x+12=0$;
в) $x^2+5x-14=0$; г) $x^2-5x-14=0$;
д) $x^2+1{,}27x-1{,}46=0$; е) $x^2-\frac{3}{5}x-0{,}5=0$;
ж) $x^2-56x+768=0$; з) $x^2-20x-684=0$;
и) $x^2=-377x-31\,242$; к) $x^2+272x=49\,104$.

333. Укажите сумму и произведение корней квадратного уравнения (если они существуют):

а) $2x^2-3x+1=0$; б) $3x^2+x+4=0$;
в) $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x-3=0$; г) $1{,}4x^2-3x+\frac{5}{7}=0$;
д) $0{,}1x^2-8x+4{,}2=0$; е) $3x^2+1{,}1x-0{,}4=0$.

334. Составьте приведенное квадратное уравнение, имеющее два совпадающих корня, равных 3.

335. Один из корней уравнения равен 2. Найдите второй корень уравнения, не решая его.

а) $x^2+5x=14$; б) $x^2-13x=-22$;
в) $x^2-2{,}5x+1=0$; г) $x^2-1\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}=0$.

336. Докажите, что уравнение:
а) $5x^2=8x+284$ не может иметь корни одного знака;
б) $17x^2=7x-354$ не может иметь корни разных знаков.

337. Известно, что x_1 — корень уравнения. Определите второй корень уравнения и число a.
а) $2x^2+16x+a=0,\ x_1=3$;
б) $3x^2+ax-72=0,\ x_1=8$.

338. Составьте квадратное уравнение, корни которого:
а) равны соответственно сумме и произведению корней уравнения $3x^2+2x-15=0$;
б) больше корней уравнения $3x^2-11x+2=0$ на единицу;
в) меньше корней уравнения $2x^2-13x+3=0$ в два раза.

339*. а) Числа x_1 и x_2 — корни уравнения

$$x^2-2000x+1999=0.$$

Составьте квадратное уравнение, корни которого $-x_1$ и $-x_2$.

б) Решите устно квадратные уравнения:

$x^2+2000x-2001=0$, $\quad x^2-2000x-2001=0$,

$x^2-2001x+2000=0$, $\quad x^2+2001x+2000=0$.

340*. Уравнение $x^2+3x-1=0$ имеет два корня: x_1 и x_2. Вычислите:

а) x_1+x_2; б) $x_1\cdot x_2$; в) $(x_1+x_2)^2$;

г) $x_1^2+x_2^2$; д) $x_1^3+x_2^3$; е) $(x_1-x_2)^2$.

4.7. Применение квадратных уравнений к решению задач

Задача 1. Сумма квадратов двух последовательных натуральных чисел больше произведения этих чисел на 57. Найдите эти числа.

Решение. Обозначим меньшее из искомых чисел через x, тогда большее будет $(x+1)$. По условию задачи

$$x^2+(x+1)^2-x(x+1)=57. \qquad (1)$$

Таким образом, искомое число x должно быть корнем уравнения (1). Перенеся все члены уравнения (1) в левую часть, после преобразований получим уравнение

$$x^2+x-56=0, \qquad (2)$$

равносильное уравнению (1). Так как дискриминант уравнения $D=1-4\cdot(-56)=225>0$, то корни квадратного уравнения (2) вычисляются по формуле

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{225}}{2}=\frac{-1\pm15}{2}.$$

Следовательно, уравнение (2) и равносильное ему уравнение (1) имеют корни

$$x_1=7,\ x_2=-8. \qquad (3)$$

Так как нам надо найти *натуральное* число x, удовлетворяющее уравнению (1), то из этих двух корней условию задачи удовлетворяет лишь $x_1=7$. Итак, $x=7$, $x+1=8$.

Ответ: 7 и 8.

Задача 2*. Предмет первоначально стоил 25 р. После того, как цена была снижена дважды, он стал стоить 18 р. При этом процент снижения во второй раз был в два раза больше, чем в первый раз. На сколько процентов снижалась цена каждый раз?

Решение. Пусть в первый раз цена предмета снизилась на $x\%$. Это значит, что после первого снижения цены предмет стал стоить $25-25\cdot\frac{x}{100}=25\cdot\left(1-\frac{x}{100}\right)$ р.

Во второй раз цена предмета снизилась на $2x\%$. Это значит, что после второго снижения цены предмет стал стоить $25\left(1-\frac{x}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{2x}{100}\right)$ р. По условию задачи после двух снижений цен предмет стал стоить 18 р. Следовательно, искомое число должно быть корнем уравнения

$$25\left(1-\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{2x}{100}\right)=18. \qquad (4)$$

Перенеся все члены уравнения (4) в левую часть, после преобразований получим уравнение

$$\frac{x^2}{200}-\frac{3x}{4}+7=0. \qquad (5)$$

Умножив это уравнение на 200, получим уравнение

$$x^2-150x+1400=0. \qquad (6)$$

Решив уравнение (6), найдем его корни $x_1=10$ и $x_2=140$. Так как уравнения (5) и (4), (6) и (5) равносильны, то уравнение (4) имеет те же корни $x_1=10$ и $x_2=140$. Поскольку снизить цену предмета на 140% нельзя, то условию задачи удовлетворяет лишь корень $x_1=10$. Итак, $x=10$, $2x=20$.

Ответ: цену снизили на 10%, затем на 20%.

341. Разложите число 10 на два слагаемых так, чтобы произведение этих слагаемых было равно 21. Найдите слагаемые.

342. Разложите число 14 на два слагаемых так, чтобы произведение этих слагаемых было равно 36,75. Найдите слагаемые.

343. а) Произведение двух последовательных натуральных чисел равно 110. Найдите эти числа.

б) Произведение двух последовательных натуральных чисел равно 210. Найдите эти числа.

в) Произведение двух натуральных чисел, одно из которых на 7 больше другого, равно 44. Найдите эти числа.

г) Произведение двух натуральных чисел, одно из которых на 12 меньше другого, равно 448. Найдите эти числа.

344. а) Найдите два числа, сумма которых равна 20, а сумма их квадратов равна 218.

б) Найдите два числа, сумма которых равна -2, а сумма их квадратов равна 34.

345. а) Одна из цифр двузначного числа[1] на 2 больше другой, а сумма квадратов этого числа и числа, полученного от перестановки его цифр, равна 4034. Найдите это число.
б) Найдите двузначное число, если цифра единиц этого числа на 4 меньше цифры его десятков и произведение числа на сумму его цифр равно 306.

346. а) Если периметр квадрата уменьшить на 40, то его площадь уменьшится в $1\frac{7}{9}$ раза. Определите периметр первоначального квадрата.
б) Прямоугольник, одна сторона которого на 11 м больше другой, преобразован в равновеликий (т. е. имеющий такую же площадь) прямоугольник, у которого большая сторона стала равной 10 м, а меньшая сторона увеличилась на 2 м. Определите площадь и стороны прямоугольника.
в) Возможен ли такой прямоугольный треугольник, стороны которого выражаются тремя последовательными натуральными числами, тремя последовательными четными числами, тремя последовательными нечетными числами?
г) В каком выпуклом многоугольнике число сторон равно числу его диагоналей?

347. а) Выпускники одного класса решили после окончания школы обменяться фотографиями — каждый с каждым. Сколько выпускников было в классе, если всего было роздано 930 фотографий?
б) Несколько человек при встрече приветствовали друг друга рукопожатиями. Сколько человек встретились, если всего рукопожатий было 21?

348. а) Высота прямоугольника составляет 75% его основания. Найдите периметр этого прямоугольника, если его площадь равна 48 м^2.
б) От листа жести, имеющего форму квадрата, отрезали полосу шириной 3 см, после чего площадь оставшейся части листа стала равной 10 см^2. Определите первоначальные размеры листа жести.

349*. Оптовый склад покупает товар по 800 р. и продает его, повысив цену на некоторое число процентов. Магазин покупает тот же товар на оптовом складе и продает его, повысив цену на число процентов, в 1,5 раза большее, чем оптовый склад. В результате цена товара в магазине составляет 1248 р. На сколько процентов увеличивает цену оптовый склад, на сколько магазин?

---

[1] Двузначное число принято обозначать $\overline{ab} = 10a + b$. Аналогично $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$ и т. д.

350*. Цена товара составляла 500 р. После двух повышений цены товар стоил 546 р. Известно, что во второй раз цена увеличилась на число процентов, меньшее на 1, чем в первый раз. На сколько процентов увеличилась цена в первый раз, во второй раз?

§ 5. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

5.1. Понятие рационального уравнения

Уравнение, левая и правая части которого есть рациональные выражения относительно x, называют рациональным уравнением с неизвестным x.

Например, уравнения

$$5x^6-9x^5+4x^2-3x+1=0, \qquad \frac{x^3-1}{x^2+1}=1+x, \qquad \frac{3x^2-2x+1}{x-1}=\frac{5x^3-2}{x^4+3}$$

являются рациональными.

Напомним, что *корнем* (или решением) *уравнения с неизвестным x называют число, при подстановке которого в уравнение вместо x получается верное числовое равенство. Решить уравнение — значит найти все его корни или показать, что их нет.*

При решении рациональных уравнений приходится умножать или делить обе части уравнения на не равное нулю число, переносить члены уравнения из одной его части в другую, применять правила сложения и вычитания алгебраических дробей. В результате будет получаться уравнение, равносильное предшествующему, т. е. уравнение, имеющее те же корни и только их.

В этом параграфе будет рассмотрено несколько типов рациональных уравнений, решение которых сводится к решению уравнений первой и второй степени.

351°. а) Какое уравнение называют рациональным с неизвестным x?
б) Что называют корнем уравнения с неизвестным x?
в) Что значит решить уравнение?
г) Какие уравнения называют равносильными?

352°. Является ли уравнение рациональным:

а) $1-3x=0$;
б) $\frac{1}{2}x-(5-x)\cdot 0{,}2=4x-\frac{1}{4}$;
в) $3x^2=7$;
г) $12-\frac{x^2}{3}=(1-x)x$;
д) $\frac{x^5-6}{2}=1-\frac{x^3}{4}$;
е) $\frac{3}{x}+5=3-\frac{7}{x+13}$;
ж) $\sqrt{x}=2$;
з) $\sqrt{x-8}=24$;
и) $\sqrt{7}x+8=\sqrt{12\frac{1}{3}}$;
к) $\frac{x}{\sqrt{3}}-2x^2=14$?

353. Является ли указанное число корнем уравнения:

а) 2; $3x-\frac{x-5}{3}=x+5$;

б) $-0{,}1$; $3(x-8)=4-2(x-1)$;

в) 3; $x^2+4x-28=0$;

г) $\frac{1}{4}$; $\frac{x^2-x}{x-3}-1=\frac{13+2x}{10}$;

д) -2; $\frac{3x^2-x^3}{5}=6+2(x+1)$;

е) -10; $x^5+3x^4=7x^3+7700$;

ж) 1; $\frac{x^2+x}{x-1}=\frac{x+1}{x-1}$; з) -1; $\frac{x^2+1}{x+1}=\frac{2}{x+1}$?

354. Равносильны ли уравнения:

а) $x+2=3$ и $x+5=6$; б) $12x=7$ и $1{,}2x=0{,}7$;

в) $2x=4$ и $24x-7=41$; г) $x-1=3$ и $\frac{x^2-x}{5}=\frac{3x}{5}$;

д) $3x-1+5x=x-12$ и $7x=-11$;

е) $1\frac{1}{3}x^2-x+8=0$ и $x^2-0{,}75x+6=0$?

5.2. Биквадратное уравнение

Уравнение вида

$$ax^4+bx^2+c=0, \quad (1)$$

где a, b и c — данные числа и a отлично от нуля, а x — неизвестное, называют биквадратным уравнением.

Чтобы решить уравнение (1), вводят новое неизвестное при помощи равенства

$$y=x^2. \quad (2)$$

Тогда уравнение (1) превращается в квадратное уравнение

$$ay^2+by+c=0 \quad (3)$$

относительно неизвестного y.

Если уравнение (3) не имеет корней, то тогда, очевидно, и данное уравнение (1) не имеет корней.

Если же уравнение (3) имеет корни, то, подставив их в равенство (2) вместо y, получим уравнения относительно x. Решения полученных уравнений, если они существуют, и являются решениями уравнения (1). Других решений уравнение (1), очевидно, не имеет.

Пример 1. Решим уравнение

$$x^4-4x^2+3=0. \quad (4)$$

Уравнение (4) после замены $y=x^2$ превращается в квадратное уравнение $y^2-4y+3=0$.

Так как $\frac{D}{4}=\left(\frac{p^2}{2}\right)^2-q=4-3>0$, то оно имеет два корня: $y_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{D}{4}}=2\pm1$, т. е. $y_1=1$, $y_2=3$.

Подставив эти числа вместо y в равенство $y=x^2$, получим уравнения относительно x:

$$1=x^2 \text{ и } 3=x^2.$$

Решив их, получим четыре корня уравнения (4):

$$x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=\sqrt{3},\ x_4=-\sqrt{3}.$$

Других корней уравнение (4), очевидно, не имеет.

Пример 2. Решим уравнение

$$x^4-2x^2-2=0. \tag{5}$$

Уравнение (5) после замены $y=x^2$ превращается в квадратное уравнение

$$y^2-2y-2=0.$$

Так как $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=3>0$, то оно имеет два корня, определяемые по формуле $y_{1,2}=1\pm\sqrt{3}$, т. е. $y_1=1+\sqrt{3}$, $y_2=1-\sqrt{3}$.

Подставив y_1 в равенство $y=x^2$ вместо y, получим уравнение

$$1+\sqrt{3}=x^2,$$

откуда получим два корня уравнения (5):

$$x_1=\sqrt{1+\sqrt{3}},\ x_2=-\sqrt{1+\sqrt{3}}.$$

Подставив y_2 в равенство $y=x^2$ вместо y, получим уравнение

$$1-\sqrt{3}=x^2,$$

не имеющее корней, потому что $1-\sqrt{3}<0$.

Таким образом, уравнение (5) имеет два найденных выше корня x_1 и x_2 и других корней не имеет.

Пример 3. Решим уравнение

$$2x^4-3x^2+5=0. \tag{6}$$

Уравнение (6) после замены $y=x^2$ превращается в квадратное уравнение

$$2y^2-3y+5=0.$$

Его дискриминант $D=b^2-4ac=9-40=-31<0$, и, следовательно, оно не имеет корней. Но тогда и уравнение (6) не имеет корней.

Пример 4. Решим уравнение

$$9x^4-6x^2+1=0. \qquad (7)$$

Уравнение (7) после замены $y=x^2$ превращается в квадратное уравнение

$$9y^2-6y+1=0$$

с дискриминантом $D=b^2-4ac=36-36=0$.

Оно имеет единственный корень

$$y_0=\frac{6\pm0}{18}=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}.$$

Решив уравнение $\frac{1}{3}=x^2$, получим два корня уравнения (7):

$$x_1=\frac{1}{\sqrt{3}},\ x_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Других корней уравнение (7) не имеет.

Пример 5. Решим уравнение

$$x^4+10x^2+25=0. \qquad (8)$$

Уравнение (8) после замены $y=x^2$ превращается в квадратное уравнение

$$y^2+10y+25=0,$$

для которого $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=25-25=0$. Оно имеет, таким образом, единственный корень $y_0=-5\pm0=-5$.

Подставив y_0 в равенство $y=x^2$, получим уравнение

$$x^2=-5,$$

которое не имеет корней. Значит, уравнение (8) также не имеет корней.

Отметим, что уравнение $x^4=0$ имеет один корень $x_0=0$, а уравнение $x^4-x^2=0$ имеет три корня: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$.

Замечание. Из рассмотренных примеров видно, что биквадратное уравнение может иметь четыре, три, два или один действительный корень, но может и не иметь корней. В дополнениях к главе II мы познакомимся с комплексными числами и узнаем, что биквадратное уравнение имеет, вообще говоря, четыре комплексных корня. Впрочем, бывает, что их меньше чем четыре, но в таких случаях считают, что некоторые корни кратные.

355°. а) Какое уравнение называют биквадратным уравнением? Как решают биквадратное уравнение?

б) Сколько корней может иметь биквадратное уравнение?

356. Представьте выражение в виде квадрата:

а) x^4; б) a^6; в) y^8; г) m^{10}.

357. Какую подстановку необходимо выполнить, чтобы уравнение стало квадратным:

а) $x^4+2x^2+1=0$; б) $m^4-3+2m^2=0$;
в) $4y^2-7y^4=0$; г) $15-x^4+2x^2=0$;
д) $x^6-3x^3+2=0$; е) $y^8-4=0$?

Решите уравнение **(358—360)**:

358. а) $x^4-3x^2+2=0$; б) $x^4-10x^2+9=0$;
в) $x^4-5x^2+4=0$; г) $x^4-26x^2+25=0$;
д) $x^4-20x^2+64=0$; е) $x^4+20x^2+64=0$;
ж) $x^4-5x^2+6=0$; з) $4x^4-41x^2+100=0$;
и) $3x^4-5x^2+2=0$; к) $25x^4-25x^2+6=0$.

359. а) $a^4+2a^2-8=0$; б) $y^4+9y^2=400$;
в) $k^4=12k^2+64$; г) $m^4=21m^2+100$;
д) $n^4-2n^2+1=0$; е) $9x^4-24x^2+16=0$;
ж) $6c^4-35=11c^2$; з) $10p^4-21=p^2$.

360. а) $x^4+6x^2+9=0$; б) $x^4-14x^2-15=0$;
в) $25x^4+30x^2+9=0$; г) $7x^4-9x^2+3=0$;
д) $9x^4=9x^2-1$; е) $x^4=30x^2-36$;
ж) $4x^4=5x^2+6$; з) $x^4-x^2-4=0$;
и) $3-2x^4=11x^2$; к) $3x^4+21=4x^2$;
л) $x^4-1=0$; м) $x^4+1=0$;
н) $x^8+16=0$; о) $x^8-16=0$.

5.3. Распадающиеся уравнения

Пример 1. Решим уравнение

$$(x^2-5x+6)(x^2+x-2)=0. \qquad (1)$$

Если число x_0 есть корень уравнения (1), то, подставляя x_0 вместо x в уравнение (1), получим верное числовое равенство

$$({x_0}^2-5x_0+6)({x_0}^2+x_0-2)=0. \qquad (2)$$

Но произведение двух чисел равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю, а другой при этом не теряет смысла. Поэтому из уравнения (2) следует, что x_0 есть корень хотя бы одного из уравнений

$$x^2-5x+6=0 \qquad (3)$$

или

$$x^2+x-2=0. \qquad (4)$$

С другой стороны, любой корень любого из уравнений (3) или (4) является корнем уравнения (1).

Таким образом, множество всех корней уравнения (1) состоит из всех корней уравнения (3) и всех корней уравнения (4).

Уравнение (3) имеет корни $x_1=2$ и $x_2=3$, а уравнение (4) имеет корни $x_3=-2$ и $x_4=1$. Следовательно, уравнение (1) имеет корни $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=-2$, $x_4=1$ и других корней не имеет.

Уравнение вида $A(x)\cdot B(x)=0$, где $A(x)$ и $B(x)$ — многочлены относительно x, называют распадающимся уравнением. Множество всех корней распадающегося уравнения есть объединение множеств всех корней двух уравнений $A(x)=0$ и $B(x)=0$.

Таким образом, уравнение (1) распадается на уравнения (3) и (4).

Пример 2. Решим уравнение

$$x^3-1=0. \tag{5}$$

Разложим левую часть уравнения (5) на множители, используя формулу разности кубов:

$$(x-1)(x^2+x+1)=0.$$

Уравнение (5) распадается на два уравнения:

$$x-1=0 \tag{6}$$

и

$$x^2+x+1=0. \tag{7}$$

Уравнение (6) имеет корень $x_1=1$, уравнение (7) не имеет корней. Следовательно, уравнение (5) имеет единственный корень $x_1=1$.

Пример 3. Решим уравнение

$$x^6-1=0. \tag{8}$$

Разложим левую часть уравнения на множители:

$$x^6-1=(x^2-1)(x^4+x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^4+x^2+1).$$

Уравнение (8) равносильно уравнению

$$(x-1)(x+1)(x^4+x^2+1)=0,$$

которое распадается на три уравнения:

$$x-1=0, \tag{9}$$
$$x+1=0 \tag{10}$$

и

$$x^4+x^2+1=0 \tag{11}$$

Уравнения (9) и (10) соответственно имеют корни

$$x_1=1 \text{ и } x_2=-1.$$

4*

Уравнение же (11) не имеет корней. В самом деле, уравнение (11) биквадратное. Замена $y=x^2$ приводит его к квадратному уравнению

$$y^2+y+1=0,$$

не имеющему корней, так как $D=b^2-4ac=-3<0$.

Значит, уравнение (8) имеет два корня: $x_1=1$ и $x_2=-1$.

Пример 4. Решим уравнение

$$x^3-2x^2-3x=0. \qquad (12)$$

Так как $x^3-2x^2-3x=x(x^2-2x-3)$, то уравнение (12) распадается на два уравнения:

$$x^2-2x-3=0 \text{ и } x=0.$$

Первое из них имеет два корня: $x_1=-1$ и $x_2=3$, но тогда уравнение (12) имеет три корня: $x_1=-1$, $x_2=3$, $x_3=0$.

361°. а) Приведите пример распадающегося уравнения и объясните, как его решить.

б) Что значит «уравнение распадается на два уравнения»?

362°. а) При каких значениях a и b выполняется равенство $ab=0$?

б) Верно ли, что если $ab=0$, то $a=0$?

в) Равносильны ли уравнения $x^2-x=0$ и $x-1=0$?

г) Является ли число 0 корнем уравнения $3x^4-x^3+5x^2=0$?

363°. Решите уравнение:

а) $(x-1)(x-2)=0$; б) $(x-3)(x+4)=0$;

в) $(x-7)^2=0$; г) $(x+4)(x-6)=0$;

д) $x(x-2)=0$; е) $(x+3)x=0$;

ж) $3x^2=0$; з) $-x^2(3+x)=0$.

364. Представьте левую часть уравнения в виде произведения и решите уравнение:

а) $2x^2-3x=0$; б) $7x^2+5x=0$; в) $x^3-x=0$;

г) $x^2+x^3=0$; д) $1-x^3=0$; е) $1+x^3=0$;

ж) $x^3-8=0$; з) $125-x^3=0$; и) $x^4-1=0$.

Решите уравнение **(365—366)**:

365. а) $x^3+5x^2+6x=0$; б) $x^3-4x^2+3x=0$;

в) $x^4=2x^3+3x^2$; г) $10x^2=x^4+3x^3$;

д) $x^3-4x^2=x$; е) $x^3+x=2x^2$;

ж) $x^5+x^3=x^4$; з) $(x-3)^2x=0$.

366. а) $(2x+3)(2x+5)=0$; б) $(3x-7)(4-3x)=0$;

в) $(5-x)(3x+2)=0$; г) $(7-x)(6-9x)=0$;

д) $(2x-3)(x^2+3x+2)=0$;
е) $(x^2-5x+6)(3x-2)=0$;
ж) $(x^2+1)(x^2+5x+6)=0$;
з) $(x^2-1)(x^2-5x+6)=0$;
и) $(x^2+2x+1)(x^2-5x+7)=0$;
к) $(x^2-3x+1)(x^2-4x+4)=0$;
л) $(x^2-3x+1)(x^2+4x-3)=0$;
м) $(x^2-5x+1)(x^2-x+6)=0$;
н) $(x^2+1)(x^2-2x+7)=0$;
о) $(x^2-3)(x^2-4x+4)=0$.

5.4. Уравнение, одна часть которого алгебраическая дробь, а другая — нуль

Пример 1. Решим уравнение

$$\frac{x^2+4x-21}{x^2-x-3}=0. \qquad (1)$$

Мы знаем, что корнем уравнения относительно неизвестного x называется число x_0, при подстановке которого вместо x получается верное числовое равенство. Поэтому если x_0 есть корень уравнения (1), то выражение $\frac{x_0^2+4x_0-21}{x_0^2-x_0-3}$ есть числовое выражение, равное нулю. Но тогда знаменатель этого выражения не должен равняться нулю, а числитель должен равняться нулю.

Таким образом, чтобы решить уравнение (1), мы должны найти корни уравнения

$$x^2+4x-21=0 \qquad (2)$$

и подставить их в знаменатель левой части уравнения (1).

Корни уравнения (2), которые обращают знаменатель дроби в число, не равное нулю, являются корнями уравнения (1). Других корней уравнение (1) не имеет.

Дискриминант квадратного уравнения (2) положительный, и, следовательно, оно имеет два корня, определяемые по формуле

$$x_{1,2}=-2\pm\sqrt{4+21}=-2\pm5, \text{ т. е. } x_1=3 \text{ и } x_2=-7.$$

Подставив эти числа в знаменатель левой части уравнения (1), получим

$$x_1^2-x_1-3=9-3-3=3\neq0,$$
$$x_2^2-x_2-3=49+7-3=53\neq0.$$

Это показывает, что числа $x_1=3$ и $x_2=-7$ являются корнями уравнения (1) и других корней это уравнение не имеет.

Пример 2. Решим уравнение

$$\frac{x^2-x-2}{x^3-2x^2-3x}=0. \qquad (3)$$

Сначала решим уравнение

$$x^2-x-2=0.$$

Оно имеет два корня: $x_1=2$ и $x_2=-1$.

Подставим их в знаменатель левой части уравнения (3):

$$x_1^3-2x_1^2-3x_1=2^3-2\cdot 2^2-3\cdot 2=-6\neq 0,$$
$$x_2^3-2x_2^2-3x_2=(-1)^3-2(-1)^2-3(-1)=0.$$

Следовательно, уравнение (3) имеет единственный корень $x_1=2$.

Пример 3. Решим уравнение

$$\frac{2x-3}{4x^4+4x^3-15x^2+2x-3}=0. \qquad (4)$$

Сначала решим уравнение

$$2x-3=0.$$

Оно имеет единственный корень $x_1=\frac{3}{2}$. Так как

$$4x_1^4+4x_1^3-15x_1^2+2x_1-3=$$
$$=4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^4+4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3-15\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+2\cdot\frac{3}{2}-3=0,$$

то уравнение (4) не имеет корней.

Пример 4. Решим уравнение

$$\frac{x^2+x+1}{x-3}=0. \qquad (5)$$

Уравнение (5) не имеет корней, потому что уравнение

$$x^2+x+1=0$$

не имеет корней.

Таким образом, чтобы решить уравнение

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0, \qquad (6)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, надо найти корни уравнения $P(x)=0$ и подставить их в знаменатель $Q(x)$ левой части уравнения (6). Те из них, которые обращают знаменатель $Q(x)$ в число, не равное нулю, являются корнями уравнения (6); других корней уравнение (6) не имеет.

367^{0}. Как можно решить уравнение, одна часть которого нуль, а другая — алгебраическая дробь?

368. а) При каких значениях a и b выполняется равенство $\frac{a}{b}=0$?

б) Верно ли, что если $\frac{a}{c}=0$, то $a=0$?

в) Верно ли, что если $a=0$, то $\frac{a}{c}=0$?

г) Равносильны ли уравнения $\frac{x-1}{x}=0$ и $x-1=0$?

д) Является ли число 3 корнем уравнения $\frac{x^2-9}{x-3}=0$?

369^{0}. При каком значении x равна нулю дробь:

а) $\frac{x}{5}$; б) $\frac{x+3}{6}$; в) $\frac{x+2}{x}$; г) $\frac{x}{x-4}$;

д) $\frac{x-7}{x+1}$; е) $\frac{x+3}{x-3}$; ж) $\frac{x(x-3)}{x-3}$; з) $\frac{x^2-1}{x-1}$?

370. Запишите три алгебраические дроби, равные нулю при:
а) $x=-2$; б) $x=0$; в) $x=3$; г) $x=-2,5$.

Решите уравнение **(371—374)**:

371. а) $\frac{x^2+2x}{x-2}=0$; б) $\frac{3x^2-7x}{x^2+1}=0$;

в) $\frac{(x-7)(1,5+x)}{x^2-3x+4}=0$; г) $\frac{(-2-x)(x-8,5)}{(x-3)(x+4)}=0$;

д) $\frac{x^2-8x+7}{x-3}=0$; е) $\frac{4x^2-4x-3}{x+2}=0$;

ж) $\frac{4x^2-12x-27}{x^2-3x-10}=0$; з) $\frac{4x^2+4x-35}{x^2-7x+12}=0$.

372. а) $\frac{x^2-2x+1}{x-7}=0$; б) $\frac{x^2+4x+4}{x+8}=0$;

в) $\frac{x^2-2x+3}{x^2-7x+5}=0$; г) $\frac{x^2+3x+5}{x^2+3x-1}=0$;

д) $\frac{(x-1)^2(x+2)}{x-1}=0$; е) $\frac{(x+7)^2(x-4)}{x-4}=0$.

373. а) $\frac{x^2+x-6}{x+3}=0$; б) $\frac{x^2-x-20}{x-5}=0$;

в) $\frac{x+7}{x+7}=0$; г) $\frac{x-9}{x-9}=0$.

374. а) $\frac{x^3-4x^2-5x}{x^2-3}=0$; б) $\frac{x^3+3x^2-18x}{x^2+4}=0$;

в) $\frac{2x^3-7x^2+6x}{2x^2-3x}=0$; г) $\frac{3x^3+5x^2+2x}{2x+3x^2}=0$;

д) $\frac{9x^2-6x+1}{3x-1}=0$; е) $\frac{25x^2+10x+1}{5x+1}=0$.

5.5. Решение рациональных уравнений

Пример 1. Решим уравнение

$$2-\frac{x+1}{x-1}=0. \qquad (1)$$

Применим к левой части уравнения (1) правило вычитания алгебраических дробей:

$$2-\frac{x+1}{x-1}=\frac{2(x-1)-(x+1)}{x-1}=\frac{x-3}{x-1}. \qquad (2)$$

Для любого числа $x_0 \neq 1$ равны числовые значения левой и правой частей равенства (2).

В частности, если для некоторого числа x_0 обращается в нуль одна часть равенства (2), то для него обращается в нуль и другая его часть. А это означает, что уравнение (1) равносильно уравнению

$$\frac{x-3}{x-1}=0. \qquad (3)$$

Уравнение (3) мы умеем решать (см. п. 5.4). Для этого решим сначала уравнение

$$x-3=0.$$

Оно имеет единственный корень $x_0=3$. При этом число $x_0=3$ не обращает в нуль знаменатель дроби левой части данного уравнения (3):

$$x_0-1=3-1=2\neq 0.$$

Поэтому уравнение (3) имеет единственный корень $x_0=3$.

Значит, и исходное уравнение (1) имеет единственный корень $x_0=3$.

Пример 2. Решим уравнение

$$\frac{x-1}{x+2}=\frac{x-4}{x-3}-1. \qquad (4)$$

Перенесем правую часть уравнения (4) влево, получим уравнение

$$\frac{x-1}{x+2}-\frac{x-4}{x-3}+1=0, \qquad (5)$$

равносильное уравнению (4).

Применим к левой части уравнения (5) правила сложения и вычитания алгебраических дробей:

$$\frac{x-1}{x+2}-\frac{x-4}{x-3}+1=$$
$$=\frac{(x-1)(x-3)-(x-4)(x+2)+(x+2)(x-3)}{(x+2)(x-3)}=\frac{x^2-3x+5}{(x+2)(x-3)}.$$

Рассуждая, как в примере 1, получим уравнение

$$\frac{x^2-3x+5}{(x+2)(x-3)}=0, \tag{6}$$

равносильное уравнению (5).

Для решения уравнения (6) надо сначала решить такое уравнение

$$x^2-3x+5=0.$$

Поскольку его дискриминант

$$D=b^2-4ac=(-3)^2-4\cdot1\cdot5=-11<0,$$

то оно не имеет корней.

Следовательно, исходное уравнение (4) не имеет корней.

Из приведенных примеров следует правило: **для решения рационального уравнения надо перенести все его члены в левую часть, затем, применяя правила сложения и вычитания алгебраических дробей, записать левую часть как алгебраическую дробь и решить полученное уравнение.**

Замечание. Отклонение от высказанного правила может привести к потере корней или к приобретению посторонних корней данного уравнения.

Например, применив данное правило к уравнению

$$\frac{(x-2)(x-3)}{x-3}=1, \tag{7}$$

получим равносильное ему уравнение

$$\frac{(x-3)^2}{x-3}=0. \tag{8}$$

Оно не имеет корней. Следовательно, уравнение (7) тоже не имеет корней.

Однако, если бы мы, отклонясь от правила, сократили дробь в левой части уравнения (7) на $(x-3)$, то получили бы уравнение

$$x-2=1, \tag{9}$$

которое имеет корень $x=3$. Но $x=3$ не является корнем уравнения (7) — при $x=3$ левая часть уравнения (7) превращается в выражение, не имеющее смысла.

Следовательно, при таком «способе решения» мы приобрели лишний корень для уравнения (7).

Если же сначала будет дано уравнение (9), а мы вопреки правилу умножим числитель и знаменатель дроби $\frac{x-2}{1}$ на ненулевой многочлен $(x-3)$, то придем к уравнению (7), которое не имеет корней.

Значит, при таком «способе решения» мы бы потеряли корень уравнения (9).

375°. По какому правилу решают рациональные уравнения? Что может произойти при отклонении от этого правила?

376. Равносильны ли уравнения:

а) $\frac{1}{x}=3$ и $\frac{1}{x}-3=0$; б) $\frac{2x-4}{x-5}=0$ и $\frac{x-2}{x-5}=0$;

в) $\frac{x}{x-1}+3=0$ и $\frac{4x-3}{x-1}=0$; г) $\frac{2x}{x-1}=x$ и $\frac{2}{x-1}=1$?

Решите уравнение **(377—383)**:

377. а) $\frac{x-1}{x}+2=0$; б) $1-\frac{2x}{x-1}=0$; в) $\frac{k+3}{k}=4$;

г) $2=\frac{y}{y-5}$; д) $\frac{3}{m}=\frac{m}{3}$; е) $\frac{4}{x-1}=\frac{x}{5}$;

ж) $x-\frac{9}{x}=0$; з) $\frac{25}{b}-b=0$; и) $y+\frac{1}{y}=1$.

378. а) $\frac{x^2}{x-3}-\frac{x+6}{x-3}=1$; б) $\frac{6x-5}{4x-3}=\frac{3x+3}{2x+5}$;

в) $\frac{5a-7}{a+1}=\frac{2+5a}{a-2}$; г) $1-\frac{1-m}{m}=\frac{2m+2}{m-1}$.

379. а) $\frac{y+1}{y-1}=2-\frac{y}{y+1}$; б) $\frac{4n-1}{n+3}=\frac{4n+1}{n-3}$;

в) $\frac{3c-2}{3c+2}=\frac{2c-5}{2c+5}$; г) $\frac{x+2}{x-2}=\frac{x^2}{x-2}+1$.

380. а) $\frac{5-2a}{8a}+\frac{2a-5}{10a}=0$; б) $\frac{3x-1}{4x}+\frac{1-2x}{2x}=0$;

в) $a+\frac{1}{a-2}=0$; г) $a+\frac{4}{a-4}=0$.

381. а) $\frac{1}{2a-3}+\frac{1}{a-1}=2$; б) $\frac{x}{x-3}+\frac{x-8}{x}=3$;

в) $\frac{b-3}{b^2-3b-4}=\frac{b-1}{b^2-b-2}$; г) $\frac{x+1}{x+3}+\frac{4}{x+7}=1$;

д) $\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x+2}=\frac{3}{x}$; е) $\frac{1}{z+1}+\frac{2}{z^2-1}=\frac{3}{z-1}$.

382. а) $\frac{7}{x^2+x+12}-\frac{6}{x^2+2x-8}=0$; б) $\frac{2}{a}+\frac{10}{a^2-2a}=\frac{1+2a}{a-2}$;

в) $\frac{12}{3k-k^2}+\frac{3k+5}{k-3}+\frac{1}{k}=0$; г) $\frac{3m}{m+1}+\frac{2}{m}=\frac{2m+5}{m^2+m}$;

д) $\frac{33}{b^2-11b}+\frac{b-4}{11-b}=-\frac{3}{b}$; е) $\frac{a+7}{a^2-7a}-\frac{4}{(7-a)^2}=\frac{1}{a-7}$;

ж) $\frac{2p-2}{p^2-36}-\frac{p-2}{p^2-6p}-\frac{p-1}{p^2+6p}=0$.

383*. а) $\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{4}$;

б) $\frac{1}{(x-3)(x-2)}+\frac{1}{(x-2)(x-1)}=-2$;

в) $\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}=-1{,}5$.

5.6. Решение задач при помощи рациональных уравнений

Задача 1. Теплоход, отчалив от пристани A, спустился вниз по течению реки на 60 км до устья впадающего в реку притока и поднялся вверх по притоку (против течения) на 20 км до пристани B. Весь путь от A до B теплоход прошел за 7 ч. Скорость течения реки и скорость течения притока равны 1 км/ч. Найти собственную скорость теплохода (собственная скорость — скорость в неподвижной воде).

Решение. Обозначим через x км/ч собственную скорость теплохода. Тогда вниз по течению реки теплоход шел со скоростью $(x+1)$ км/ч и затратил на путь до устья притока $\frac{60}{x+1}$ ч.

По притоку теплоход шел со скоростью $(x-1)$ км/ч и затратил на путь по притоку $\frac{20}{x-1}$ ч. На весь путь теплоход затратил 7 ч. Значит,

$$\frac{60}{x+1}+\frac{20}{x-1}=7. \tag{1}$$

Таким образом, искомое число x должно быть корнем рационального уравнения (1). Решим его.

Перенеся все его члены в левую часть и применив к левой части полученного уравнения правила сложения и вычитания алгебраических дробей, получим уравнение

$$\frac{7x^2-80x+33}{(x+1)(x-1)}=0, \tag{2}$$

равносильное уравнению (1).

Уравнение $7x^2-80x+33=0$ имеет корни

$$x_1=11,\ x_2=\frac{3}{7}.$$

Они не обращают в нуль знаменатель левой части уравнения (2), и поэтому эти корни являются корнями уравнения (2), а значит, и уравнения (1).

Итак, уравнение (1) имеет два корня: $x_1=11$ и $x_2=\frac{3}{7}$.

Однако по условию задачи скорость теплохода не может быть меньше 1 км/ч, так как теплоход двигался по притоку против течения, скорость которого равна 1 км/ч.

Следовательно, условию задачи удовлетворяет лишь $x=11$.

Ответ: собственная скорость теплохода 11 км/ч.

Задача 2. Первая бригада может выполнить задание на 10 дней быстрее, чем вторая, а вместе они выполнят это задание за 12 дней. За сколько дней может выполнить то же задание каждая бригада, работая отдельно?

Решение. Пусть первая бригада может выполнить задание за x дней, тогда вторая — за $(x+10)$ дней. Первая бригада в день выполняет $\frac{1}{x}$ часть задания, а вторая — $\frac{1}{x+10}$ часть задания. Вместе они выполняют в день $1:12=\frac{1}{12}$ часть задания. Составим уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+10}=\frac{1}{12}. \tag{3}$$

Преобразуем уравнение (3), получим равносильное ему уравнение

$$\frac{x^2-14x-120}{12x(x+10)}=0. \tag{4}$$

Уравнение $x^2-14x-120=0$ имеет корни $x_1=20$ и $x_2=-6$. Они не обращают в нуль знаменатель левой части уравнения, следовательно, они являются корнями уравнения (3). Но по смыслу задачи $x>0$, поэтому условию удовлетворяет лишь $x_1=20$. Тогда $x+10=30$.

Ответ: первая бригада может выполнить задание за 20 дней, а вторая — за 30 дней.

384. а) Числитель дроби на 2 больше знаменателя. Если числитель умножить на 2, а к знаменателю прибавить 3, то получится число $1\frac{2}{3}$. Найдите дробь.

б) Знаменатель дроби на 2 больше числителя. Если числитель увеличить на 15, а знаменатель — на 3, то получится число $1\frac{5}{6}$. Найдите дробь.

385. а) Числитель дроби на 1 меньше знаменателя. Если числитель умножить на 3, а знаменатель — на 2, то получится число $1\frac{2}{7}$. Найдите дробь.

б) Числитель дроби на 6 меньше знаменателя. Если знаменатель увеличить на 5, а числитель умножить на 15, то получится число 1,25. Найдите дробь.

в) Числитель дроби на 2 меньше знаменателя. Если сложить эту дробь с обратной к ней дробью, то получится число $2\frac{4}{15}$. Найдите эту дробь.

386. а) Расстояние между двумя населенными пунктами 50 км. Из этих пунктов одновременно навстречу друг другу выехали мотоциклист и велосипедист. Скорость мотоциклиста на 30 км/ч больше. Встретились они на расстоянии 10 км от одного из населенных пунктов. Какова скорость велосипедиста?

б) Используя условие и решение предыдущей задачи, определите, через сколько минут после встречи мотоциклист догонит велосипедиста, если они продолжат движение после встречи и мотоциклист, доехав до населенного пункта, развернется и сразу же поедет в обратном направлении. Какие допущения необходимо сделать для решения задачи?

387. Расстояние между двумя городами 60 км. Из первого города во второй выезжают одновременно две автомашины. Скорость первой на 20 км/ч больше, и она прибывает во второй город на полчаса раньше. Определите скорость каждой автомашины.

388. а) Велосипедист проехал 5 км по лесной дороге и 7 км по шоссе, затратив на весь путь 1 ч. По шоссе он ехал со скоростью на 4 км/ч большей, чем по лесу. С какой скоростью велосипедист ехал по лесной дороге?

б) Турист прошел по шоссе 3 км, а по проселочной дороге 6 км, затратив на весь путь 2 ч. С какой скоростью шел турист по проселочной дороге, если известно, что по шоссе он шел со скоростью на 2 км/ч большей, чем по проселку?

389. а) На обработку одной детали первый рабочий затрачивает на 1 мин меньше, чем второй. Сколько деталей обработает каждый из них за 4 ч, если первый рабочий обрабатывает за это время на 8 деталей больше, чем второй?

б) Две работницы должны были обработать по 120 деталей за определенное время. Одна из них выполнила задание на 5 ч раньше, так как в час она обрабатывала на 2 детали больше другой. Сколько деталей в час обрабатывала каждая работница?

390. а) Две машинистки должны были напечатать по 120 страниц. Первая машинистка выполнила работу на 1 день раньше второй, так как печатала на 10 страниц в день больше. Сколько страниц в день печатала каждая машинистка?

б) На расстоянии 175 м переднее колесо старинного экипажа делало на 20 оборотов больше, чем заднее колесо, длина окружности которого на 1 м больше длины окружности переднего. Найдите длину окружности каждого колеса.

391. а) На уборке урожая с каждого из двух участков было собрано по 500 ц пшеницы. Площадь первого участка на 5 га меньше площади второго участка. Сколько центнеров пшеницы собрано с 1 га на каждом участке, если урожай пшеницы на первом участке с 1 га был на 5 ц больше, чем на втором?

б) Автомашина должна была пройти 840 км. В середине пути водитель остановился на обед, а через час продолжил путь. Чтобы прибыть вовремя в пункт назначения, пришлось увеличить скорость на 10 км/ч. Сколько времени занял весь путь, включая время на остановку?

в) Из пунктов A и B, расстояние между которыми 32 км, одновременно навстречу друг другу отправились пешеход и велосипедист. Через 2 ч они встретились. После встречи пешеход прибыл в пункт B на 5 ч 20 мин позже, чем велосипедист в пункт A. Найдите скорость пешехода и велосипедиста.

392. Первый пешеход может пройти расстояние между двумя пунктами на 5 ч быстрее, чем второй. Если пешеходы выйдут из этих пунктов одновременно навстречу друг другу, то встретятся через 6 ч. За сколько часов каждый из них может пройти это расстояние?

393. Два экскаватора вырыли котлован за 48 дней. Первый экскаватор, работая отдельно, мог бы выполнить эту работу в 3 раза быстрее, чем второй. За сколько дней первый экскаватор, работая отдельно, мог бы выполнить эту работу?

394. Два велосипедиста выехали одновременно навстречу друг другу из городов A и B. Первый проезжает в час на 2 км больше второго и приезжает в B на 1 ч раньше, чем второй в A. Расстояние от A до B 24 км. Определите скорость первого велосипедиста.

395. Двое рабочих выполнили некоторую работу за 8 ч. Первый из них, работая отдельно, может выполнить ту же работу на 12 ч быстрее второго, если тот будет работать отдельно. За сколько часов второй рабочий один может выполнить ту же работу?

396*. *Задача Безу.* Некто купил лошадь и спустя некоторое время продал ее за 24 пистоля. При этой продаже он теряет столько процентов, сколько стоила ему лошадь. Спрашивается: за какую сумму он ее купил?

397*. Торговец покупает книги по оптовой цене, а продает за 11 р. Он подсчитал, что доход от продажи одной книги в процентах равен оптовой цене книги в рублях. Какова оптовая цена книги?

5.7.* Решение рациональных уравнений заменой неизвестных

Пример 1. Решим уравнение

$$(x^2-5x+7)^2-2(x^2-5x+7)-3=0. \qquad (1)$$

Введем новое неизвестное при помощи равенства

$$y=x^2-5x+7. \qquad (2)$$

Тогда уравнение (1) превращается в квадратное уравнение

$$y^2-2y-3=0 \qquad (3)$$

относительно неизвестного y. Так как

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=1+3=4>0,$$

то уравнение (3) имеет два корня:

$$y_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}=1\pm 2,$$

т. е. $y_1=3$ и $y_2=-1$.

Подставив эти числа вместо y в равенство (2), получим уравнения относительно x: $x^2-5x+7=3$ и $x^2-5x+7=-1$. Решим сначала первое из них. Оно равносильно уравнению

$$x^2-5x+4=0, \qquad (4)$$

дискриминант которого $D=b^2-4ac=9>0$.

Следовательно, уравнение (4) имеет два корня:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{5\pm 3}{2},$$

т. е. $x_1=4$ и $x_2=1$.

Теперь решим второе уравнение. Оно равносильно уравнению

$$x^2-5x+8=0, \qquad (5)$$

дискриминант которого $D=b^2-4ac=-7<0$.

Следовательно, уравнение (5) не имеет корней.

Таким образом, уравнение (1) имеет два найденных выше корня x_1 и x_2 и других корней не имеет.

Пример 2. Решим уравнение

$$(x^4+x^2+1)(x^4+x^2+3)+2=0. \qquad (6)$$

Введем новое неизвестное при помощи равенства

$$y=x^4+x^2+1, \qquad (7)$$

тогда уравнение (6) превратится в квадратное уравнение относительно неизвестного y:

$$y^2+2y+2=0, \qquad (8)$$

дискриминант которого $D=b^2-4ac=4-8<0$.

Следовательно, уравнение (8) корней не имеет. Но тогда и уравнение (6) не имеет корней.

Пример 3. Решим уравнение

$$x^2+4x-\frac{15}{x^2+4x}-2=0. \qquad (9)$$

Если привести левую часть этого уравнения к общему знаменателю, то получим уравнение

$$\frac{x^4+8x^3+14x^2-8x-15}{x^2+4x}=0,$$

для решения которого надо сначала решить уравнение

$$x^4+8x^3+14x^2-8x-15=0.$$

Но у нас нет способа для решения такого уравнения. Поэтому такой способ решения уравнения (9) не привел нас к цели — к нахождению корней уравнения (9).

Применим следующий прием. Введем новое неизвестное при помощи равенства

$$y=x^2+4x. \qquad (10)$$

Тогда уравнение (9) примет вид

$$y-\frac{15}{y}-2=0. \qquad (11)$$

Приведем левую часть уравнения (11) к общему знаменателю, получим уравнение

$$\frac{y^2-2y-15}{y}=0, \qquad (12)$$

равносильное уравнению (11). Для решения уравнения (12) решим сначала квадратное уравнение $y^2-2y-15=0$.
Это уравнение имеет два корня: $y_1=5$ и $y_2=-3$.

Так как ни одно из этих чисел не обращает в нуль знаменатель левой части уравнения (12), то уравнение (12), а значит, и уравнение (11) имеют два корня: $y_1=5$ и $y_2=-3$. Теперь для решения уравнения (9) остается решить два уравнения:

$$x^2+4x=5 \text{ и } x^2+4x=-3.$$

Перепишем эти уравнения так:

$$x^2+4x-5=0 \text{ и } x^2+4x+3=0.$$

Каждое из этих квадратных уравнений имеет по два корня:

$x_1=1$, $x_2=-5$ — корни первого уравнения;

$x_3=-1$, $x_4=-3$ — корни второго уравнения.

Следовательно, уравнение (9) имеет четыре корня: 1, -5, -1, -3.

Пример 4. Решим уравнение

$$x^2-5x+7=\frac{12}{(x-2)(x-3)}. \qquad (13)$$

Поступим так, как в примере 3. Заметив, что $(x-2)(x-3)=$ $=x^2-5x+6$, введем новое неизвестное

$$y=x^2-5x+6. \qquad (14)$$

Тогда уравнение (13) перепишется в виде

$$y+1=\frac{12}{y}. \qquad (15)$$

Уравнение (15) равносильно уравнению

$$\frac{y^2+y-12}{y}=0. \qquad (16)$$

Решения квадратного уравнения

$$y^2+y-12=0$$

есть $y_1=3$ и $y_2=-4$.

Так как ни одно из этих чисел не обращает в нуль знаменатель левой части уравнения (16), то уравнение (16), а значит, и уравнение (15) имеют два корня: $y_1=3$ и $y_2=-4$.

Теперь для решения уравнения (13) остается решить два уравнения:

$$x^2-5x+6=3 \text{ и } x^2-5x+6=-4.$$

Первое из них имеет два корня: $x_1=\frac{5+\sqrt{13}}{2}$ и $x_2=\frac{5-\sqrt{13}}{2}$, а второе корней не имеет.

Следовательно, уравнение (13) имеет два корня: $\frac{5+\sqrt{13}}{2}$, $\frac{5-\sqrt{13}}{2}$.

Решите уравнение **(398—399)**:

398. а) $(x+2)^2=2(x+2)+3$;

б) $(x^2+3x-25)^2-2(x^2+3x-25)=-7$;

в) $(x^4+x^2+1)(x^4+x^2+2)=12$;

г) $(x^2-5x+7)^2-2(x-2)(x-3)=1$;

д) $(x^2+5x-7)(2x^2+10x-11)+1=0$.

399. а) $\left(\frac{2x+1}{x}\right)^2-2\left(\frac{2x+1}{x}\right)=3$; б) $\frac{x}{2x+1}+\frac{2x+1}{x}=2$;

в) $2x^2-3x+2-\frac{6}{2x^2-3x+1}=0$;

г) $x^4+3x^2=\frac{1}{x^4+3x^2+2}$; д) $\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}+4=0$.

1. Разложение многочленов на множители и решение уравнений

Теорема Безу. Корень многочлена. Пусть $P_n(x)$ — многочлен относительно x степени $n\,(n \geqslant 1)$, т. е.

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \tag{1}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — данные числа, причем $a_n \neq 0$. Если многочлен $P_n(x)$ разделить с остатком на двучлен $x - a$, то частное (неполное частное) есть многочлен $Q_{n-1}(x)$ степени $n-1$, а остаток R есть число, при этом справедливо равенство

$$P_n(x) = (x-a)\,Q_{n-1}(x) + R. \tag{2}$$

Из равенства (2) следует, что если $R = 0$, то многочлен $P_n(x)$ разлагается на множители, один из которых есть двучлен $x - a$.

Для нахождения частного $Q_{n-1}(x)$ и остатка R обычно применяют метод деления уголком.

Пример 1. Найдем частное и остаток при делении многочлена $P_4(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 1$ на двучлен $x - 3$.

Применим метод деления уголком:

$$\begin{array}{r|l}
-\;x^4+2x^3-x^2+3x-1 & x-3 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4-3x^3} & x^3+5x^2+14x+45 \\
-\;5x^3-x^2 & \\
\underline{5x^3-15x^2} & \\
-\;14x^2+3x & \\
\underline{14x^2-42x} & \\
-\;45x-1 & \\
\underline{45x-135} & \\
134 &
\end{array}$$

Следовательно, $x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 1 = (x-3)(x^3 + 5x^2 + 14x + 45) + 134$ и поэтому частное есть многочлен $x^3 + 5x^2 + 14x + 45$, а остаток — число 134.

Пример 2. Найдем частное и остаток при делении многочлена $P_3(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ на двучлен $x - 1$.

Применим метод деления уголком:

$$\begin{array}{r|l}
-\;x^3-6x^2+11x-6 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3-\;\;x^2} & x^2-5x+6 \\
-\;-5x^2+11x & \\
\underline{-5x^2+\;\;5x} & \\
-\;6x-6 & \\
\underline{6x-6} & \\
0 &
\end{array}$$

Следовательно, $x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x^2-5x+6)$ и поэтому частное есть многочлен x^2-5x+6, а остаток равен нулю.

Если требуется найти только остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на двучлен $x-a$, то пользуются следующим утверждением:

Теорема Безу. *Остаток R от деления многочлена (1) на двучлен $x-a$ равен значению многочлена $P_n(x)$ при $x=a$, т. е. $R=P_n(a)$.*

Доказательство. Если в равенство (2) вместо x подставить число a, то получится, что $P_n(a)=R$, что и требовалось доказать.

Используя теорему Безу, равенство (2) часто записывают в виде

$$P_n(x)=(x-a)\,Q_{n-1}(x)+P_n(a).$$

Число a называют *корнем многочлена* $P_n(x)$, если при $x=a$ значение многочлена $P_n(x)$ равно нулю: $P_n(a)=0$, т. е. если равен нулю остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на двучлен $x-a$.

В примере 1 $P_4(3)=134$ и число 3 не является корнем многочлена $P_4(x)$, а в примере 2 $P_3(1)=0$, число 1 является корнем многочлена $P_3(x)$ и разложение этого многочлена на множители содержит множитель $x-1$.

Целые корни многочлена.

Теорема 1. *Если все коэффициенты a_0, a_1, ..., a_{n-1} многочлена*

$$P_n(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 \text{ —} \tag{3}$$

целые числа и целое число m является корнем многочлена, то число m является делителем свободного члена a_0 этого многочлена.

Доказательство. Так как число m есть корень многочлена $P_n(x)$, то $P_n(m)=0$, т. е. справедливо равенство

$$m^n+a_{n-1}m^{n-1}+\ldots+a_1m+a_0=0. \tag{4}$$

Перепишем равенство (4) в виде

$$a_0=m\,(-m^{n-1}-a_{n-1}m^{n-2}-\ldots-a_1). \tag{5}$$

Так как в равенстве (5) в скобках записано целое число и правая часть равенства (5) делится на m, то число a_0 делится на m, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Если все коэффициенты многочлена (3) — целые числа и этот многочлен имеет корень — рациональное число, то этот корень является целым числом.*

Доказательство. Пусть многочлен (3) имеет корень — рациональное число $\frac{p}{q}$ (дробь $\frac{p}{q}$ несократимая и $q>0$). Будем считать, что числа p и q не имеют общих делителей. Покажем, что число q не может быть больше 1. Предположим противное, что $q>1$. Так как число $\frac{p}{q}$ есть корень многочлена $P_n(x)$, то $P_n\left(\frac{p}{q}\right)=0$, т. е. справедливо равенство

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+\ldots+a_1\frac{p}{q}+a_0=0. \tag{6}$$

Перепишем равенство (6) в виде

$$\frac{p^n}{q^n}=-a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}-\ldots-a_1\frac{p}{q}-a_0. \tag{7}$$

Умножая равенство (7) на q^{n-1}, получим, что справедливо равенство

$$\frac{p^n}{q}=-a_{n-1}p^{n-1}-\ldots-a_1pq^{n-2}-a_0q^{n-1}. \tag{8}$$

Правая часть равенства (8) — целое число, а левая — несократимая дробь, так как числа p и q не имеют общих делителей и p^n не делится нацело на q. Получилось противоречие, следовательно, предположение, что $q>1$, неверно. Это означает, что $q=1$, т. е. рациональный корень многочлена является целым числом.

Из теорем 1 и 2 следует, что если многочлен (3), все коэффициенты которого целые числа, имеет рациональные корни, то эти корни — целые числа, являющиеся делителями свободного члена многочлена. Поэтому для того, чтобы выяснить, есть ли у многочлена (3) рациональный корень, надо проверить, является ли корнем многочлена каждый делитель свободного члена многочлена. Если ни один делитель свободного члена многочлена не является корнем многочлена, то этот многочлен не имеет рациональных корней.

Пример 3. Выясним, какие рациональные корни имеет многочлен $P_4(x)=x^4-x^3+2x^2-3x+1$.

Свободный член этого многочлена имеет делители 1 и -1. Вычислим $P_4(1)$ и $P_4(-1)$:

$$P_4(1)=0, \qquad P_4(-1)=8\neq 0.$$

Следовательно, многочлен $P_4(x)$ имеет рациональный корень — число 1. Разложим многочлен $P_4(x)$ на множители. Разделим многочлен $P_4(x)$ на двучлен $x-1$ уголком:

$$\begin{array}{r|l}
-\;x^4-x^3+2x^2-3x+1 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4-x^3} & x^3+2x-1 \\
-\;2x^2-3x & \\
\underline{2x^2-2x} & \\
-\;-x+1 & \\
\underline{-x+1} & \\
0 &
\end{array}$$

Следовательно,

$$x^4-x^3+2x^2-3x+1=(x^3+2x-1)(x-1).$$

Проверим, есть ли у многочлена $P_3(x)=x^3+2x-1$ рациональные корни. Свободный член этого многочлена имеет делители 1 и -1.

Вычислим $P_3(1)$ и $P_3(-1)$:

$$P_3(1)=2\neq 0, \qquad P_3(-1)=-4\neq 0.$$

Следовательно, многочлен $P_3(x)$ не имеет рациональных корней и поэтому многочлен $P_4(x)$ имеет только один рациональный корень — число 1.

Решение уравнений $P_n(x)=0$. Умение находить рациональные корни многочлена $P_n(x)$ с целыми коэффициентами помогает решить уравнение $P_n(x)=0$.

Пример 4. Решим уравнение

$$x^5-x^4-4x^3+5x^2+x-2=0. \tag{9}$$

Свободный член многочлена

$$P_5(x)=x^5-x^4-4x^3+5x^2+x-2$$

имеет делители 1, -1, 2 и -2. Так как

$$P_5(1)=1-1-4+5+1-2=0,$$

то многочлен $P_5(x)$ имеет корень 1 и его можно разложить на множители. Для этого разделим многочлен $P_5(x)$ на двучлен $x-1$ уголком:

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
-\!\! & x^5-x^4 & -4x^3 & +5x^2 & +x & -2 & x-1 \\
 & \underline{x^5-x^4} & & & & & \overline{x^4-4x^2+x+2} \\
 & -\!\! & -4x^3 & +5x^2 & & & \\
 & & \underline{-4x^3} & \underline{+4x^2} & & & \\
 & & -\!\! & x^2 & +x & & \\
 & & & \underline{x^2} & \underline{-x} & & \\
 & & & -\!\! & 2x & -2 & \\
 & & & & \underline{2x} & \underline{-2} & \\
 & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Итак, $P_5(x)=P_4(x)(x-1)$, где $P_4(x)=x^4-4x^2+x+2$.

Проверим, есть ли у многочлена

$$P_4(x)=x^4-4x^2+x+2$$

рациональные корни. Свободный член многочлена $P_4(x)$ имеет делители 1, -1, 2 и -2. Так как $P_4(1)=1-4+1+2=0$, то многочлен $P_4(x)$ имеет корень 1 и его разложение на множители имеет множитель $x-1$.

Разделим многочлен $P_4(x)$ на двучлен $x-1$ уголком:

$$\begin{array}{r|l}
-\,x^4+0x^3-4x^2+x+2 & x-1 \\
\underline{x^4-x^3} & \overline{x^3+x^2-3x-2} \\
-\,x^3-4x^2 & \\
\underline{x^3-x^2} & \\
-\,-3x^2+x & \\
\underline{-3x^2+3x} & \\
-\,-2x+2 & \\
\underline{-2x+2} & \\
0 &
\end{array}$$

Итак, $P_4(x)=P_3(x)(x-1)$, где $P_3(x)=x^3+x^2-3x-2$. Свободный член многочлена $P_3(x)$ имеет делители 1, -1, 2 и -2. Вычислим $P_3(1)$, $P_3(-1)$, $P_3(2)$ и $P_3(-2)$:

$P_3(1)=1+1-3-2=-3\neq 0$,
$P_3(-1)=-1+1+3-2=1\neq 0$,
$P_3(2)=8+4-6-2=4\neq 0$,
$P_3(-2)=-8+4+6-2=0$.

Так как $P_3(-2)=0$, то многочлен $P_3(x)$ имеет корень -2 и его разложение на множители имеет множитель $x+2$.

$$\begin{array}{r|l}
-\,x^3+x^2-3x-2 & x+2 \\
\underline{x^3+2x^2} & \overline{x^2-x-1} \\
-\,-x^2-3x & \\
\underline{-x^2-2x} & \\
-\,-x-2 & \\
\underline{-x-2} & \\
0 &
\end{array}$$

Итак, $P_3(x)=P_2(x)(x+2)$, где $P_2(x)=x^2-x-1$. Так как многочлен $P_2(x)$ — многочлен второй степени, то легко найти его корни:

$$x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ и } x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Следовательно,

$$P_2(x)=(x-x_1)(x-x_2).$$

Подводя итоги, получаем, что

$$P_5(x)=(x-1)^2(x+2)(x-x_1)(x-x_2).$$

Поэтому уравнение (10) имеет корни:

$$x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ x_3=-2,\ x_4=1.$$

Очевидно, что других корней оно не имеет.

Пример 5. Решим уравнение

$$x^3+\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{9}=0. \qquad (10)$$

Так как коэффициенты трехчлена $x^3+\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{9}$ не целые числа, то, умножая обе части уравнения (10) на 9, получим равносильное ему уравнение

$$9x^3+6x^2-1=0. \qquad (11)$$

Так как старший член многочлена $P_3(x)=9x^3+6x^2-1$ не равен 1, то сразу нельзя применить рассмотренный выше метод. Поэтому поступим следующим образом. Умножая уравнение (11) на 3, получим равносильное ему уравнение

$$(3x)^3+2(3x)^2-3=0. \qquad (12)$$

Сделаем в уравнении (12) замену неизвестных $y=3x$, получим уравнение

$$y^3+2y^2-3=0. \qquad (13)$$

Так как старший член многочлена $P_3(y)=y^3+2y^2-3$ равен 1, то к уравнению (13) можно применить рассмотренный выше метод. Свободный член многочлена $P_3(y)$ имеет делители 1, -1, 3 и -3. Так как $P_3(1)=1+2-3=0$, то многочлен $P_3(y)$ делится на двучлен $y-1$:

$$\begin{array}{r|l} y^3+2y^2+0y-3 & y-1 \\ \underline{y^3-\ y^2\qquad\qquad} & \overline{y^2+3y+3} \\ 3y^2+0y\qquad & \\ \underline{3y^2-3y\qquad} & \\ 3y-3 & \\ \underline{3y-3} & \\ 0 & \end{array}$$

Итак, $P_3(y)=P_2(y)(y-1)$, где $P_2(y)=y^2+3y+3$.

Так как дискриминант квадратного трехчлена $P_2(y)$ меньше нуля, то квадратный трехчлен $P_2(y)$ не разлагается на линейные множители и не имеет корней. Поэтому уравнение (13) имеет единственный корень $y_1=1$.

Найдем теперь корень уравнения (11) из условия $y=3x$. Уравнение (11) и, следовательно, уравнение (10) имеют единственный корень $x_1=\frac{1}{3}$.

400. Разделите многочлен:

а) $2x^3+x^2+3$; б) $x^4-2x^3+3x^2+4x-1$;
в) $4x^3+5x^2-3x+2$; г) $x^5-3x^3+3x-10$

на двучлен $x-1$.

401. Не выполняя деления, определите остаток от деления многочлена:

а) $5x^3-3x^2+2$; б) $2x^4-3x^3-4x^2+5x-6$;
в) $3x^3+2x^2-6x+7$; г) $3x^5-4x^2-3x+6$

на двучлен $x-1$, на двучлен $x+1$.

402. Разложите многочлен на множители:

а) x^3-x^2-x-2; б) x^3-4x^2+4x-3;
в) x^3-7x+6; г) x^3-6x-9;
д) $x^4+2x^3-3x^2-4x+4$; е) $x^4-2x^3-3x^2+4x+4$;
ж) $x^4-x^3-3x^2+5x-4$; з) $x^4+4x^3+6x^2+4x+1$.

Решите уравнение **(403—405)**:

403. а) $x^3+2x^2-x-2=0$; б) $x^3+6x^2+11x+6=0$;
в) $x^3-2x^2-2x-3=0$; г) $x^3+x^2-x+2=0$;
д) $x^3+2x^2-7x+4=0$; е) $x^3-5x^2+8x-4=0$.

404. а) $x^4+x^3-x^2+x-2=0$; б) $x^4-x^3-x^2-x-2=0$;
в) $x^4-x^3-7x^2+x+6=0$; г) $x^4+x^3-7x^2-x+6=0$;
д) $x^4+2x^3-3x^2-8x-4=0$;
е) $x^4+4x^3+3x^2-4x-4=0$.

405. а) $2x^3+x^2-13x+6=0$; б) $2x^3-x^2-13x-6=0$;
в) $3x^3+4x^2+7x+2=0$; г) $3x^3+x^2+2x-1=0$;
д) $2x^4-7x^3+4x^2-2x-3=0$;
е) $2x^4+x^3-x^2+8x-4=0$.

2. Комплексные числа

Рассмотрим уравнение

$$x^2-2x+2=0. \qquad (1)$$

Хотя оно имеет отрицательный дискриминант $D=-4$, напишем чисто формально формулы для его корней:

$$x_{1,2}=1\pm\sqrt{-1}. \qquad (2)$$

До сих пор мы считали, что такие выражения не имеют смысла, так как символу $\sqrt{-1}$ не соответствует никакое действительное число. Однако этот символ оказался очень полезным в математике. Его обозначают буквой i:

$$\sqrt{-1}=i$$

и называют *мнимой единицей.*

С помощью мнимой единицы i и действительных чисел можно составлять буквенные выражения.

Например, $1+i$, $\frac{2+i}{i-1}$, $\frac{2-i}{3}$, i^2+i^3.

Для таких буквенных выражений создано счисление, подчиняющееся следующему правилу: эти выражения преобразуются как обычные буквенные выражения, однако при этом считают, что: $i^2=-1$.

Например,

$$1-3i+5i=1+2i, \qquad i^3=i^2\cdot i=(-1)\,i=-i,$$
$$i^4=i^2\cdot i^2=(-1)\cdot(-1)=1, \qquad i^5=i^4\cdot i=1\cdot i=i.$$

$$(1+i):(1-i)=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=$$
$$=\frac{(1+i)^2}{1-i^2}=\frac{(1+i)^2}{1-(-1)}=\frac{1}{2}(1+i)^2=$$
$$=\frac{1}{2}(1+2i+i^2)=\frac{1}{2}(1+2i-1)=i.$$

Выражение $a+bi$, где a и b — действительные числа, а i — мнимая единица, называют *комплексным числом.*

Действительное число a есть частный случай комплексного числа $a+bi$ при $b=0$:

$$a+0i=a.$$

Выражение bi, где b — действительное число, называют *мнимым числом*. Например, $3i$, $-i$, $-7i$ — мнимые числа. Мнимое число bi есть частный случай комплексного числа $a+bi$ при $a=0$:

$$0+bi=bi.$$

Наконец, считают, что

$$\sqrt{-7}=\sqrt{7}\sqrt{-1}=\sqrt{7}\cdot i,\ \sqrt{-8}=\sqrt{8}\sqrt{-1}=2\sqrt{2}\cdot i$$

и т. д.

Важно отметить, что любая арифметическая комбинация из комплексных чисел, не содержащая деления на нуль, есть комплексное число.

Например,

$$(2+3i)-(5-7i)=-3+10i,$$

$$(2+3i)(1-i)=2+3i-2i-3i^2=5+i,$$

$$\frac{2-i}{3+2i}=\frac{(2-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{6-3i-4i+2i^2}{9-4i^2}=\frac{4-7i}{13}=\frac{4}{13}-\frac{7}{13}i.$$

Итак, выражения $1+\sqrt{-1}$ и $1-\sqrt{-1}$ представляют собой комплексные числа

$$x_1=1+i \text{ и } x_2=1-i.$$

Легко проверить, применяя изложенные правила, что комплексные числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения (1).

Например,

$$x_1^2-2x_1+2=(1+i)^2-2(1+i)+2=$$
$$=1+2i+i^2-2-2i+2=0.$$

Числа $a+bi$ и $a-bi$ называют *сопряженными.* Например, $3+2i$ и $3-2i$ — сопряженные числа.

С введением комплексных чисел можно утверждать, что любое квадратное уравнение имеет два корня: действительные различные, если дискриминант положительный, действительные совпадающие, если дискриминант равен нулю, и комплексные (различные), если дискриминант отрицательный.

Таким образом, квадратное уравнение

$$ax^2+bx+c=0 \ (a\neq 0) \qquad (1)$$

имеет два корня, вычисляемые по формулам

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad (2)$$

Если $b^2-4ac<0$, эти формулы можно записать так:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{|b^2-4ac|}}{2a}, \qquad (3)$$

где $\sqrt{|b^2-4ac|}$ есть арифметический квадратный корень из положительного числа $|b^2-4ac|$.

Итак, при $b^2-4ac<0$ корни уравнения (1) комплексные различные, сопряженные.

Пример. Решим уравнение

$$x^2-2x+5=0. \qquad (4)$$

Решение. Корни уравнения (4) ищем по формулам (2):

$$x_{1,2}=\frac{+2\pm\sqrt{4-20}}{2}=1\pm 2i.$$

Ответ: $1+2i$, $1-2i$.

Отметим, что теорема Виета остается верной и в случае, когда дискриминант квадратного уравнения отрицателен, только в этом случае корни x_1 и x_2 будут комплексными числами.

406°. а) Какой буквой обозначают символ $\sqrt{-1}$?

б) Как называют символ i?

в) Что называют комплексным числом?

г) По каким правилам выполняют действия с комплексными числами?

407. Выполните указанные действия:

а) $(2-3i)+(5+i)$; б) $(7-2i)-(4-3i)$;

в) $(3-5i)(4-6i)$; г) $(40+i):(3-i)$;

д) $(5+4i)(5-4i)$; е) $(1+i):(1-i)$.

408. Решите квадратное уравнение:

а) $x^2+1=0$; б) $x^2+4=0$;
в) $x^2+5=0$; г) $x^2+7=0$;
д) $x^2+x+1=0$; е) $x^2+2x+3=0$;
ж) $2x^2-5x+5=0$; з) $x^2+6x+10=0$.

3. Исторические сведения

Квадратные уравнения умели решать еще вавилоняне. Это было связано с решением задач о нахождении площадей земельных участков, а также с развитием астрономии.

Однако у вавилонян еще не было понятия отрицательного числа, и поэтому корни квадратного уравнения могли быть только положительными.

В «Арифметике» греческого математика из Александрии Диофанта (III в.) нет систематического изложения алгебры, однако в ней содержится ряд задач, решаемых при помощи составления уравнений.

Есть в ней и такая задача.

Найти два числа по их сумме 20 и произведению 96.

Если обозначим одно из неизвестных через y, то придем к квадратному уравнению

$$y(20-y)=96.$$

Чтобы избежать решения квадратного уравнения общего вида, Диофант обозначил неизвестные числа $10+x$ и $10-x$. Их сумма равна: $10+x+(10-x)=20$.

Составим уравнение и решим его:

$$(10+x)(10-x)=96,$$
$$100-x^2=96,$$
$$x^2=4.$$

Во времена Диофанта еще не знали отрицательных чисел, поэтому Диофант указал лишь один корень $x=2$. Тогда неизвестные числа равны $10+2=12$ и $10-2=8$.

Задачи на квадратные уравнения встречаются в трудах индийских математиков уже с V в. н. э. Вот одна из задач индийского математика XII в. Бхаскары:

«Обезьянок резвых стая,
Всласть поевши, развлекалась.
Их в квадрате часть восьмая
На поляне забавлялась.
А двенадцать по лианам...
Стали прыгать, повисая...
Сколько ж было обезьянок,
Ты скажи мне, в этой стае?»

Этой задаче соответствует квадратное уравнение

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2+12=x.$$

Квадратные уравнения классифицируются в трактате «Алгебра» узбекского математика аль-Хорезми, в нем приводятся и способы их решения.

Только в XVI в. благодаря главным образом исследованиям французского математика Ф. Виета (1540—1603) впервые уравнения 2-й степени, также, впрочем, как 3-й и 4-й степени, стали рассматривать в буквенных обозначениях. Именно Виет впервые ввел буквенные обозначения не только для неизвестных величин, но и для данных, т. е. коэффициентов уравнений. Особенно ценил Виет открытые им формулы, которые теперь называются формулами Виета. Однако сам Виет признавал только положительные корни.

Лишь в XVII в. после работ Декарта, Ньютона и других математиков решение квадратных уравнений приняло современный вид.

В «Арифметике» Л. Ф. Магницкого имеется немало задач на квадратные уравнения. Вот одна из них:

«Некий генерал хочет с 5000 человек баталию учинить, и чтобы та была в лице вдвое, нежели в стороне. Колико оная баталия имети будет в лице и в стороне», т. е. сколько солдат надо поставить по фронту и сколько им в затылок, чтобы число солдат по фронту было в два раза больше, чем число солдат, расположенных им в затылок?

Уже в древности математики сталкивались в процессе решения задач с извлечением корня квадратного из отрицательного числа; в этом случае задача считалась неразрешимой. Однако постепенно выяснялось, что решение многих задач, задаваемых в действительных числах, получает простое объяснение при помощи выражений

$$a+b\sqrt{-1},$$

которые в конце концов тоже стали называть числами, но уже комплексными.

Первое обоснование простейших действий над комплексными числами дал итальянский математик Р. Бомбелли в 1572 г., хотя еще долгое время к комплексным числам относились как к чему-то сверхъестественному. Л. Эйлер внес существенный вклад в вопросы теории комплексных чисел. После его работ комплексные числа получили окончательное признание как предмет и средство изучения. Само название «комплексное число» было предложено в 1831 г. великим немецким математиком К. Гауссом.

В настоящее время комплексные числа широко используются в физике и технике.

Вычислите **(409—411)**:

409. а) $\dfrac{\left(\frac{1}{6}+0{,}1+\frac{1}{15}\right):\left(\frac{1}{6}+0{,}1-\frac{1}{15}\right)}{\left(0{,}5-\frac{1}{3}+0{,}25-\frac{1}{5}\right):\left(0{,}25-\frac{1}{6}\right)}$;

б) $\dfrac{0{,}4+8:\left(5{,}3-0{,}8\cdot\frac{3}{8}\right)-5:2\frac{1}{2}}{1\frac{7}{8}\cdot 8-\left(8{,}9-2{,}6:\frac{2}{3}\right)}$;

в) $\dfrac{\left(0{,}5:1{,}25+\frac{7}{5}:1\frac{4}{7}-\frac{3}{11}\right)\cdot 3}{\left(1{,}5+\frac{1}{4}\right):18\frac{1}{3}}$;

г) $\dfrac{(0{,}6+0{,}425-0{,}005):0{,}01}{10{,}5+5\frac{1}{4}+3\frac{1}{6}+15\frac{1}{12}}\cdot 60$.

410. а) $\dfrac{1}{3}:\dfrac{\left(\frac{3}{5}+0{,}425-\frac{1}{200}\right):0{,}01}{30{,}75+\frac{1}{12}+3\frac{1}{6}}:\dfrac{2}{3}$;

б) $\dfrac{\frac{3}{4}\cdot\left(4{,}4-3{,}75+8\frac{7}{15}+8\frac{7}{60}\right)}{\left(3\frac{1}{2}-2{,}75\right):0{,}2}$;

в) $\dfrac{\left(\frac{7}{2000}+0{,}0065\right):0{,}001}{\left(\frac{3}{3125}+0{,}00004\right)\cdot\frac{1}{0{,}0001}}$;

г) $\dfrac{3\frac{1}{3}-\left(6\frac{1}{7}-5\frac{3}{4}\right):\frac{5}{7}}{8+0{,}375:0{,}5625}+0{,}625:\dfrac{5}{6}$.

411. а) $\sqrt{784}$; б) $\sqrt{28900}$; в) $\sqrt{1{,}21}$;
г) $\sqrt{0{,}1225}$; д) $\sqrt{46{,}24}$; е) $\sqrt{1{,}44}$;
ж) $\sqrt{0{,}7225}$; з) $\sqrt{9{,}4864}$.

412. Вычислите с точностью до третьего знака после запятой:
а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{5}$; в) $\sqrt{7}$.
Сверьте результаты с таблицей квадратных корней.

413. Вычислите $\sqrt{2}$ с точностью до пятого знака после запятой.

414. Докажите иррациональность числа:
а) $\sqrt{80}$; б) $\sqrt{972}$; в) $\sqrt{1152}$;
г) $\sqrt{2484}$; д) $\sqrt{125786}$; е) $\sqrt{2800848}$.

415. Имеет ли смысл выражение:

а) $\sqrt{-4}$; б) $\sqrt{1-\sqrt{2}}$; в) $\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$;

г) $\sqrt{2-\sqrt{4}}$; д) $\sqrt{10-\sqrt{121}}$; е) $\sqrt{3-\sqrt{17}}$?

416. Имеет ли смысл выражение при заданных значениях букв:

а) $\sqrt{b^2-4}$ при $b=3$, $b=-2$, $b=0$;

б) $\sqrt{b^2-4a}$ при $b=1$ и $a=4$; $b=\frac{1}{2}$ и $a=-2$;

в) $\sqrt{b^2-4ac}$ при $b=3$, $a=\frac{1}{2}$, $c=-3$;

г) $\sqrt{b^2-4ac}$ при $b=\frac{1}{2}$, $a=-2$, $c=7$;

д) $\frac{-b+a}{2m}$ при $b=3$, $a=2$, $m=1$;

е) $\frac{-b-a}{m}$ при $b=-2$, $a=3$, $m=-1$;

ж) $-\frac{b}{2a}$ при $b=-\frac{1}{2}$, $a=-3$?

417°. а) Существует ли квадратный корень из отрицательного числа?

б) Существует ли квадратный корень из 0?

418. Преобразуйте выражение и найдите его значение:

а) $x^2-2xy+y^2$ при $x=0{,}65$, $y=0{,}15$;

б) $5a^2-10ab+5b^2$ при $a=124$, $b=24$;

в) $\frac{1}{2}m^2+mn+\frac{1}{2}n^2$ при $m=64$, $n=36$;

г) $ax^2+2axy+ay^2$ при $a=4$, $x=71$, $y=29$.

Упростите выражение **(419—424)**:

419. а) $\frac{6a}{4-9a^2}+\frac{1}{3a-2}$; б) $\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}-\frac{1}{2x+2y}$;

в) $\frac{1}{2x-2}+\frac{1}{3x-3}$; г) $\frac{a}{ax-bx}-\frac{b}{ay-by}$;

д) $2-\frac{3}{a-3}$; е) $\frac{(x-y)^2}{2x}+y$;

ж) $\left(\frac{x}{5}-\frac{y}{3}\right)\cdot\left(\frac{5}{x}+\frac{3}{y}\right)$; з) $\left(\frac{x}{y}-\frac{2}{3}\right):(3x-2y)$;

и) $\left(a^2-\frac{1}{b^2}\right):\left(a-\frac{1}{b}\right)$; к) $\left(4x^2-\frac{1}{9b^2}\right):\left(2x-\frac{1}{3b}\right)$.

420. а) $\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b+c}{(a-c)(b-a)}-\frac{a+c}{(a-b)(c-b)}$;

б) $\frac{1}{(m-n)(n-p)}+\frac{1}{(p-n)(n-q)}+\frac{1}{(q-n)(n-m)}$;

в) $\frac{1}{(x-y)(y-z)}-\frac{1}{(z-y)(z-x)}+\frac{1}{(y-x)(x-z)}$;

г) $\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}$; д) $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}+\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}-2$.

421. а) $\left(x^2-\frac{1+x^4}{x^2-1}\right):\frac{x^2+1}{x+1}$; б) $\left(a^2-\frac{1+a^4}{a^2+1}\right):\frac{1-a}{1+a^2}$;

в) $\left(\frac{1}{m^2-m}-\frac{1}{m-1}\right)\cdot\frac{1}{m+2}+\frac{m}{m^2-4}$;

г) $\left(\frac{k+4}{3k+3}-\frac{1}{k+1}\right)\cdot\frac{3}{k+1}-\frac{2}{1-k^2}$;

д) $\frac{2c}{c^2-4}-\frac{1}{c-2}:\left(\frac{c+1}{2c-2}-\frac{1}{c-1}\right)$;

е) $\frac{y^2}{y^2-1}+\frac{1}{y+1}:\left(\frac{1}{2-y}-\frac{2}{2y-y^2}\right)$;

ж) $\frac{5p+6}{p^2-4}-\frac{p}{p^2-4}:\frac{p}{p-2}-\frac{p+2}{p-2}$;

з) $\frac{21-5a}{a^2-9}-\frac{a}{a^2-9}:\frac{a}{a+3}-\frac{a-3}{a+3}$.

422. а) $\left(1-\frac{1-a}{1+a}\right):\left(1+\frac{1-a}{1+a}\right)$; б) $\left(\frac{x}{x-y}-\frac{x}{x+y}\right):\frac{xy}{x^2-y^2}$;

в) $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}$; г) $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}}$.

423. а) $\frac{5}{2a-2b}+\frac{3}{4b-4a}-\frac{5}{a-b}$; б) $\frac{x+y}{x-y}-\frac{y}{y-x}+\frac{x}{x-y}$;

в) $\frac{4m}{2m-3n}-\frac{5n}{3n-2m}-\frac{3m}{4m-6n}$;

г) $\frac{5p}{2p-3q}-\frac{7q}{6p-9q}+\frac{3p}{6q-4p}$.

424. а) $\frac{1}{x-1}-\frac{4}{1-x}-\frac{8}{1+x}+\frac{3x-7}{x^2-1}$;

б) $\frac{a}{a-b}+\frac{b^2}{a^2+ab+b^2}-\frac{ab(a+2b)}{a^3-b^3}$;

в) $\frac{1}{x+y}+\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}-\frac{x(x-y)}{x^3+y^3}$.

425. а) Какое число можно прибавить к делимому (при делении с остатком), чтобы частное не изменилось?

б) Какие числа можно прибавлять к делимому и делителю (при делении с остатком), чтобы частное и остаток не изменились?

426. а) Докажите, что если каждое из двух натуральных чисел при делении на 4 дает в остатке 1, то их произведение при делении на 4 также дает в остатке 1.

б) Докажите, что произведение пяти последовательных натуральных чисел делится на 120.

427. а) Докажите, что $\frac{a^3-a}{6}$ является целым числом, если a — любое целое число.

б) Докажите, что разность квадратов двух последовательных четных чисел делится на 4.

в) Докажите, что разность квадратов любых двух нечетных чисел делится на 8.

428. а) В каком двузначном числе удвоенная сумма цифр равна их произведению?

б) Найдите все целые значения a, при которых дробь $\frac{a^3+1}{a-1}$ принимала бы целые значения.

429. Докажите, что точки координатной оси, соответствующие числам вида $\frac{n^5+n^4+n^3+2}{n^5+n^4+n^3+1}$ (n — натуральное число), расположены на отрезке, длина которого не превышает $\frac{1}{3}$.

430. Докажите, что $\frac{a+1}{a-1}-\frac{b+1}{b-1}=2$, если $2b=1+ab$ и $a\neq 1$, $b\neq 1$.

431. Докажите, что если $\frac{a+b+c}{a+b-c}=\frac{a-b+c}{a-b-c}$, то $bc=0$.

432. Разложите на множители:

а) $m^3-4m^2+20m-125$;   б) $8-2p+3p^2-27p^3$;

в) $(x^2+4x)^2-(x-9)^2$;   г) $(9x^2+2)^2-(6x+7)^2$;

д) $(5a-7b)^2-2(5a-7b)+1$;

е) $1+2(x-3y)+(x-3y)^2$.

433. Докажите тождество:

а) $2x^3-(x-2)(2x^2-3x+4)=7x^2-10x+8$;

б) $2m^3-(2m-3)(m^2-7m+2)-6=17m^2-25m$;

в) $(a-2)^2-2a(a-2)+a^2=4$;

г) $x^2-2x(x-3)+(x-3)^2=9$;

д) $5x(x-y)-2(y-x)^2=(3x+2y)(x-y)$;

е) $(a-1)(a^2+1)(a+1)-(a^2-1)^2=2(a^2-1)$;

ж) $(a^2+1)^2+(a-1)(a^2+1)-a^2=a(a^3+a^2+1)$;

з) $(x^2-1)(x^4+x^2+1)-(x^2-1)^3=3x^2(x^2-1)$.

434. а) Известно, что $x\neq 0$ и $y\neq 0$. Можно ли утверждать, что $x+y\neq 0$?

б) При каких значениях x и y выполняется равенство:

1) $x+y=0$;   2) $x\cdot y=0$;   3) $\frac{x}{y}=0$;

4) $\frac{x}{y}=-1$;   5) $x\cdot y=x$?

435. Решите уравнение:

а) $(x-1)(x-3)=0$; б) $(x-5)(x-2)=0$;
в) $(x+4)(3+x)=0$; г) $(7+x)(x-10)=0$;
д) $(2x-1)(x+1)=0$; е) $(x-0{,}5)(3x+4)=0$;
ж) $x(x-1)=0$; з) $x(2x+1)=0$;
и) $3x(2x-7)=0$; к) $5x(4x-1)=0$.

436. Считая m, n, a и b данными числами, решите уравнение:

а) $4m-2x=6n$; б) $5x-10a=15b$;
в) $(x-a)(x+b)=0$; г) $(a-x)(b-x)=0$.

437. Решите уравнение:

а) $x^2=3$; б) $x^2=2{,}25$; в) $3x^2=0$; г) $x^2=-1$.

438. Решите уравнение:

а) $-0{,}5x^2=0$; б) $2x^2+3=0$; в) $7x^2-1=0$;
г) $8x^2-12=0$; д) $3x^2+5=0$; е) $3x^2=4x$;
ж) $-7x^2=1$; з) $72-x^2=0$; и) $16+x^2=0$.

439. Разложите многочлен на множители:

а) x^2-x; б) $2a-ab$; в) $3m-m^3$;
г) p^2-qp; д) x^2-4; е) $9-a^2$;
ж) $4y^2-x^2$; з) m^2-16n^2; и) a^2-3;
к) x^2-5; л) $7-2m^2$; м) $9-5x^2$.

440. Выделите полный квадрат:

а) x^2+2x+3; б) m^2-2m+3; в) a^2+4a+2;
г) p^2+6p-9; д) x^2+2x; е) c^2-10c.

441. Существует ли значение x, при котором:

а) $x^2=0$; б) $x^2=1$; в) $x^2+1=0$;
г) $5+x^2=0$; д) $x^2+7=0$; е) $x^2-16=0$?

442. Найдите значение выражения:

а) b^2-4ac при $b=1$, $a=0$, $c=2$;

б) b^2-4ac при $b=\frac{1}{3}$, $a=-1$, $c=4$.

Сократите дробь **(443—445)**:

443. а) $\frac{x-2}{x^2-4}$; б) $\frac{x-1}{x^2-2x+1}$; в) $\frac{x^2+x+1}{x^3-1}$;

г) $\frac{x+3}{x^2-9}$; д) $\frac{2x+2}{x^2+2x+1}$; е) $\frac{x^2-x+1}{x^3+1}$.

444. а) $\frac{x-1}{x^2-3x+2}$; б) $\frac{x+1}{x^2-5x-6}$; в) $\frac{x^2-6x+5}{x^2-4x+3}$;

г) $\frac{x-2}{x^2-5x+6}$; д) $\frac{x+2}{x^2-x-2}$; е) $\frac{x^2+5x+4}{x^2-2x-3}$.

445. а) $\frac{2x^2-5x+3}{2x^2+5x-7}$; б) $\frac{3x^2-4x+1}{2x^2+7x-9}$;

в) $\frac{3x^2+4x+1}{3x^2+5x+2}$; г) $\frac{2x^2+5x-7}{3x^2-5x+2}$.

446. Упростите выражение:

а) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}$;

б) $\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}$;

в) $\frac{4x}{x^2-x-2}-\frac{1}{x+1}$;

г) $\frac{2x}{x^2-x-2}-\frac{5}{x-2}$;

д) $\frac{1}{x-3}+\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x^2-x-6}$;

е) $\frac{3}{x+5}-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x^2+4x-5}$.

447*. Решите уравнение:

а) $5x^2-6x+1{,}75=0$;

б) $\sqrt{2}\,x^2-10x+8\sqrt{2}=0$;

в) $11x^2-10x-9=0$;

г) $\sqrt{3}\,x^2+4\sqrt{2}\,x+8\sqrt{3}=0$;

д) $\frac{5}{4}x^2-x+\frac{1}{9}=0$;

е) $2x^2-3{,}1x+0{,}42=0$;

ж) $3x^2+2\sqrt{6}\,x+2=0$;

з) $\frac{1}{4}x^2+1+\frac{3}{5}x=0$;

и) $46x-21+7x^2=0$;

к) $2x^2+(3-2\sqrt{2})\,x-3\sqrt{2}=0$;

л) $\sqrt{3}\,y^2-8\sqrt{2}\,y+4\sqrt{3}=0$;

м) $16a^2-8\sqrt{2}\,a+1=0$;

н) $m^2+2\sqrt{2}\,m+\sqrt{3}=0$;

о) $(x-3)^2=1-\pi$;

п) $(2x+3)^2-(x-2)^2=5$;

р) $(5-3x)(3x+5)-2x(x-3)=25$.

Равносильны ли уравнения **(448—449)**:

448. а) $(x+4)(x-3)=0$ и $x^2+x-12=0$;

б) $(x+3)(x-1)=0$ и $x^2-2x-3=0$;

в) $(x-2)(x+1)=0$ и $x+\frac{6}{2-x}=1$;

г) $(x-1)(x-2)=0$ и $\frac{3}{2-x}-x=2$;

д) $x+4=2x$ и $x=4$;

е) $2x+5=0$ и $x+3=0$;

ж) $2x=5$ и $x=-2{,}5$;

з) $x^2+x=0$ и $x^2=0$?

449. а) $2(x+1)=3(x-2)$ и $2(x+1)+1=3(x-2)+1$;

б) $2(x+1)+x+2=3(x-2)+x+2$ и $2(x+1)=3(x-2)$;

в) $2(x+1)+\frac{1}{x}=3(x-2)+\frac{1}{x}$ и $2(x+1)=3(x-2)$;

г) $x=2$ и $x+\frac{2-x}{x+1}=2+\frac{2-x}{x+1}$;

д) $x+1=2-x$ и $2(x+1)=2(2-x)$;

е) $x+1=2-x$ и $x(x+1)=x(2-x)$;

ж) $x+1=2-x$ и $(x+1)(x-1)=(2-x)(x-1)$;

з) $x+1=2-x$ и $(x+1)(x^2+2)=(2-x)(x^2+2)$;

и) $x+1=2-x$ и $(x+1)(2x-1)=(2-x)(2x-1)$?

Решите уравнение (450—455):

450*. а) $(x^2-5)^2+(x^2-1)=40$; б) $(x^2-10)(x^2-3)=78$;
в) $(x^2+1)(x^2-3)=15$; г) $(y^2-3)^2=2(15-y^2)$;
д) $(x^2-1)^2-12=3-x^2$; е) $(x^2-2)^2-2(x^2+5)=4$.

451. а) $x^3-x^2+x-1=0$; б) $x^3+x^2+x+1=0$;
в) $2x^4+5x^3-5x-2=0$; г) $x^3+2x^2+2x+1=0$;
д) $3x^3-7x^2-7x+3=0$; е) $6x^3-7x^2-7x+6=0$;
ж) $x^3-25x-2x^2+50=0$; з) $x^3+3x^2-16x-48=0$;
и) $x^3+2x^2-9x-18=0$; к) $x^3-3x^2-4x+12=0$.

452. а) $x^3-2x(x+1)=x$;
б) $(x^3-5x^2)(x^2-3x+1)=0$;
в) $3x^3-3x(x-1)=7x^2$;
г) $(14x^3+19x^2+12x)(2x^2-7x+6)=0$;
д) $(x-2)^2-10(x-2)+21=0$;
е) $(a+1)^2=9(a+1)-20$;
ж) $(2m-1)^2+4(2m-1)+3=0$;
з) $(3n+2)^2=15-2(3n+2)$;
и) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0$;
к) $x^2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$.

453. а) $x-6\sqrt{x}=-5$; б) $x+10=7\sqrt{x}$;
в) $x+\sqrt{x}=30$; г) $x-3\sqrt{x}=28$;
д) $x^9-2x^5+x=0$; е) $x^9+4x^5+4x=0$.

454. а) $\frac{x}{x-2}-\frac{7}{x+2}=\frac{8}{x^2-4}$; б) $\frac{1}{x-4}+\frac{24}{x^2-16}=\frac{x+1}{x+4}$;
в) $\frac{3}{x+1}+\frac{2x}{x-1}-\frac{3x+1}{x^2-1}=0$; г) $\frac{1}{x-3}-\frac{x}{x+3}+\frac{18}{x^2-9}=0$;
д) $\frac{3}{x^2-2x+1}-\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{x+1}$;
е) $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{1-x^2}=\frac{5}{x^2+2x+1}$;
ж) $\frac{1}{x+3}-\frac{6}{9-x^2}=\frac{3}{x^2-6x+9}$;
з) $\frac{4}{x^2+6x+9}-\frac{1}{x-3}=\frac{6}{9-x^2}$.

455. а) $\frac{2+a}{3-a}-\frac{1-3a}{a}=\frac{2a}{a-2}$; б) $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-2}=\frac{4}{x-3}$;
в) $\frac{2}{m-1}-\frac{1}{m+3}=\frac{3}{m-3}$; г) $\frac{3}{x+1}+\frac{7}{x+2}=\frac{6}{x-1}$;
д) $\frac{21}{y}-\frac{10}{y-2}-\frac{4}{y-3}=0$; е) $\frac{3-5x}{x+2}=2+\frac{x-11}{x+4}$.

456. а) Сейчас 9 ч утра. Какую часть суток составляет оставшаяся часть от прошедшей и какая часть суток осталась?

б) Вода, обращаясь в лед, увеличивается на $\frac{1}{11}$ часть своего объема. Сколько кубических сантиметров воды получится при переходе в воду куска льда объемом 24 см^3? Какую часть своего объема теряет лед при таянии?

в) Число 20 разделите на две части так, чтобы одна была в 4 раза больше другой.

г) Число 120 разделите на три части в отношении 2:3:15.

д) Число 25 разделите на части пропорционально числам 2, 3, 5.

457. Трое рабочих выполняют некоторую работу за 12 смен. За сколько смен выполнят эту же работу двое рабочих, если производительность труда всех рабочих одинакова?

458. а) Первое число в четыре раза больше второго. Если второе число увеличить в шесть раз, то оно станет больше первого на 4. Найдите числа.

б) Первое число в три раза меньше второго. Если первое число умножить на 8, а второе — на 2, то первое число станет на 8 больше второго. Найдите числа.

459. а) Первое число в четыре раза меньше второго. Если первое число увеличить в шесть раз, то полученное число будет на шесть больше второго числа. Найдите эти числа.

б) Первое число на 3 больше второго. Если первое число умножить на 3, то полученное число будет на 1 больше второго числа, умноженного на 5. Найдите числа.

460. а) Первое число на 8 меньше второго. Если первое число увеличить на 17, то полученное число будет равно второму числу, умноженному на 2. Найдите числа.

б) Даны два числа. Если первое умножить на 3, то полученное число будет на 16 больше второго; если второе умножить на 2, то полученное число будет на 8 больше первого. Найдите числа.

461. а) Выполняя плановое задание, бригада рабочих должна была за 14 дней изготовить некоторое количество деталей. Увеличив производительность труда, бригада изготовляла в день на 5 деталей больше и выполнила плановое задание за 12 дней. Сколько деталей нужно было изготовить по плану?

б) Выполняя плановое задание, бригада рабочих должна была за 13 дней изготовить некоторое количество деталей. Увеличив производительность труда, бригада изготовляла в день на 50 деталей больше, чем намечалось по плану. Поэтому уже за 12 дней был не только выполнен план, но изготовлено на 100 деталей больше плана. Сколько деталей изготовила бригада?

в) Заказ по выпуску машин должен быть выполнен по плану за 20 дней. Но завод выпускал ежедневно по 2 машины сверх плана, а поэтому выполнил заказ за 18 дней. Сколько машин должен был выпускать завод ежедневно по плану?

462. Составьте и решите две задачи, аналогичные задачам предыдущего номера.

463. а) Расстояние между двумя пунктами 20 км. Из них одновременно навстречу друг другу выезжают мотоциклист и велосипедист. Скорость мотоциклиста 50 км/ч, велосипедиста 10 км/ч. На каком расстоянии от начала движения мотоциклиста они встретятся?

б) Расстояние между двумя пунктами 20 км. Из этих пунктов навстречу друг другу одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Скорость мотоциклиста 40 км/ч, а велосипедиста 20 км/ч. Через какое время они встретятся?

464. Составьте задачу, аналогичную предыдущей, и решите ее.

465*. Расстояние между двумя пунктами 40 км. Из одного из них в другой одновременно выезжают автобус и велосипедист. Скорость автобуса 50 км/ч, велосипедиста 10 км/ч. Автобус доехал до населенного пункта, потратил на остановку 6 мин и выехал в обратном направлении с той же скоростью. На каком расстоянии от первого населенного пункта встретятся велосипедист и автобус? Какие допущения необходимо сделать для решения задачи?

466*. Составьте и решите задачу, аналогичную предыдущей.

467. Из одного населенного пункта выехал велосипедист со скоростью 10 км/ч. Спустя 1 ч вслед за ним выехал второй велосипедист со скоростью 20 км/ч. В пункт назначения оба велосипедиста прибыли одновременно. Что можно определить, используя данные условия?

468. Два поезда отправляются из одного и того же города друг за другом. Скорость первого 36 км/ч, а второго 48 км/ч. Через сколько часов второй поезд догонит первый, если известно, что первый поезд был отправлен на 2 ч раньше второго? Что необходимо допустить для решения задачи?

469. Теплоход прошел расстояние между двумя пристанями по течению реки за 4 ч, а против течения за 5 ч. Определите расстояние между пристанями, если скорость течения 2 км/ч.

470. Докажите, что если все слагаемые суммы увеличить или уменьшить в одно и то же число раз, то сумма соответственно увеличится или уменьшится во столько же раз.

471. Как изменится разность, если уменьшаемое и вычитаемое увеличить (или уменьшить) в одно и то же число раз?

472. а) Пятизначное число, являющееся точным квадратом, записывается при помощи цифр 0; 1; 2; 2; 2. Найдите это число.

б) Найдите наименьшее и наибольшее отрицательные числа из тех, которые можно записать при помощи трех единиц и знаков арифметических действий.

473. Записано несколько чисел. Каждое из них, начиная с третьего, равно сумме двух, предшествующих ему. Известно, что девятое число и десятое число равны 1. Найдите первое и второе числа.

474. Заполните таблицу так, чтобы в каждой клетке вместо буквы стояло число, причем суммы чисел каждой строки, каждого столбца и каждой большой диагонали были бы равны между собой.

a	b	x	-2
2	-3	-4	5
x	c	-1	0
k	x	e	y

475. В каждой из девяти клеток, составляющих квадрат, написано по одному числу. Когда находили суммы чисел каждой из трех строчек, то получили соответственно $-6{,}1$; $2{,}5$; $-3{,}4$. При подсчете сумм чисел каждого из трех столбцов получили соответственно $2{,}3$; $-5{,}8$; $-3{,}7$. Докажите, что в вычислениях допущена ошибка.

476. Заработная плата некоторой категории служащих повышалась два раза, причем процент повышения во второй раз был в два раза больше, чем в первый раз. Определите, на сколько процентов повышалась зарплата каждый раз, если до первого повышения зарплата была 1400 р., а после второго повышения составила 1848 р.

477. Произведение двух последовательных натуральных чисел больше их суммы на 109. Найдите эти числа.

478. Найдите периметр прямоугольника, у которого одна сторона на 4 см больше другой и площадь которого равна 60 см^2.

479. На уборке урожая работали две бригады. За первый день работы первая бригада убрала на 5 га больше, чем вторая. Во второй день первая бригада убрала на 3 га больше, чем в первый день, а вторая бригада — в 2 раза больше, чем в первый день. Какую площадь убрала каждая бригада в первый день, если за два дня работы обе бригады убрали 63 га?

480*. Имеются два слитка сплавов золота и меди. В первом слитке отношение золота к меди равно $1:2$, а во втором — 2 : 3. Если сплавить $\frac{1}{3}$ первого слитка с $\frac{5}{6}$ второго, то в получившемся слитке окажется столько золота, сколько было в первом меди, а если $\frac{2}{3}$ первого слитка сплавить с половиной второго, то в получившемся слитке окажется меди на 1 кг больше, чем было золота во втором слитке. Сколько золота в каждом слитке?

481. Требуется составить 50 г 15-процентного раствора соли из 10- и 20-процентных растворов. Сколько граммов каждого раствора необходимо для этого взять?

482. Сумма квадратов трех последовательных целых чисел равна 302. Найдите эти числа.

483. а) Первый рабочий может выполнить некоторую работу на 4 ч раньше, чем второй. Вначале они работали вместе 2 ч, после чего оставшуюся работу выполнил один первый рабочий за 1 ч. За какое время может выполнить всю работу второй рабочий?

б) Двое рабочих должны выполнить некоторую работу. Вначале 2 ч работал первый, затем присоединился второй, и вместе они работали 1 ч. Оставшуюся после этого работу второй рабочий закончил за 3 ч. За какое время каждый может выполнить всю работу, если первому для выполнения всей работы нужно на 2 ч меньше, чем второму?

484. а) Две бригады грузчиков должны были разгрузить баржу в течение 6 ч. Первая бригада выполнила $\frac{3}{5}$ всей работы, вторая бригада закончила разгрузку. Вся работа была выполнена за 12 ч. Сколько часов требуется каждой бригаде в отдельности для разгрузки баржи?

б) Двум рабочим было поручено изготовить партию одинаковых деталей. После того как первый проработал 7 ч, а второй — 4 ч, оказалось, что они выполнили $\frac{5}{9}$ всей работы. Проработав совместно 4 ч, они установили, что им осталось выполнить $\frac{1}{18}$ всей работы. За сколько часов, работая отдельно, каждый из них может выполнить всю работу?

485. *Старинная задача.* На вопрос о возрасте одна дама ответила: «Мой возраст таков, что если его возвысить в квадрат или умножить на 53 и из результата вычесть 696, то получится одно и то же». Сколько лет даме?

486*. а) Брат и сестра собирали малину в двухлитровые бидоны. Брат собирал ягоды быстрее сестры. Через некоторое время он решил ей помочь и поменялся с ней бидонами. Момент для обмена бидонами был выбран удачно — ребята наполнили их ягодами одновременно. Сколько литров ягод они набрали вместе до того, как поменялись бидонами?

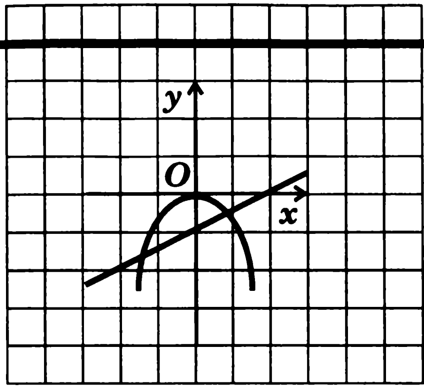
б) Дед и внук начали одновременно собирать клюкву в одинаковые лукошки. Дед собирает быстрее внука. Когда им надо поменяться лукошками, чтобы оба лукошка наполнились одновременно?

487*. а) Брат и сестра собирали малину. Корзина брата вмещала 5 л, а корзина сестры 4 л. Брат собирал ягоды быстрее сестры, поэтому, когда она набрала половину своей корзины, они поменялись корзинами и через некоторое время наполнили их одновременно. Сколько литров ягод собрал брат?

б) Брат и сестра собирали малину. Когда сестра собрала $\frac{2}{3}$ своего двухлитрового бидона, трехлитровый бидон брата был почти полон. Ребята поменялись бидонами и через некоторое время одновременно закончили сбор ягод. Во сколько раз брат работал быстрее сестры?

488*. Отец и сын принялись косить два соседних луга, площади которых относятся как 8 : 7. Когда отец скосил три четверти большего луга, а сын — больше половины меньшего, они присели отдохнуть и подсчитали, что если будут работать так же хорошо, но поменяются местами, то закончат работу одновременно. Во сколько раз отец косил быстрее сына?

489*. Сулико подошла к роднику с двумя кувшинами. Один вмещал 5 л, а другой — 4 л. Вода из родника текла двумя струями — одна сильнее, другая слабее. Сулико поставила одновременно кувшины под струи и, когда набралась половина меньшего кувшина, поменяла кувшины местами. Как это ни удивительно, но кувшины наполнились одновременно. Во сколько раз больше воды дает одна струя, чем другая?



ГЛАВА III

ЛИНЕЙНАЯ И КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИИ

§ 6. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

6.1. Прямая пропорциональная зависимость

Функцию вида

$$y = kx, \qquad (1)$$

где k — данное не равное нулю число, называют **прямой пропорциональной зависимостью**. *Эта функция определена для всех действительных чисел* x, т. е. *область определения* функции $y = kx$ есть множество $\mathbf{R}$ всех действительных чисел.

Название «прямая пропорциональная зависимость» связано с тем, что любые два отличные от нуля числа x_1 и x_2 пропорциональны числам $y_1 = kx_1$ и $y_2 = kx_2$, где $k \neq 0$ — коэффициент пропорциональности.

Действительно, так как $\frac{y_1}{x_1} = \frac{kx_1}{x_1} = k$ и $\frac{y_2}{x_2} = \frac{kx_2}{x_2} = k$, то

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}.$$

Если функция задана формулой (1), то говорят еще, что переменная y пропорциональна переменной x с **коэффициентом пропорциональности** k.

Например, функция $s = 80t$ есть прямая пропорциональная зависимость. При равномерном движении тела путь (s), пройденный им, прямо пропорционален времени (t) с коэффициентом пропорциональности, равным его скорости (80).

Каждая из функций $y = 5x$, $y = x$, $y = -0{,}2x$ является прямой пропорциональной зависимостью с коэффициентом пропорциональности в первом случае $k = 5$, во втором $k = 1$, в третьем $k = -0{,}2$.

490°. Какую функцию называют прямой пропорциональной зависимостью?

491°. Является ли функция:

а) $y=2x$; б) $y=-3x$; в) $y=0x$;
г) $y=x$; д) $y=-x$; е) $y=2x+1$;
ж) $y=x^2$; з) $y=\frac{1}{x}$; и) $y=-5x-2$

прямой пропорциональной зависимостью? Если да, то назовите коэффициент пропорциональности.

492. Функция задана формулой $y=2x$.

а) Заполните таблицу значений функции:

x	0	1	-1		
y				6	-8

б) Найдите y, если x равен 3, 5, -3, -4.

в) Найдите x, если y равен 8, 4, -2, 1.

493. Функция задана формулой $y=3x$.

а) Найдите значения функции y_1 и y_2, соответствующие значениям аргумента $x_1=1$ и $x_2=-2$.

б) Найдите значения аргумента x_1 и x_2, соответствующие значениям функции $y_1=6$ и $y_2=-12$.

494. Определите коэффициент k для функции $y=kx$, если:

а) $x=3$, $y=6$; б) $x=-2$, $y=-10$;
в) $x=2$, $y=-8$; г) $x=-1$, $y=4$.

495. Определите коэффициент k для функции $y=kx$ и заполните таблицу ее значений.

а)

x	-3	0	5		
y			-5	6	-7

б)

x	2	1	3		
y			12	0	-8

в)

x	2	0	4		
y			2	-3	5

г)

x	-4	0	-6		
y			3	4	-8

496. Определите, одинаковые или разные знаки имеют x и соответствующее ему y, если функция задана формулой:

а) $y=2x$; б) $y=3x$; в) $y=kx$, $k>0$;
г) $y=-5x$; д) $y=-1{,}5x$; е) $y=kx$, $k<0$.

6.2. График функции $y=kx$

Зададим на плоскости прямоугольную систему координат xOy и рассмотрим, например, функцию $y=2x$.

Эта функция определена для любых действительных чисел x, при этом каждому числу x соответствует число y, равное $2x$. Следовательно, каждому значению x соответствует точка $A\ (x;\ y)$ координатной плоскости, где $y=2x$, т. е. каждому значению x соответствует точка $A(x;\ 2x)$ координатной плоскости, имеющая абсциссу x и ординату $2x$.

Графиком функции $y=2x$ является множество точек координатной плоскости xOy с координатами $(x;\ 2x)$, где x — любое действительное число.

Ниже приведена таблица некоторых значений x, соответствующих им значений y $(y=2x)$ и точек $(x;\ 2x)$.

x	$y=2x$	$(x;\ y)$
0	$2\cdot 0=0$	(0; 0)
1	$2\cdot 1=2$	(1; 2)
-1	$2\cdot(-1)=-2$	$(-1;\ -2)$
2	$2\cdot 2=4$	(2; 4)
-2	$2\cdot(-2)=-4$	$(-2;\ -4)$
3	$2\cdot 3=6$	(3; 6)
-3	$2\cdot(-3)=-6$	$(-3;\ -6)$

Полученные точки отмечены на рисунке 33. Приложив линейку, мы видим, что эти точки лежат на одной прямой (l), проходящей через начало координат и точку (1; 2).

Возникает вопрос: если мы будем задавать другие значения x, то будут ли соответствующие точки лежать на прямой l? Да, будут.

В дополнениях к главе III доказывается, что график функции $y=2x$ есть прямая, проходящая через начало координат и точку (1; 2).

Рассмотрим теперь функцию

$$y=kx,$$

где k — данное число.

Графиком функции $y=kx$ является множество точек координатной плоскости xOy с координатами $(x;\ kx)$, где x — любое действительное число.

Так же как для функции $y=2x$, можно доказать, что для любого k *график функции* $y=kx$ *есть прямая, проходящая через начало координат и точку* $(1;\ k)$.

При положительном k точка $(1;\ k)$ находится в I четверти, а при отрицательном k — в IV четверти.

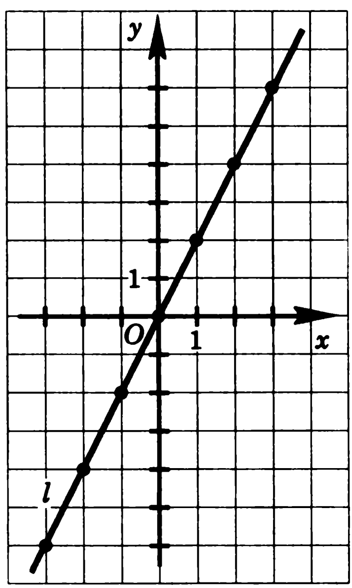


Рис. 33

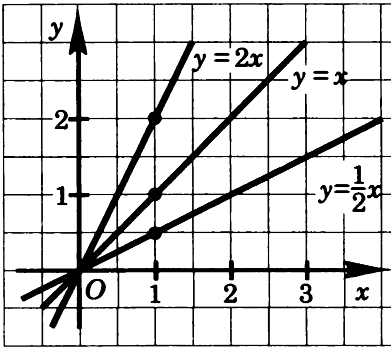


Рис. 34

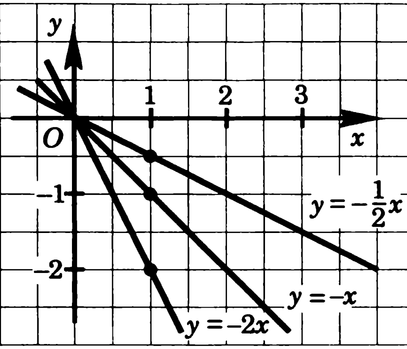


Рис. 35

Отметим, что любая точка оси абсцисс имеет ординату y, равную 0, независимо от ее абсциссы. Таким образом: *графиком функции $y=0$ является ось абсцисс.*

Итак, графиком функции $y=kx$, где k есть некоторое данное число (положительное, отрицательное или нуль), является прямая, проходящая через начало координат и точку $B(1;\ k)$. Вместо того чтобы говорить «график функции $y=kx$», часто говорят «прямая $y=kx$». Говорят еще, что прямая, проходящая через начало координат и точку $B(1;\ k)$, имеет уравнение $y=kx$.

Число k называют *угловым коэффициентом* прямой $y=kx$.

Если угловой коэффициент k прямой положителен ($k>0$), то она образует острый угол с положительным направлением оси x, а если угловой коэффициент k прямой отрицателен ($k<0$), то она образует тупой угол с положительным направлением оси x — угол отсчитывается против часовой стрелки (рис. 34 и 35).

Замечание. Напомним, что для построения прямой достаточно знать координаты двух точек, лежащих на ней.

При построении прямой $y=kx$ точку $B(1;\ k)$ можно заменить любой другой точкой $B_1(x_0;\ kx_0)$, достаточно удаленной от начала координат, чтобы чертеж получился более точным.

Пример. Зададим систему координат tOs. Будем считать, что 1 см на оси t соответствует 1 с, а 1 см на оси s соответствует 1 м.

По оси s равномерно вверх движется точка со скоростью $v=2$ м/с, при этом в начальный момент времени она находилась в точке O. К моменту времени $t\ (t>0)$ точка пройдет путь $2t$, и ее ордината в этот момент будет

$$s=2t.$$

Мы получили закон движения точки, выражающий зависимость ее ординаты s от времени t. График функции $s=2t$ $(t\geqslant 0)$ — полупрямая, выходящая из начала координат с угловым коэффициентом, равным 2, т. е. луч.

Отметим, что точка движется по оси s, а график ее движения только помогает нам наглядно узнавать координату s движущейся точки в момент времени t.

497°. а) Что является графиком функции $y=kx$?
б) Как записывается уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $(1;\ k)$, где k — данное число?
в) Что называют угловым коэффициентом прямой $y=kx$?
г) Какой угол с осью x образует прямая $y=kx$ при $k>0$, при $k<0$?

498. Задана функция $y=3x$.
а) Для каких значений x определена данная функция?
б) Вычислите значения y, взяв значения x от -2 до 3 через каждые 0,5 единицы. Решение оформите в виде таблицы.

x	$y=3x$	$(x;\ 3x)$

в) Постройте систему координат xOy (единичные отрезки по 1 см). В системе координат постройте точки с вычисленными координатами.
г) Как проверить правильность построения?
д) Постройте график функции $y=3x$.
е) В каких четвертях располагается график данной функции?
ж) С помощью графика определите $y(-3)$, $y(4)$, $y\left(\frac{1}{2}\right)$, $y(1{,}2)$, $y(-0{,}7)$. Проверьте полученные результаты вычислением с помощью формулы.
з) При каких значениях x значения $y>0$, $y<0$?
и) При каких значениях x значения $y>3$, $y<-2$?
к) Определите с помощью графика значения x, если:
1) $y(x)=2$; 2) $y(x)=1$; 3) $y(x)=-6$.
л) Как изменится значение y, если значение x увеличить на единицу?

499. Задана функция $y=-\frac{1}{2}x$. Исследуйте эту функцию по плану предыдущего задания.

500. Укажите координаты таких двух точек, с помощью которых можно построить график функции:
а) $y=7x$; б) $y=-3x$; в) $y=0{,}2x$;
г) $y=-1{,}4x$; д) $y=0\cdot x$; е) $y=-1$.
Постройте графики этих функций.

501. Постройте график функции:
а) $y=\frac{2}{3}x$; б) $y=-4x$; в) $y=10x$; г) $y=0{,}1x$.

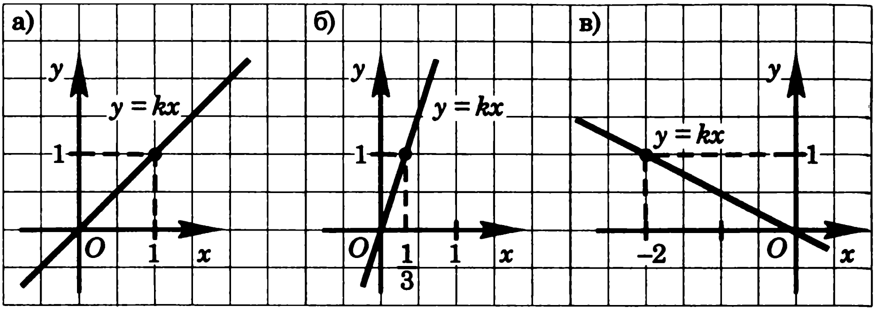


Рис. 36

502. Постройте график функции:
а) $y=100x$; б) $y=-3000x$;
в) $y=0{,}0001x$; г) $y=\frac{1}{400}x$.

Указание. Для удобства построения следует использовать различные единицы масштаба по осям координат.

503. Какой формулой задана прямая, проходящая через начало координат и точку:
а) $A(1;\ 2)$; б) $B(1;\ 0{,}5)$; в) $C(1;\ -1)$;
г) $D(1;\ 5)$; д) $E\left(1;\ \frac{2}{3}\right)$; е) $K(1;\ -1{,}7)$?

504. Принадлежит ли прямой $y=-2{,}5x$ точка:
а) $A(1;\ -2{,}5)$; б) $B(1;\ 2{,}5)$; в) $C(-1;\ -2{,}5)$;
г) $D(-1;\ 2{,}5)$; д) $E(4;\ 10)$; е) $K(3;\ -7{,}5)$?

505. В каких четвертях расположен график функции:
а) $y=36x$; б) $y=100x$; в) $y=7{,}2x$; г) $y=-0{,}2x$?

506. Проверьте, принадлежат ли точки A и B графику одной функции $y=kx$, если:
а) $A(1;\ 3)$, $B(3;\ 9)$; б) $A(1;\ -2)$, $B(3;\ -6)$;
в) $A(2;\ -10)$, $B(-1;\ 5)$; г) $A(3;\ 9)$, $B(1;\ 4)$;
д) $A(0{,}5;\ 4)$, $B(-2;\ 16)$; е) $A\left(\frac{2}{3};\ 1\right)$, $B(1;\ 3{,}5)$.

507. а) Задана функция $y=1\frac{1}{3}x$. Точка $(6;\ a)$ принадлежит графику этой функции. Найдите a.
б) Задана функция $y=-2{,}7x$. Точка $(b;\ -3)$ принадлежит графику этой функции. Найдите b.
в) Точка $(6;\ 4)$ принадлежит графику функции $y=kx$. Найдите k.

508. Какой формулой задана прямая, проходящая через начало координат и точку:
а) $(6;\ 8)$; б) $(4;\ -0{,}5)$; в) $(3;\ 1)$;
г) $(-2;\ 2)$; д) $\left(\frac{1}{2};\ 3\right)$; е) $(-2;\ -3)$?

509. а) 1 кг конфет стоит 40 р. Выразите формулой зависимость стоимости p (р.) конфет от их массы m (кг). Постройте график полученной зависимости.

б) Мотоцикл движется по шоссе со скоростью 60 км/ч. Выразите формулой зависимость расстояния s (км) от времени t (ч). Постройте график полученной зависимости. Какие значения может принимать t?

510. На рисунке 36 изображен график функции $y = kx$. Определите коэффициент k в каждом случае.

6.3. Линейная функция и ее график

Функцию вида

$$y = kx + b,$$

где k и b — данные числа, называют **линейной функцией**.

Линейная функция определена на множестве всех действительных чисел, т. е. *область определения* функции $y = kx + b$ есть множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$.

Если $b = 0$, то мы получим функцию $y = kx$, которую уже изучали в предыдущем пункте.

Примеры линейных функций: $y = 2x + 4$, $y = -x + 5$, $y = -0{,}5x$.

Графиком функции $y = kx + b$ является множество точек координатной плоскости xOy с координатами $(x;\ kx + b)$, где x — любое действительное число.

Чтобы построить, например, график функции $y = 2x + 4$ в прямоугольной системе координат xOy, построим сначала график функции $y = 2x$. Это прямая, проходящая через точки $O(0;\ 0)$ и $B(1;\ 2)$ (рис. 37, a).

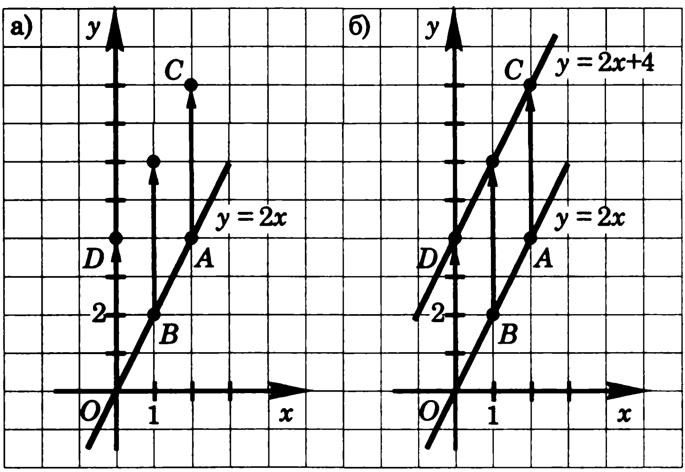


Рис. 37

Передвинув эту прямую параллельно самой себе вверх на 4 единицы, получим график функции $y=2x+4$ (рис. 37, *б*), потому что если A — произвольная точка графика функции $y=2x$, а C — точка графика функции $y=2x+4$, имеющая ту же абсциссу x, то ордината точки C, очевидно, на 4 единицы больше ординаты точки A.

Итак, прямая $y=2x+4$ параллельна прямой $y=2x$. Кроме того, прямая $y=2x+4$ пересекает ось ординат в точке $D(0;\ 4)$, в чем можно убедиться, положив $x=0$ в уравнении $y=2x+4$.

Рассуждение, которое мы провели на примере функции $y=2x+4$, по аналогии обобщается на любую линейную функцию $y=kx+b$, где k и b — любые данные числа.

Итак, *график линейной функции $y=kx+b$ есть прямая, пересекающая ось ординат в точке $D(0;\ b)$, параллельная прямой $y=kx$.*

Легко видеть, что точка $B(1;\ k+b)$ лежит на прямой $y=kx+b$. Поэтому можно сказать так: *график линейной функции $y=kx+b$ есть прямая, проходящая через две точки $D(0;\ b)$ и $B(1;\ k+b)$.*

З а м е ч а н и е 1. Для построения прямой $y=kx+b$ необязательно проводить ее через точки $D(0;\ b)$, $B(1;\ k+b)$, можно провести ее через любые две точки, координаты которых удовлетворяют уравнению этой прямой. Лучше брать точки, достаточно удаленные друг от друга, чтобы чертеж получился более точным.

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что график функции $y=2x+4$ можно было построить иначе, чем он был построен выше. Так как $2x+4=2(x+2)$, то функцию можно задать формулой $y=2(x+2)$

Чтобы построить график этой функции в прямоугольной системе координат xOy, построим сначала график функции $y=2x$ (рис. 38, *а*).

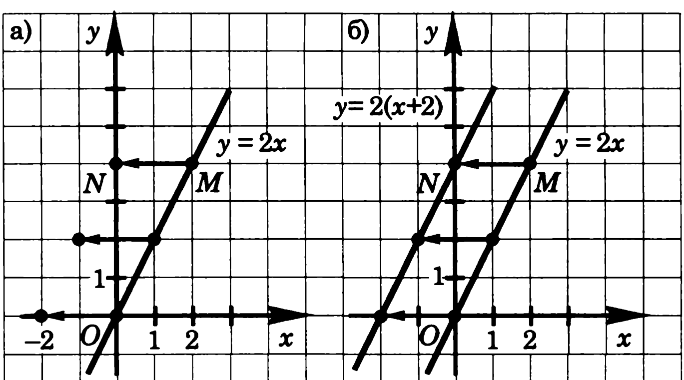


Рис. 38

Если эту прямую передвинуть на 2 единицы влево параллельно самой себе, то получится график функции $y=2(x+2)$ (рис. 38, *б*). В самом деле, если M — произвольная точка графика функции $y=2x$, а N — точка графика функции $y=2(x+2)$, имеющая ту же ординату y, то абсцисса точки N, очевидно, на 2 единицы меньше абсциссы точки M.

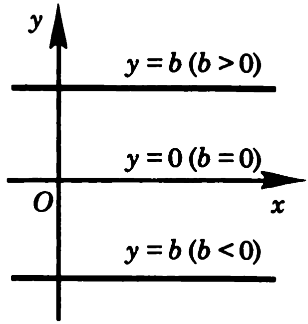


Рис. 39

Например, функция $y=2x$ принимает значение $y=0$ при $x=0$, а функция $y=2(x+2)$ при $x=-2$; функция $y=2x$ принимает значение $y=4$ при $x=2$, а функция $y=2(x+2)$ при $x=0$ и т. д.

Аналогично рассуждая, получим, что график функции $y=2(x-3)$ можно получить сдвигом параллельно самому себе графика функции $y=2x$ на 3 единицы вправо.

Коэффициент k в уравнении $y=kx+b$ называют **угловым коэффициентом** этой прямой. Число b есть ордината точки пересечения прямой с осью y.

Заметим, что две прямые $y=kx+b$ и $y=k_1x+b_1$, имеющие одинаковые угловые коэффициенты ($k=k_1$) и разные числа b и b_1 ($b\neq b_1$), параллельны.

Если $k=0$, то мы получим функцию $y=b$, явно от x не зависящую. Эта функция выражает следующий закон: каждому значению x соответствует одно и то же число $y=b$.

Функцию $y=b$ называют **постоянной**. График ее — прямая, параллельная оси x, пересекающая ось y в точке $(0;\ b)$ (рис. 39). Угловой коэффициент ее равен нулю.

511°. а) Какую функцию называют линейной функцией?

б) Что является графиком линейной функции?

в) Что называют угловым коэффициентом прямой $y=kx+b$?

г) При каком условии прямые $y=kx+b$ и $y=k_1x+b_1$ параллельны?

д) Что является графиком функции $y=b$? Как называют эту функцию?

е) Какова область определения линейной функции?

512. Какие из следующих функций являются линейными? Назовите k и b для функций вида $y=kx+b$.

а) $y=3x+1$; б) $y=5x$; в) $y=70-2x$;

г) $y=x^2-1$; д) $y=x-3x$; е) $y=0{,}5+3x$;

ж) $y=x$; з) $y=0$; и) $y=\frac{5x-1}{6}$.

513. Постройте в одной системе координат графики функций: $y=2x$, $y=2x+2$, $y=2x-1$, $y=2x-2{,}5$.

514. Постройте график функции $y=-2x+1$.

а) Какова область определения этой функции?

б) В каких четвертях расположен график этой функции?

в) С помощью графика определите $y(2)$, $y(-3)$, $y(0{,}5)$, $y(0{,}3)$. Проверьте полученные результаты вычислением с помощью формулы.

г) При каких значениях x значения y больше 0, меньше 0, больше 1, меньше 1?

д) Определите с помощью графика значение x, если: $y(x)=3$, $y(x)=-1$, $y(x)=2{,}5$, $y(x)=0$.

е) Как изменится значение y, если значение x увеличить на единицу?

515. Постройте график функции $y=-2x-1$. Ответьте на вопросы предыдущего задания.

516. В каких точках пересекает ось Oy и ось Ox график функции:

а) $y=-3x-1$; б) $y=4-x$;

в) $y=\frac{2}{7}x+1{,}2$; г) $y=-2{,}1+0{,}5x$?

517°. Назовите координаты двух точек, по которым удобнее строить график функции:

а) $y=3x-5$; б) $y=\frac{1}{4}x+2$;

в) $y=-7x+1$; г) $y=-2{,}5+0{,}5x$.

518. Какой формулой задана прямая, проходящая через точки:

а) (0; 8) и (1; 12); б) (0; -1) и (1; 2);
в) (0; 1) и (1; 4); г) (0; 1) и (1; -5);
д) (0; 7) и (1; 7); е) (0; -3) и (1; 0)?

519. Постройте график функции:

а) $y=x+1$; б) $y=x-2$; в) $y=x+2{,}5$;
г) $y=x-0{,}5$; д) $y=-x$; е) $y=-x+5$;
ж) $y=2x-2$; з) $y=x-1$; и) $y=-5x-\frac{1}{2}$;
к) $y=-0{,}5x+2$; л) $y=3-x$; м) $y=1-2x$;
н) $y=7-0{,}5x$; о) $y=-1\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x$; п) $y=7$.

520. Проверьте с помощью графика, принадлежит ли прямой $y=0{,}5x+3$ точка:

а) $A(4;\ 7)$ б) $A(12;\ 9)$; в) $A(-4;\ -1)$;
г) $A(-1;\ 1)$; д) $A(3;\ 4{,}5)$; е) $A(5;\ 6{,}5)$.

521. В каких четвертях расположен график функции:

а) $y=5x+4$; б) $y=-5x+4$;
в) $y=-5x-3$; г) $y=5x-3$?

522. Постройте график функции:

а) $y=40x+20$; б) $y=50-20x$;
в) $y=-0{,}02x+0{,}01$; г) $y=3x-0{,}007$.

Указание. Для удобства построения следует использовать различные единицы масштаба по осям координат.

523. Определите без построения, пересекаются ли графики данных функций, а затем постройте их:

а) $y=5x$ и $y=5x-8$; б) $y=-\frac{2}{3}$ и $y=6x-1$;
в) $y=7x-12$ и $y=25$; г) $y=3x$ и $y=-0{,}5+2x$.

524. Постройте график функции $y=x+3$. Принадлежат ли графику функции точки: $(-2;\ -5)$, $(3;\ 6)$, $(17;\ -10)$, $(145;\ 148)$, $(0;\ 0)$?

525. а) Какой геометрический смысл имеют числа k и b для линейной функции $y=kx+b$?

б) Как расположена относительно координатных осей прямая — график линейной функции $y=kx+b$, если:

1) $k\neq 0$, $b=0$; 2) $k>0$; 3) $k<0$; 4) $k=0$?

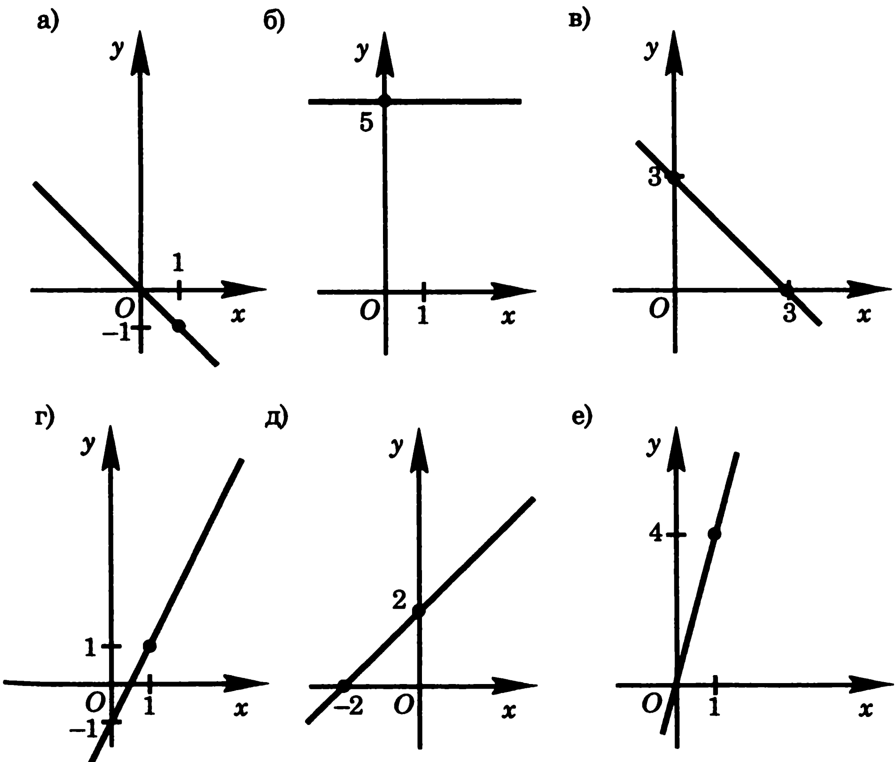


Рис. 40

526⁰. Как изменяется положение прямой $y=kx+b$ на координатной плоскости, если:

а) угловой коэффициент возрастает от 0 до 100;

б) b возрастает от 0 до 100?

527. а) Задана функция $y=-4x+3$. Точка $(1;\ a)$ принадлежит графику этой функции. Найдите a.

б) Задана функция $y=12x-1$. Точка $(b;\ -3)$ принадлежит графику этой функции. Найдите b.

в) Определите угловой коэффициент k функции $y=kx+1$, если точка $A\,(2;\ 5)$ принадлежит ее графику.

528. Какой из графиков, приведенных на рисунке 40, является графиком функции:

а) $y=2x-1$; б) $y=-x+3$; в) $y=5$; г) $y=4x$?

529*. На рисунке 41 показаны прямые a, b, c и d. Какой формулой задана каждая из них?

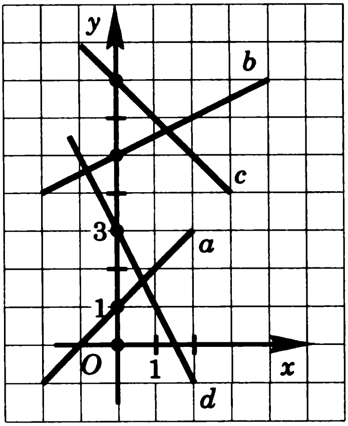


Рис. 41

530⁰. На сколько единиц вверх или вниз нужно перенести график функции $y=3x$, чтобы получить график функции:

а) $y=3x+2$;

б) $y=3x-4$;

в) $y=3x+1$;

г) $y=3x-0{,}5$;

д) $y=3x+7$;

е) $y=3x+5{,}5$?

531*. На сколько единиц вправо или влево нужно перенести график функции $y=3x$, чтобы получить график функции:

а) $y=3(x+2)$; б) $y=3(x-4)$; в) $y=3(x+1)$;

г) $y=3x+3$; д) $y=3x-6$; е) $y=3x+9$?

6.4. Равномерное движение

Пример 1. Зададим координатную ось s с начальной точкой O и единичным отрезком длиной 1 см.

Пусть в момент времени $t=0$ точка оси s, имеющая координату 3, начала движение в положительном направлении этой оси равномерно со скоростью 2 см/с (рис. 42). Координата s (см) этой точки есть функция от времени t (с), выражаемая формулой

$$s=3+2t.$$

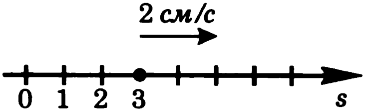


Рис. 42

Данная функция рассматривается для положительных значений

t и $t=0$, поэтому говорят, что она определена для неотрицательных значений t $(t \geqslant 0)$.

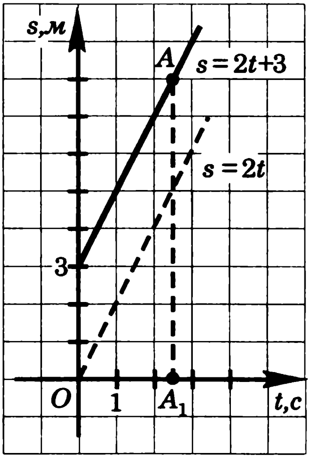


Рис. 43

Введем прямоугольную систему координат tOs и в ней изобразим график функции

$$s=3+2t \ (t \geqslant 0), \qquad (1)$$

или, как говорят, график движения точки (рис. 43). Это луч, выходящий из точки C (0; 3), параллельный прямой $s=2t$.

Пользуясь этим графиком, можно изучать рассматриваемое движение.

Например, чтобы узнать, где находится точка в заданный момент времени t, надо отложить по оси абсцисс от O вправо отрезок $OA_1=t$ и восставить из A_1 перпендикуляр к оси абсцисс до пересечения с графиком движения в некоторой точке A. Число s, равное длине отрезка AA_1, есть координата на оси s движущейся точки в момент времени t.

Равенство (1) называют уравнением движения точки, а соответствующий ему график — графиком движения точки.

Пример 2. Пусть tOs — прямоугольная система координат, единичный отрезок на оси t — секунда (с), на оси s — сантиметр (см).

Пусть точка движется по оси s, и при этом ее координата s есть линейная функция от времени t, выражаемая формулой

$$s=4t+2. \qquad (2)$$

Если в этой формуле положить $t=0$, то получим $s=2$. Это показывает, что движущаяся точка в момент времени $t=0$ имела координату $s=2$.

Отметим два произвольных момента времени t_1 и t_2, где $t_1 < t_2$.

В момент $t=t_1$ точка имеет координату $s=s_1$, вычисляемую по формуле $s_1=4t_1+2$.

В момент $t=t_2$ точка имеет координату $s=s_2$, вычисляемую по формуле $s_2=4t_2+2$.

Промежуток времени между моментами t_1 и t_2 равен t_2-t_1. Путь, пройденный точкой за этот промежуток времени, очевидно, равен:

$$s_2-s_1=(4t_2+2)-(4t_1+2)=4(t_2-t_1).$$

Отсюда скорость точки равна:

$$v=\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}=\frac{4(t_2-t_1)}{t_2-t_1}=4.$$

Мы получили, что если точка движется по оси s по закону, выражаемому формулой (2), то она движется равномерно со скоростью 4 см/с и при этом в момент времени $t=0$ она находилась в точке $s=2$.

532. Напишите уравнение движения точки вдоль оси s:
а) со скоростью 4 см/с, если она в момент времени $t=0$ имеет координату $s=5$;
б) со скоростью 6 см/с, если она в момент времени $t=0$ имеет координату $s=2$.
Постройте графики движения.

533. Дано уравнение движения точки вдоль оси s:
а) $s=2t-7$; б) $s=t+3$; в) $s=3t$.
Определите координату точки в момент времени $t=0$, $t=3$. Определите скорость точки. Постройте график движения.

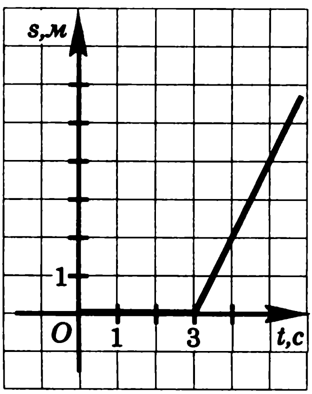


Рис. 44

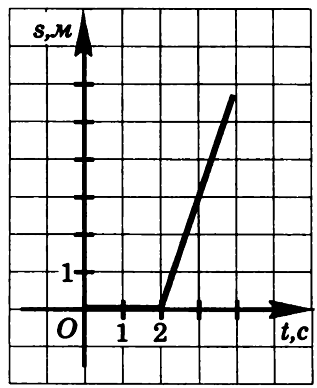


Рис. 45

534. На рисунке 44 показан график движения точки. Менялась ли координата точки в промежуток времени от 0 до 3? В какой момент времени началось движение точки и с какой скоростью?

535*. Функция, задающая зависимость координаты s от времени t, выражена формулой

$$s(t)=\begin{cases} 0, \text{ если } 0\leqslant t\leqslant 3, \\ 2t-6, \text{ если } t\geqslant 3. \end{cases}$$

Ей соответствует график, изображенный на рисунке 44. Напишите формулу, которой задается функция $s(t)$, график которой изображен на рисунке 45.

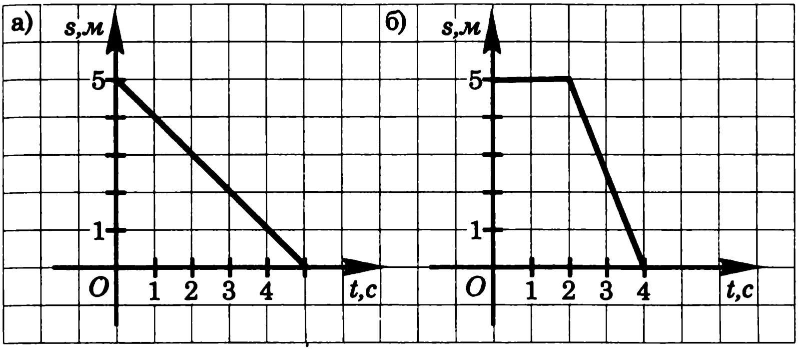


Рис. 46

536. Напишите формулу зависимости $s(t)$, график которой изображен на рисунке 46.

537⁰. На рисунке 47 заданы графики движения двух точек. Определите по графику:

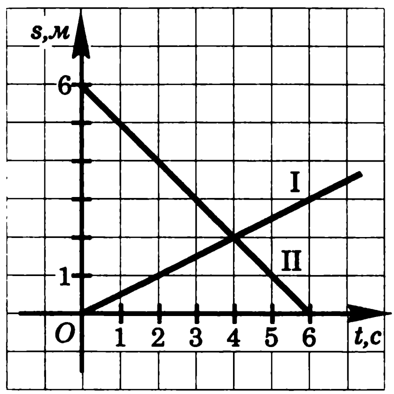


Рис. 47

а) какая из точек двигалась в положительном направлении оси Os, какая — в отрицательном;

б) в какой момент времени началось движение каждой из точек;

в) в какой момент времени точки встретились;

г) с какой скоростью двигалась каждая из точек;

д) какой формулой задается зависимость $s(t)$ для каждой из движущихся точек.

538*. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из двух пунктов. Первый мог пройти расстояние между пунктами за 6 ч, а второй — за 3 ч. Через сколько часов после начала движения они встретятся? Решите задачу, построив графики движения в одной системе координат.

6.5*. Функция $y=|x|$ и ее график

Рассмотрим функцию, заданную формулой $y=|x|$. Так как по определению модуля числа x

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{если } x\geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x\leqslant 0, \end{cases}$$

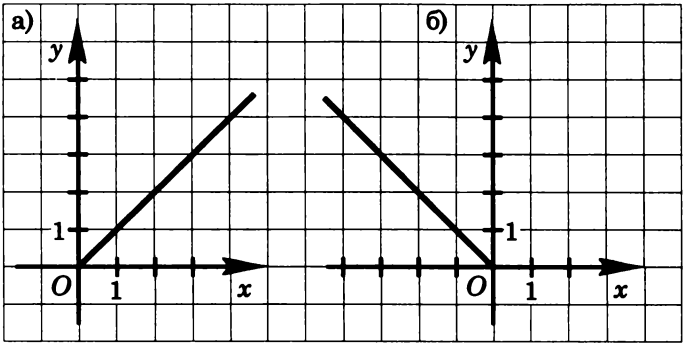


Рис. 48

то эту функцию можно записать так:

$$y=\begin{cases} x, \text{ если } x\geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x\leqslant 0. \end{cases}$$

На рисунке 48, *а* изображен график этой функции при $x\geqslant 0$, а на рисунке 48, *б* — при $x\leqslant 0$. Тогда график функции $y=|x|$ на всей оси Ox имеет вид, как на рисунке 49.

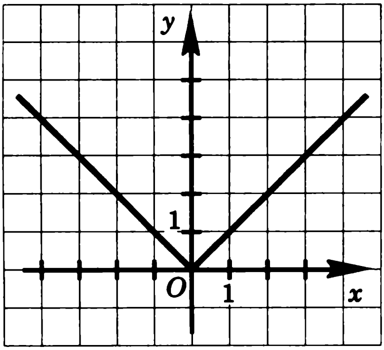


Рис. 49

Сформулируем основные *свойства* функции $y=|x|$:

1) *определена для всех значений* x;

2) *принимает только неотрицательные значения*;

3) *при* $x\geqslant 0$ *возрастает, при* $x\leqslant 0$ *убывает;*

4) *четная функция:* $|-x|=|x|$.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Построим график функции $y=|x|-2$.

Чтобы построить график функции $y=|x|-2$ в прямоугольной системе координат xOy, построим сначала график функции $y=|x|$ (рис. 50, *а*). Если A — произвольная точка графика функции $y=|x|$, а B — точка графика функции $y=|x|-2$, имеющая ту же абсциссу, то ордината точки B на 2 единицы меньше ординаты точки A. Это означает, что график функции $y=|x|-2$ можно получить из графика функции $y=|x|$ сдвигом всех его точек на 2 единицы вниз (рис. 50, *б*).

Пример 2. Построим график функции $y=|x|+3$.

Как и в предыдущем примере, график этой функции можно получить сдвигом графика функции $y=|x|$ на 3 единицы вверх (рис. 51).

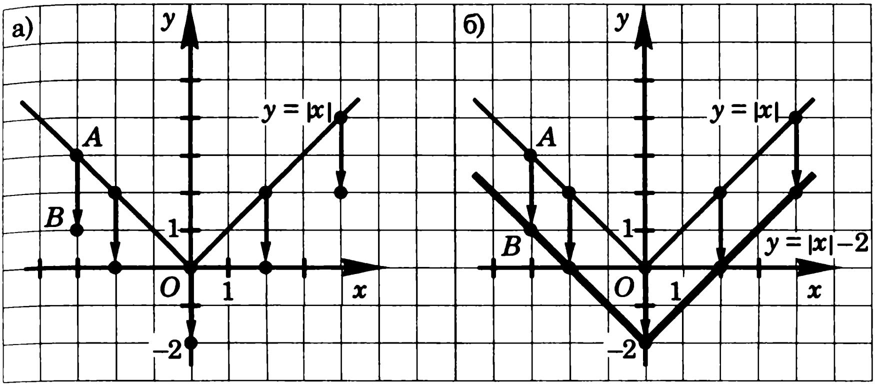


Рис. 50

Пример 3. Построим график функции $y=|x-2|$.

Чтобы построить график функции $y=|x-2|$ в прямоугольной системе координат xOy, построим сначала график функции $y=|x|$ (рис. 52, *а*). Если A — произвольная точка графика функции $y=|x|$, а B — точка графика функции $y=|x-2|$, имеющая ту же ординату, то абсцисса точки B на 2 единицы больше абсциссы точки A. Это означает, что график функции $y=|x-2|$ можно получить из графика функции $y=|x|$ сдвигом всех его точек на 2 единицы вправо (рис. 52, *б*).

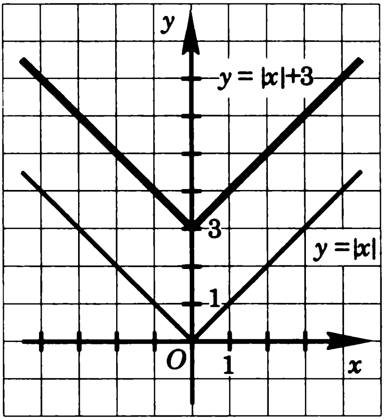


Рис. 51

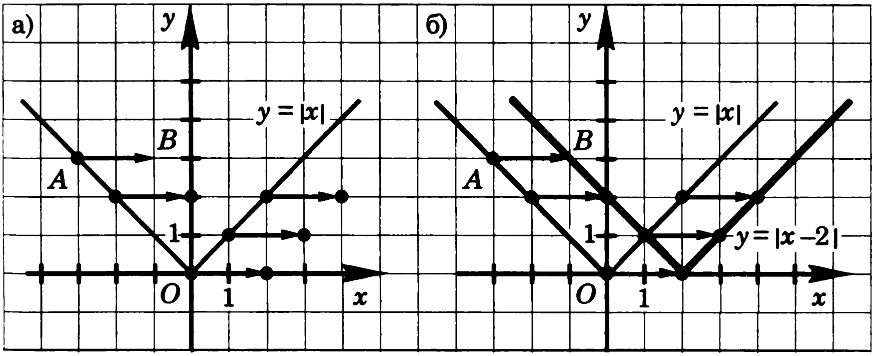


Рис. 52

Пример 4. Построим график функции $y=|x+3|$.

Рассуждая, как в примере 3, график функции $y=|x+3|$ можно получить сдвигом графика функции $y=|x|$ на 3 единицы влево (рис. 53).

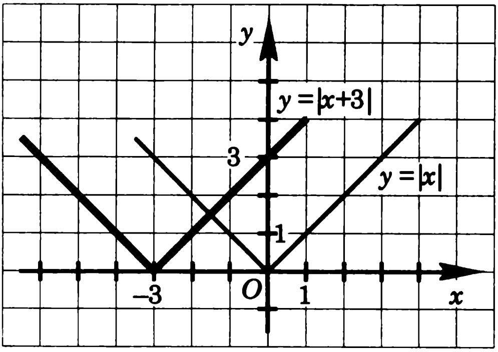


Рис. 53

Пример 5. Построим график функции $y=|x+1|-3$.

1) Сначала построим график функции $y=|x|$, перенесем его на 1 единицу влево, получим график функции $y=|x+1|$ (рис. 54, *а*).

2) Потом перенесем график функции $y=|x+1|$ на 3 единицы вниз, получим график функции $y=|x+1|-3$ (рис. 54, *б*).

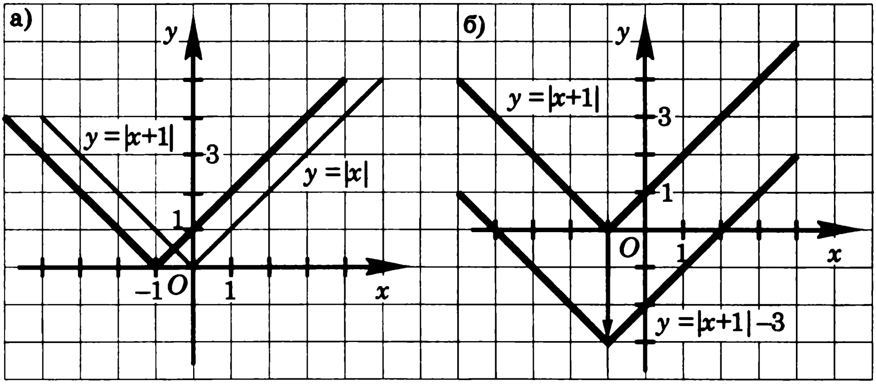


Рис. 54

539⁰. Объясните, как вы понимаете запись:

$$|x|=\begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x \leqslant 0. \end{cases}$$

540. Упростите выражение $|x|$ при условии:
а) $x \geqslant 0$; б) $x > 0$; в) $x \leqslant 0$;
г) $x < 0$; д) $x = 0$.

541. Постройте график функции $y = |x|$ и сформулируйте свойства этой функции.

542. Постройте график функции:
а) $y = 2|x|$; б) $y = 3|x|$; в) $y = -2|x|$;
г) $y = -3|x|$; д) $y = \frac{1}{2}|x|$; е) $y = -\frac{1}{2}|x|$.

543*. Постройте график функции:

а) $y = \begin{cases} x+2, \text{ если } x \geqslant 0, \\ 2, \text{ если } x < 0; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 0, \\ 0, \text{ если } x = 0, \\ -1, \text{ если } x < 0. \end{cases}$

544. Объясните, как с помощью графика функции $y = |x|$ построить график функции:

а) $y = |x| - 5$; б) $y = |x| + 4$;
в) $y = |x - 4|$; г) $y = |x + 1|$;
д) $y = |x - 2| + 3$; е) $y = |x + 2| - 3$;
ж) $y = |x + 3| + 2$; з) $y = |x - 3| - 2$;
и) $y = |x + 4| + 1$.

6.6*. Функции $y = [x]$ и $y = \{x\}$

Целой частью числа x называют наибольшее целое число, не превосходящее x. Целую часть числа x обозначают $[x]$.

Например,

$$[3] = 3; \quad [-15] = -15; \quad [0] = 0;$$
$$[3{,}17] = 3; \quad [-3{,}17] = -4.$$

Дробной частью числа x называют разность числа x и его целой части $[x]$. Дробную часть числа x обозначают $\{x\}$. Таким образом, $\{x\} = x - [x]$.

Например,

$$\{2\} = 2 - 2 = 0; \quad \{-5\} = -5 - (-5) = 0;$$
$$\{3{,}2\} = 3{,}2 - 3 = 0{,}2; \quad \{-3{,}2\} = -3{,}2 - (-4) = 0{,}8.$$

Рассмотрим функцию $y = [x]$. Ее область определения — множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$. На каждом полуинтервале $[n; n+1)$, где n — целое число, значение функции $y = [x]$ постоянно и равно n. Это означает, что множество значений функции — множество всех целых чисел $\boldsymbol{Z}$.

График функции $y = [x]$ состоит из бесконечного множества отрезков, параллельных оси Ox и не имеющих правых концов (рис. 55). На рисунке изображена только часть графика.

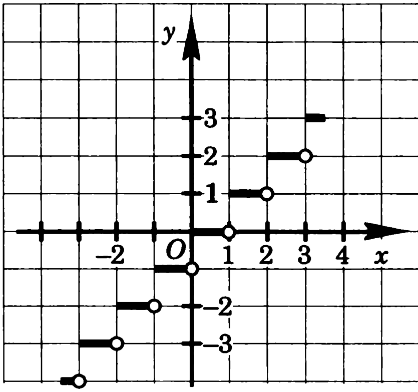


Рис. 55

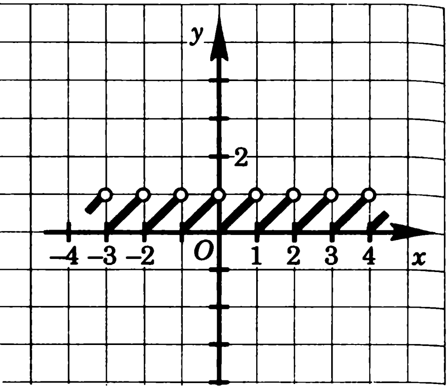


Рис. 56

Рассмотрим функцию $y=\{x\}$. Ее область определения — множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$. На каждом полуинтервале $[n;\ n+1)$, где n — целое число, значение функции $y=\{x\}$ вычисляется по формуле $y=x-[x]$. Это означает, что функция принимает значения из полуинтервала $[0;\ 1)$, т. е. множество значений функции — полуинтервал $[0;\ 1)$.

График функции $y=\{x\}$ состоит из бесконечного множества отрезков, параллельных прямой $y=x$ и не имеющих правых концов (рис. 56). На рисунке изображена только часть графика.

545. Найдите целую часть числа:

а) 7; б) —12; в) 7,41; г) —7,41;
д) —3,2; е) 8,39; ж) 13,27; з) —19,01.

546. Найдите дробную часть числа:

а) 3; б) —5; в) 8,2; г) —8,2;
д) 5,7; е) —5,7; ж) 31,12; з) —36,25.

547. Каковы область определения и множество значений функции:

а) $y=[x]$; б) $y=\{x\}$?

548*. Постройте график функции:

а) $y=2[x]$; б) $y=-3[x]$; в) $y=\frac{1}{2}[x]$;

г) $y=\left[\frac{x}{2}\right]$; д) $y=|[x]|$; е) $y=[|x|]$;

ж) $y=-3\{x\}$; з) $y=2\{x\}$; и) $y=\frac{1}{2}\{x\}$;

к) $y=\left\{\frac{x}{2}\right\}$; л) $y=|\{x\}|$; м) $y=\{|x|\}$;

н) $y=[x]+\{x\}$; о) $y=[x]-\{x\}$; п) $y=\{x\}^2$.

549*. Постройте график функции:

а) $y=|\{x\}-0{,}5|$; б) $y=(-1)^{[x]}$;

в) $y=\{-x\}$; г) $y=\frac{1}{\{x\}}$.

550*. Решите уравнение:

а) $x=[x]+\{x\}$; б) $x=[x]-\{x\}$; в) $[x]^2-\{x\}^2=3{,}75$.

551*. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}[x]+\{y\}=-2{,}13,\\ [y]+\{x\}=3{,}5;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+[y]=6{,}1,\\ y+\{x\}=-5{,}6;\end{cases}$

в) $\begin{cases}[x]+\{y\}+z=-0{,}8,\\ [y]+\{z\}+x=4{,}95,\\ [z]+\{x\}+y=0{,}75.\end{cases}$

552*. Некто измерил длину и ширину прямоугольника. Он умножил целую часть длины на целую часть ширины и получил 48; умножил целую часть длины на дробную часть ширины и получил 3,2; умножил дробную часть длины на целую часть ширины и получил 1,5. Определите площадь прямоугольника.

§ 7. КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

7.1. Функция $y=ax^2$ $(a>0)$

Функция

$$y=ax^2 \ (a>0) \qquad (1)$$

определена для любых действительных значений x, т. е. область определения функции $y=ax^2$ $(a>0)$ есть множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел. Ее свойства очень похожи на уже известные нам свойства функции $y=x^2$ и доказываются аналогично. Перечислим их.

1. *Если* $x=0$, *то* $y=0$.

2. *Если* $x\neq 0$, *то* $y>0$.

3. *Для неотрицательных значений* x *функция* (1) *возрастает, а для неположительных значений* x *убывает.*

4. *Если положительное* x *неограниченно возрастает, то* y *неограниченно возрастает, а если отрицательное* x *таково, что его абсолютная величина неограниченно возрастает, то* y *неограниченно возрастает. Иными словами,* $y\to+\infty$ *при* $x\to+\infty$ *и при* $x\to-\infty$.

5. *Функция* (1) *четная, поэтому ее график симметричен относительно оси* y.

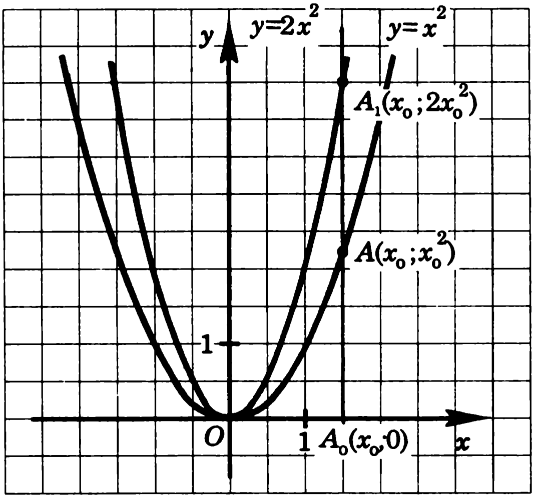


Рис. 57

6. *Функция* (1) *непрерывная, поэтому ее график — непрерывная линия, т. е. он может быть изображен одним непрерывным движением карандаша без отрыва от бумаги.*

Рассмотрим две функции

$$y=x^2 \text{ и } y=2x^2.$$

Обе они определены для любых действительных значений x.

Зададим декартову систему координат xOy и число x_0. Точка $A(x_0;\ x_0^2)$ принадлежит графику функции $y=x^2$, а точка $A_1(x_0;\ 2x_0^2)$, имеющая ту же абсциссу, принадлежит графику функции $y=2x^2$ (рис. 57). Ординаты точек A_1 и A находятся в отношении $2:1$, т. е. отрезок A_0A_1 получается *растяжением* отрезка A_0A в 2 раза. Это рассуждение можно провести для любых точек графиков функций $y=x^2$ и $y=2x^2$, имеющих одну и ту же абсциссу x. Поэтому говорят, что график функции $y=2x^2$ получается из графика функции $y=x^2$ *растяжением* последнего в 2 раза вдоль оси Oy.

Рассуждая аналогично, можно показать, что график функции $y=ax^2$, если $a>1$, получается из графика функции $y=x^2$ *растяжением* последнего в a раз вдоль оси y; если же $0<a<1$, то *сжатием* последнего в $\frac{1}{a}$ раз.

Мы видим, что график функции $y=ax^2$ $(a>0)$ похож на график функции $y=x^2$, его также называют **параболой**.

На рисунке 58, *а* изображены в одной и той же декартовой системе координат xOy параболы $y=x^2$, $y=2x^2$, $y=3x^2$, а на рисунке 57, *б* — параболы $y=x^2$, $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=\frac{1}{3}x^2$.

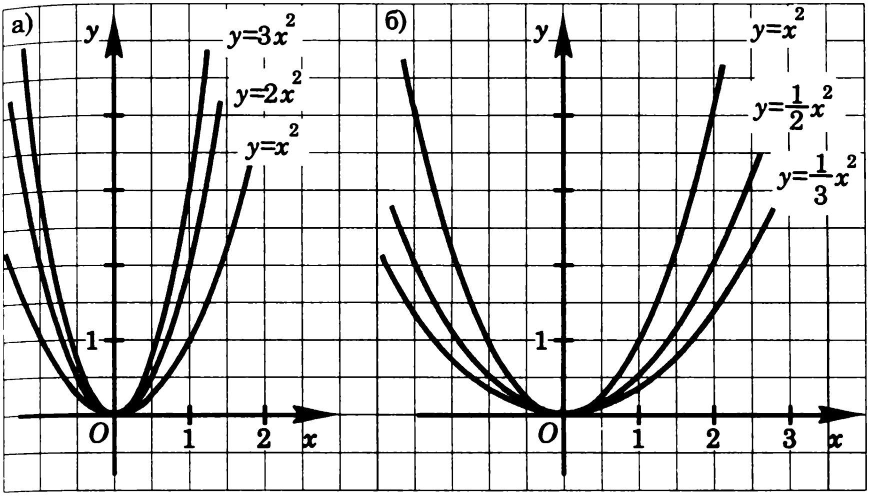


Рис. 58

553°. Как называют график функции $y=ax^2$ $(a>0)$?

554°. Как получить график функции $y=ax^2$ $(a>0)$ из графика функции $y=x^2$?

555°. Какими свойствами обладает функция $y=ax^2$ $(a>0)$?

556. а) Функция задана формулой $y=5x^2$. Назовите зависимую и независимую переменные. Вычислите $y(0)$, $y(1)$, $y(2)$, $y(3)$, $y(-1)$, $y(-2)$, $y(-3)$. Решение оформите в виде таблицы.

Например:

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
y	0	5					

б) Функция задана формулой $y=0{,}25x^2$. Вычислите $y(-2)$, $y(-4)$, $y(10)$, $y\left(\frac{1}{3}\right)$, $y(-10)$, $y\left(-\frac{1}{3}\right)$. Решение оформите в виде таблицы.

557. Функция задана формулой $y=\frac{3}{5}x^2$. Верно ли равенство:

а) $y(5)=15$; б) $y(-10)=80$;

в) $y(3)=5{,}6$; г) $y(-2)=2{,}4$?

558. а) Вычислите значения функции $y=2x^2$ для значений x от -3 до 3 через 0,5. Решение оформите в виде таблицы.

б) Вычислите значения функции $y=\frac{1}{2}x^2$ для значений x от -1 до 1 через 0,2. Решение оформите в виде таблицы.

559. а) Дана функция $y=5x^2$. При каких x значения функции равны 5; 0,2; —2; 0?

б) Дана функция $y=\frac{1}{7}x^2$. При каких x значения функции равны —7; 7; 0; 1?

560⁰. а) Может ли функция $y=ax^2$ $(a>0)$ принимать отрицательные значения?

б) Какие значения может принимать функция $y=ax^2$ $(a>0)$ при различных значениях x?

561. Заданы функции $y=x^2$ и $y=3x^2$.

а) При каких x определены эти функции?

б) Какие значения принимают эти функции при $x>0$, $x<0$, $x=0$?

в) Вычислите значения данных функций при x, равном $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$; 0,5; —0,5; 1; —1; $1\frac{1}{3}$; $-1\frac{1}{3}$; 2; —2. Решение оформите в виде таблицы.

г) В каких четвертях расположены графики функций?

д) Являются ли данные функции четными? В случае положительного ответа укажите ось симметрии.

е) Постройте точки $(x;\ x^2)$ и $(x;\ 3x^2)$.

ж) Постройте графики функций, учитывая их непрерывность.

з) С помощью графиков определите для каждой функции $y(1,5)$, $y\left(-2\frac{1}{3}\right)$, $y(-0,3)$.

и) С помощью графиков определите, при каких x значения функций равны между собой; равны 1; $1\frac{2}{3}$; 4,5. Проверьте результаты с помощью формул, задающих функции.

к) При каких x значения функций больше нуля, меньше нуля, равны нулю?

л) При каких x значения функций больше 1, меньше 2, меньше —1?

562. Заданы функции $y=x^2$ и $y=0,5x^2$. Ответьте на вопросы предыдущего упражнения.

563. Укажите абсциссы пяти точек, для которых проще всего вычислить ординаты:

а) $y=4x^2$; б) $y=\frac{1}{4}x^2$; в) $y=\frac{1}{3}x^2$;

г) $y=1,5x^2$; д) $y=0,1x^2$; е) $y=5x^2$;

ж) $y=10x^2$; з) $y=1\frac{2}{15}x^2$; и) $y=2,5x^2$.

Постройте графики функций, выбрав удобные единичные отрезки на координатных осях **(564—565)**:

564. а) $y=4x^2$; б) $y=0,25x^2$; в) $y=\frac{1}{3}x^2$;

г) $y=1,5x^2$; д) $y=\frac{1}{10}x^2$; е) $y=5x^2$.

565. а) $y=20x^2$; б) $y=400x^2$; в) $y=1000x^2$;
г) $y=0{,}01x^2$; д) $y=0{,}001x^2$; е) $y=0{,}0001x^2$.

566. Принадлежат ли графику функции:
а) $y=8x^2$ точки $A\,(2;\ 32)$, $B\,(-3;\ 72)$, $C\,(2{,}5;\ 18)$;
б) $y=0{,}05x^2$ точки $A\,(5;\ 1{,}8)$, $B\,(-10;\ 5)$, $C\,(-8;\ 3{,}2)$?

567. а) Задана функция $y=3x^2$. Точка $(-2;\ a)$ принадлежит графику этой функции. Найдите a.
б) Задана функция $y=3x^2$. Точка $(b;\ 12)$ принадлежит графику этой функции. Найдите b.
в) Точка $(1;\ 8)$ принадлежит графику функции $y=ax^2$. Определите a.

568. Постройте параболу $y=0{,}1x^2$.
а) При каких x функция принимает положительные значения?
б) При каких x функция равна 2?
в) Какие значения принимает y, если $x>0{,}5$?
г) При каких x функция возрастает, убывает?

569. Постройте график функции $y=2x^2$.
а) Какие значения принимает y, если $x>0$, $x<0$, $x>1$, $x>-2$?
б) Какие значения принимает x, если $y\geqslant 0$, $y\geqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 3$, $1<y<4$?

570. На рисунке 59 представлены графики функций $y=x^2$ и $y=ax^2$. Определите a.

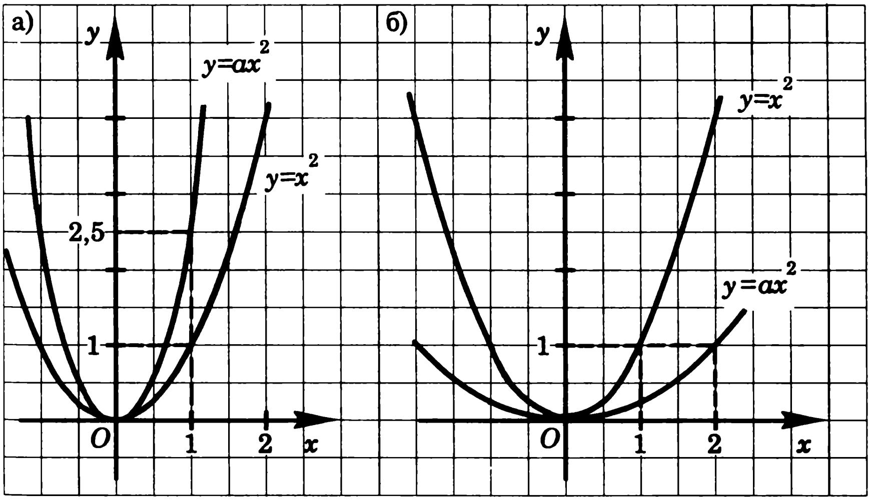


Рис. 59

571. На рисунке 60 изображен график функции $y=ax^2$. Используя приведенные на рисунке данные, определите a.

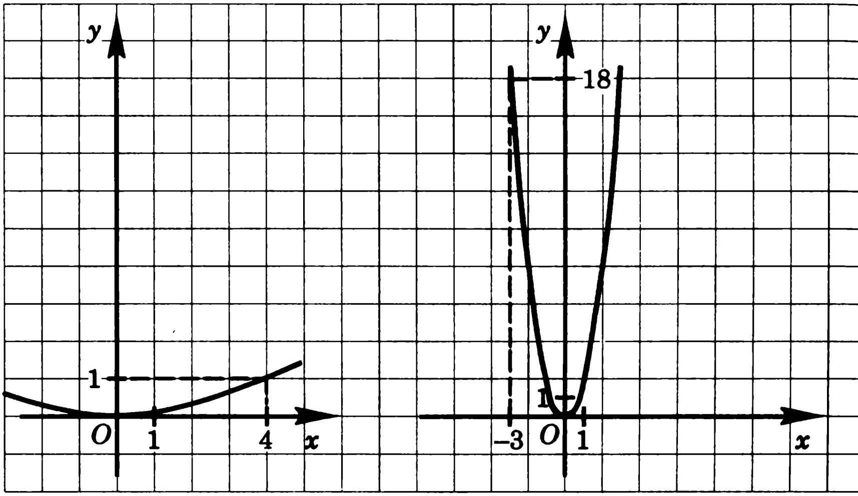


Рис. 60

572. На рисунке 61 изображен график функции $y=ax^2$. Определите a.

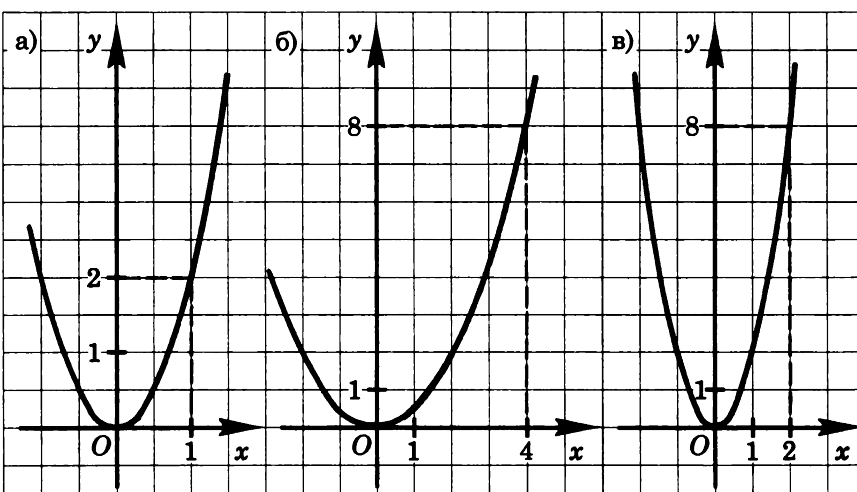


Рис. 61

7.2. Функция $y=ax^2$ $(a\neq 0)$

Область определения функции $y=ax^2$ $(a\neq 0)$ есть $\boldsymbol{R}$ — множество всех действительных чисел. Рассмотрим функции $y=x^2$ и $y=-x^2$.

Ординаты их точек, имеющих одну и ту же абсциссу x_0, $x_0\neq 0$, одинаковы по абсолютной величине, но имеют противоположные знаки, поэтому их графики симметричны относительно оси Ox. Первый из них расположен выше, а второй — ниже оси Ox, если исключить точку $O(0;\ 0)$. На рисунке 62 изображены графики функций $y=x^2$, $y=-x^2$.

Точно так же графики функций $y=ax^2$ и $y=-ax^2$, где a — данное, отличное от нуля число, симметричны относительно оси Ox. При $a>0$ первый из них расположен выше, а второй — ниже оси Ox, если исключить точку $O(0;\ 0)$. *Графиком функции $y=ax^2$ при $a<0$, так же как и при $a>0$, является парабола.*

На рисунке 63 в одной и той же декартовой системе координат xOy даны параболы $y=2x^2$, $y=-2x^2$, $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=-\frac{1}{2}x^2$.

При любом данном значении a $(a\neq 0)$ функция $y=ax^2$ четная, потому что для любого x выполняется равенство $a(-x)^2=ax^2$. Это показывает, что ось Oy служит осью симметрии параболы $y=ax^2$ $(a\neq 0)$.

Точку, в которой парабола $y=ax^2$ пересекается со своей осью симметрии, называют **вершиной параболы**, *а ось симметрии параболы называют* **осью параболы**.

Функция $y=ax^2$ $(a\neq 0)$ при $x=0$ принимает для $a>0$ свое наименьшее значение, для $a<0$ — свое наибольшее значение.

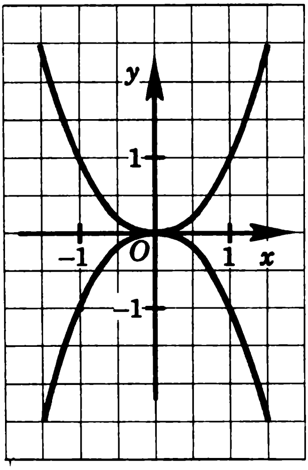


Рис. 62

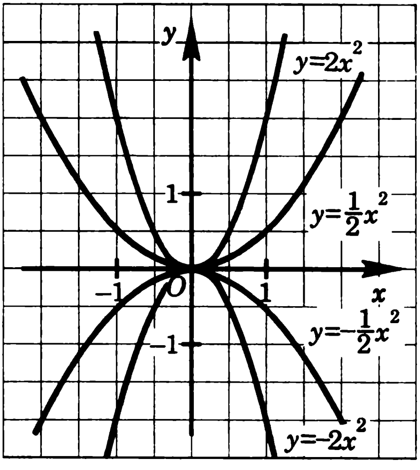


Рис. 63

573°. а) Как называют график функции $y=ax^2$ $(a\neq 0)$?

б) Какая прямая является осью симметрии параболы $y=ax^2$? Почему?

в) Что называют вершиной, осью параболы $y=ax^2$ $(a\neq 0)$?

574. Напишите уравнение параболы, симметричной параболе $y=ax^2$ $(a\neq 0)$ относительно оси Ox.

575. а) Какова область определения функции $y=ax^2$ $(a\neq 0)$?

б) Где расположен график функции $y=ax^2$ $(a\neq 0)$?

в) Докажите, что функция $y=ax^2$ $(a\neq 0)$ четная. Укажите ось симметрии графика функции.

г) Существуют ли точки, принадлежащие всем параболам вида $y=ax^2$ $(a\neq 0)$?

д) Принимает ли функция $y=ax^2$ $(a\neq 0)$ свои наибольшее и наименьшее значения?

е) В каких четвертях расположен график функции:

1) $y=10x^2$; 2) $y=-5x^2$; 3) $y=-0{,}5x^2$; 4) $y=0{,}5x^2$?

576. На каком множестве функция возрастает:

а) $y=10x^2$; б) $y=-5x^2$; в) $y=-0{,}5x^2$; г) $y=0{,}5x^2$?

577. а) Вычислите значения функции $y=-2x^2$ для значений x от 0 до 2 через 0,2. Решение оформите в виде таблицы.

б) Вычислите значения функции $y=-0{,}5x^2$ для значений x от -2 до 2 через 0,5. Решение оформите в виде таблицы.

578. Постройте график функции, выбрав удобные единичные отрезки:

а) $y=-3x^2$; б) $y=-0{,}5x^2$;

в) $y=-0{,}1x^2$; г) $y=-2\frac{1}{2}x^2$;

д) $y=-200x^2$; е) $y=-400x^2$;

ж) $y=-1000x^2$; з) $y=-4200x^2$.

579. Дана функция $y=-x^2$. Постройте график этой функции. Определите с помощью графика, при каких x:

а) $y>0$; б) $y\leqslant 0$; в) $y<-1$; г) $y\leqslant -4$.

580. Дана функция $y=-0{,}1x^2$. Постройте график этой функции. Определите с помощью графика, какие значения принимает функция, если:

а) $x>0$; б) $x\geqslant 0$; в) $x\geqslant -2$; г) $x\leqslant -2$.

581. Какой формулой задана функция, график которой симметричен относительно оси Ox графику функции:

а) $y=3x^2$; б) $y=-\frac{1}{3}x^2$; в) $y=100x^2$; г) $y=-0{,}2x^2$?

582. Принадлежат ли графику функции:

а) $y=-10x^2$ точки $A(3;\ 90)$, $B(-4;\ -160)$, $C(0{,}2;\ 0{,}4)$;

б) $y=-0{,}1x^2$ точки $A(-2;\ 0{,}4)$, $B(-5;\ -8{,}5)$, $C(4;\ -1{,}6)$?

583. а) Дана функция $y=-3x^2$. Точка $(t;\ -3)$ принадлежит графику этой функции. Определите t.

б) Дана функция $y=-0{,}2x^2$. Точка $(-0{,}2;\ t)$ принадлежит графику этой функции. Определите t.

7.3. Функция $y=a(x-x_0)^2+y_0$

Область определения функции $y=a(x-x_0)^2+y_0$ есть множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$. Покажем, как можно построить ее график, например, для $a=2$.

Пусть дана парабола $y=ax^2$ $(a\neq 0)$ (рис. 64, *а*). Чтобы построить график функции $y=ax^2-2$, надо параболу $y=ax^2$ сдвинуть на 2 единицы вниз. График функции $y=ax^2-2$ — парабола, имеющая вершину (0; —2) и ось $x=0$ (рис. 64, *б*).

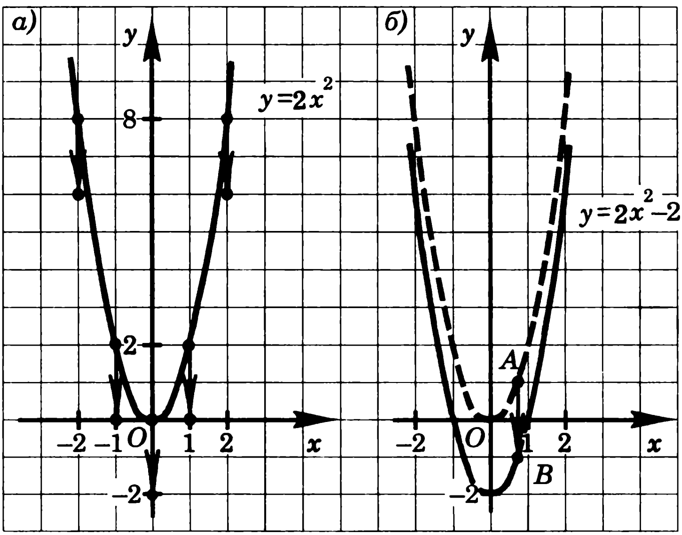


Рис. 64

В самом деле, если A — произвольная точка графика функции $y=ax^2$, а B — точка графика функции $y=ax^2-2$, имеющая ту же абсциссу, то ордината точки B на 2 единицы меньше ординаты точки A.

Например, при $x=0$ функция $y=2x^2$ принимает значение 0, а функция $y=2x^2-2$ принимает значение -2. При $x=1$ и при $x=-1$ функция $y=2x^2$ принимает значение 2, а функция $y=2x^2-2$ принимает значение 0 и т. д.

Вообще, **чтобы построить параболу $y=ax^2+y_0$, надо параболу $y=ax^2$ сдвинуть на $|y_0|$ единиц вверх, если $y_0>0$, и вниз, если $y_0<0$.**

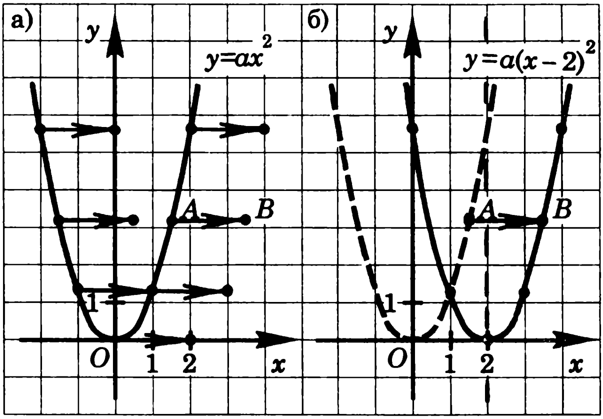


Рис. 65

Пусть дана парабола $y=ax^2$ ($a \neq 0$) (рис. 65, *а*). Чтобы построить график функции $y=a(x-2)^2$, надо параболу $y=ax^2$ сдвинуть на 2 единицы вправо. График функции $y=a(x-2)^2$ — парабола, имеющая вершину (2; 0) и ось $x=2$ (рис. 65, *б*).

В самом деле, если A — произвольная точка графика функции $y=ax^2$, а B — точка графика функции $y=a(x-2)^2$, имеющая ту же ординату, то абсцисса точки B на 2 единицы больше абсциссы точки A.

Например, функция $y=2x^2$ принимает значение 0 при $x=0$, а функция $y=2(x-2)^2$ при $x=2$, функция $y=2x^2$ принимает значение 2 при $x=1$ и при $x=-1$, а функция $y=2(x-2)^2$ при $x=3$ и при $x=1$ и т. д.

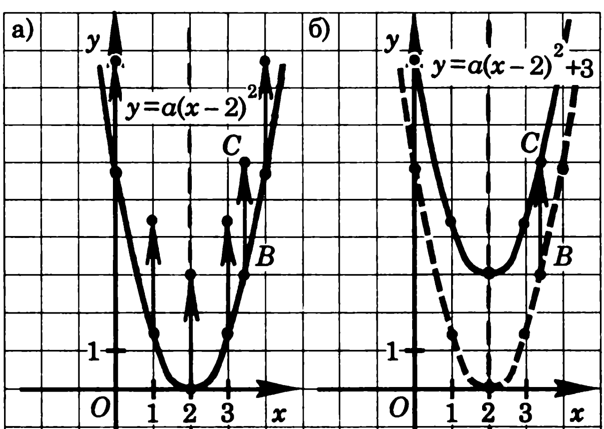


Рис. 66

Вообще, **чтобы построить параболу $y=a\,(x-x_0)^2$, надо параболу $y=ax^2$ сдвинуть на $|x_0|$ единиц вправо, если $x_0>0$, и влево, если $x_0<0$.**

Пусть теперь дана парабола $y=ax^2$ (рис. 65, *а*). Чтобы построить график функции $y=a\,(x-2)^2+3$, надо параболу $y=ax^2$ сначала сдвинуть на 2 единицы вправо (рис. 65, *б*). Теперь параболу $y=a\,(x-2)^2$ надо сдвинуть на 3 единицы вверх (рис. 66, *а*). График функции $y=a\,(x-2)^2+3$ — парабола, вершина которой (2; 3), а ось — прямая $x=2$ (рис. 66, *б*).

В самом деле, если B — произвольная точка параболы $y=a\,(x-2)^2$, а C — точка параболы $y=a\,(x-2)^2+3$, имеющая ту же абсциссу, то ордината точки C на 3 единицы больше ординаты точки B.

Например, при $x=2$ функция $y=2\,(x-2)^2$ принимает значение 0, а функция $y=2\,(x-2)^2+3$ принимает значение $0+3=3$, при $x=1$ функция $y=2\,(x-2)^2$ принимает значение 2, а функция $y=2\,(x-2)^2+3$ принимает значение $2+3=5$ и т. д.

Вообще, **чтобы построить параболу $y=a\,(x-x_0)^2+y_0$, надо параболу $y=ax^2$ сдвинуть на $|x_0|$ единиц вправо, если $x_0>0$, и влево, если $x_0<0$; затем полученную параболу сдвинуть на $|y_0|$ единиц вверх, если $y_0>0$, и вниз, если $y_0<0$.**

Вершина параболы $y=a\,(x-x_0)^2+y_0$ имеет координаты $(x_0;\ y_0)$, прямая $x=x_0$ — ее ось.

Функция $y=a\,(x-x_0)^2+y_0$ $(a\neq 0)$ при $x=x_0$ принимает для $a>0$ свое наименьшее значение, а для $a<0$ наибольшее значение.

Пример. Построим график функции

$$y=(x-3)^2-2.$$

Чтобы построить график функции $y=(x-3)^2-2$, надо параболу $y=x^2$ сдвинуть на 3 единицы вправо (рис. 67, *а*). Потом параболу $y=(x-3)^2$ сдвинуть на 2 единицы вниз (рис. 67, *б*).

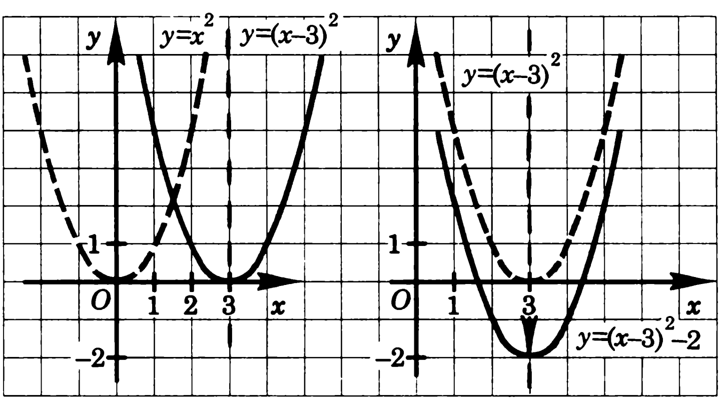


Рис. 67

584. Как из графика функции $y=ax^2$ ($a\neq 0$) получить график функции:

а) $y=a(x-x_0)^2$; б) $y=a(x-x_0)^2+y_0$; в) $y=ax^2+y_0$?

Как называют эти графики? Какие точки являются их вершинами? Каковы уравнения их осей?

585. Пусть $a>0$. Каким должно быть число y_0, чтобы парабола $y=a(x-x_0)^2+y_0$:

а) пересекала ось Ox в двух точках;
б) пересекала ось Ox в одной точке;
в) не пересекала ось Ox?

586. При каких x значение функции равно нулю:

а) $y=(x-5)^2$; б) $y=-(x+8)^2$; в) $y=2(x-3)^2$?

587. Какие координаты имеет вершина параболы:

а) $y=(x+1)^2$; б) $y=3(x+9)^2$;
в) $y=-2(x-5)^2$; г) $y=-4(x-9)^2$?

588. Запишите уравнение оси симметрии параболы:

а) $y=(x-12)^2$; б) $y=-(x+7)^2$;
в) $y=3(x+2)^2$; г) $y=-8(x-10)^2$.

589. Объясните, как с помощью графика функции $y=x^2$ можно получить график функции:

а) $y=(x+5)^2$; б) $y=-(x+5)^2$;
в) $y=2(x-1)^2$; г) $y=-2(x-1)^2$.

590. Дана парабола $y=(x-2)^2$.

а) Определите координаты вершины параболы.
б) Запишите уравнение оси симметрии параболы.
в) Укажите область определения функции.
г) Укажите, какие значения может принимать y.
д) Постройте график функции.
е) Как изменяется y, если аргумент x изменяется от $-\infty$ до 2, от 2 до $+\infty$?
ж) При каком x функция принимает наименьшее значение? Принимает ли функция наибольшее значение?
з) В каких точках график функции пересекает ось Ox, ось Oy?

591. Постройте график функции:

а) $y=(x-1)^2$; б) $y=(x+1)^2$;
в) $y=(x-3)^2$; г) $y=(x+4)^2$;
д) $y=-(x-1)^2$; е) $y=-(x+2)^2$;
ж) $y=-(x-0{,}5)^2$; з) $y=-(x+0{,}5)^2$;
и) $y=2(x-1)^2$; к) $y=-3(x+1)^2$;
л) $y=0{,}5(x+2)^2$; м) $y=-0{,}1(x-3)^2$;
н) $y=-0{,}5(x-2)^2$; о) $y=0{,}1(x+3)^2$.

592. Дана функция $y=2(x-3)^2$.

а) Постройте график функции.

б) Укажите область определения функции.

в) При каком x функция принимает наименьшее значение? Принимает ли функция наибольшее значение при каком-либо x?

г) В каких точках график функции пересекает оси координат?

д) Какие значения принимает функция, если $x>3$, $x<-1$, $0<x<1$?

е) При каких значениях x выполняется неравенство: $y>0$, $y\leqslant 0$, $y>-1$?

593. Какой формулой задана функция, график которой получен из параболы $y=x^2$ с помощью:

а) сжатия по оси Oy в 2 раза и переноса вершины в точку (5; 0);

б) растяжения по оси Oy в 5 раз и переноса вершины в точку (—4; 0)?

594*. а) Напишите уравнение функции, график которой симметричен графику функции $y=2(x-8)^2$ относительно оси Oy.

б) Напишите уравнение какой-либо параболы, осью симметрии которой является прямая $x=3$.

595. Принадлежат ли графику функции:

а) $y=5(x-4)^2$ точки A (7; 45), B (—2; 170);

б) $y=-0{,}2(x-2)^2$ точки A (7; 1), B (—8; —2)?

596. а) Дана функция $y=-5(x+9)^2$. Точка (3; k) принадлежит графику этой функции. Определите k.

б) Дана функция $y=10(x-6)^2$. Точка (m; 10) принадлежит графику этой функции. Определите m.

в) Точка (5; —8) принадлежит графику функции $y=a(x-3)^2$. Определите a.

597. Даны функции $y=x^2$ и $y=x^2+1$.

а) Какова область определения каждой из этих функций?

б) Сравните значения функций при одинаковых значениях аргумента x.

в) Как можно получить график функции $y=x^2+1$ из графика функции $y=x^2$?

г) Укажите координаты вершин заданных парабол.

д) При каких значениях аргумента значения функций равны нулю?

е) При каких значениях y графики функций пересекают ось Oy?

ж) Постройте графики данных функций.

598. Постройте график функции, предварительно указав координаты вершины параболы и точек пересечения графика с осями координат, если они существуют:

а) $y=x^2-4$; б) $y=x^2+3$;

в) $y=-x^2+2$; г) $y=-x^2-1$.

599. Какой формулой задана функция, график которой получен из параболы $y=x^2$ в результате:

а) переноса вершины в точку (0; 5);

б) переноса вершины в точку (0; —3);

в) сжатия по оси Oy в 2 раза и переноса вершины в точку (0; 3);

г) растяжения по оси Oy в 2 раза и переноса вершины в точку (0; —2)?

600. Постройте параболу:

а) $y=(x-1)^2+1$; б) $y=-(x+1)^2+2$;

в) $y=-2(x-2)^2+2$; г) $y=2(x+1)^2-1$.

601. Определите координаты вершины параболы и постройте параболу:

а) $y=(x-2)^2+10$; б) $y=(x+8)^2-5$;

в) $y=2(x-7)^2-11$; г) $y=-2{,}5(x-0{,}5)^2+1$;

д) $y=-0{,}5(x-0{,}5)^2-3$; е) $y=0{,}5(x-4)^2+6$.

602. Какой формулой задана функция, график которой получен параллельным переносом параболы $y=2x^2$ так, что ее вершина есть точка:

а) (5; —1); б) (—2; 5)?

603. Выбрав удобный масштаб, постройте график функции:

а) $y=300(x-0{,}2)^2-400$;

б) $y=-1000(x-5)^2+2000$.

7.4. График квадратичной функции

Рассмотрим функцию

$$y=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0). \qquad (1)$$

Ее называют **квадратичной функцией**. Область определения квадратичной функции есть множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

Теорема. *Графиком квадратичной функции является парабола с вершиной в точке* $(x_0; y_0)$, *полученная параллельным переносом параболы* $y=ax^2$, *где*

$$x_0=-\frac{b}{2a}, \quad y_0=-\frac{D}{4a}. \qquad (2)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$y=a(x-x_0)^2+y_0 \quad (a\neq 0), \tag{3}$$

где числа x_0 и y_0 определяются по формулам (2). В п. 4.1 показано, что для любого действительного x справедливо равенство $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2+y_0$.

Это означает, что функции (1) и (3) имеют один и тот же график.

Но, как было показано в п. 7.3, график функции (3), а следовательно, и функции (1) есть парабола с вершиной в точке $(x_0;\ y_0)$, полученная параллельным переносом параболы $y=ax^2$. Теорема доказана.

Пример 1. Построим график функции

$$y=x^2-2x-3. \tag{4}$$

Выделяя полный квадрат из трехчлена

$$x^2-2x-3=x^2-2x+1-4=(x-1)^2-4,$$

получим, что функция (4) может быть записана следующим образом: $y=(x-1)^2-4$.

Но тогда график функции (4) есть парабола, полученная параллельным переносом параболы $y=x^2$ так, что ее вершина есть точка (1; —4) (рис. 68).

Тот же график можно было построить, вычислив координаты вершины параболы и нескольких ее точек:

$$x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{2}{2}=1,$$

$$y_0=1^2-2\cdot 1-3=-4.$$

x	-1	0	1	2	3
y	0	-3	-4	-3	0

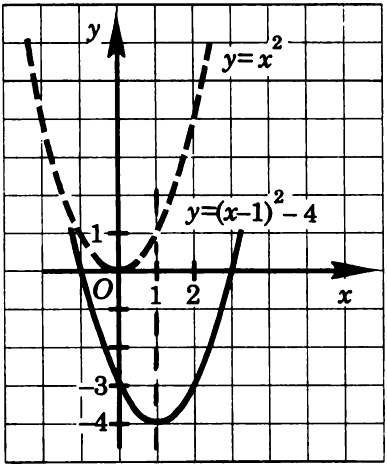


Рис. 68

Из графика видно, что вершина параболы расположена ниже оси Ox и парабола пересекает ось Ox в двух точках, т. е. если положить в равенстве (4) $y=0$, то полученное квадратное уравнение $x^2-2x-3=0$ должно иметь два действительных корня.

Это заключение можно проверить, вычислив корни уравнения. Имеем $D=b^2-4ac=16$, $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{2\pm 4}{2}$, откуда $x_1=-1$, $x_2=3$.

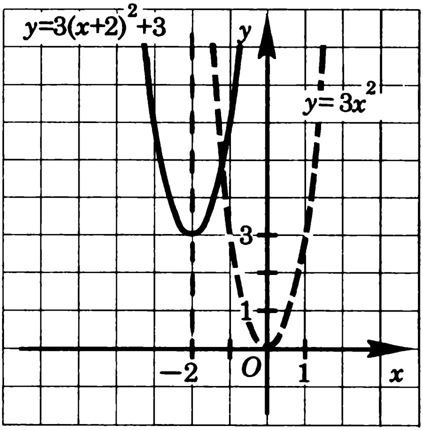


Рис. 69

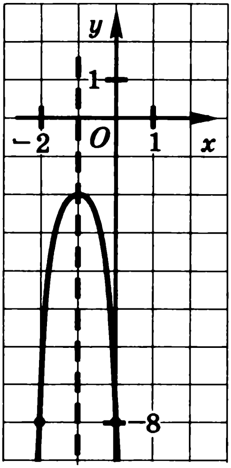


Рис. 70

Пример 2. Построим параболу

$$y=3x^2+12x+15. \tag{5}$$

Вынесем за скобки коэффициент 3 и выделим из полученного трехчлена полный квадрат:

$$3(x^2+4x+5)=3(x^2+2\cdot 2x+4+1)=3(x+2)^2+3.$$

Таким образом, функцию (5) можно записать в виде

$$y=3(x+2)^2+3.$$

Поэтому график функции (5) есть парабола, полученная параллельным переносом параболы $y=3x^2$ так, что ее вершина есть точка (—2; 3) (рис. 69). Это показывает, что уравнение

$$3x^2+12x+15=0 \tag{6}$$

не имеет действительных корней, и, следовательно, дискриминант квадратного уравнения (6) должен быть отрицательным.

Действительно,

$$D=b^2-4ac=144-180=-36<0.$$

Пример 3. Построим параболу

$$y=-6x^2-12x-8. \tag{7}$$

Вычислим координаты вершины параболы:

$$x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{12}{2\cdot(-6)}=-1,$$

$$y_0=-6(-1)^2-12(-1)-8=-2.$$

Вычислим координаты нескольких точек параболы, симметричных относительно ее оси $x=-1$.

x	-3	-2	-1	0	1
y	-26	-8	-2	-8	-26

Изобразим полученные точки в системе координат xOy и, соединив их непрерывной линией, получим искомый график (рис. 70).

Мы видим, что и на этот раз парабола не пересекает ось Ox и уравнение

$$-6x^2-12x-8=0$$

не имеет действительных корней, т. е. для любого действительного x выполняется неравенство $-6x^2-12x-8<0$.

Таким образом, для построения параболы (1) можно выполнить параллельный перенос параболы $y=ax^2$, при котором вершиной параболы станет точка $(x_0;\ y_0)$, координаты которой определяются по формулам (2).

Параболу можно построить также по точкам, определив координаты вершины и координаты нескольких ее точек, желательно симметричных относительно оси параболы $x=x_0$.

Парабола (1) пересекает ось Ox в двух точках, если дискриминант D квадратного трехчлена ax^2+bx+c больше нуля; касается оси Ox в одной точке, если $D=0$; не пересекает оси Ox, если $D<0$. Ее ветви направлены вверх, если $a>0$, вниз, если $a<0$.

604[0] а) Как получить график функции $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ из графика функции $y=ax^2$?

б) Как называют график функции $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$?

в) Как расположен относительно оси Ox график функции $y=ax^2+bx+c$ при $a>0$ и при $a<0$, если:

1) $D>0$; 2) $D=0$; 3) $D<0$?

605. Дана квадратичная функция $y=ax^2+bx+c$. Укажите:

а) координаты вершины параболы;

б) уравнение оси симметрии параболы;

в) координаты точки пересечения параболы с осью Oy;

г) координаты точек пересечения с осью Ox и условия, от которых зависит число таких точек.

606. Укажите координаты вершины, уравнение оси симметрии параболы, координаты точек пересечения параболы с осями координат, если:

а) $y=x^2-3x+5$; б) $y=x^2+7x-8$;

в) $y=2x^2-x+1$; г) $y=5x^2+4x-2$;

д) $y=-3x^2+5x-10$; е) $y=-10x^2-x+3$.

Постройте график функции (**607—608**):

607. а) $y=x^2-4x+3$;

б) $y=x^2+2x-3$;

в) $y=4x^2-4x-1$;

г) $y=9x^2-12x+3$;

д) $y=x^2-6x+5$;

е) $y=x^2+4x-5$;

ж) $y=-x^2-6x-5$;

з) $y=-x^2+4x+5$;

и) $y=x^2-4x+7$;

к) $y=-x^2+4x-6$.

608. а) $y=x^2+3$;

б) $y=-x^2+9$;

в) $y=0{,}2x^2-x+0{,}8$;

г) $y=\frac{1}{9}x^2+\frac{2}{3}x+5$;

д) $y=-1{,}2x^2-1{,}2x-0{,}5$;

е) $y=-8x^2-16x-6$;

ж) $y=2x^2+8x-10$;

з) $y=-3x^2+6x-3$.

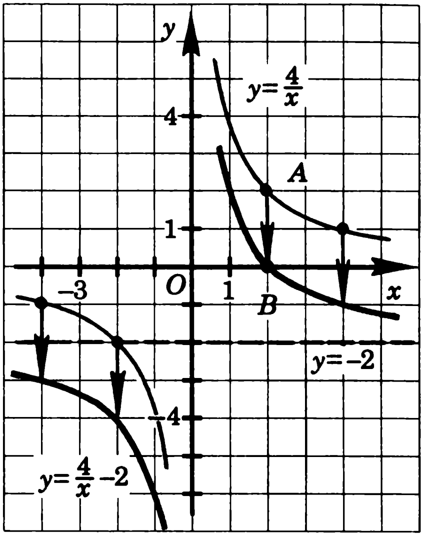


Рис. 71

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ III

1. График функции $y=\frac{k}{x-x_0}+y_0$

Рассмотрим примеры построения графиков функции

$$y=\frac{k}{x-x_0}+y_0.$$

Пример 1. Построим график функции $y=\frac{4}{x}-2$.

Сначала построим график функции $y=\frac{4}{x}$, вычислив координаты нескольких его точек.

x	-4	-2	-1	1	2	4
y	-1	-2	-4	4	2	1

График функции $y=\frac{4}{x}$ — гипербола, ветви которой расположены в I и в III четвертях. Чтобы построить график функции $y=\frac{4}{x}-2$, надо сдвинуть построенный график на 2 единицы вниз (рис. 71).

В самом деле, если A — произвольная точка графика функции $y=\frac{4}{x}$, а B — точка графика функции $y=\frac{4}{x}-2$, имеющая ту же абсциссу, то ордината точки B на 2 меньше ординаты точки A.

Пример 2. Построим график функции $y=\frac{-3}{x-2}$. Сначала построим график функции $y=\frac{-3}{x}$, вычислив координаты нескольких его точек (см. таблицу ниже).

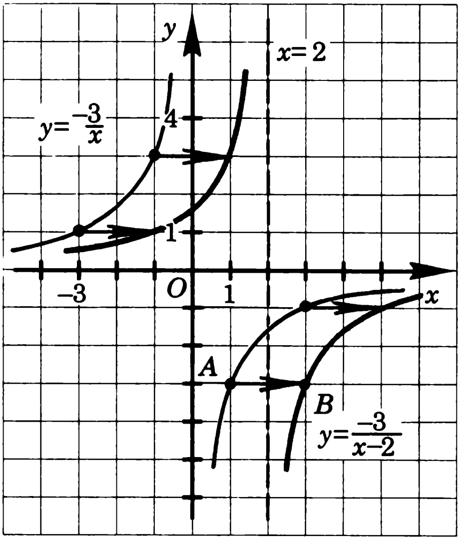


Рис. 72

График функции $y=\frac{-3}{x}$ — гипербола, ветви которой расположены во II и в IV четвертях. Чтобы построить график функции $y=\frac{-3}{x-2}$, надо сдвинуть построенный график на 2 единицы вправо (рис. 72).

x	-3	-2	$-1,5$	-1	1	$1,5$	2	3
y	1	$1,5$	2	3	-3	-2	$-1,5$	-1

В самом деле, если A — произвольная точка графика функции $y=\frac{-3}{x}$, а B — точка графика функции $y=\frac{-3}{x-2}$, с той же ординатой, то абсцисса точки B на 2 больше абсциссы A.

Пример 3. Построим график функции $y=\frac{2}{x+3}-1$.

Сначала построим график функции $y=\frac{2}{x}$, вычислив координаты нескольких его точек.

x	-4	-2	-1	$-0,5$	$0,5$	1	2	4
y	$-0,5$	-1	-2	-4	4	2	1	$0,5$

График функции $y=\frac{2}{x}$ — гипербола, ветви которой расположены в I и в III четвертях (рис. 73). Чтобы построить график функции $y=\frac{2}{x+3}-1$, надо сдвинуть построенный график на 3 единицы влево и на 1 единицу вниз (см. рис. 73).

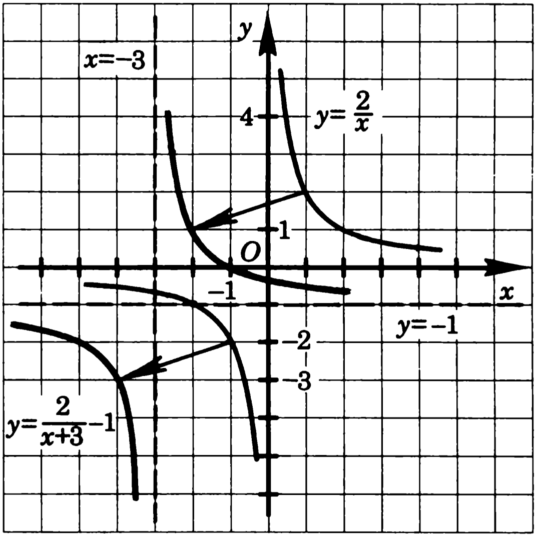


Рис. 73

Вообще, чтобы построить график функции $y=\frac{k}{x-x_0}+y_0$, надо построить график функции $y=\frac{k}{x}$, затем сначала сдвинуть построенный график на $|x_0|$ единиц вправо, если $x_0>0$, и влево, если $x_0<0$, потом на $|y_0|$ единиц вверх, если $y_0>0$, и вниз, если $y_0<0$.

Пример 4. Построим график функции $y=\frac{2x-5}{x-1}$.

Сначала преобразуем дробь: $\frac{2x-5}{x-1}=\frac{-3}{x-1}+2$, поэтому заданную функцию можно записать в виде $y=\frac{-3}{x-1}+2$. Теперь построим график функции $y=\frac{-3}{x}$, вычислив координаты нескольких его точек.

x	-3	-2	$-1{,}5$	-1	1	$1{,}5$	2	3
y	1	$1{,}5$	2	3	-3	-2	$-1{,}5$	-1

График функции $y=\frac{-3}{x}$ — гипербола, ветви которой расположены во II и в IV четвертях (рис. 74).

Чтобы построить график функции $y=\frac{-3}{x-1}+2$, надо сдвинуть построенный график на 1 единицу вправо и на 2 единицы вверх (см. рис. 74).

Постройте график функции (**609—611**):

609. а) $y=\frac{6}{x}+2$;

б) $y=\frac{-6}{x}-2$;

в) $y=\frac{-8}{x}-3$;

г) $y=\frac{8}{x}+3$;

д) $y=\frac{4}{x-3}$;

е) $y=\frac{-4}{x+3}$.

610. а) $y=\frac{6}{x-2}$;

б) $y=\frac{-6}{x+2}$;

в) $y=\frac{2}{x+1}-3$;

г) $y=\frac{-2}{x-2}+1$; д) $y=\frac{3}{x+2}+2$; е) $y=\frac{-3}{x-1}-2$.

611. а) $y=\frac{-2x+4}{x+1}$; б) $y=\frac{-x+1}{x-3}$;

в) $y=\frac{2x+1}{x-1}$; г) $y=\frac{3x+2}{x+2}$.

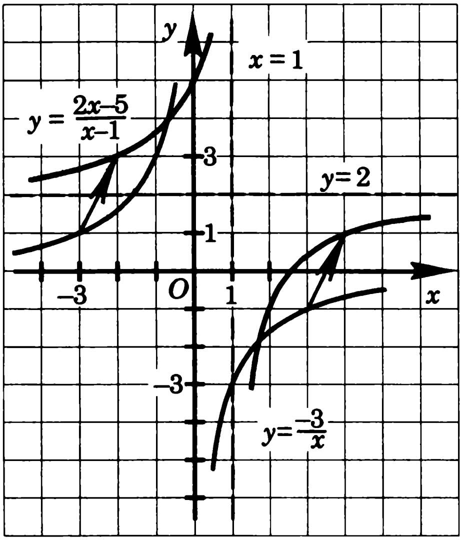


Рис. 74

2. Построение графиков функций, содержащих модули

В § 6 приведены примеры построения графиков функций, содержащих модули. Рассмотрим еще несколько примеров.

Пример 1. Построим график функции $y=\frac{|x|}{x}$.

Эта функция определена для любых $x\neq 0$. При $x>0$ имеем $|x|=x$ и $\frac{|x|}{x}=\frac{x}{x}=1$. При $x<0$ имеем

$|x|=-x$ и $\frac{|x|}{x}=\frac{-x}{x}=-1$.

В точке $x=0$ функция не определена, поэтому нет точки графика с абсциссой 0.

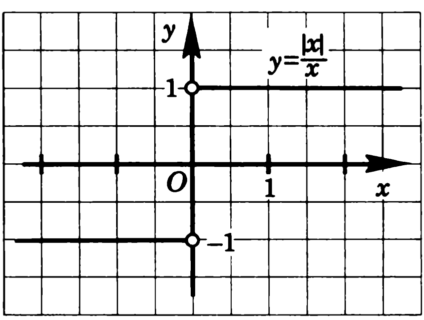


Рис. 75

Рис. 76

Итак,

$$y=\begin{cases} 1, \text{ если } x>0, \\ -1, \text{ если } x<0, \\ \text{не определен, если } x=0. \end{cases}$$

График функции $y=\frac{|x|}{x}$ изображен на рисунке 75. Точки, не принадлежащие графику, показаны кружками.

Пример 2. Построим график функции $y=|x-1|+|x+1|$. Выражения $x-1$ и $x+1$, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль в точках 1 и -1 соответственно. Рассмотрим данную функцию на числовых промежутках $(-\infty;\ -1)$, $[-1;\ 1]$ и $(1;\ +\infty)$.

При $x>1$ имеем $|x-1|+|x+1|=x-1+x+1=2x$. График функции $y=2x$ при $x>1$ изображен на рисунке 76, *а*.

При $-1\leqslant x\leqslant 1$ имеем $|x-1|+|x+1|=-x+1+x+1=2$. График функции $y=2$ при $-1\leqslant x\leqslant 1$ изображен на рисунке 76, *б*.

При $x<-1$ имеем $|x-1|+|x+1|=-x+1-x-1=-2x$. График функции $y=-2x$ при $x<-1$ изображен на рисунке 76, *в*.

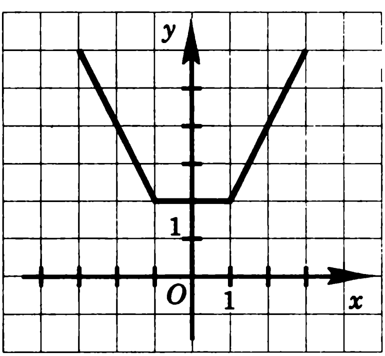


Рис. 77

График функции $y=|x-1|+|x+1|$ на всей оси Ox изображен на рисунке 77.

Пример 3. Построим график функции $y=||x|-2|$.

Сначала построим график функции $y=|x|-2$ (рис. 78, *а*). При $x\geqslant 2$ и $x\leqslant -2$ выражение $|x|-2\geqslant 0$, поэтому $||x|-2|=|x|-2$.

Это означает, что при $x\geqslant 2$ и $x\leqslant -2$ график функции $y=||x|-2|$ совпадает с графиком функции $y=|x|-2$.

При $-2<x<2$ значения функции $y=|x|-2$ отрицательны, а функция $y=||x|-2|$ принимает противоположные им положительные значения. Поэтому часть графика, расположенную на рисунке 78, *а* ниже оси Ox, надо симметрично отразить относительно этой оси Ox.

График функции $y=||x|-2|$ изображен на рисунке 78, *б*.

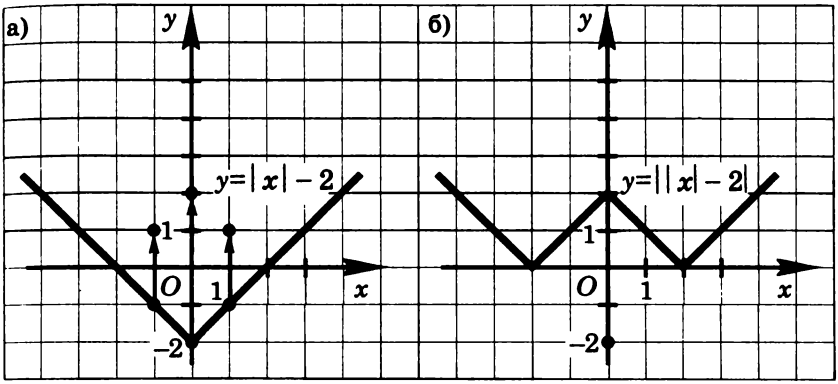


Рис. 78

Вообще, для построения графика функции $y=|f(x)|$ надо учесть, что

$$f(x)=\begin{cases} f(x), \text{ если } f(x)>0, \\ -f(x), \text{ если } f(x)<0, \\ 0, \text{ если } f(x)=0. \end{cases}$$

Поэтому при построении графика функции $y=|f(x)|$ надо сохранить точки графика функции $y=f(x)$, которые лежат выше оси Ox или на ней, а точки графика функции $y=f(x)$, которые лежат ниже оси Ox, симметрично отразить относительно оси Ox (рис. 79).

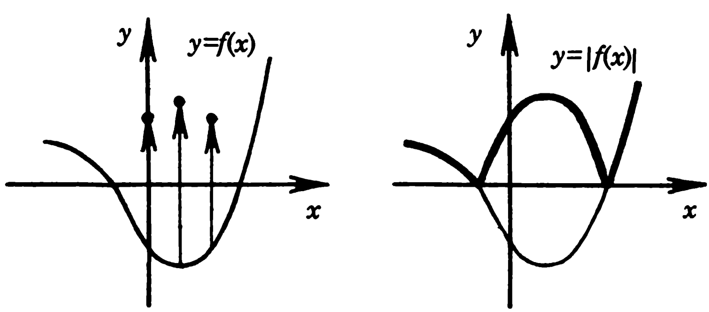


Рис. 79

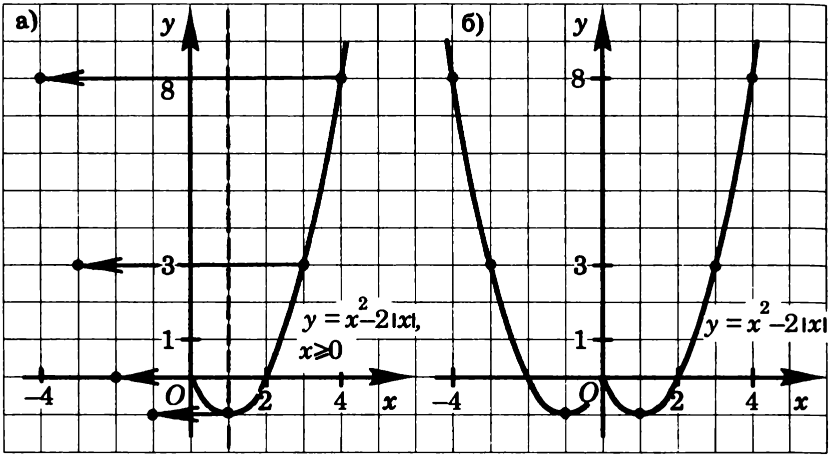


Рис. 80

Пример 4. Построим график функции $y = x^2 - 2|x|$.

Заметим, что при изменении знака аргумента x на противоположный функция не изменяет значения, так как

$$(-x)^2 - 2|-x| = x^2 - 2|x|.$$

Это означает, что функция $y = x^2 - 2|x|$ является четной, ее график симметричен относительно оси Oy.

Сначала построим график функции $y = x^2 - 2|x|$ для $x \geqslant 0$. В этом случае функцию $y = x^2 - 2|x|$ можно записать в виде $y = x^2 - 2x$. Вершина параболы $y = x^2 - 2x$ имеет абсциссу $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$, ветви параболы направлены вверх, так как $a = 1 > 0$. Определим координаты нескольких точек графика.

x	0	1	2	3	4
y	0	-1	0	3	8

График функции $y = x^2 - 2|x|$ для $x \geqslant 0$ показан на рисунке 80, *а*. Теперь отразим полученный график относительно оси Oy и получим искомый график (рис. 80, *б*).

Постройте график функции (**612—613**):

612. а) $y = |x| + x$; б) $y = |x| - x$;
в) $y = x \cdot |x|$; г) $y = |x-2| + |x+2|$;
д) $y = ||x| - 3|$; е) $y = |||x| - 2| - 1|$;
ж) $y = x^2 - 6|x|$; з) $y = x^2 - 4|x|$;
и) $y = x^2 - 2|x| - 1$; к) $y = x^2 + 2|x| - 1$;

л) $y=|x^2-4x+3|$; м) $y=|x^2-2|x||$;
н) $y=|x^2-4|x||$; о) $y=|x^2-2|x|-1|$;
п) $y=|x^2+2|x|-1|$.

613. а) $y=\frac{4}{x}-2$; б) $y=\left|\frac{4}{x}-2\right|$;

в) $y=\frac{4}{|x|}-2$; г) $y=\left|\frac{4}{|x|}-2\right|$;

д) $y=\frac{-6}{x-2}$; е) $y=\left|\frac{-6}{x-2}\right|$;

ж) $y=\frac{-6}{|x|-2}$; з) $y=\left|\frac{-6}{|x|-2}\right|$;

и) $y=\frac{2}{x-1}-2$; к) $y=\left|\frac{2}{x-1}-2\right|$;

л) $y=\frac{2}{|x|-1}-2$; м) $y=\left|\frac{2}{|x|-1}-2\right|$.

614. Дана функция $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$. Постройте график функции:

а) $y=f(x)$; б) $y=|f(x)|$;
в) $y=f(|x|)$; г) $y=|f(|x|)|$.

3. Уравнение прямой, уравнение окружности

Рассмотрим функцию $y=2x$ и докажем, что ее график есть прямая l, проходящая через начало координат и точку $B(1;\ 2)$.

1) На рисунке 81 отмечена точка $A(x;\ y)$ прямой l, имеющая положительную абсциссу x.

Проведем через точки A и B прямые, параллельные оси Oy, они пересекут ось Ox в точках A_1 и B_1. Имеем $OB_1=1$, $BB_1=2$, $OA_1=x$, $AA_1=y$.

Треугольники OBB_1 и OAA_1 прямоугольные, они имеют общий угол BOB_1 — т. е. подобны по двум углам; их соответствующие катеты пропорциональны:

$$\frac{AA_1}{BB_1}=\frac{OA_1}{OB_1} \text{ или } \frac{y}{2}=\frac{x}{1},$$

откуда $y=2x$. Следовательно, точка A есть точка графика функции $y=2x$.

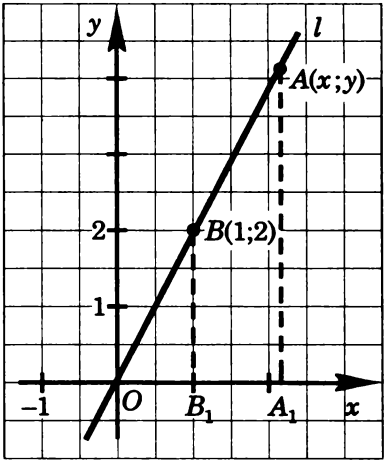


Рис. 81

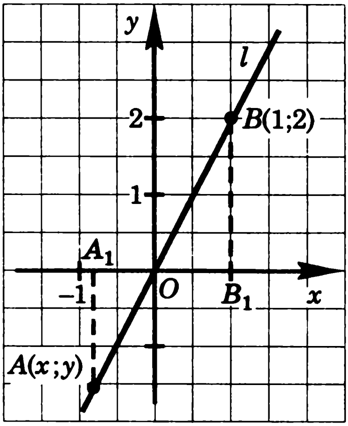


Рис. 82

2) На рис. 82 на прямой l отмечена точка $A(x;\ y)$, у которой $x<0$. Но тогда у нее и $y<0$ и поэтому

$$OB_1=1,\ BB_1=2,$$
$$OA_1=-x,\ AA_1=-y.$$

Треугольники OBB_1 и OAA_1 прямоугольные, они имеют равные углы BOB_1 и AOA_1 (вертикальные). Эти треугольники подобны по двум углам, их соответствующие катеты пропорциональны, то есть

$$\frac{AA_1}{BB_1}=\frac{OA_1}{OB_1} \text{ или } \frac{-y}{2}=\frac{-x}{1},$$

откуда $y=2x$.

Следовательно, точка A является точкой графика функции $y=2x$.

3) Если у точки $A(x;\ y)$ абсцисса $x=0$, то точка A есть начало координат и ее ордината $y=0$. Но тогда $y=2x$, потому что $0=2\cdot 0$.

Итак, показано, что если точка $A(x;\ y)$ лежит на прямой l, то ее ордината y равна $2x$.

Обратно: при любом заданном x точка $A(x;\ 2x)$ лежит на прямой l. Это очевидно, потому что на прямой l есть единственная точка $A(x;\ y)$ с заданной абсциссой x. У этой точки, как было доказано выше, $y=2x$.

Итак, l есть график функции $y=2x$.

Аналогично можно показать, что графиком функции $y=kx$ является прямая, проходящая через начало координат и точку $B(1;\ k)$.

Докажем теперь, что уравнение

$$ax+by+c=0, \tag{1}$$

где a и b не равны нулю одновременно ($a^2+b^2\neq 0$), задает в системе координат xOy некоторую прямую.

В самом деле, если $b\neq 0$, то уравнение (1) можно переписать в виде

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}. \tag{2}$$

Как было показано в п. 6.3, графиком функции, заданной уравнением (2), является прямая (здесь угловой коэффициент $-\frac{a}{b}$, свободный член $-\frac{c}{b}$).

Если же $b=0$, то уравнение (1) можно записать в виде

$$ax+c=0.$$

Так как в равенстве (1) $a^2+b^2\neq0$, то из условия $b=0$ следует, что $a\neq0$. Тогда уравнение (1) можно переписать в виде $x=-\frac{c}{a}$.

Это уравнение задает прямую, параллельную оси Oy и пересекающую ось Ox в точке $-\frac{c}{a}$.

Таким образом, показано, что любое уравнение вида $ax+by+c=0$ $(a^2+b^2\neq0)$ задает в системе координат xOy некоторую прямую.

Можно доказать обратное, что любая прямая, заданная в системе координат xOy, имеет уравнение вида

$$ax+by+c=0.$$

Покажем теперь, что окружность радиуса R с центром $A(a;\ b)$ в системе координат xOy задается уравнением

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (3)$$

Пусть задана окружность радиуса R с центром $A(a;\ b)$. Возьмем на окружности точку $M(x;\ y)$. Из курса геометрии известно, что расстояние между точками A и M вычисляется по формуле

$$AM=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}.$$

Квадрат этого расстояния равен квадрату радиуса окружности: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

Так как M — произвольная точка окружности, то равенство (3) выполняется для любой точки окружности.

Можно доказать обратное: любое уравнение вида (3) в системе координат xOy задает окружность радиуса R с центром $(a;\ b)$.

---

615. Докажите, что графиком функции $y=kx$ в системе координат xOy является прямая, проходящая через точки $O(0;\ 0)$ и $B(1;\ k)$.

616. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки:
а) $A(2;\ 3)$ и $B(4;\ 5)$; б) $A(-5;\ 0)$ и $B(0;\ 10)$.

617*. Напишите уравнение прямой — серединного перпендикуляра к отрезку AB:
а) $A(2;\ 3)$ и $B(4;\ 5)$; б) $A(6;\ 0)$ и $B(0;\ 3)$.

618*. Докажите, что любая прямая в системе координат xOy задается уравнением вида $ax+by+c=0$ $(a^2+b^2\neq0)$.

619. Напишите уравнение окружности радиуса R с центром A:
а) $A(3;\ 5)$, $R=4$; б) $A(0;\ 6)$, $R=5$;
в) $A(3;\ 4)$, $R=5$.
Проходит ли эта окружность через начало координат?

Архимед

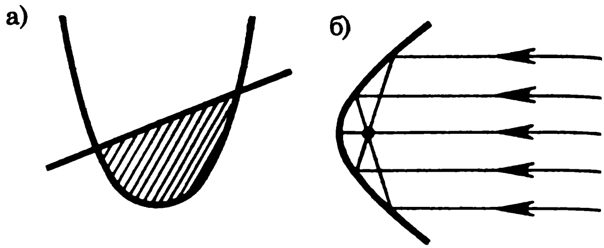


Рис. 83

Г. Галилей

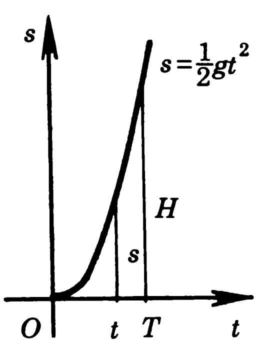


Рис. 84

4. Исторические сведения

Параболу, которую мы изучали в этой главе, знал еще Архимед (287—212 гг. до н. э.) — величайший математик и механик Древней Греции. Он применял параболу при решении ряда практических задач в судоходстве и военном деле.

Архимеду, например, понадобилось вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой и некоторой ее хордой (рис. 83, *а*). Метод, который он применял при этом, впоследствии через 2 тыс. лет дал основание для развития важной математической науки — дифференциального и интегрального исчисления.

Архимед в своих рассуждениях не пользовался системой координат. Он знал, что на оси параболы имеется замечательная точка, называемая *фокусом параболы*, которая обладает тем свойством, что если в нее поместить источник света, то лучи его, падающие на параболу, которую будем считать зеркалом, после отражения от него образуют пучок прямых, уходящих в бесконечность параллельно оси параболы. Если же считать, что пучок лучей, параллельных оси параболы, например идущих от солнца, падает на нее, тогда окажется, что все отраженные лучи пересекутся в фокусе (рис. 83, *б*). Этим можно воспользоваться на практике для того, чтобы создать в фокусе высокую температуру. Существует легенда о том, что Архимед сжег неприятельский флот при помощи зажигательных зеркал.

На таком же эффекте основан принцип действия «гиперболоида инженера Гарина» в одноименном романе А. Н. Толстого.

Следует только заметить, что на самом деле прибор этот должен называться параболоидом, так как только парабола обладает указанным свойством, а у гиперболы такого свойства нет.

Итальянский ученый Г. Галилей (1564—1642), изучая свободное падение тел, пришел к следующему физическому закону. Падающая на землю материальная точка[1] движется по закону

$$s=\frac{1}{2}gt^2\ (t\geqslant 0,\ g\approx 9{,}81), \tag{1}$$

где s — путь (м), пройденный точкой за время падения t (с), g — ускорение свободного падения (м/с^2).

Функция (1) есть частный случай функции $s=at^2$ при $a=\frac{g}{2}$, рассматриваемой на множестве неотрицательных t. Ее схематический график изображен на рисунке 84.

Пользуясь формулой (1), мы можем вычислить путь s, пройденный точкой за данное время t.

Обратно: по данному $s\geqslant 0$ определяется t по формуле

$$t=\sqrt{\frac{2s}{g}}.$$

Пользуясь графиком (см. рис. 84), мы можем определить s по t и t по s без вычислений.

Если точка падала с высоты H и достигла земли за время T, то

$$H=\frac{1}{2}gT^2 \text{ и } T=\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

З а м е ч а н и е. При пользовании графиком, изображенным на рисунке 84, было бы ошибкой думать, что точка движется по графику. Надо считать, что точка движется по оси Os, т. е. ее траекторией является ось Os. График помогает узнать, где на оси Os она находится в каждый данный момент времени t.

Рассмотрим еще один пример движения тела в поле земного тяготения.

Пусть в точке O поверхности земли произошел выстрел из винтовки вверх. Пуля вылетела из дула винтовки в момент времени $t=0$ со скоростью 800 м/с. Будем считать, что пуля движется в безвоздушном пространстве, а ускорение свободного падения приближенно равно 10 м/с^2. Направим из точки O координатную ось Os вверх. Тогда закон движения пули выражается функцией

$$s=800t-5t^2, \tag{2}$$

где s — координата пули (м), t — время (с).

---

[1] Предполагается, что тело падает в безвоздушном пространстве. Для реального падающего тела надо еще учитывать сопротивление воздуха.

Если бы силы земного притяжения не было, то пуля летела бы вверх равномерно с сообщенной ей скоростью и закон ее движения был бы $s=800t$. Но благодаря земному притяжению, действующему вниз, в правой части равенства (2) появляется второй член $\frac{gt^2}{2}\approx 5t^2$, взятый со знаком «минус». В реальной обстановке надо было бы учитывать еще сопротивление воздуха.

Так как

$$800t-5t^2=-5(t^2-160t)=-5(t^2-2\cdot 80t+80^2)+32\,000=$$
$$=-5(t-80)^2+32\,000,$$

то функцию (2) можно записать в виде $s=-5(t-80)^2+32\,000$.

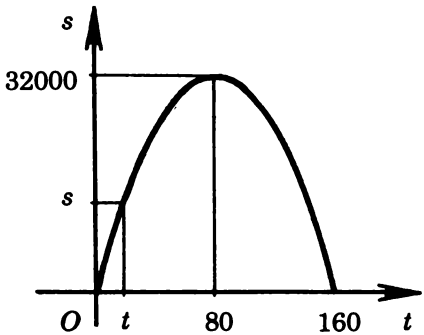


Рис. 85

Введем прямоугольную систему координат tOs (рис. 85).

В ней графиком движения пули является часть параболы, полученной параллельным переносом параболы $y=-5t^2$ так, что ее вершина есть точка (80; 32 000).

Из приведенного на рисунке 85 схематического графика видно, что при возрастании t от 0 до 80 расстояние s пули до поверхности земли увеличивается от 0 до 32 000 м (32 км), затем на отрезке времени [80; 160] расстояние пули до земли уменьшается и в момент времени $t=160$ пуля снова достигает земли.

5. Задания для повторения

620. Вычислите значение выражения:

а) $3\frac{5}{14}-1\frac{11}{49}:\left(76\cdot\frac{25}{38}-47\frac{3}{7}\right)\cdot\frac{12}{55}$;

б) $\left(6\frac{9}{16}-2\frac{1}{2}\cdot 1\frac{9}{14}\right)\cdot 0{,}56:0{,}75:6\frac{2}{3}$.

Упростите выражение **(621—624)**:

621. а) $\frac{1}{a+b}+\frac{a-b}{a^2-ab+b^2}-\frac{a(a-b)}{a^3+b^3}$;

б) $\frac{x}{x-y}+\frac{y^2}{x^2+xy+y^2}-\frac{xy(x+2y)}{x^3-y^3}$.

622. а) $\frac{a^2-5a+6}{a^2+5a+4}:\frac{a^2-4a+3}{2a^2+3a+1}\cdot\frac{a^2+3a-4}{2a^2-3a-2}$;

б) $\frac{c^3-8}{c+3}:\left(\frac{c-2}{4c}\cdot\frac{8c^3}{c^2+3c}\right):\frac{c^2+2c+4}{2(3-c)}$.

623*. а) $\frac{a^3-a^2b-ab^2-2b^3}{a^3+3a^2b+3ab^2+2b^3}$; б) $\frac{4b^4+11b^2+25}{4b^4-9b^2+30b-25}$.

624. а) $-\frac{48}{a^3+64}+\frac{1}{a+4}+\frac{4}{a^2-4a+16}$;

б) $\frac{1}{x^2+3x+2}-\frac{2}{(x+1)(x^2+5x+6)}$.

625. Докажите, что:

а) $\frac{1}{x^2}>0$ при $x\neq 0$; б) $xy>0$ при $x>0$, $y>0$;

в) $\frac{2}{x}>0$ при $x>0$; г) $-\frac{5}{x}<0$ при $x>0$.

При каких числовых значениях x определено выражение **(626—628)**?

626. а) $\frac{1}{x+1}$; б) $\frac{1}{x-1}$; в) $\frac{2x}{3x-1}$; г) $\frac{4x}{2x+5}$.

627. а) $\frac{2x^2-4}{x^2-x}$; б) $\frac{7-2x^2}{2x-x^2}$; в) $\frac{x^2-x+1}{x^2+x-2}$;

г) $\frac{1}{x^2-5x+6}$; д) $\frac{x^2-7}{x^2-3x+4}$; е) $\frac{5}{x^2-x+3}$.

628. а) $\frac{x-7}{x^2+3x+4}$; б) $\frac{5}{x^2+x+3}$; в) $\frac{x^2-5}{x+5}$;

г) $\frac{3x-x^2}{x^2-5x+6}$; д) $\frac{x^2-7x-1}{2x-7x^2-8}$; е) $\frac{9x^2-4x-1}{5x-3x^2+1}$.

629. Упростите:

а) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$; в) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$;

г) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; д) $\sqrt{17-4\sqrt{13}}$; е) $\sqrt{17+4\sqrt{13}}$;

ж) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$; з) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$; и) $\sqrt{12-2\sqrt{35}}$.

Докажите справедливость равенства **(630—631)**:

630*. а) $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}=1$;

б) $\sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}=\sqrt{3}+1$.

631. а) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{2+\sqrt{6}-\sqrt{10}}{2}$;

б) $\frac{6}{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{3(3\sqrt{2}-4)(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2}$.

632. Является ли корнем уравнения $x^2-4x+2=0$ число:

а) $-2-\sqrt{2}$; б) $2+\sqrt{2}$;

в) $2-\sqrt{2}$; г) $-2+\sqrt{2}$?

633. Верно ли, что при любом числовом значении x выполняется неравенство $x^2+6x+10>0$?

634*. При каких числовых значениях m выражение

$$(2-m)x^2+2mx+1$$

является полным квадратом?

635. Может ли квадратное уравнение с рациональными коэффициентами иметь своими корнями числа:

а) 5 и $2+\sqrt{3}$; б) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$; в) $3-\sqrt{2}$ и $3+\sqrt{2}$?

636*. При каком числовом значении t один из корней уравнения $x^2-12x+t=0$ является квадратом другого корня?

637. При каком числовом значении t уравнение

$$x^2+t(t-1)x+9=0$$

имеет равные корни?

638. Запишите квадратный трехчлен, значение которого при $x=0$ равно 3, при $x=1$ равно 0, при $x=2$ равно 1.

639. Запишите квадратный трехчлен, значение которого при $x=1$ равно 1, при $x=2$ равно 3, при $x=3$ равно 11.

640. Могут ли быть целыми числами корни приведенного квадратного уравнения $x^2+px+q=0$, если p и q:

а) целые числа; б) рациональные числа?

641. Решите уравнение:

а) $1999x^2-2001x+2=0$;

б) $(x-3)(x-4)(x-7)(x-8)=12$.

642⁰. Верно ли утверждение:

а) всякая прямая пропорциональная зависимость между переменными y и x есть линейная функция y от x;

б) всякая линейная функция есть прямая пропорциональная зависимость?

643⁰. В сосуд налита ртуть. Давление ртути на дно сосуда вычисляется по формуле $P=k\cdot H$, где H — высота столба ртути. Какой смысл в данном случае имеет коэффициент пропорциональности k?

644. Стоимость товара прямо пропорциональна его количеству. Составьте формулу зависимости между стоимостью и количеством товара и установите смысл коэффициента пропорциональности.

645⁰. Находятся ли в прямой пропорциональной зависимости рост человека и его вес, рост человека и его возраст?

646. Зависимость между длиной l металлического стержня и его температурой t выражается формулой $l=l_0(1+\alpha t)$, где l_0 — длина этого стержня при 0 °С, α — постоянная величина. Выразите t через l.

647. а) Урожай с 1 га равен A (ц/га), площадь S (га), масса урожая P (ц). Выразите зависимость между A, S, P.

б) Длина окружности колеса C, число оборотов колеса k, пройденный путь s. Выразите формулой зависимость между C, k, s.

648. а) Резервуар объемом V наполняется водой, подаваемой насосом за время t, производительность насоса K. Выразите формулой зависимость между V, t, K.

б) Приняв объем резервуара за единицу, выразите формулой зависимость между производительностью K насоса, с помощью которого наполняется резервуар, временем наполнения t и объемом.

649. а) Вкладчик внес в сберегательный банк вклад A (р.) под $K\%$ годовых. Выразите формулой его вклад B через 1 год.

б) Выразите формулой зависимость между массой m, объемом V и плотностью p. Запишите соответствующие формулы для каждой переменной.

650. а) При делении 20 на 6 в частном получается 3, а в остатке 2. Запишите соответствующее равенство. Выразите каждое число из этого равенства через другие.

б) Выразите формулой зависимость между делимым a, делителем b, частным c и остатком d. Выразите каждое число через остальные из этой формулы.

651. а) Известно, что при $x=2$ функция $y=3x+b$ принимает значение 8. Определите b.

б) Известно, что график функции $y=kx-2$ проходит через точку $(-3; 7)$. Определите k.

652. Даны две функции:

$$y=3x-1 \text{ и } y=0{,}2x+2.$$

Определите, при каком значении x обе функции имеют одно и то же значение. Проиллюстрируйте решение с помощью графика.

653*. а) Покажите, что координаты всех точек прямой, проведенной через точки $(0; a)$ и $(-1; 0)$, удовлетворяют уравнению $y=ax+a$.

б) Дана функция $y=Ax+B$, где A и B — данные числа $(A\neq 0)$. Докажите, что все точки плоскости, координаты которых удовлетворяют данному равенству, принадлежат прямой, проведенной через точки $(0; B)$ и $\left(-\frac{B}{A}; 0\right)$.

в) Запишите уравнение прямой, проходящей через точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, $x_1\neq x_2$.

г) Запишите уравнение прямой, проходящей через точку $(x_1; y_1)$, не принадлежащую оси ординат, и точку $(0; b)$.

д) Запишите уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент k и проходящей через точку $(x_1; y_1)$.

е) Запишите уравнения прямых, содержащих стороны квадрата, диагонали которого принадлежат осям координат и имеют длину 8.

654. Для каких значений x значения функции $y=x+2$:

а) положительны; б) отрицательны;

в) меньше 5; г) больше 3;

д) не меньше 4; е) больше 1, но меньше 3;

ж) больше -3, но меньше 1;

з) больше 0, но меньше 7?

655. Какие углы образуют графики функций $y=x$ и $y=-x$ с положительной полуосью Ox? Какой угол образуют графики этих функций между собой?

656*. а) Приведите примеры линейных функций, графики которых параллельны. Чем отличаются формулы, задающие эти функции?

б) Приведите примеры линейных функций, графики которых образуют с положительной полуосью Ox угол в 45°, 135°.

в) Приведите примеры линейных функций, графики которых перпендикулярны.

657. а) График прямой пропорциональной зависимости расположен в I и III четвертях. Определите знак коэффициента прямой пропорциональной зависимости.

б) В каких четвертях расположен график прямой пропорциональной зависимости, если $k>0$, $k<0$?

в) Как расположен график функции $y=kx$, если $k=0$?

658. а) График линейной функции $y=kx+b$ расположен в I, II, III четвертях. Что можно утверждать про k и b?

б) Если b в формуле $y=kx+b$ отрицательно, то в каких четвертях может быть расположен график линейной функции? Какие могут быть случаи? Приведите примеры.

659. Как может быть расположен график функции $y=kx+b$, если:

а) $b>0$ и $|k|<1$; б) $b<0$ и $|k|>1$?

Приведите примеры.

660. Материальная точка движется по оси Os по закону:

а) $s=2t+3$; б) $s=-2t+3$.

1) Равномерно ли движется точка?

2) В каком направлении оси она движется?

3) С какой скоростью движется точка?

4) Где находилась точка в момент времени $t=0$?

5) В какой момент времени точка находилась в нулевой точке ($s=0$)?

6) Постройте график движения материальной точки в системе координат tOs.

661. Разогнавшись, велосипедист едет в гору со скоростью $v=10-2t$ (м/с), не работая педалями. Сколько времени он будет ехать до полной остановки? Проиллюстрируйте ответ графиком.

662. Постройте график функции:

а) $y=3$; б) $y=-x$; в) $y=0{,}5x+5$; г) $y=-4-x$.

663. Постройте график функции и определите координаты точки, в которой график пересекает ось x:

а) $y=3x+2$; б) $y=3x-2$; в) $y=x+3$;
г) $y=-x+2$; д) $y=0{,}5x-4$; е) $y=5-3x$.

Какие из построенных прямых параллельны?

664. Пользуясь графиком функции $y=x$, постройте график функции:

а) $y=3x$; б) $y=0{,}3x$; в) $y=-2x$.

665. Постройте график функции:

а) $y=x$; б) $y=|x|$; в) $y=-|x|$; г) $y=0$.

666. Укажите промежутки возрастания (убывания) функции:

а) $y=x-2$; б) $y=-2x+3$;
в) $y=2(x+1)$; г) $y=3x-7(x-4)$;
д) $y=|x|$; е) $y=-|x|$.

667. Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку:

а) $B(1;\ 1{,}5)$; б) $B(1;\ -3)$; в) $B(1;\ -0{,}5)$.

668. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку (0; 3) и параллельной прямой:

а) $y=2x$; б) $y=2x-1$;
в) $y=1{,}5x-1$; г) $y=-x+2$.

669. График какой линейной функции проходит через точки:

а) $A(2;\ 6)$ и $B(6;\ 10)$; б) $A(2;\ 5)$ и $B(3;\ 7)$;
в) $A(3;\ 3)$ и $B(5;\ 1)$; г) $A(-1;\ 2)$ и $B(2;\ -7)$?

670. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки:

а) (2; 1) и (1; 0); б) (1; 2) и (3; 4);
в) (0; 2) и (1; 0); г) (−1; 2) и (2; −1);
д) (0; 0) и (−3; −3); е) (1; −2) и (−3; −5).

671. Докажите, что функция:

а) $y=2x$ возрастающая;
б) $y=-\frac{1}{2}x$ убывающая;
в) $y=3x^2$ возрастающая при $x\geqslant 0$;
г) $y=-x^2$ убывающая при $x\geqslant 0$.

672. а) Расположите значения функции $y=x^2$ в порядке возрастания: $y(-4)$, $y(5{,}1)$, $y(4{,}1)$, $y(0{,}5)$, $y(0)$.

б) Расположите значения функции $y=x^2$ в порядке убывания: $y\left(-\frac{1}{5}\right)$, $y(-0{,}3)$, $y\left(\frac{1}{4}\right)$, $y(0{,}27)$, $y(-0{,}(3))$, $y\left(\frac{2}{7}\right)$.

673*. Является ли функция $y=3\cdot\frac{x^2}{x}+5$ линейной?

674*. Постройте график функции $y=\frac{x^2-1}{x-1}$.

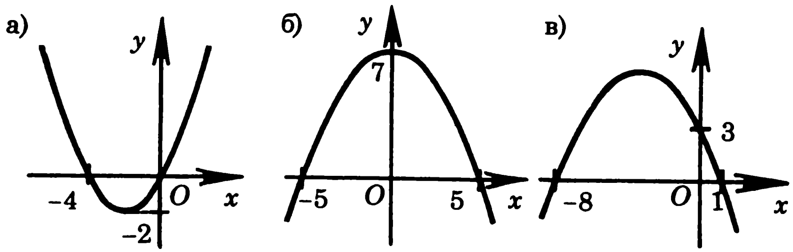


Рис. 86

675. На рисунке 86 изображен график квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$. Определите a, b, c.

676. По графику функции $y=ax^2+bx+c$ определите знаки a, b, c (рис. 87).

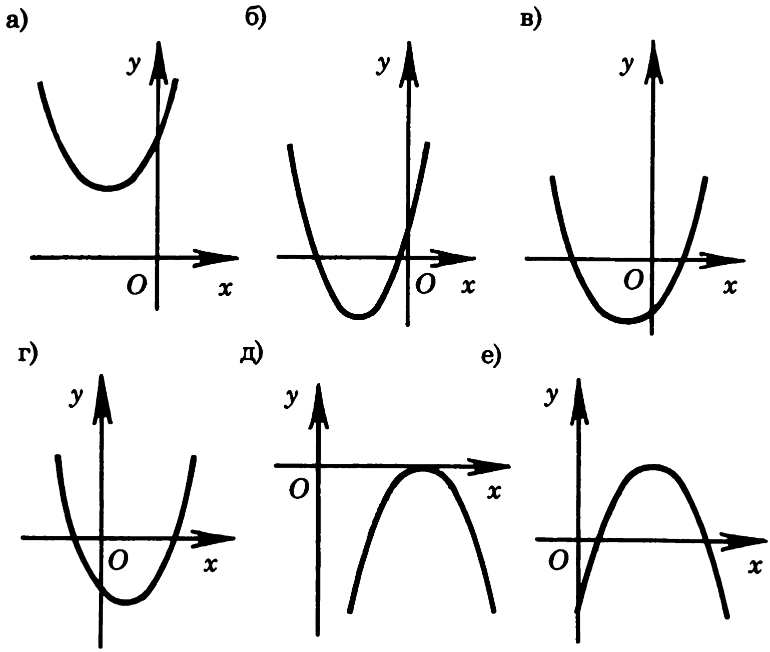


Рис. 87

677. Две материальные точки движутся по оси Os по законам:

а) $s=2t+4$ и $s=4t$; б) $s=2t+1$ и $s=-t+3$;
в) $s=2t+1$ и $s=2t+3$.

Встретятся ли эти точки? Если да, то в какой момент времени? Нарисуйте графики движения и с их помощью поясните полученные результаты.

Решите уравнение **(678—679)**:

678. а) $x^2=4$; б) $x^2=1$; в) $x^2=3$; г) $x^2=5$.

679. а) $x^2=2-x$; б) $x^2=x-8$;
в) $x^2+2x+1=0$; г) $x^2-x-2=0$.

680*. Определите с помощью графика значения x, для которых выполняется неравенство:
а) $x^2>9$; б) $x^2>-5$; в) $x^2\geqslant 3$;
г) $x^2<-3$; д) $x^2\leqslant 0$; е) $x^2<4$;
ж) $x^2>2x$; з) $x^2<x$; и) $x^2\leqslant 2x+1$.

681*. Постройте график функции:
а) $y=|x|(x+2)$; б) $y=x|x+2|$.

682*. Определите с помощью графика значения x, для которых выполняется равенство:
а) $\frac{1}{x}=1$; б) $3=\frac{1}{x}$; в) $\frac{1}{x}=x^2$.

Постройте график функции **(683—684)**:

683*. а) $y=\frac{1}{x}$; б) $y=-\frac{1}{x}$; в) $y=\frac{|x|}{x^2}$; г) $y=-\frac{x^2}{|x^3|}$.

684*. а) $y=\frac{1}{x}+1$; б) $y=\frac{1}{x}-2$;
в) $y=2-\frac{1}{x}$; г) $y=\frac{x-1}{x}$.

685. Найдите расстояние между точками:
а) $A(1;\ 2)$ и $B(1;\ -8)$; б) $A(1;\ 2)$ и $B(-6;\ 2)$;
в) $A(1;\ 2)$ и $B(2;\ 5)$; г) $A(1;\ 2)$ и $B(-2;\ -5)$.

686. Напишите уравнение окружности радиуса AB с центром A:
а) $A(-2;\ 1)$ и $B(1;\ 5)$; б) $A(1;\ 5)$ и $B(-2;\ 1)$.

687. *Задача Евклида.* Докажите равенство

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

688. *Задача Архимеда.* Справедливо ли неравенство

$$\frac{265}{153}<\sqrt{3}<\frac{1351}{780}\ ?$$

689. *Старинная задача (Древний Вавилон).* Найти длину шеста, сначала вертикально прислоненного к стене, затем смещенного так, что его верхний конец опустился на 3 локтя, а нижний отступил от стены на 9 локтей.

690. *Старинная задача (Древний Вавилон, ок. 1950 г. до н. э.).* Площадь A, состоящая из площадей двух квадратов, равна 1000. Сторона одного из квадратов составляет уменьшенные на 10 две трети стороны другого квадрата. Каковы стороны квадратов?

691. *Задача Ариабхаты (476 — ок. 550).* Два лица имеют равные капиталы, причем каждый состоит из известного числа вещей одинаковой стоимости и известного числа монет. Но как число вещей, так и суммы денег у каждого различны. Какова ценность вещи?

Указание. Считайте, что у первого лица a вещей и b монет, а у второго лица c вещей и d монет ($a \neq c$ и $b \neq d$).

692. *Задача Безу.* По контракту работникам причитается 48 франков за каждый отработанный день, а за каждый неотработанный день с них вычитается по 12 франков. Через 30 дней выяснилось, что работникам ничего не причитается. Сколько дней они отработали в течение этих 30 дней?

693*. Один мастер оклеит комнату обоями за a ч, а другой — за b ч. Если же они будут работать вместе, то производительность работы каждого повысится на $p\%$. За сколько часов они оклеят комнату, работая вместе, если:
а) $a=6$, $b=4$, $p=20$; б) $a=3$, $b=7$, $p=40$?

694*. Один работник может вырыть колодец за a дней, другой — за b дней. Если же они будут работать вместе, то производительность работы каждого повысится на $p\%$ и они выроют колодец за c дней. На сколько процентов повышается производительность труда каждого работника при совместной работе, если:
а) $a=15$, $b=10$, $c=4$; б) $a=21$, $b=28$, $c=8$?

695*. Поле разделено на 3 участка. За день были вспаханы половина первого участка, $\frac{3}{4}$ второго участка, а третий, составляющий четвертую часть всего поля, был вспахан полностью. Вспаханные за день площади в 2 раза больше площади второго участка. Какую часть площади поля составляет площадь, вспаханная за день?

696*. Три тракторные бригады вместе вспахивают поле за 4 дня. Это же поле первая и вторая бригады вместе вспахивают за 6 дней, первая и третья вместе — за 8 дней. Во сколько раз больше вспахивает в день вторая бригада, чем третья?

697*. Число 20 представьте в виде суммы двух слагаемых так, чтобы их произведение оказалось наибольшим.

698*. Найдите число, которое дает наименьшую сумму со своим квадратом.

699*. Число 18 представьте в виде суммы двух слагаемых так, чтобы сумма удвоенного первого из них и квадрата второго была наименьшей.

700*. Число 16 представьте в виде суммы двух слагаемых так, чтобы сумма кубов этих слагаемых оказалась наименьшей.

701*. Проволока длиной 100 см согнута так, что получился прямоугольник наибольшей возможной площади. Определите его размеры.

702*. Проволока длиной 12 дм согнута под прямым углом так, что площадь квадрата, построенного на воображаемой гипотенузе, оказалась наименьшей. Определите стороны полученного прямого угла.

703*. В равнобедренный треугольник с основанием 20 см и высотой 14 см вписан прямоугольник наибольшей площади. Найдите площадь этого прямоугольника.

704*. Сечение туннеля имеет форму прямоугольника, сверху завершенного полукругом (рис. 88). Периметр сечения 18 м. При каком радиусе полукруга сечение туннеля наибольшее?

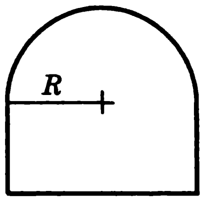


Рис. 88

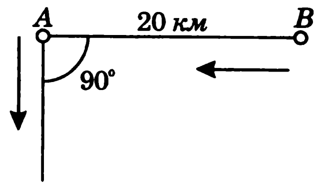


Рис. 89

705*. Из пунктов A и B (рис. 89), расстояние между которыми 20 км, вышли одновременно в указанных направлениях два пешехода. Скорость пешехода, вышедшего из пункта A, 4 км/ч, а скорость пешехода, вышедшего из пункта B, 6 км/ч. Через какое время расстояние между ними станет наименьшим?

706. Каким условиям должны удовлетворять числа a, b и c, чтобы квадратичная функция $y=ax^2+bx+c$ имела:
а) положительные значения при любых x;
б) наибольшее значение?

707. При каком условии график квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ пересекает ось Ox в точках, абсциссы которых являются противоположными числами?

708. Определите знак числа a в формуле квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$, если $y_2>y_1$ при $x_2>x_1>-\frac{b}{2a}$, где y_1 и y_2 — значения функции в точках x_1 и x_2.

709. Напишите уравнение какой-либо параболы, проходящей через две точки: $\left(\frac{1}{3};\ 0\right)$ и $(4;\ 0)$.

710. Каким условиям должны удовлетворять числа a, b и c, чтобы парабола $y=ax^2+c$ и прямая $y=-bx$ имели две общие точки?

711. Напишите уравнение какой-либо параболы $y=ax^2+bx+c$, проходящей через начало координат, при условии, что число -2 является корнем квадратного трехчлена ax^2+bx+c (a, b и c — целые числа).

712. Как расположен в координатной плоскости xOy график функции $y=|ax^2+bx|+c$, если $b^2-4ac>0$, $a<0$, $b<0$, $c>0$? Постройте схематически график функции.

713. На рисунке 90 изображен график квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$. Какие значения могут принимать числа a, b и c?

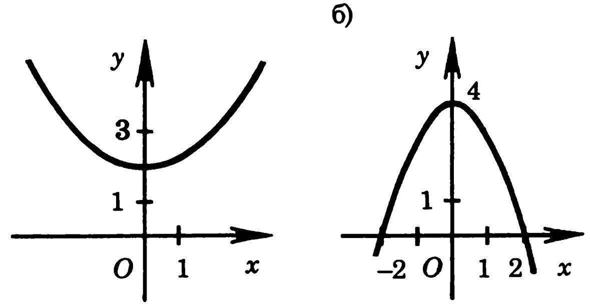


Рис. 90

714. На рисунке 91 изображены графики квадратичных функций. Укажите рисунок, удовлетворяющий условию:

а) $D>0$, $a<0$; б) $D>0$, $a>0$; в) $D=0$, $a<0$;
г) $D<0$, $a>0$; д) $D<0$, $a<0$; е) $D=0$, $a>0$.

D — дискриминант, a — коэффициент при старшем члене квадратного трехчлена ax^2+bx+c.

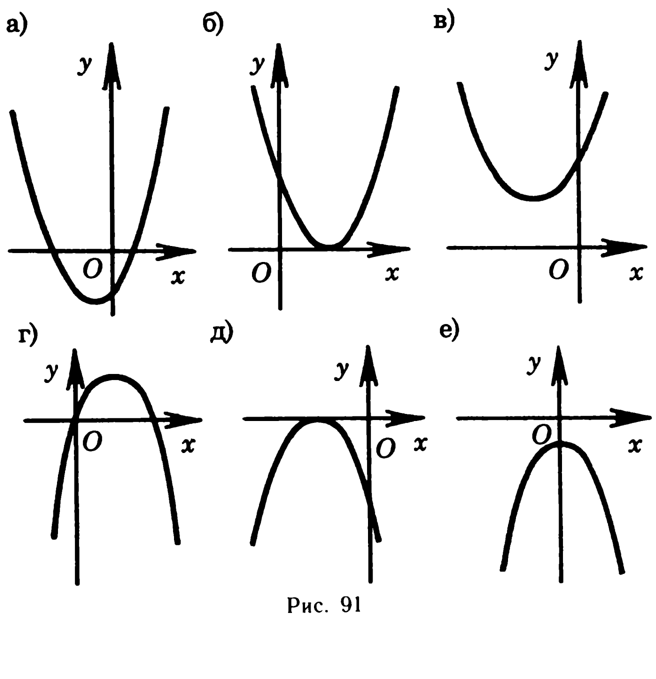


Рис. 91

715. Найдите отношение:

а) 18 к 36; б) 24 к 12; в) 42 к 56;

г) 36 к 24; д) 0,3 к 0,12; е) $\frac{3}{4}$ к $\frac{33}{44}$.

716. Найдите отношение:

а) 1 км к 1 м; б) 1 г к 1 кг;

в) 1 ч к 1 мин; г) 1 км^2 к 1 га.

717. Запишите в виде пропорции:

а) 3 относится к 5 как 9 относится к 15;

б) 7,2 относится к 3 как 1,2 относится к 0,5;

в) 12 во сколько раз больше 4, во сколько раз 48 больше 16;

г) 8 во сколько раз больше 7, во сколько раз 4 больше 3,5.

718^0. Можно ли составить пропорцию из отношений:

а) 20:10 и 10:5; б) 1:3 и 15:5;

в) 11:2 и 1,1:0,2; г) $\frac{1}{2}$:3 и 2:12?

719. Верно ли равенство:

а) $\frac{9}{5}=\frac{18}{10}$; б) $4:13=2:6{,}5$;

в) $7:3=\frac{21}{9}$; г) $\frac{0{,}02}{17}=\frac{4}{340}$?

720^0. Можно ли составить пропорцию из чисел:

а) 1, 2, 3, 6; б) 7, 6, 2, 21;

в) 2, 18, 6, 6; г) 3, 40, 20, 6?

721. К данной тройке чисел подберите такое четвертое число, чтобы эти числа могли образовать пропорцию:

а) 2, 3, 5; б) 7, 2, 8;

в) 10, 1000, 1; г) 7, 5, 3.

Сколько решений имеет задача?

722. Замените отношение дробных чисел равным ему отношением целых чисел:

а) $\frac{0{,}2}{0{,}5}$; б) $\frac{1{,}7}{0{,}5}$; в) $\frac{1{,}21}{0{,}05}$; г) $\frac{0{,}0001}{0{,}5}$;

д) $\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$; е) $\frac{2}{5}:0{,}5$; ж) $\frac{2}{3}:\frac{4}{7}$; з) $1{,}2:\frac{4}{5}$.

723. Останется ли верной пропорция, если умножить на одно и то же отличное от нуля число:

а) оба крайних члена;

б) оба средних члена?

724. Равенство произведений замените пропорцией:

а) $16\cdot3=2\cdot24$; б) $3\cdot8=4\cdot6$;

в) $250\cdot8=2\cdot1000$; г) $144\cdot3=16\cdot27$.

725. Найдите неизвестный член пропорции:

а) $x:5=7:10$; б) $x:9=5:3$; в) $x:12=\frac{1}{3}$;

г) $x:2=\frac{7}{5}$; д) $\frac{x}{4}=2:3$; е) $\frac{x}{7}=1:5$;

ж) $\frac{2}{x}=\frac{1}{5}$; з) $\frac{8}{x}=\frac{11}{3}$; и) $\frac{13}{9}=\frac{4}{x}$;

к) $\frac{17}{5}=\frac{2}{x}$; л) $\frac{x}{11}=\frac{13}{121}$; м) $\frac{8}{5}=\frac{x}{10}$.

726. Решите уравнение:

а) $\frac{2x}{3}=7:5$; б) $\frac{5}{4x}=1:13$; в) $\frac{x}{3}:4=9:1$;

г) $\frac{2,5}{7x}=0,5:14$; д) $\frac{3x}{2}=\frac{7}{8}$; е) $\frac{4x}{3}=\frac{2}{3}$;

ж) $\frac{0,2}{7x}=\frac{5}{12}$; з) $\frac{1,6}{3}=\frac{2,4}{5x}$; и) $\frac{7,2}{5,1}=\frac{4,8}{1,7x}$.

727. Определите масштаб, если 1 см на чертеже соответствует 10 м на местности.

728. Определите длину отрезка, изображающего на географической карте шоссейную дорогу между двумя городами, если на местности длина этого шоссе равна 200 км, а масштаб карты:

а) 1:1 000 000; б) 1:5 000 000;
в) 1:200 000; г) 1:20 000 000.

729. Масштаб карты 1:50 000. Определите расстояние на местности, если на карте его изображает отрезок длиной:
а) 5 см; б) 2,2 см; в) 37 мм; г) 1,2 дм.

730. Изобразите горизонтальными отрезками длину улицы в 400 м, 350 м, 275 м, принимая 1 см за 50 м. В каком масштабе сделан чертеж?

731. Изобразите вертикальными отрезками высоту дома в 40 м, 60 м, 35 м, принимая 2 см за 10 м. В каком масштабе сделан чертеж?

732. Длина дома на плане, масштаб которого 1:250, равна 6 см. Найдите реальную длину дома.

733. Длина школьного здания 60 м. Найдите длину этого здания на плане, 1 см которого соответствует 5 м.

734. Длина шоссейной дороги Москва — Санкт-Петербург 725 км. Найдите длину этой дороги на карте с маштабом 1:5 000 000.

735. а) Определите 2% от 12.
б) Сколько процентов составляют 3 р. от 15 р.?
в) Найдите число, 8% которого равны 32.
г) На сколько процентов 5 больше, чем 4?
д) На сколько процентов 8 меньше, чем 10?

е) Сколько процентов составляет 1 ц от 1 т?
ж) Сколько процентов составляет 3,75 от 7,5?
з) Найдите число x, если 12,5% от x равно 25.
и) Число 0,125 выразите в процентах.
к) 1,5% замените десятичной дробью.
л) Найдите 25% от 840.
м) Какое число меньше 20 на 20%?

736. Выразите в процентах дробь $\frac{1}{8}$.

737. Что больше: 5% от 40 или 40% от 5?

738. Книга продана со скидкой 10% за 2 р. 70 к. Сколько стоила эта книга до снижения цены?

739. а) Завод выпустил 1260 моторов вместо 1200 по плану. На сколько процентов завод перевыполнил план?
б) Рабочий по плану должен был изготовить 800 деталей, но он перевыполнил план на 5%. Сколько деталей изготовил рабочий?
в) В классе по списку 40 учеников, 4 сегодня отсутствуют. Каков процент посещаемости сегодня?
г) Как проще найти $33\frac{1}{3}$ % от числа?
д) Какую часть числа составляют $66\frac{2}{3}$ %?
е) Если к некоторому числу прибавить его 10%, то получится 330. Найдите это число.
ж) Трава при высыхании теряет 80% своей массы. Сколько сена получится с луга площадью 10 га, если с одного гектара накашивают в среднем 6 т травы?

740. а) Известно, что норма выработки за месяц (25 смен) составляет 2000 деталей. Определите норму выработки за одну смену (6 ч) и норму времени на одну деталь.
б) Известно, что норма времени на обработку одной детали 30 мин. Найдите норму выработки за смену (6 ч) и за месяц (25 смен).
в) Самолет поднялся на высоту 8 км за 20 мин. Можно ли указать, на какую высоту самолет поднимется за 5 ч?
г) Ученик метнул спортивное копье на 30 м. Копье весит 0,4 кг. Можно ли узнать, на какое расстояние метнет ученик копье весом 0,2 кг?
д) Пачка газетной бумаги в 500 листов имеет высоту 5 см. Какой высоты получится пачка из 1 млн таких листов?

741. а) На 15 автомашинах одинаковой грузоподъемности доставили на элеватор 90 т зерна. Сколько нужно таких машин, чтобы доставить на элеватор 186 т зерна?
б) В 1 кг раствора содержится 40 г соли. Сколько соли содержится в 350 г этого раствора?

в) В 5 л раствора содержится 80 г соли. Сколько соли содержится в 4,2 л такого же раствора?

742. Рис содержит 75% крахмала, а ячмень — 60%.

а) Сколько нужно взять риса, чтобы получить столько же крахмала, сколько содержится его в 6 кг ячменя?

б) Сколько нужно взять ячменя, чтобы получить столько же крахмала, сколько его содержится в 8 кг риса?

743. а) Определите высоту дерева, если известно, что длина тени от этого дерева равна 20 м, а длина тени от метрового шеста равна 1,4 м (измерения проведены одновременно).

б) Какова длина тени от дерева высотой 12 м, если от двухметрового шеста отбрасывается тень длиной 1,5 м?

744. а) В формуле равномерного прямолинейного движения выразите время через расстояние и скорость. Как изменится время движения, если расстояние останется прежним, а скорость увеличится в 3 раза, в 5 раз; уменьшится в 2 раза, в 1,5 раза?

б) Рабочему необходимо изготовить 200 деталей. Запишите формулу зависимости времени выполнения заказа от производительности труда (количество деталей, изготовляемых в единицу времени). Как изменится время выполнения работы, если производительность труда увеличится в 1,2 раза, в 1,4 раза, в 2 раза?

745. а) На изготовление одной детали рабочие стали затрачивать 8 мин вместо 20 мин. Сколько деталей изготовит бригада за смену, если раньше она выпускала 120 деталей? На сколько процентов повысилась производительность труда?

б) Завод выполнил годовой план к 1 декабря. На сколько процентов завод выполнит годовой план к 1 января, если будет работать с той же эффективностью?

в) Внедрение рационализаторского предложения позволяет понизить норму времени на изготовление одной детали с 12 мин до 10 мин. Во сколько раз при этом повысится норма выработки? На сколько процентов будет выполняться план при сохранении нормы выработки?

г) Два шкива соединены ремнем. Окружность первого шкива 60 см, а второго — 40 см. Сколько оборотов в минуту сделает второй шкив, если первый делает 240 оборотов в минуту?

746. а) Земной шар совершает полный оборот вокруг своей оси за 24 ч. На сколько градусов различается долгота двух городов, если солнечное время различается на 8 ч?

б) На сколько часов различается солнечное время двух городов, если долгота различается на 60°?

747. Санкт-Петербург расположен на 30° восточной долготы, а Магадан на 150° восточной долготы. Определите солнечное время в Магадане, когда в Санкт-Петербурге полдень.

748. В баке 6 л воды. Каждую минуту в него через кран вливают 4,5 л воды.

а) Запишите зависимость между числом литров воды в баке (y) и временем (x), в течение которого открыт кран.

б) Начертите график изменения y, давая x значения от 0 до 8 через 2.

в) Найдите по графику, сколько воды будет в баке через 1 мин, через 5 мин.

г) Через сколько минут в баке будет 40 л воды? (Округлите с точностью до 1 мин.)

д) Через сколько минут бак будет заполнен, если он вмещает 100 л воды? (Округлите с точностью до 1 мин.)

749. В одной цистерне 32 т бензина, а в другой — 36 т. Из первой выкачивают каждую минуту по 200 кг, а из второй — по 300 кг бензина. Через какое время в обеих цистернах станет бензина поровну?

750. На изготовление 15 колец для ключей нужно 18 дм проволоки. Сколько колец получится из 24 дм проволоки?

751. Сколько килограммов хлеба можно получить из 850 кг пшеницы, если из 10 кг зерна получается 8 кг пшеничной муки, а из 6 кг муки — 9 кг хлеба?

752. Из 32 кг молока получается 4 кг сливок, из 35 кг сливок получается 7 кг сливочного масла, а из 16 кг сливочного масла получается 12 кг топленого масла. Сколько килограммов топленого масла можно получить из 3000 кг молока?

753. Выпечено 400 кг хлеба. При остывании хлеб потерял 2,75% своей массы. На сколько килограммов уменьшилась масса хлеба?

754. Смешали 4 л горячей воды и 3 л воды, температура которой 10 °C. Температура смеси оказалась равной 40 °C. Найдите температуру горячей воды.

755. Вычислите в процентах с точностью до 0,1 выполнение плана реализации продукции в каждом квартале на основе следующих данных:

Квартал	Реализация в тыс. р.		% выполнения
	план	фактически	
I	1200	1280	
II	1400	1450	
III	1300	1280	
IV	1400	1650	

756. Два цеха должны были выпустить по плану 180 станков в год. Первый цех выполнил план на 112%, а второй — на 110%, и поэтому оба цеха выпустили за год 200 станков. Сколько станков сверх плана выпустил каждый цех?

757. Какой должна быть температура 20 л воды, чтобы при смешении ее с 10 л воды, температура которой 20 °С, получить воду с температурой не менее 35 °С и не более 45 °С?

758. Два мальчика качаются на доске, перекинутой через бревно. Длина доски 5,5 м. В каком месте должна находиться точка опоры доски, чтобы мальчики находились в равновесии, если масса одного 48 кг, а другого 40 кг?

759. К концам прямолинейного рычага привешены два груза; они находятся в равновесии, причем точка опоры рычага отстоит от одного конца рычага на 5 дм, а от другого — на 7 дм. Если больший груз увеличить на 2 кг, а меньший уменьшить на 2 кг, то для сохранения равновесия придется передвинуть точку опоры на 1 дм. Определите массу каждого груза.

760. Скорости двух поездов, пассажирского и товарного, относятся как 5:3. Пассажирский поезд вышел со станции на 0,5 ч позже товарного, но прибыл на следующую станцию на 0,5 ч раньше товарного. Найдите скорости поездов, считая их постоянными, если расстояние между станциями равно 75 км.

761. На расстоянии 6 м от ручья росло дерево высотой 20 м. Буря надломила его так, что вершина коснулась воды у ближнего к дереву берега ручья. На какой высоте надломлено дерево?

762. Лестница, длина которой 7,5 м, прислонена к стене так, что ее основание находится в 2,5 м от стены. На сколько метров опустится верхний конец лестницы, если основание лестницы отодвинуть еще на 3,5 м от стены?

763. Стрела, выпущенная из лука вертикально вверх, поднялась на 35 м.

а) Через какое время стрела достигнет наибольшей высоты подъема?

б) Через какое время стрела упадет на землю?

в) Определите начальную скорость стрелы.

764. Найдите два числа, сумма квадратов которых 101, а разность квадратов 99. Сколько решений имеет задача?

765. Найдите два числа, сумма квадратов которых 145, а разность квадратов 17.

766. Разность квадратов двух чисел 1029, а отношение чисел 2:5. Найдите эти числа.

767*. Сумма цифр двузначного числа на 29 меньше произведения цифр и на 72 меньше суммы квадратов цифр. Определите это число.

768. Если переставить цифры двузначного числа, то получится число, которое на 18 меньше данного числа. Произведение этих двух чисел в 126 раз больше произведения цифр, которыми они записаны. Определите число.

769*. Алеша на 3 года старше Бори и на 6 лет старше Вовы. Произведение возрастов Гриши и Бори на 9 больше произведения возрастов Алеши и Вовы. На сколько лет Алеша старше Гриши?

770*. Алеша на 3 года старше Бори и на 6 лет старше Вовы. Произведение возрастов Гриши и Бори на 20 больше произведения возрастов Алеши и Вовы. Сколько лет Грише?

771*. Саша сказал: «Моему младшему брату больше семи лет, а сумма квадратов наших возрастов в 20 раз больше моего возраста». Сколько лет Саше?

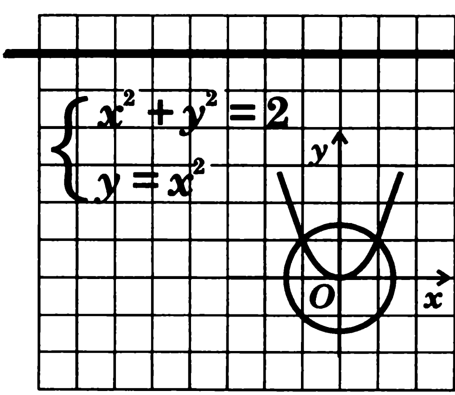
772*. Вася возвел число мальчиков и число девочек нашего класса в квадрат. Сумма полученных чисел оказалась в 25 раз больше числа мальчиков. Сколько мальчиков в нашем классе, если девочек больше десяти, а мальчиков больше, чем девочек?

773*. Пастух заметил, что произведение числа баранов на число его баранов, уменьшенное на единицу, на 15 больше, чем произведение его собственного возраста на число его баранов, уменьшенное на 2. Сколько лет пастуху?

774*. Два купца внесли для общего дела по 48 тыс. р.: первый забрал свои деньги (без дохода) через год, а второй через два года. Как они должны поделить между собой 42 тыс. р. прибыли, полученные на их деньги за эти два года?

775*. Два компаньона вложили деньги в общее дело. Первый внес 40 тыс. р., а второй 60 тыс. р. Через месяц первый забрал свои деньги (без дохода), а еще через месяц они решили поделить доход, полученный за эти два месяца. Как они должны поделить между собой доход в сумме 17 тыс. р.?

776*. Некоторое дело приносит стабильный доход. Первый компаньон вложил в него 9 тыс. р., а второй — 2 тыс. р. Первый забрал вложенные деньги (без дохода) через месяц, второй — через два месяца. Только после этого они разделили полученный доход. Каков процент ежемесячной прибыли, если доход первого оказался в 2,5 раза больше дохода второго?



ГЛАВА IV

СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 8. СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

8.1. Понятие системы рациональных уравнений

Уравнение, обе части которого есть рациональные выражения относительно x и y, называют **рациональным уравнением с двумя неизвестными x и y.**

Вот примеры рациональных уравнений с двумя неизвестными x и y:

$$2x+y-4=0, \tag{1}$$

$$2x^2-3x+y-x+1=0, \tag{2}$$

$$\frac{1}{x}=3-\frac{4}{y}. \tag{3}$$

Пару чисел **(x_0; y_0)** называют **решением уравнения с двумя неизвестными x и y**, если эти числа удовлетворяют этому уравнению, т. е. если при подстановке x_0 вместо x и y_0 вместо y это уравнение превращается в верное числовое равенство.

Например, пара чисел (2; 0) есть решение уравнения (1), пара чисел (0; -1) есть решение уравнения (2), пара чисел (-1; 1) есть решение уравнения (3).

Уравнение, обе части которого есть рациональные выражения относительно x, y и z, называют рациональным уравнением с тремя неизвестными x, y и z.

Вот примеры рациональных уравнений с тремя неизвестными x, y и z:

$$3x-6y+z-6=0, \tag{4}$$

$$7x^2+5xy-z^2+yz-x+z+y-3=0, \tag{5}$$

$$\frac{x-y}{x-z}+\frac{x+y}{x+z}=x+y+z. \tag{6}$$

Тройку чисел $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ называют **решением уравнения с тремя неизвестными x, y и z**, если эти числа удовлетворяют этому уравнению, т. е. если при подстановке x_0 вместо x, y_0 вместо y, z_0 вместо z это уравнение превращается в верное числовое равенство.

Например, тройка чисел $(2;\ -1;\ -6)$ есть решение уравнения (4), тройка чисел $(0;\ 3;\ 0)$ есть решение уравнения (5), тройка чисел $(0;\ 1;\ 1)$ есть решение уравнения (6).

Аналогично определяется рациональное уравнение с n неизвестными и его решение.

Рациональное уравнение, левая часть которого есть многочлен первой степени, а правая — нуль, называют еще **уравнением первой степени**.

Например, уравнение (1) есть уравнение первой степени с двумя неизвестными x и y, уравнение (4) есть уравнение первой степени с тремя неизвестными x, y и z.

Рациональное уравнение, левая часть которого есть многочлен второй степени, а правая — нуль, называют **уравнением второй степени.**

Например, уравнение (2) есть уравнение второй степени с двумя неизвестными x и y, уравнение (5) есть уравнение второй степени с тремя неизвестными x, y и z.

Рациональное уравнение, левая часть которого есть многочлен степени n, а правая — нуль, называют еще *уравнением n-й степени.*

Например, уравнение $x^2-xy^2+7=0$ имеет степень 3, а уравнение $x^3y-x^{10}+1=0$ имеет степень 10.

Пусть даны два рациональных уравнения с двумя неизвестными x и y. Говорят, что надо **решить систему двух рациональных уравнений с двумя неизвестными x и y**, если требуется найти все пары чисел $(x;\ y)$, являющиеся решениями одновременно и первого, и второго уравнений.

Вот *примеры* систем двух рациональных уравнений с двумя неизвестными x и y:

$$\begin{cases} x+y+1=0, \\ 2x-7y+9=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{x}+y=0, \\ x^2+2y=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+3y+1=0, \\ x^2-7xy+3y^2-x+4y-11=0. \end{cases}$$

Решением системы двух уравнений с двумя неизвестными x и y называют пару чисел $(x_0;\ y_0)$, являющуюся решением каждого уравнения этой системы.

Пусть даны три рациональных уравнения с тремя неизвестными x, y и z. Говорят, что надо **решить систему трех рациональных уравнений с тремя неизвестными x, y и z**, если требуется найти все тройки чисел $(x; y; z)$, являющиеся решениями одновременно всех трех этих уравнений.

Вот *примеры* систем трех рациональных уравнений с тремя неизвестными x, y и z:

$$\begin{cases} 3x+y-z+1=0, \\ 2x-z+7=0, \\ 7x-3y+z+11=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x+y-2z+1=0, \\ x-y-9z+7=0, \\ 3x^2-2xy-y^2-7y+11=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+\frac{1}{y}+\frac{z}{x+y}-5=0, \\ \frac{x}{z}+\frac{x}{y}=1, \\ 2x+3y-z^2=0. \end{cases}$$

Решением системы трех уравнений с тремя неизвестными x, y и z называют тройку чисел $(x_0; y_0; z_0)$, являющуюся решением каждого уравнения этой системы.

Аналогично определяется система n рациональных уравнений с n неизвестными и ее решение.

Решить систему уравнений — значит найти все ее решения или показать, что их нет.

В VII классе мы уже рассмотрели решение системы линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными. В этом параграфе мы покажем на примерах, как можно решать системы уравнений первой и второй степени. Кроме того, будут рассмотрены задачи, приводящие к более сложным системам рациональных уравнений. При этом будем пользоваться утверждениями о равносильности систем уравнений, приведенными в главе «Линейные уравнения» учебника «Алгебра, 7».

777°. а) Какое уравнение называют рациональным уравнением?

б) Какое уравнение называют уравнением первой степени, второй степени?

в) Что называют решением уравнения с двумя неизвестными x и y?

г) Что называют решением уравнения с тремя неизвестными x, y и z?

д) Когда говорят, что надо решить систему двух уравнений с двумя неизвестными?

е) Когда говорят, что надо решить систему трех уравнений с тремя неизвестными?

ж) Что называют решением системы двух уравнений с двумя неизвестными?

з) Что называют решением системы трех уравнений с тремя неизвестными?

и) Что значит решить систему уравнений?

778. Является ли пара чисел (1; 2) решением уравнения:

а) $x+y=3$; б) $2x+y=1$; в) $3x+2y=7$;
г) $x^2+y^2=3$; д) $x^2+y^2=5$; е) $xy-x=1$?

779. Подберите какое-либо решение уравнения:

а) $x+y=5$; б) $3x+y=5$; в) $2x-3y=1$;
г) $x^2+y^2=9$; д) $x^2+2xy+y^2=25$; е) $x^2-xy=0$.

780. Является ли тройка чисел (0; 1; 2) решением уравнения:

а) $3x+2y+z=4$; б) $x-y+z=1$;
в) $x+2y+3z=2$; г) $xy+2xz+yz=2$;
д) $x^2+y^2+z^2=5$; е) $x^2+2y^2-z^2=0$?

781. Подберите какое-либо решение уравнения:

а) $x+y+z=10$; б) $x^2+y^2+z^2=25$;
в) $xy+yx+yz=3$; г) $xy-yx+yz=1$.

782. Докажите, что уравнение не имеет действительных решений:

а) $x^2+y^2+1=0$; б) $x^2+y^2+z^2+0{,}1=0$.

783. Дано уравнение $xy+x=8$.

а) Какова степень этого уравнения?

б) Выразите x через y. Какие значения не может принимать y?

в) Выразите y через x. Какие значения не может принимать x?

784. Определите степень уравнения:

а) $2x-5y=7$; б) $x+x^2-xy-5=0$;
в) $xy=4$; г) $x^2-xy^2-7x=0$;
д) $xy^5-x^3y+3=0$; е) $x^6-x^8-x^{10}=0$.

785. Является ли пара чисел (1; 1) решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} x+y=2, \\ x^2-xy+y^2=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy+x^2=2, \\ 2x+3y=4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ 2x-y=1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x+2y=5, \\ x+2xy=3? \end{cases}$

786. Является ли тройка чисел (1; 1; 1) решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} x+y+z=3, \\ 3x-2y+z=0, \\ x^2+y^2+z^2=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y+z=3, \\ xy+xz+yz=3, \\ x^2+x-y=1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x+3y+4z=8, \\ xy-3x^2+z=-1, \\ x^2+y^2-z^2=1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2, \\ x+y+z=3, \\ xy+yz=2? \end{cases}$

787. Является ли решением системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+xy-3=0, \\ x+5=y \end{cases}$$

пара чисел:
а) (0; 3); б) (−3; 2); в) (2; −3); г) (0,5; 5,5)?

788. Является ли решением системы уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ x-y-z=-2, \\ xy+z^2=2 \end{cases}$$

тройка чисел:
а) (1; −1; 1); б) (1; 1; 1); в) (1; 1; −1); г) (−1; 1; 1)?

8.2. Системы уравнений первой и второй степени

В этом пункте мы приведем примеры решения системы двух уравнений с двумя неизвестными, одно из которых первой степени, другое — второй степени, и системы трех уравнений с тремя неизвестными, два из которых первой степени, а третье — второй степени. Для решения таких систем применим способ подстановки.

Пример 1. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x+2y-7=0, \\ x^2+2xy+y^2+3y-4x-31=0. \end{cases} \qquad (1)$$

Первое уравнение этой системы — уравнение первой степени. Выразим из него x через y:

$$x=7-2y. \qquad (2)$$

Подставив выражение $(7-2y)$ вместо x во второе уравнение системы, получим уравнение

$$(7-2y)^2+2(7-2y)y+y^2+3y-4(7-2y)-31=0,$$

которое после приведения подобных членов запишем в виде

$$y^2-3y-10=0. \qquad (3)$$

Уравнение (3) имеет два корня: $y_1=-2$ и $y_2=5$. Подставив эти числа в равенство (2) вместо y, получим

$$x_1=11 \text{ и } x_2=-3.$$

Итак, система (1) имеет два решения:

$$x_1=11,\ y_1=-2;\ x_2=-3,\ y_2=5$$

и других решений не имеет.

Подобным образом можно решить любую систему двух уравнений с неизвестными x и y, в которой одно уравнение первой степени, а другое — второй степени. Выражаем x (или y) из уравнения первой степени и подставляем это выражение в уравнение второй степени. Получаем квадратное уравнение с неизвестным y (или x). Если квадратное уравнение имеет корни, то и система имеет решения; если нет, то система не имеет решений.

Пример 2. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 3x-y+9=0, \\ x^2-y^2+y-5x-32=0. \end{cases} \tag{4}$$

Первое уравнение системы (4) — уравнение первой степени, а второе — второй степени. Из первого уравнения выразим y через x:

$$y=3x+9.$$

Подставим выражение $(3x+9)$ вместо y во второе уравнение системы (4). Получим уравнение

$$x^2-(3x+9)^2+(3x+9)-5x-32=0,$$

которое после приведения подобных членов запишем в виде

$$-8x^2-56x-104=0.$$

Сократив обе части этого уравнения на (-8), получим равносильное ему квадратное уравнение

$$x^2+7x+13=0, \tag{5}$$

дискриминант которого $D=b^2-4ac=7^2-4\cdot1\cdot13=-3<0$. Следовательно, уравнение (5) не имеет решений. Значит, и система (4) не имеет решений.

Пример 3. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x+y-z+1=0, \\ x-y-z+3=0, \\ x^2+2xy+y^2-xz+z^2+x-5=0. \end{cases} \tag{6}$$

Из первого уравнения системы (6) выразим y через x и z:

$$y=z-x-1. \tag{7}$$

Подставив выражение $(z-x-1)$ вместо y во второе и третье уравнения системы (6), получим систему двух уравнений с двумя неизвестными x и z:

$$\begin{cases} x-(z-x-1)-z+3=0, \\ x^2+2x(z-x-1)+(z-x-1)^2-xz+z^2+x-5=0, \end{cases}$$

которая после приведения подобных членов имеет вид

$$\begin{cases} 2x-2z+4=0, \\ 2z^2-xz+x-2z-4=0. \end{cases} \tag{8}$$

Из первого уравнения системы (8) выразим x через z:

$$x=z-2. \tag{9}$$

Подставив выражение $(z-2)$ вместо x во второе уравнение системы (8), получим уравнение с одним неизвестным z:

$$2z^2-z(z-2)+(z-2)-2z-4=0,$$

которое после упрощения запишем в виде

$$z^2+z-6=0. \tag{10}$$

Квадратное уравнение (10) имеет два корня:

$$z_1=-3 \text{ и } z_2=2.$$

Подставив эти числа в равенство (9), получим

$$x_1=-5 \text{ и } x_2=0.$$

Наконец, подставив сначала x_1 и z_1, а затем x_2 и z_2 в равенство (7), получим

$$y_1=1 \text{ и } y_2=1.$$

Следовательно, система (6) имеет два решения:

$$x_1=-5,\ y_1=1,\ z_1=-3;$$
$$x_2=0,\ y_2=1,\ z_2=2$$

и других решений не имеет.

Замечание. Способ подстановки применим и при решении некоторых систем рациональных уравнений. Например, для решения системы уравнений

$$\begin{cases} x+y=1, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1 \end{cases}$$

надо из первого уравнения выразить y через x и подставить $(1-x)$ вместо y во второе уравнение, а уж затем решить рациональное уравнение с одним неизвестным

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=1.$$

Отметим также, что при решении систем рациональных уравнений иногда применяются и другие способы решений.

789°. Как можно решать систему уравнений первой и второй степени?

Решите систему уравнений (**790—799**):

790. а) $\begin{cases} x^2=y, \\ y-2=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y^2-1=x, \\ x-13=11; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x-3=2, \\ y^2-x=4; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2-y-4=0, \\ y-4=1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x=2+y, \\ x^2-y=8; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2=y, \\ 5x-y=6; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x=y-2, \\ xy=3; \end{cases}$ з) $\begin{cases} y=x-8, \\ xy=-7; \end{cases}$ и) $\begin{cases} x^2+y^2=17, \\ x+2=3. \end{cases}$

791. а) $\begin{cases} x+y=3, \\ xy=-40; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=7, \\ xy=12; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+y=3, \\ xy=-28; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x+y=-8, \\ xy=15; \end{cases}$ д) $\begin{cases} xy=-15, \\ x-y=-8; \end{cases}$ е) $\begin{cases} xy=8, \\ x-y=2; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x+2y=4, \\ x^2+y=16; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 3x+y=1, \\ x+y^2=1; \end{cases}$ и) $\begin{cases} x+2y=3, \\ 3x-y^2=17. \end{cases}$

792. а) $\begin{cases} x^2+y^2=41, \\ y-x=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ y-x=-1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2-y^2=3, \\ x+y=1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x-y=2, \\ x^2-y^2=8; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x+y=-6, \\ y^2-x^2=3; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x-y=-3, \\ y^2-x^2=-1. \end{cases}$

793. а) $\begin{cases} x^2-y^2=0, \\ x+y=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-y^2=0, \\ x-y=0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+y=0{,}2, \\ x^2-y^2=2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x-y=0{,}6, \\ y^2-x^2=12; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x-y=11, \\ xy=12; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y-x=4, \\ xy=5; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} xy=12, \\ x+y=1; \end{cases}$ з) $\begin{cases} xy=15, \\ x+y=-5; \end{cases}$ и) $\begin{cases} x-y=2, \\ xy=-13; \end{cases}$

к) $\begin{cases} x+y=3, \\ xy=0; \end{cases}$ л) $\begin{cases} x-y=3, \\ xy=0; \end{cases}$ м) $\begin{cases} xy=5, \\ x-y=0. \end{cases}$

794. а) $\begin{cases} x+y-7=0, \\ x^2+xy+y^2=43; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y-6=0, \\ 2x^2-y^2=-23; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y=3, \\ x^2-y^2-4xy+11=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y=12, \\ 2xy=9(x-y); \end{cases}$

д) $\begin{cases} 9x^2-12x+4y^2+4y=15, \\ 3x+2y=3; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 9x^2-30x-16y^2-24y=0, \\ 3x-4y=6; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x^2+y^2+xy+x+y-2=0, \\ x-y=2; \end{cases}$

з) $\begin{cases} x+y=1, \\ x^2-2y^2+xy-x-y+4=0. \end{cases}$

795. а) $\begin{cases} x+y=2, \\ 9x^2-3xy+y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-3y=1, \\ 2xy-x^2+9y^2=11-4x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x+y=1, \\ 3x^2=(y-2)^2-2x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-4y=10, \\ (x-1)^2=7(x+y)+1; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 7x-y=3, \\ 14xy-5y^2-7x+9=8y; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x-y=2, \\ 3x^2-5yx+8y^2-3x+4y=15; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x-y=1, \\ x^2-2xy+4y=2; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x+y=2, \\ x^2+3xy-y^2+4y=1. \end{cases}$

796. а) $\begin{cases} x+y+z=6, \\ y+z=3, \\ z=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y+z=0, \\ x+z=2, \\ x=-1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y+z=2, \\ x+z=1, \\ x+y=3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y+z=2, \\ y+z=3, \\ x+y=1; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x+y+z=-1, \\ x+2y=-1, \\ x-y=5; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x+y+z=-1, \\ 2y+z=4, \\ y-z=5; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x+y+z=-1, \\ x-y+z=7, \\ x+y=-3; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x+y-z=-3, \\ y+z=4; \end{cases}$

и) $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x+2y+3z=6, \\ 2x-y+z=2; \end{cases}$ к) $\begin{cases} x+y+z=-3, \\ x-y+z=-1, \\ x+2y-z=-2. \end{cases}$

797. а) $\begin{cases} x+2y-z=1, \\ 2x-y+2z=-1, \\ 3x-2y+z=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y-z=2, \\ 3x-2y+z=2, \\ 4x+4y+z=15; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-y-z=-2, \\ x+2y+z=3, \\ 2x+y-3z=7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+3y-z=8, \\ 2x+4y+z=3, \\ x+9y+4z=5; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x-3y+z-10=0, \\ 3x-4y-z+2=0, \\ x+y+z=0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x-3y+2z=1, \\ x-y-z=2, \\ x+y+z=0. \end{cases}$

798. а) $\begin{cases} x-y=-1, \\ y+z=5, \\ xz=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=-3, \\ y-z=1, \\ x^2+z^2=10; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=35, \\ x+y=2, \\ x-z=4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2=z^2, \\ x+y+z=12, \\ xy=12; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 4x-2y=7x, \\ y+z=x, \\ y^2-4=8x-3z^2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3y+z=x, \\ x-z=y, \\ x^2-3x=5+z^2. \end{cases}$

799*. а) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1\frac{1}{2}, \\ x-1=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=-\frac{1}{4}, \\ y+1=3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{6}, \\ x-y=-1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{5}{6}, \\ x+y=5; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=-\frac{1}{6}, \\ x+y=1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=-\frac{1}{12}, \\ x-y=1; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \frac{2}{y}-\frac{3}{x}=-8, \\ 3x+y=3; \end{cases}$ з) $\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=-1\frac{5}{12}, \\ x-y=1; \end{cases}$

и) $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ xy=-2; \end{cases}$ к) $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2\frac{1}{6}; \end{cases}$

л) $\begin{cases} \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{5}{6}, \\ x^2-y^2=5; \end{cases}$ м) $\begin{cases} x+xy+y=11, \\ x-xy+y=1. \end{cases}$

8.3. Решение задач при помощи систем уравнений первой и второй степени

З а д а ч а. Проценты содержания (по массе) кислоты в трех растворах таковы, что квадрат процента второго равен произведению процентов первого и третьего. Если смешать первый, второй и третий растворы в отношении 2:3:4 (по массе), то получится раствор, содержащий 32% кислоты. Если же смешать их в отношении 3:2:1 (по массе), то получится раствор, содержащий 22% кислоты. Сколько процентов кислоты содержит каждый раствор?

Р е ш е н и е. Пусть в первом растворе x% кислоты, во втором y% кислоты и в третьем z% кислоты. По первому условию задачи

$$y^2 = xz. \qquad (1)$$

В 1 г первого раствора содержится $\frac{x}{100}$ г кислоты, в 1 г второго раствора $\frac{y}{100}$ г кислоты и в 1 г третьего раствора $\frac{z}{100}$ г кислоты. Если мы возьмем 2 г первого раствора, 3 г второго и 4 г третьего, то получим 9 г смеси, содержащей $2\cdot\frac{x}{100}+3\cdot\frac{y}{100}+$ $+4\cdot\frac{z}{100}$ (г) кислоты. По условию задачи полученная смесь содержит 32% кислоты, т. е. в 9 г смеси содержится $9\cdot\frac{32}{100}$ (г) кислоты. Из этого условия получаем уравнение

$$2\cdot\frac{x}{100}+3\cdot\frac{y}{100}+4\cdot\frac{z}{100}=9\cdot\frac{32}{100}. \qquad (2)$$

Аналогично рассуждая, получаем еще одно уравнение

$$3\cdot\frac{x}{100}+2\cdot\frac{y}{100}+1\cdot\frac{z}{100}=6\cdot\frac{22}{100}. \qquad (3)$$

Мы видим, что искомые числа x, y и z одновременно удовлетворяют уравнениям (1), (2) и (3). Следовательно, для решения задачи надо решить систему трех уравнений (1), (2) и (3) с тремя неизвестными x, y и z. Перепишем эту систему в виде

$$\begin{cases} y^2 = xz, \\ 2x+3y+4z=288, \\ 3x+2y+z=132 \end{cases} \qquad (4)$$

и решим ее. Из третьего уравнения системы (4) выразим z через x и y:

$$z=132-3x-2y. \qquad (5)$$

Подставив выражение $(132-3x-2y)$ вместо z в первое и второе уравнения системы (4), получим систему двух уравнений с двумя неизвестными x и y:

$$\begin{cases} y^2 = x(132-3x-2y), \\ 2x+3y+4(132-3x-2y)=288. \end{cases}$$

После переноса всех членов каждого уравнения в одну сторону и приведения подобных членов получим систему

$$\begin{cases} 3x^2+y^2+2xy-132x=0, \\ 240-10x-5y=0. \end{cases} \tag{6}$$

Из второго уравнения системы (6) выразим y через x:

$$y=48-2x \tag{7}$$

и подставим выражение $(48-2x)$ вместо y в первое уравнение системы (6). Получим уравнение с одним неизвестным x:

$$3x^2+(48-2x)^2+2x(48-2x)-132x=0,$$

которое после приведения подобных членов запишем в виде

$$3x^2-228x+2304=0.$$

Разделив обе части этого уравнения на 3, получим равносильное ему квадратное уравнение

$$x^2-76x+768=0. \tag{8}$$

Вычислим дискриминант квадратного уравнения (8):

$$D=b^2-4ac=(-76)^2-4\cdot 1\cdot 768=52^2>0.$$

Значит, уравнение (8) имеет два корня:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{76\pm 52}{2}, \text{ т. е. } x_1=64 \text{ и } x_2=12.$$

Подставляя x_1 и x_2 в выражение (7), находим, что

$$y_1=-80 \text{ и } y_2=24.$$

Подставляя пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) в выражение (5), находим, что $z_1=100$ и $z_2=48$.

Итак, система (4) имеет два решения:

$$x_1=64,\ y_1=-80,\ z_1=100$$

и

$$x_2=12,\ y_2=24,\ z_2=48,$$

но по предположению y — процент кислоты во втором растворе, и, значит, y не может быть отрицательным числом. Следовательно, условию задачи удовлетворяет лишь одно решение:

$$x_2=12,\ y_2=24,\ z_2=48.$$

Ответ: первый раствор содержит 12% кислоты, второй — 24%, третий — 48%.

800. а) Разложите число 171 на два множителя, сумма которых была бы равна 28.

б) Разложите число 231 на два множителя, разность которых была бы равна 10.

в) Сумма двух чисел равна 3, а сумма их квадратов равна 65. Найдите эти числа.

г) Даны два числа, их разность и разность их квадратов равны 11. Найдите данные числа.

801. а) Периметр прямоугольника равен 25 м, а площадь — 34 м^2. Определите стороны прямоугольника.

б) Периметр прямоугольника равен 10,6 см, а площадь — 6,72 см^2. Определите стороны прямоугольника.

в) Одна из сторон прямоугольника на 4 дм больше другой, а сумма площадей квадратов, построенных на сторонах прямоугольника, равна 52 дм^2. Определите стороны прямоугольника.

г) Составьте задачу, аналогичную предыдущей задаче, и решите ее.

802. а) Если одну из сторон прямоугольника увеличить на 5 м, а вторую — на 4 м, то площадь прямоугольника увеличится на 113 м^2. Если же первую сторону увеличить на 4 м, а вторую — на 5 м, то площадь увеличится на 116 м^2. Определите длину и ширину прямоугольника.

б) Если длину прямоугольника увеличить на 3 м, а ширину уменьшить на 2 м, то площадь прямоугольника не изменится. Также не изменится площадь прямоугольника, если длину его уменьшить на 2 м, а ширину увеличить на 3 м. Определите длину и ширину прямоугольника.

803. а) Двое рабочих за смену изготовили 72 детали. Если бы первый рабочий увеличил производительность труда на 15%, а второй — на 25%, то за смену они изготовили бы вместе 86 деталей. Сколько деталей изготовил каждый из рабочих за смену?

б) Между двумя велосипедистами расстояние 50 м. Они выезжают одновременно в одном направлении, и через 50 с второй велосипедист догоняет первого. Если бы первый велосипедист выехал на 5 с раньше второго, то тогда второй бы догнал первого лишь через 75 с после начала движения первого. Сколько метров в секунду проезжает второй велосипедист?

8.4. Решение задач при помощи систем рациональных уравнений

З а д а ч а 1. Бригада рабочих начала рыть траншею. Через 3 дня к ней присоединилась вторая бригада, и им понадобилось еще 8 дней совместной работы, чтобы выкопать траншею до конца.

Если бы, наоборот, первые три дня работала только вторая бригада, то до окончания работы обеим бригадам вместе потребовалось бы еще 9 дней. За какое время каждая из бригад в отдельности сделала бы всю работу?

Решение. Пусть первая бригада может сделать всю работу за x дней, а вторая — за y дней. Тогда за один день первая бригада делает $\frac{1}{x}$ часть, а вторая — $\frac{1}{y}$ часть всей работы.

В первом случае первая бригада за 11 дней сделала $11\cdot\frac{1}{x}$ частей всей работы, а вторая бригада за 8 дней сделала $8\cdot\frac{1}{y}$ частей всей работы. Поскольку вместе они выполнили всю работу, то

$$11\cdot\frac{1}{x}+8\cdot\frac{1}{y}=1. \tag{1}$$

Во втором случае первая бригада работала бы 9 дней и сделала $9\cdot\frac{1}{x}$ частей всей работы, а вторая — 12 дней и сделала $12\cdot\frac{1}{y}$ частей всей работы. Вместе они выполнили бы всю работу, т. е.

$$9\cdot\frac{1}{x}+12\cdot\frac{1}{y}=1. \tag{2}$$

Таким образом, искомые числа x и y удовлетворяют уравнениям (1) и (2), т. е. чтобы решить задачу, надо решить систему двух рациональных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} 11\cdot\frac{1}{x}+8\cdot\frac{1}{y}=1, \\ 9\cdot\frac{1}{x}+12\cdot\frac{1}{y}=1. \end{cases} \tag{3}$$

Для решения этой системы уравнений нет необходимости приводить каждое уравнение к виду, где в левой части алгебраическая дробь, а в правой нуль. В данном случае это только затруднит решение. Здесь лучше рассматривать $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$ как новые неизвестные.

Решим систему (3) как линейную систему двух уравнений с двумя неизвестными $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$. Из первого уравнения системы (3) выразим $\frac{1}{y}$ через $\frac{1}{x}$:

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{8}-\frac{11}{8}\cdot\frac{1}{x} \tag{4}$$

и подставим выражение $\left(\frac{1}{8}-\frac{11}{8}\cdot\frac{1}{x}\right)$ вместо $\frac{1}{y}$ во второе уравнение системы (3). Получим уравнение

$$9\cdot\frac{1}{x}+12\cdot\left(\frac{1}{8}-\frac{11}{8}\cdot\frac{1}{x}\right)=1,$$

откуда $\frac{1}{x}=\frac{1}{15}$. Подставляя $\frac{1}{15}$ вместо $\frac{1}{x}$ в выражение (4), находим, что $\frac{1}{y}=\frac{1}{30}$. Теперь ясно, что $x=15$, а $y=30$.

Ответ: Первая бригада сделала бы всю работу за 15 дней, а вторая — за 30 дней.

Замечание. При решении задачи 1 было отмечено, что $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$ можно рассматривать как новые неизвестные. Удобно обозначить их новыми буквами: $u=\frac{1}{x}$ и $v=\frac{1}{y}$ и решить систему относительно u и v, а потом найти x и y, удовлетворяющие системе (3). Можно было с самого начала через u и v обозначить часть работы, выполняемую в день первой и второй бригадой соответственно. В этом случае система была бы проще.

Задача 2. По окружности движутся две точки в одну и ту же сторону. Длина окружности равна 24 м. Первая точка обходит окружность на 9 мин раньше второй и обгоняет другую каждые 4 мин. Определите скорости этих точек.

Решение. Пусть скорость первой точки x м/мин, скорость второй y м/мин. Тогда первая точка проходит всю окружность за $\frac{24}{x}$ мин, а вторая — за $\frac{24}{y}$ мин. Так как первая точка проходит окружность на 9 мин раньше второй, то

$$\frac{24}{y}=\frac{24}{x}+9. \qquad (5)$$

Второе условие задачи означает, что за 4 мин первая точка проходит на 24 м больше второй. Но за 4 мин первая точка проходит $4x$ м, а вторая — $4y$ м, поэтому

$$4x=4y+24. \qquad (6)$$

Следовательно, искомые значения x и y удовлетворяют одновременно уравнениям (5) и (6), т. е. чтобы решить задачу, надо решить систему двух рациональных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases}\frac{24}{y}=\frac{24}{x}+9,\\ 4x=4y+24.\end{cases} \qquad (7)$$

Из второго уравнения системы (7) выразим x через y:

$$x=y+6 \tag{8}$$

и подставим выражение $(y+6)$ вместо x в первое уравнение системы (7). Получим уравнение

$$\frac{24}{y}=\frac{24}{y+6}+9. \tag{9}$$

Перенесем в уравнении (9) все члены в левую часть, затем вычтем алгебраические дроби. Получим уравнение

$$\frac{-9y^2-54y+144}{y(y+6)}=0 \tag{10}$$

равносильное уравнению (9). Решим теперь уравнение

$$-9y^2-54y+144=0$$

или равносильное ему уравнение

$$y^2+6y-16=0. \tag{11}$$

Уравнение (11) имеет два корня: $y_1=2$ и $y_2=-8$. Так как числа y_1 и y_2 не обращают в нуль знаменатель левой части уравнения (10), то они являются его корнями. Подставив y_1 и y_2 в равенство (8), получим $x_2=-2$ и $x_1=8$.

Таким образом, система (7) имеет два решения:

$$x_1=8,\ y_1=2 \text{ и } x_2=-2,\ y_2=-8.$$

Скорости x и y — положительные числа, поэтому второе решение системы не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: скорость первой точки 8 м/мин, второй — 2 м/мин.

Задача 3. Каждому из трех рабочих для выполнения некоторой работы требуется определенное время, причем третий рабочий выполняет ее на 1 ч быстрее первого. Работая вместе, они выполняют работу за 1 ч. Если же первый рабочий проработает 1 ч и прекратит работу, а затем второй рабочий проработает 4 ч, то они вместе выполнят всю работу. За сколько времени может выполнить всю работу каждый рабочий?

Решение. Пусть первый рабочий может выполнить всю работу за x ч, второй — за y ч, третий — за z ч. Тогда за 1 ч первый выполнит $\frac{1}{x}$, второй — $\frac{1}{y}$ и третий — $\frac{1}{z}$ часть всей работы. Работая вместе, они выполняют за один час $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ часть всей работы. Но по условию задачи за 1 ч они выполняют всю работу, следовательно,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1. \tag{12}$$

Если первый рабочий проработает 1 ч, а затем второй — 4 ч, то они вместе сделают $\left(\frac{1}{x}+4\cdot\frac{1}{y}\right)$ часть всей работы. На самом же деле по условию задачи они сделают всю работу, следовательно,

$$\frac{1}{x}+4\cdot\frac{1}{y}=1. \tag{13}$$

Так как третий рабочий выполняет всю работу на 1 ч быстрее первого, то

$$x=z+1. \tag{14}$$

Таким образом, искомые числа x, y, z одновременно удовлетворяют уравнениям (12), (13) и (14). Следовательно, для решения задачи надо решить систему трех рациональных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1, \\ \frac{1}{x}+4\cdot\frac{1}{y}=1, \\ x=z+1. \end{cases} \tag{15}$$

Из третьего уравнения системы (15) выражаем z через x:

$$z=x-1. \tag{16}$$

Из второго уравнения системы (15) выражаем $\frac{1}{y}$ через x:

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right). \tag{17}$$

Подставив $(x-1)$ вместо z и $\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{x}\right)$ вместо $\frac{1}{y}$ в первое уравнение системы (15), получим рациональное уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x-1}=1. \tag{18}$$

Перенеся все его члены в левую часть и сложив в ней алгебраические дроби, получим уравнение

$$\frac{3x^2-10x+3}{4x(x-1)}=0, \tag{19}$$

равносильное уравнению (18). Теперь решим уравнение

$$3x^2-10x+3=0. \tag{20}$$

Оно имеет два корня: $x_1=3$, $x_2=\frac{1}{3}$.

Так как x_1 и x_2 не обращают в нуль знаменатель левой части уравнения (19), то x_1 и x_2 есть корни уравнения (19). Подставив

x_1 и x_2 в (16) и (17), найдем: $y_1=6$, $y_2=-2$, $z_1=2$, $z_2=-\frac{2}{3}$. Следовательно, система (15) имеет два решения: $x_1=3$, $y_1=6$, $z_1=2$ и $x_2=\frac{1}{3}$, $y_2=-2$, $z_2=-\frac{2}{3}$.

Поскольку через x, y и z мы обозначили количество часов, необходимое для выполнения работы, то x, y и z не могут быть отрицательными числами. Поэтому условию задачи удовлетворяет лишь решение

$$x_1=3,\ y_1=6,\ z_1=2.$$

Ответ: первый рабочий может выполнить всю работу за 3 ч, второй — за 6 ч, третий — за 2 ч.

804. а) Если к квадрату первого числа прибавить удвоенное второе число, то получится (-7), а если из первого числа вычесть второе, то получится 11. Найдите эти числа.

б) Найдите два числа, если отношение суммы этих чисел к их разности равно 8:1 и разность квадратов этих чисел равна 128. Сколько решений имеет задача?

805. а) Найдите двузначное число, если цифра десятков на 2 больше цифры единиц, а произведение числа на сумму его цифр равно 640.

б) Найдите двузначное число, если цифра единиц на 2 больше цифры десятков, а произведение числа на сумму его цифр равно 144.

806. а) Если разделить двузначное число на произведение его цифр, то получится в частном 2 и в остатке 5. Если переставить цифры этого числа и полученное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 7 и в остатке 3. Найдите это число.

б) Сумма цифр двузначного числа равна 9. Сумма квадратов этих же цифр равна 41. Если от искомого числа отнять 9, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число.

в) В двузначном числе сумма квадратов его цифр равна 25, а произведение их равно 12. Найдите это число.

г) Составьте задачи, аналогичные задачам а) — в).

807. а) Двое рабочих, работая вместе, выполняют некоторую работу за 8 ч. Первый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу на 12 ч быстрее, чем второй рабочий. За сколько часов каждый из них может выполнить отдельно эту работу?

б) Двое рабочих, работая вместе, выполнили всю работу за 5 дней. Если бы первый рабочий работал в два раза быстрее, а второй — в два раза медленнее, то всю работу они выполнили бы за 4 дня. За сколько дней выполнил бы эту работу первый рабочий?

808. а) Два каменщика, работая вместе, могут выполнить работу за 4,8 дня. Второй каменщик, работая отдельно, мог бы выполнить эту работу на 4 дня быстрее, чем первый. За сколько дней каждый каменщик, работая отдельно, мог бы выполнить эту работу?

б) На уборке урожая два комбайна работали вместе 3 дня. После этого, чтобы закончить работу, первому комбайну потребовалось еще 4,5 дня. За сколько дней каждый комбайн в отдельности может убрать весь урожай, если первый, работая отдельно, мог бы провести уборку на 2 дня скорее, чем один второй?

809. а) На обработку одной детали первый рабочий затрачивает на 6 мин меньше, чем второй. Сколько деталей обработает каждый рабочий за 5 ч, если первый обработает за это время на 25 деталей больше, чем второй?

б) За два дня совместной работы двух тракторов различной мощности была вспахана одна треть поля. За сколько дней можно было бы вспахать все поле каждым трактором отдельно, если первым трактором можно вспахать все поле на 5 дней скорее, чем вторым?

810. а) Два трактора различной мощности могут совместно вспахать поле за 9 ч. Если бы первый трактор работал один 1,2 ч, а затем второй — 2 ч, то было бы вспахано только 20% поля. Сколько часов требуется каждому трактору на вспашку всего поля?

б) На выполнение работы двум штукатурам требуется 12 ч. Если бы сначала первый сделал половину работы, а затем другой — оставшуюся часть, то вся работа была бы выполнена за 25 ч. За какое время мог бы выполнить всю работу каждый штукатур в отдельности?

811. а) Машинистка рассчитала, что если она будет печатать ежедневно на 2 листа больше установленной нормы, то окончит работу раньше намеченного срока на 3 дня. Если же она будет печатать в день на 4 листа больше установленной нормы, то окончит работу на 5 дней раньше срока. Сколько листов требовалось напечатать машинистке и в какой срок?

б) Два маляра могут окрасить стены цеха за 60 ч. Найдите время, которое потребуется каждому из них для выполнения этой же работы отдельно, если известно, что одному из них потребуется на 22 ч больше, чем другому.

8.5*. Решение уравнений в целых числах

Пусть задано уравнение степени $n\,(n>1)$ с двумя неизвестными, например:

$$2x+3y=6, \qquad xy-2y+x=3, \qquad x^2-4xy+4y^2=1.$$

Если поставлена задача найти целые числа x_0 и y_0 такие, что пара $(x_0;\ y_0)$ является решением данного уравнения, то такое уравнение называют *диофантовым уравнением* и говорят, что уравнение требуется решить в целых числах. Так его называют в честь греческого математика Диофанта (III в. до н. э.), который решал уравнения в целых числах. Иногда по смыслу задачи диофантово уравнение решают в натуральных числах.

Рассмотрим несколько примеров решения диофантовых уравнений.

Пример 1. Решим в целых числах уравнение

$$2x+3y=6. \quad (1)$$

Выразим y через x из уравнения (1):

$$y=2-\frac{2}{3}x. \quad (2)$$

Из равенства (2) видно, что y будет целым только тогда, когда целое число x делится на 3, т. е. когда $x=3x_1$, где x_1 — некоторое целое число. Тогда

$$y=2-2x_1.$$

Таким образом, решениями уравнения (1) являются все пары чисел $(3x_1;\ 2-2x_1)$, где x_1 — любое целое число.

Приведем некоторые частные решения этого уравнения.

При $x_1=0$ имеем $x=3x_1=0$ и $y=2-2x_1=2$; решением уравнения (1) является пара (0; 2).

При $x_1=1$ имеем $x=3x_1=3$ и $y=2-2x_1=0$; решением уравнения (1) является пара (3; 0) и т. д.

Если в системе координат xOy построить прямую $2x+3y=6$ (рис. 92), то целочисленным решениям уравнения (1) будут соответствовать точки этой прямой с целочисленными координатами.

Заметим, что в учебнике для VII класса рассмотрен другой, более общий прием решения линейных диофантовых уравнений.

Решению уравнений в целых числах часто помогает метод разложения многочленов на множители.

Пример 2. Решим в целых числах уравнение

$$xy-2y+x=3. \quad (3)$$

Преобразуем уравнение (3):

$$xy+x-2y-2=1,$$
$$x(y+1)-2(y+1)=1,$$
$$(y+1)(x-2)=1.$$

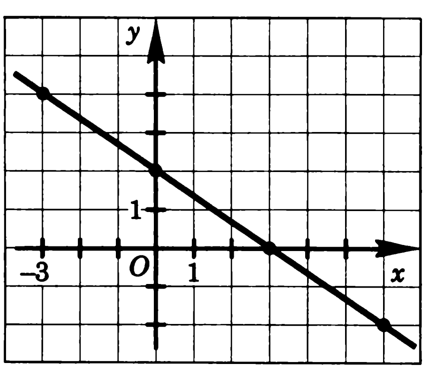


Рис. 92

Так как x и y — целые числа, то произведение целых чисел $y+1$ и $x-2$ равно 1 лишь в двух случаях:

$$\begin{cases} y+1=1, \\ x-2=1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y+1=-1, \\ x-2=-1. \end{cases}$$

Первая система имеет решение (3; 0), вторая — (1; —2). Пары (3; 0) и (1; —2) являются целочисленными решениями уравнения (3), и других решений уравнение (3) не имеет.

С давних пор математики составляли задачи, приводящие к уравнениям, решения которых по смыслу задачи должны быть натуральными, таким образом, целыми.

Пример 3. Задача Леонардо Пизанского (Фибоначчи). Некто купил 30 птиц за 30 монет, из числа этих птиц за каждых трех воробьев заплачена 1 монета, за каждые две горлицы — также 1 монета и, наконец, за каждого голубя — по 2 монеты. Сколько было птиц каждой породы?

Пусть купили x воробьев, y горлиц, тогда голубей купили $30-x-y$. Здесь x и y — натуральные числа. Составим уравнение

$$\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y+2(30-x-y)=30. \qquad (4)$$

Умножим правую и левую части этого уравнения на 6, получим равносильное ему уравнение

$$2x+3y+12(30-x-y)=180,$$

которое после упрощения запишем в виде

$$10x+9y=180. \qquad (5)$$

Из уравнения (5) следует, что y делится на 10, то есть $y=10y_1$, где y_1 — натуральное число. Подставим $10y_1$ вместо y в уравнение (5) и упростим его:

$$x+9y_1=18. \qquad (6)$$

Из уравнения (6) следует, что x делится на 9, т. е. $x=9x_1$, где x_1 — натуральное число. Подставим $9x_1$ вместо x в уравнение (6) и упростим его:

$$x_1+y_1=2.$$

Это уравнение имеет единственное решение в натуральных числах: $x_1=1$; $y_1=1$, по которому, пользуясь формулами $x=9x_1$ и $y=10y_1$, найдем натуральные решения уравнений (5) и (4): $x=9$, $y=10$.

Итак, на 30 монет купили 9 воробьев, 10 горлиц и $30-10-9=11$ голубей.

Пример 4. Задача Л. Эйлера. Некий чиновник купил лошадей и быков за 1770 талеров. За каждую лошадь он уплатил по 31 талеру, а за каждого быка — по 21 талеру. Сколько лошадей и быков купил чиновник?

Здесь неизвестно общее число купленных животных, поэтому не удастся составить уравнение с одним неизвестным или систему уравнений с двумя неизвестными. Зато можно составить уравнение с двумя неизвестными.

Пусть чиновник купил x лошадей и y быков. Тогда

$$31x+21y=1770.$$

По смыслу задачи x и y натуральные числа. Так как 21 и 1770 делятся на 3, то $31x$ делится на 3, т. е. x делится на 3: $x=3x_1$, где x_1 — натуральное число. Тогда

$$31x_1+7y=590,$$

откуда $x_1=\frac{590-7y}{31}$.

Преобразуем полученное выражение:

$$x_1=\frac{590-7y}{31}=19+\frac{1-7y}{31}=19-\frac{7y-1}{31}.$$

Очевидно, что x_1 будет целым, если $7y-1$ делится на 31. Наименьшее натуральное y, при котором это произойдет, равно 9. При этом $x_1=17$, $x=51$. Первое решение уравнения найдено: (51; 9). Чтобы не заниматься долгим перебором значений y, заметим, что следующие целые x_1 будут получаться от увеличения $y=9$ на число, кратное 31. В самом деле, увеличим $y=9$ на k:

$$x_1=19-\frac{7\cdot(9+k)-1}{31}=19-\frac{62+7k}{31}=17-\frac{7k}{31}.$$

Теперь видно, что x_1 будет целым, если $7k$ делится на 31, т. е. если k делится на 31.

При $y=9+31=40$ имеем $x_1=10$, $x=30$,

при $y=40+31=71$ имеем $x_1=3$, $x=9$.

При следующих значениях y значения x_1 отрицательны. Таким образом, уравнение имеет 3 решения в натуральных числах: (51; 9), (30; 40), (9; 71).

812. Решите уравнение в целых числах:

а) $3x+5y=20$; б) $2x-5y=25$; в) $2x-3y=5$;

г) $7x+5y=2$; д) $2x+7y=28$; е) $3x+5y=30$.

813°. Объясните, почему уравнение:

а) $x+y=5{,}5$; б) $3x-2y=1{,}1$

не имеет решений в целых числах.

814. Решите уравнение в целых числах:

а) $xy+5x-3y=18$; б) $xy-6x-y+1=0$.

815. а) Докажите, что уравнение $x^2-6x+y^2+4y+13=0$ имеет единственное целочисленное решение.

б) Докажите, что уравнение $x^2-6x+y^2+4y+14=0$ не имеет решений.

816. Решите уравнение в целых числах:

а) $x(x+y)=3$; б) $x^2+3xy=2$;

в) $x^2+y^2-4x-6y+12=0$; г) $x^2-4y^2=5$;

д) $x^2-4xy+3y^2=-1$;

е) $x^2+y^2-10x+2y+22=0$.

817*. Купили 40 птиц за 40 монет. За каждых трех воробьев платили 1 монету, за каждых двух горлиц платили 1 монету, а за каждого голубя 2 монеты. Сколько было куплено птиц каждой породы?

§ 9. ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

В этом параграфе будет рассмотрен прием, который обычно называют графическим способом решения систем уравнений. Этот прием состоит в построении графиков соответствующих функций, в выяснении, пересекаются ли они, т. е. имеет ли система уравнений решения и сколько их. Вообще говоря, этим способом не всегда можно найти точные решения, но в отдельных случаях удается их найти.

Поэтому, чтобы убедиться, что решения найдены точно, надо их подставить в каждое уравнение системы и убедиться, что получатся верные равенства.

В этом параграфе примеры подобраны так, чтобы решения систем или уравнений были почти очевидны из рисунков.

9.1. Графический способ решения системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными

Пример 1. Решим графическим способом систему уравнений

$$\begin{cases} 3x-y+2=0, \\ x+2y+3=0. \end{cases} \qquad (1)$$

Выразим y через x в каждом из этих уравнений, получим систему

$$\begin{cases} y=3x+2, \\ y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}, \end{cases} \qquad (2)$$

равносильную системе (1).

Введем в плоскости прямоугольную систему координат xOy. Уравнение $y=3x+2$ есть уравнение прямой, проходящей через точки $A_1(1;\ 5)$ и $B_1(0;\ 2)$, а уравнение $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ есть уравнение прямой, проходящей через точки $A_2(1;\ -2)$ и $B_2\left(0;\ -\frac{3}{2}\right)$.

Построим эти прямые в системе координат xOy (рис. 93).

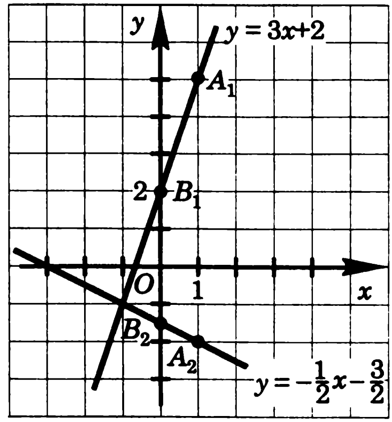


Рис. 93

Как видно из рисунка 93, прямые пересекаются в точке (—1; —1). Ее координаты $x = -1$, $y = -1$ и являются единственным решением системы (2), но тогда и равносильной ей системы (1). Подставив найденные значения x и y в каждое уравнение системы (1), убедимся, что решение системы найдено точно.

Отметим, что по виду уравнений (2) заранее можно сказать, что рассматриваемые прямые пересекаются в одной точке. Ведь угловые коэффициенты этих прямых разные $\left(3 \neq -\frac{1}{2}\right)$, следовательно, прямые не параллельны.

Пример 2. Решим графическим способом систему уравнений

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ x - y + 2 = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Выразим y через x в каждом из этих уравнений, получим равносильную ей систему уравнений

$$\begin{cases} y = x + 1, \\ y = x + 2. \end{cases} \qquad (4)$$

Уравнения системы (4) есть уравнения параллельных прямых, так как они имеют равные угловые коэффициенты.

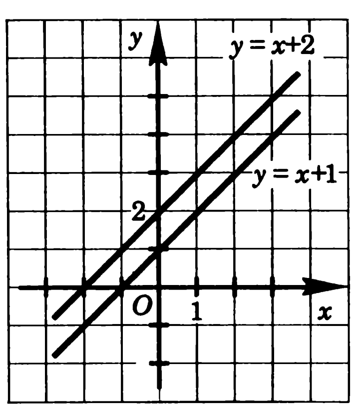


Рис. 94

Эти прямые не совпадают, потому что они пересекают ось y в разных точках: первая — в точке (0; 1), а вторая — в точке (0; 2) (рис. 94).

Таким образом, эти прямые не пересекаются, поэтому система (4), а тогда и система (3) не имеют решений.

Пример 3. Решим графическим способом систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 2y - 1 = 0, \\ -4x - 4y + 2 = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

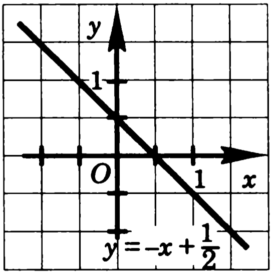


Рис. 95

Выразим y через x в каждом из этих уравнений, получим равносильную ей систему уравнений

$$\begin{cases} y = -x + 0{,}5, \\ y = -x + 0{,}5. \end{cases} \tag{6}$$

Уравнения этой системы одинаковы и, следовательно, определяют одну и ту же прямую $y = -x + 0{,}5$ (рис. 95).

Это показывает, что все решения системы (5) образуют совокупность пар координат $(x; y)$ точек прямой $y = -x + 0{,}5$. Система (5) имеет бесконечно много решений: $(x; -x + 0{,}5)$, где x — любое число.

Таким образом, для решения системы линейных уравнений графическим способом надо:

1) разрешить каждое уравнение относительно y;

2) построить на координатной плоскости прямые, соответствующие полученным уравнениям.

Если прямые пересекаются, то координаты точки их пересечения и будут решением системы.

Если прямые окажутся параллельными, то система не имеет решений.

Если прямые совпадут, то система имеет бесконечно много решений — множество пар координат точек этой прямой.

Замечание. Случаи, когда хотя бы в одном из уравнений системы не удается выразить y через x, рассмотрены в следующем пункте.

Задача. Поезд, выйдя в момент $t_0 = 0$ со станции O, идет со скоростью 100 км/ч. Навстречу ему со скоростью 80 км/ч идет другой поезд, вышедший со станции A в тот же момент $t_0 = 0$. Расстояние от O до A равно 200 км. Построить графики движения этих поездов и по ним определить, когда и на каком расстоянии от станции O поезда встретятся.

Решение. Зададим прямоугольную систему координат tOs (рис. 96). Будем считать, что 1 см на оси t соответствует 1 ч, а 1 см на оси s соответствует 100 км.

Отметим на оси s точку A, имеющую координату $s = 200$. Удобно считать, что первый поезд движется в положительном направлении оси s от точки O, а второй — в отрицательном направлении оси s от точки A. Тогда закон движения первого поезда выражается функцией

$$s = 100t, \tag{7}$$

а закон движения второго поезда выражается функцией

$$s = -80t + 200. \tag{8}$$

Скорость есть коэффициент при t. Для первого поезда она положительная, а для второго — отрицательная. Кроме того, при $t=0$ первый поезд имеет на оси s координату $s=0$, а второй — координату $s=200$, что согласуется с уравнениями (7) и (8).

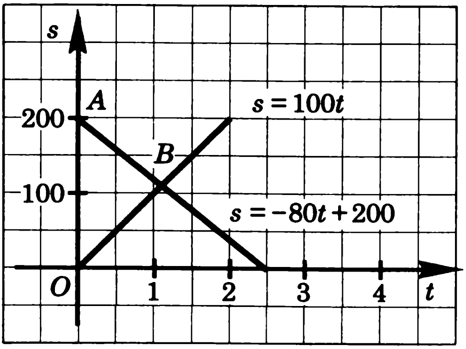


Рис. 96

На рисунке 96 изображены прямые — графики этих функций. Встреча поездов произойдет в такой момент t, при котором ординаты точек графиков равны одному и тому же числу s. Но тогда эти числа t и s должны удовлетворять одновременно обоим уравнениям (7) и (8), т. е. быть координатами точки B пересечения прямых.

Из рисунка видно, что координаты точки B приблизительно равны:

$$t \approx 1{,}1, \quad s \approx 110.$$

Для сравнения решим систему уравнений

$$\begin{cases} s = 100t, \\ s = -80t + 200. \end{cases}$$

Имеем $t = \frac{10}{9}$ ч $= 66{,}66...$ мин ≈ 67 мин,

$$s = 100\frac{10}{9} \text{ км} = 111{,}11... \text{ км} \approx 111 \text{ км}.$$

Ответ: поезда встретятся приблизительно через 67 мин на расстоянии приблизительно 111 км от станции O.

818⁰. Как решать графическим способом систему линейных уравнений?

819. Определите на глаз координаты точек пересечения прямых, указанных на рисунке 97.

820. Определите координаты точек пересечения с осями координат графика функции:

а) $y=2x-7$; б) $y=-x-2$;

в) $y=\frac{1}{7}-2x$; г) $y=-\frac{1}{3}-0{,}2x$.

821. Определите координаты точек пересечения графиков функций:

а) $y=x+4$ и $y=3x$;

б) $y=-2$ и $y=7x+1$;

в) $y=2-3x$ и $y=5x-4$.

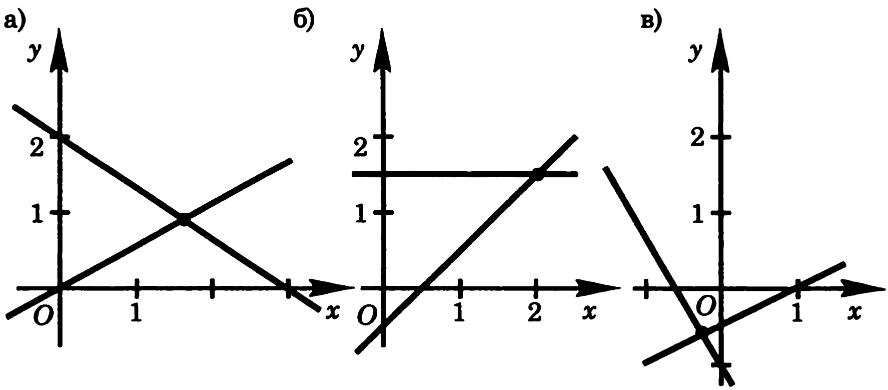


Рис. 97

822. Решите графическим способом систему уравнений:

а) $\begin{cases} y=5-x, \\ y=x-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y=x-2, \\ y=4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y=2x-4, \\ y=2-x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+2y=1, \\ y+x=1; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x+2y-3=0, \\ 2x+4y+2=0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x+2y=1, \\ x-y=4; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x-y+1=0, \\ 2x+y-1=0; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 7x-y-3=0, \\ 14x-2y+5=0; \end{cases}$

и) $\begin{cases} 3x+y-1=0, \\ 6x+2y-2=0. \end{cases}$

9.2. Графический способ исследования системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными

Рассмотрим систему уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0, \end{cases} \qquad (1)$$

где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 — данные, отличные от нуля числа.

Выразив y через x в каждом из уравнений системы, получим равносильную ей систему

$$\begin{cases} y=-\frac{a_1}{b_1}x-\frac{c_1}{b_1}, \\ y=-\frac{a_2}{b_2}x-\frac{c_2}{b_2}. \end{cases} \qquad (2)$$

В декартовой системе координат xOy первое уравнение системы (2) есть уравнение прямой с угловым коэффициентом $-\frac{a_1}{b_1}$, а второе уравнение системы (2) есть уравнение прямой с угловым коэффициентом $-\frac{a_2}{b_2}$.

Возможны три случая.

1-й случай. Коэффициенты при x и y уравнений системы (1) не пропорциональны, т. е.

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}.$$

Тогда угловые коэффициенты прямых различны:

$$-\frac{a_1}{b_1} \neq -\frac{a_2}{b_2},$$

и прямые пересекаются в единственной точке. Следовательно, система (1) имеет единственное решение.

2-й случай. Коэффициенты при x и y уравнений системы (1) пропорциональны, но они не пропорциональны свободным членам, т. е.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}.$$

Тогда угловые коэффициенты прямых равны между собой: $-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}$, но $-\frac{c_1}{b_1} \neq -\frac{c_2}{b_2}$. Поэтому прямые параллельны и не совпадают. Следовательно, система (1) не имеет решений.

3-й случай. Числа a_1, b_1, c_1 соответственно пропорциональны числам a_2, b_2, c_2, т. е. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$. Тогда $-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}$, $-\frac{c_1}{b_1} = -\frac{c_2}{b_2}$, и, следовательно, оба уравнения системы (2) определяют одну и ту же прямую.

Координаты точек этой прямой и являются всевозможными решениями системы (1).

З а м е ч а н и е 1. Будем считать, что числа a_1, b_1, a_2, b_2 отличны от нуля. При $c_1 = c_2 = 0$, если числа a_1, b_1 пропорциональны числам a_2, b_2, прямые, о которых идет речь, совпадают. Если же эти числа не пропорциональны, то прямые пересекаются в точке $(0;\ 0)$.

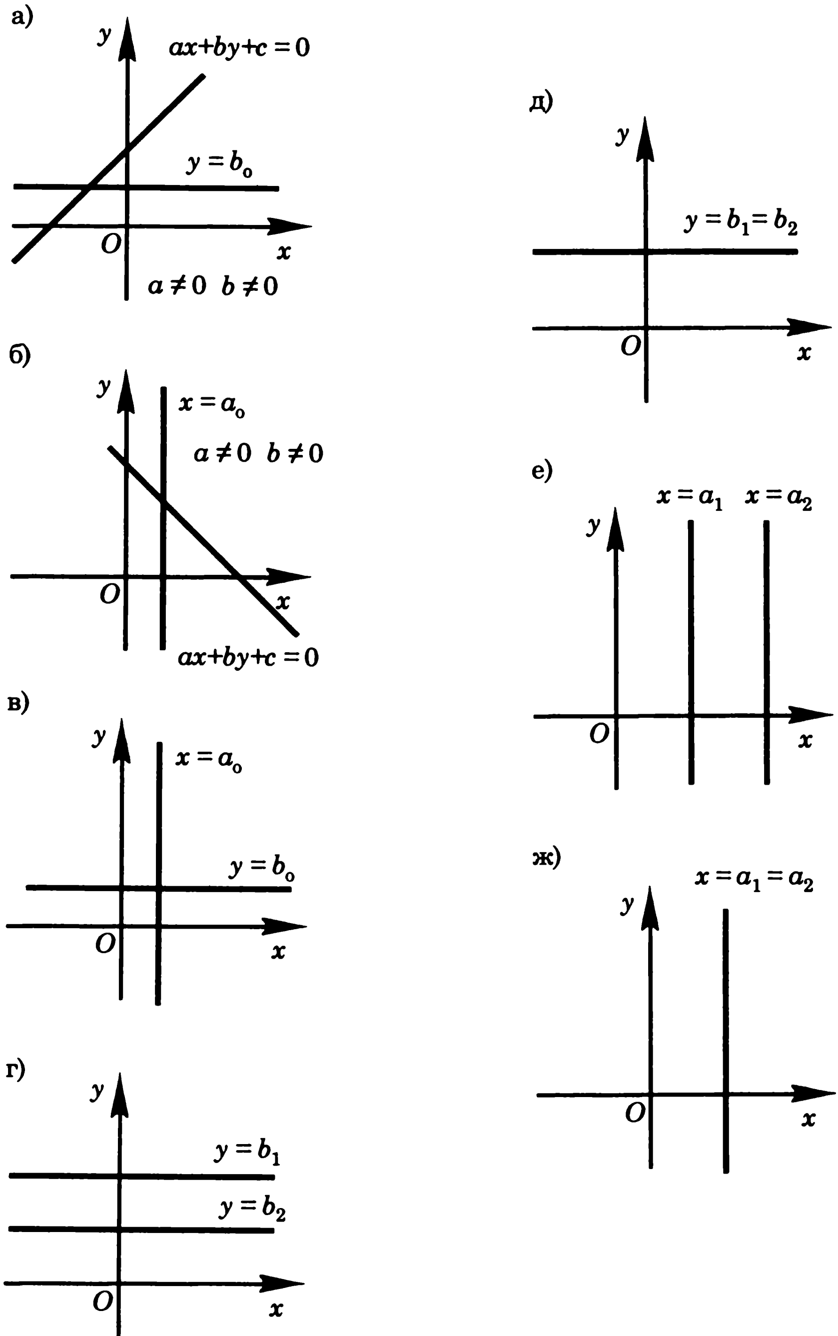

а)
$ax+by+c=0$
$y=b_0$
$a \neq 0 \quad b \neq 0$
б)
$x=a_0$
$a \neq 0 \quad b \neq 0$
$ax+by+c=0$
в)
$x=a_0$
$y=b_0$
г)
$y=b_1$
$y=b_2$
д)
$y=b_1=b_2$
е)
$x=a_1 \quad x=a_2$
ж)
$x=a_1=a_2$

Рис. 98

При $c_1=0$, $c_2\neq 0$, если числа a_1, b_1 пропорциональны числам a_2, b_2, то прямые различны и параллельны; если же числа a_1, b_1 не пропорциональны числам a_2, b_2, то прямые пересекаются.

Замечание 2. Если некоторые из коэффициентов системы уравнений первой степени равны нулю, то система (1) сводится к одной из следующих систем:

1) $\begin{cases} ax+by+c=0, \\ y=b_0 \end{cases}$ $a\neq 0$ и $b\neq 0$ (рис. 98, *а*);

2) $\begin{cases} ax+by+c=0, \\ x=a_0 \end{cases}$ $a\neq 0$ и $b\neq 0$ (рис. 98, *б*);

3) $\begin{cases} x=a_0, \\ y=b_0 \end{cases}$ (рис. 98, *в*);

4) $\begin{cases} y=b_1, \\ y=b_2 \end{cases}$ (рис. 98, *г, д*); 5) $\begin{cases} x=a_1, \\ x=a_2 \end{cases}$ (рис. 98, *е, ж*).

В 1, 2 и 3-м случаях прямые, соответствующие уравнениям системы, пересекаются в одной точке, т. е. система имеет единственное решение.

В 4-м ($b_1\neq b_2$) и 5-м ($a_1\neq a_2$) случаях указанные прямые параллельны и система не имеет решений.

Наконец, в 4-м ($b_1=b_2$) и 5-м ($a_1=a_2$) случаях указанные прямые сливаются в одну прямую и система имеет бесконечно много решений, соответствующих точкам этой прямой.

Замечание 3. Отметим, что уравнению $x=a$ удовлетворяют все точки координатной плоскости, имеющие абсциссу a и ординату, равную любому числу. Все такие точки лежат на прямой, параллельной оси Oy и проходящей через точку $A\,(a;\ 0)$.

823°. Какому условию должны удовлетворять числа k_1, k_2, b_1 и b_2, чтобы прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$:

а) пересекались; б) были параллельны; в) совпадали?

824. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} y=k_1x+b_1, \\ y=k_2x+b_2, \end{cases}$$

если:

а) $k_1=k_2$, $b_1\neq b_2$; б) $k_1=k_2$, $b_1=b_2$; в) $k_1\neq k_2$?

825. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0, \end{cases}$$

где a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 — числа, отличные от нуля, если:

а) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$; б) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$; в) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$?

826. Какому условию должны удовлетворять отличные от нуля числа a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, чтобы система уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0: \end{cases}$$

а) имела единственное решение,
б) имела бесконечно много решений,
в) не имела решений?

827. Пересекает ли оси координат прямая $ax + by + c = 0$, если числа a и b отличны от нуля?

828. Какое уравнение имеет прямая, параллельная:
а) оси x; б) оси y?

829. При каких значениях a, b и c прямая $ax + by + c = 0$:
а) пересекает оси координат;
б) параллельна оси x;
в) параллельна оси y?

830. Определите, сколько решений имеет система уравнений, и дайте геометрическое объяснение выводу.

а) $\begin{cases} x + y = 2, \\ x + y = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x - 3y = 4, \\ y = 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x - 3y = 5, \\ 4x - 0{,}3y = 5; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x - 4y = 6, \\ x - 2y = 3; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x + 4y = 1, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 = 0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 0{,}3x + 1\frac{1}{7}y = 5, \\ -0{,}15x - \frac{4}{7}y = -2\frac{1}{2}; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 3\frac{1}{3}x - 2{,}2y = 0, \\ 10x - 6{,}6y = 1. \end{cases}$

831. Имеет ли система уравнений решение? Проиллюстрируйте ответ с помощью графиков.

а) $\begin{cases} x - y = 2, \\ -x + y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x - 4y = 1, \\ 20x - 16y = -4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ \frac{1}{2}x + y = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 0{,}5x - 0{,}13y = 2, \\ \frac{x}{6} - \frac{13y}{30} = \frac{2}{7}. \end{cases}$

832. Определите k, если прямая $y=kx$ проходит через точку, координаты которой являются решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} x+2y=8, \\ x-y=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+y=4, \\ x+y=3. \end{cases}$

833. Докажите, что система уравнений имеет бесконечное множество решений:

а) $\begin{cases} x+y-3=0, \\ 2x+2y=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y-2=0, \\ 0{,}5x+0{,}5y=1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 0{,}3x+0{,}2y+0{,}9=0, \\ -3x-2y=9; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{y}{3}=3, \\ \frac{2x}{3}-6=-\frac{2y}{3}. \end{cases}$

834. При каких a и b прямые $x+y=-b$ и $x-ay=2$:
а) пересекаются в точке (1; 4);
б) параллельны и не совпадают;
в) совпадают?

835. Составьте систему уравнений, решением которой является пара чисел:

а) (3; —1); б) (1; 3);
в) (5; —2); г) (0; 3).

836*. Решите графическим способом систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x+y=4, \\ x-y+1=0, \\ y=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y-2=0, \\ -2x+y=5, \\ 2x+3y=7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-y=4, \\ 2x+y=5, \\ x+y=2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y=4, \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{3}-\frac{2}{3}=0, \\ 2x+2y-4=0. \end{cases}$

9.3. Решение систем уравнений первой и второй степени графическим способом

Системы уравнений первой и второй степени, как и системы уравнений первой степени, можно решать графически.

Пример 1. Решим графическим способом систему уравнений

$$\begin{cases} x-y-3=0, \\ x^2-2x=y+3. \end{cases} \qquad (1)$$

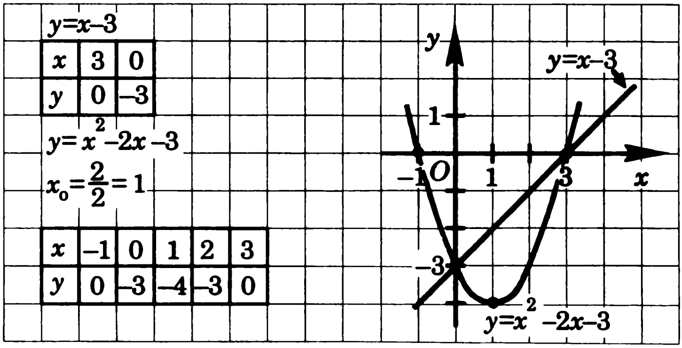


Рис. 99

Разрешив каждое уравнение системы (1) относительно y, получим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x - 3, \\ y = x^2 - 2x - 3. \end{cases}$$

В одной системе координат построим прямую $y = x - 3$ и параболу $y = x^2 - 2x - 3$ (рис. 99). Для этого составим таблицы значений функций (x_0 — абсцисса вершины параболы).

Как видно из рисунка 99, прямая и парабола пересекаются в двух точках (0; —3) и (3; 0). Пары чисел (0; —3) и (3; 0) обращают каждое уравнение системы в верное равенство, следовательно, решениями системы являются пары чисел (3; 0) и (0; —3). Других решений система не имеет.

Пример 2. Решим графическим способом систему уравнений

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 8x + 7, \\ y = -x^2 - 2x + 4. \end{cases} \qquad (2)$$

В одной системе координат построим параболы $y = 2x^2 + 8x + 7$ и $y = -x^2 - 2x + 4$ (рис. 100). Для этого составим таблицы значений функций.

Параболы пересекаются в двух точках, поэтому система (2) имеет два решения. Легко убедиться подстановкой: первое решение (—3; 1) найдено точно, а второе (—0,3; 4,5) приближенно.

Замечание. Если потребуется найти второе решение точно, то нужно будет решить уравнение

$$2x^2 + 8x + 7 = -x^2 - 2x + 4,$$

которое имеет корни $x_1 = -3$, $x_2 = -\frac{1}{3}$, и найти значение y, соответствующие найденным корням $y_1 = 1$, $y_2 = 4\frac{5}{9}$.

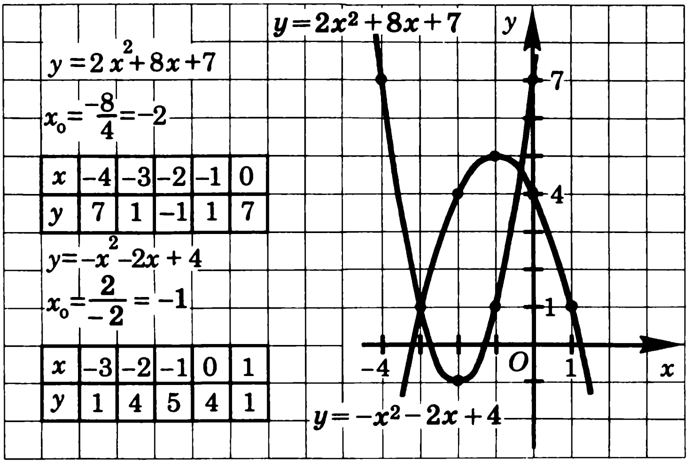


Рис. 100

Теперь второе решение найдено точно: $\left(-\frac{1}{3};\ 4\frac{5}{9}\right)$.

Пример 3. Решим графическим способом систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ y=x^2. \end{cases} \qquad (3)$$

Первое уравнение системы (3) есть уравнение окружности радиуса $\sqrt{2}$ с центром O (0; 0). Она проходит через точку (1; 1). Второе уравнение системы (3) есть уравнение параболы. Окружность и парабола пересекаются в двух точках (1; 1) и (—1; 1) (рис. 101). Система (3) имеет два решения: (1; 1) и (—1; 1). Как легко убедиться подстановкой, оба решения найдены точно.

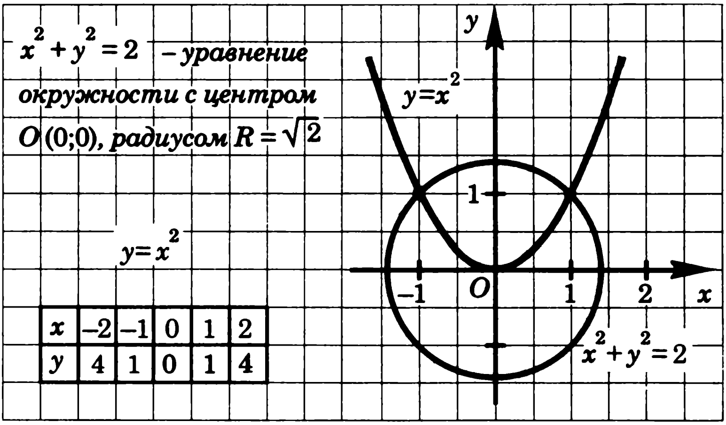


Рис. 101

837°. а) Как решить систему уравнений графическим способом?
б) Всегда ли графический способ решения систем уравнений дает точные решения?
в) Как проверить, точное или приближенное решение получено?

838. Решите графическим способом систему уравнений:

а) $\begin{cases} y=3, \\ y+6=x^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=2, \\ x^2=3+y; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y=x^2-2x, \\ y=2x-3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y=x^2-2x+2, \\ y=x+2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} y=x^2-2x+1, \\ y=-x^2+4x+1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y=-x^2+4x+1, \\ y=x^2+1. \end{cases}$

839. Сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} y=x^2, \\ (x+2)^2+(y+2)^2=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x-2)^2+(y-3)^2=9, \\ y-x=4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y=\frac{1}{x}, \\ y=0{,}5x+0{,}5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y=\frac{1}{x}, \\ y=-2x+2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} y=x^2-6x+10, \\ x^2-4x+y^2-2y=20; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y=\frac{8}{x}, \\ y+1=x^2? \end{cases}$

9.4. Примеры решения уравнений графическим способом

Пример 1. Решим графическим способом уравнение

$$x^2=-2x+3. \qquad (1)$$

Чтобы найти значения x, при которых выполняется равенство (1), построим графики двух функций $y=x^2$ и $y=-2x+3$ в одной системе координат. Для этого составим таблицы их значений (см. рис. 102).

Парабола $y=x^2$ и прямая $y=-2x+3$, изображенные на рисунке 102, пересекаются в точках (1; 1) и (—3; 9). При $x=1$ и $x=-3$ эти функции имеют одинаковые значения, т. е. выполняется равенство

$$x^2=-2x+3.$$

Это означает, что числа 1 и —3 являются корнями уравнения (1).

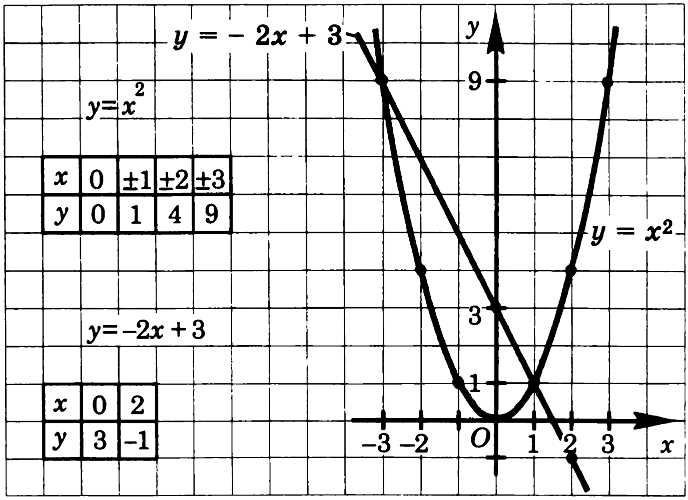


Рис. 102

Графический способ решения уравнений дает лишь приближенные корни. Чтобы доказать, что какой-то из корней найден точно, надо подставить его в решаемое уравнение и проверить, получится ли верное равенство.

В примере 1 корни найдены точно, так как

$$1^2=-2\cdot 1+3,\ (-3)^2=-2(-3)+3.$$

Уравнение (1) можно было бы решить без графиков, преобразовав его к виду

$$x^2+2x-3=0.$$

Пример 2. Решим графическим способом уравнение

$$x^2+2x-2=\frac{1}{x}. \qquad (2)$$

Построим в одной системе координат графики функций

$$y=x^2+2x-2 \text{ и } y=\frac{1}{x}.$$

Для построения графиков этих функций составим таблицы их значений (см. рис. 103).

Парабола $y=x^2+2x-2$ и гипербола $y=\frac{1}{x}$ (рис. 103) пересекаются в точках (1; 1), (—0,4; —2,5) и (—2,6; —0,5), приближенные значения координат которых находятся из рисунка. Абсциссы этих точек — корни уравнения (2): $x_1=1$ — точный корень, так как $1^2+2\cdot 1-2=\frac{1}{1}$, а $-0{,}4$ и $-2{,}6$ — корни приближенные.

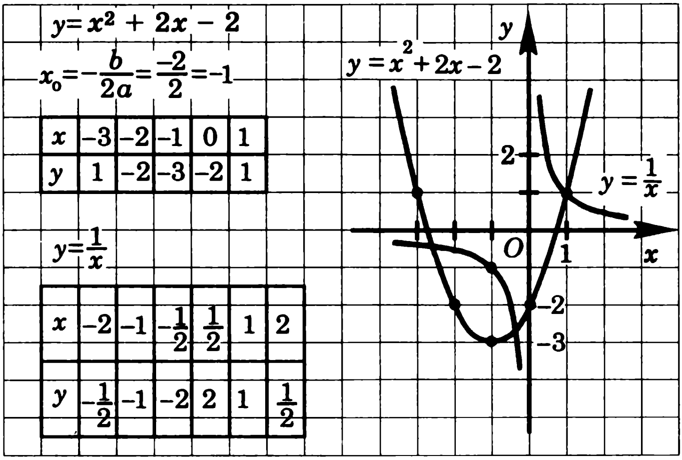


Рис. 103

840. На рисунке 104 показаны графики функций $y=\frac{1}{x}$ и $y=2x-1$.

а) Укажите несколько значений x, при которых эти функции принимают различные значения.

б) Укажите корни уравнения

$$\frac{1}{x}=2x-1.$$

Являются ли найденные корни точными или приближенными?

Решите графическим способом уравнение **(841—842)**:

841. а) $x^2=x+2$;

б) $x^2=3x-2$;

в) $2x^2=3x+2$;

г) $2x^2=-x+3$;

д) $3x^2=-x+4$;

е) $3x^2=x+2$.

842. а) $\frac{1}{x}=2x+1$;

б) $\frac{1}{x}=-x+2$.

843. Определите с помощью графиков, сколько корней имеет уравнение:

а) $x^2=x-1$;

б) $2x^2=3x+5$;

в) $3x^2=x+7$;

г) $\frac{1}{x}=-x+1$.

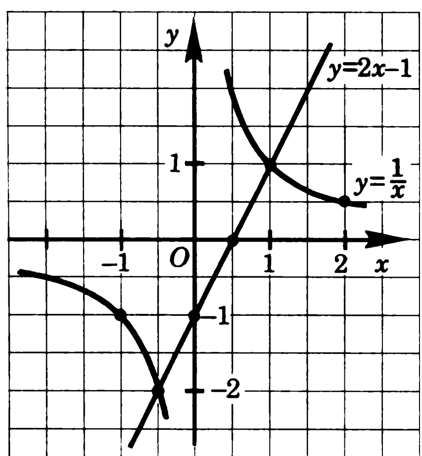


Рис. 104

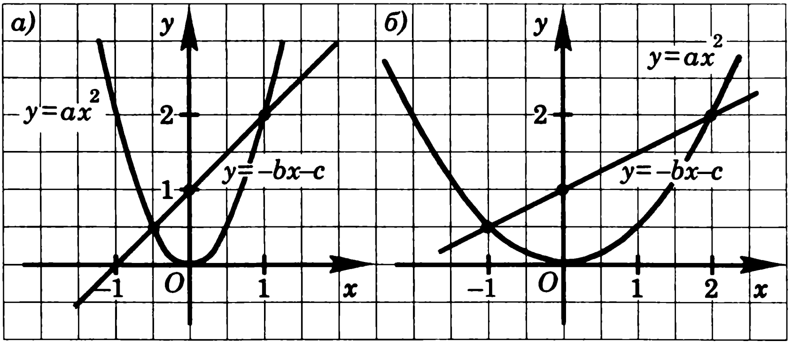


Рис. 105

844. С помощью графиков (рис. 105) решите уравнение $ax^2=-bx-c$. Определите a, b и c, используя приведенные на рисунке данные.

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ IV

1. Вероятность события

На стол произвольным образом бросили игральную кость. Игрок выигрывает, если выпадет одно очко (рис. 106). Одинаково возможны (равновозможны) случаи выпадения одного, двух, трех, четырех, пяти и шести очков (и других случаев быть не может).

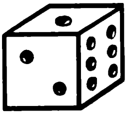


Рис. 106

Вероятность P события, заключающегося в выпадении одного очка, равна:

$$P=\frac{1}{6},$$

т. е. отношению числа случаев (1), благоприятных данному событию, к числу всех равновозможных случаев (6).

Вероятность же события, заключающегося в выпадении четного числа очков, равна:

$$P=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

На этот раз число случаев, благоприятных данному событию, равно 3: ведь это событие происходит при выпадении двух, четырех, шести очков, а число равновозможных случаев осталось тем же: 6.

Вообще, **вероятностью события** A *называют отношение количества m случаев, благоприятных событию A, к количеству n всех равновозможных случаев:*

$$P=\frac{m}{n}.$$

В первом примере $m=1$, $n=6$, а во втором — $m=3$, $n=6$. Вероятность P удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant P \leqslant 1$.

В нашем примере можно спросить: «Какова вероятность выпадения 7 очков?» Случаев, благоприятных этому событию, нет, поэтому

$$P=\frac{0}{6}=0.$$

Событие, вероятность которого равна 0, называют **невероятным**. С другой стороны, можно спросить: «Какова вероятность выпадения либо 1, либо 2, либо 3, либо 4, либо 5, либо 6 очков?» Случаев, благоприятных такому событию, 6 ($m=6$), поэтому

$$P=\frac{6}{6}=1.$$

Событие, вероятность которого равна 1, называют **достоверным**.

Авторы проделали опыт, заключающийся в подбрасывании монеты, и результаты занесли в таблицу.

Кто проделал опыт	Число выпадений	
	орла	решки
Авторы	47	53

Когда вы проделаете этот опыт сами, то получите числа, близкие к 50. Хотя теория допускает очень редкие отклонения от этого правила, настолько редкие, что если бы они произошли с какой-либо монетой при повторении опыта, то скорее всего эта монета оказалась бы погнутой (несимметричной).

845°. Что называют вероятностью события?

846°. Какое событие называют:
а) невероятным; б) достоверным?

847. Бросают игральную кость. Определите вероятность выпадения:
а) 1 очка; б) 2 очков;
в) нечетного числа очков; г) 1 или 2 очков;
д) 8 очков;
е) или 1, или 2, или 3, или 4, или 5, или 6 очков.

848. Подбрасывают монету. Определите вероятность выпадения:
а) орла; б) решки;
в) орла или решки; г) ни орла, ни решки.

849. Проделайте опыт с монетой, описанный в тексте (см. таблицу на с. 246). Результаты занесите в таблицу и сравните их с результатами, полученными другими учащимися.

850°. Из ящика, где находятся 4 черных и 5 белых шаров, вынимают наугад один шар. Какова вероятность того, что вынут:

а) черный шар;

б) белый шар?

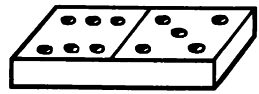


Рис. 107

851. Из 28 костей домино выбирают наугад 1 кость (на рисунке 107 изображена кость с суммой очков 11). Какова вероятность выбрать кость с суммой очков:

а) 0; б) 4; в) 7; г) 13?

852. Бросают 2 игральных кости. Какова вероятность выпадения суммы очков, равной:

а) 3; б) 9; в) 12; г) 14?

853. Выполняя тест по математике, ученик не успевает в отведенное время выполнить одно задание. Какова вероятность того, что ученик угадает правильный ответ, если из пяти возможных ответов только один правильный и выбор каждого из ответов — события равновозможные? Посмотрите пример задания с пятью ответами для выбора, из которых надо выбрать один.

№ 10. Найдите значение выражения

$$4{,}5-1{,}8:3\cdot 2+0{,}3.$$

(1) 3 (2) 2,1 (3) 3,6 (4) 4,5 (5) 3,9

854. Ученик задумал однозначное натуральное число. Другой ученик пытается его отгадать. Какова вероятность угадать число с первой попытки?

855. Известно, что номер квартиры — число двузначное. Какова вероятность того, что номер квартиры:

а) 28; б) 63; в) четное число?

856. Ученик задумал число, записанное цифрами 1, 2, 3, 4, 5 без повторения. Другой ученик пытается его отгадать. Какова вероятность угадать число с первой попытки, если это число:

а) двузначное; б) трехзначное; в) четырехзначное?

857. Ученик задумал число, записанное цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 без повторения. Другой ученик пытается его угадать. Какова вероятность угадать число с первого раза, если это число:

а) двузначное; б) трехзначное; в) четырехзначное?

858*. Какова вероятность угадать правильные ответы в:
а) двух; б) трех; в) четырех
заданиях теста, если к каждому заданию дано по пять ответов для выбора, из пяти предложенных ответов только один правильный и выбор каждого ответа — события равновозможные?

859*. Все кварталы города N имеют форму квадратов. Два приятеля, находящиеся в точках A и B, договорились о встрече и одновременно вышли навстречу друг другу (рис. 108, *а*). Первый, находящийся в точке A, двигается только на юг или на запад, второй, находящийся в точке B, двигается только на север или на восток. Причем на каждом перекрестке они выбирают одно из двух возможных направлений случайным образом. Какова вероятность встречи приятелей, если известно, что их скорости равны?

План города N

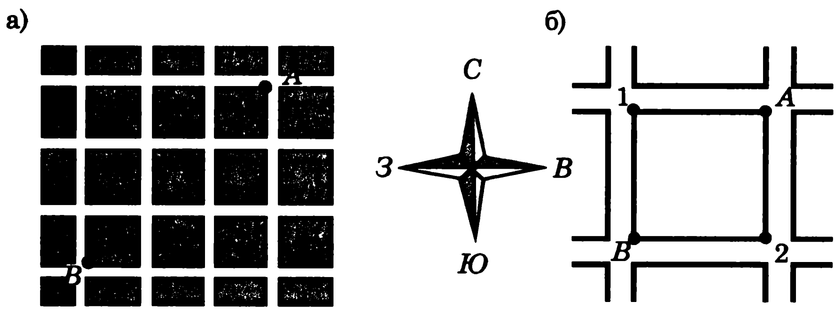


Рис. 108

Решение. Решим сначала более простую задачу по рисунку 108, *б*. Приятель, выходящий из точки A, в момент предполагаемой встречи может оказаться в точке 1 или 2. В каждом из этих случаев приятель, выходящий из точки B, может оказаться в точке 1 или 2, т. е. возможны 4 случая, в двух из них приятели окажутся в одной точке. Таким образом, вероятность встречи приятелей равна: $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

Заметим, что различным положениям приятелей в момент возможной встречи соответствуют 4 числа: 11, 12, 21, 22 (первая цифра соответствует положению приятеля A, а вторая — положению приятеля B). В двух из этих четырех случаев (11 и 22) приятели окажутся в одной точке, т. е. встретятся.

Решите задачу по рисунку 108, *а*.

860*. Решите предыдущую задачу для случая, когда скорость человека, идущего из точки B, в 2 раза больше скорости человека, идущего из точки A.

2. Перестановки

Произведение n натуральных чисел от 1 до n обозначают $n!$ (читают «эн факториал»):

$$1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n=n!$$

Например, $2!=1\cdot 2$, $3!=1\cdot 2\cdot 3$, $4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$, ...

$1!$ считают равным 1: $1!=1$.

Две буквы a и b можно переставить двумя способами:

$$ab,\ ba.$$

Для трех букв a, b и c можно записать шесть перестановок:

$$abc,\ acb,\ bca,\ bac,\ cab,\ cba.$$

На первом месте мы поставили букву a и к ней приписали две перестановки из остальных букв b и c. Потом на первом месте мы поставили букву b и к ней приписали две перестановки из букв a и c. Наконец, на первом месте мы поставили букву c и к ней приписали две перестановки из букв a и b. Всего получилось $3\cdot 2=3\cdot 2\cdot 1=3!$ перестановок.

Перестановкой из n элементов называют какое-либо расположение этих элементов в ряд.

Количество перестановок из n элементов принято обозначать $P_{\text{п}}$ (перестановка по-французски *permutation*).

Справедлива формула

$$P_{\text{п}}=n!$$

Для $n=1$, 2, 3 она уже проверена нами. Чтобы получить ее для $n=4$, рассуждаем так. Составим четыре ряда перестановок для цифр 1, 2, 3, 4. В первый ряд поставим все перестановки, начинающиеся с 1:

1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432.

Таких перестановок $6=3!$, т. е. столько, сколько раз можно переставить цифры 2, 3, 4, стоящие после цифры 1.

Но на первое место можно поставить любую из четырех цифр, и в каждом таком случае получится 6 перестановок, т. е. всего перестановок

$$P_4=4\cdot P_3=4\cdot 3!=4!$$

Можно доказать, что $P_n=n!$ для любого натурального числа n.

861. Что называют перестановкой из n элементов?

862. Что обозначает и как читается запись:
а) $2!$; б) $3!$; в) $6!$; г) $n!$?

863. Выпишите все перестановки из цифр 1, 2, 3. Чему равно P_3?

864. Ваня, Маша и Петя хотят купить три билета в кино на соседние места. Какова вероятность того, что место Маши окажется посередине, если она выберет один билет из трех случайным образом?

865. Три карты: валет (В), дама (Д), король (К) перемешали и положили «рубашкой» вверх. Какова вероятность того, что после переворачивания карт:
а) они окажутся в порядке ВДК;
б) на первом месте окажется Д;
в) на последнем месте окажется Д;
г) на всех трех местах окажется Д?

866. Выпишите все возможные перестановки из четырех букв и подсчитайте их количество (P_4).

867. Четыре карты: валет (В), дама (Д), король (К), туз (Т) перемешали и положили «рубашкой» вверх. Какова вероятность того, что после переворачивания карт:
а) они окажутся в порядке ТКДВ;
б) на первом месте окажется Т;
в) на последнем месте окажется Т?

868. Вычислите:
а) P_5; б) P_6; в) P_7.

869. Верно ли, что:
а) $P_5=5\cdot P_4$; б) $P_6=6\cdot P_5$;
в) $P_{100}=100\cdot P_{99}$; г) $P_n=n\cdot P_{n-1}$?

870. Вычислите:
а) $P_{10}:P_9$; б) $P_{50}:P_{49}$; в) $P_{20}:P_{18}$.

3. Размещения и сочетания

Размещением из n элементов $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ по два называют любую упорядоченную пару, составленную из данных n элементов.

Количество размещений из n элементов по два обозначают через A_n^2 (по первой букве французского слова *arangement* — размещение).

Ниже выписаны все размещения из 3 элементов по 2:

$$x_1x_2,\quad x_1x_3,$$
$$x_2x_1,\quad x_2x_3,$$
$$x_3x_1,\quad x_3x_2.$$

В первом ряду на первом месте стоит элемент x_1, к нему приписаны последовательно остальные два элемента. Получилось, что в первом ряду находятся все размещения, начинающиеся с x_1,— их два. Во втором и в третьем рядах находятся тоже по два размещения, начинающихся с x_2 и с x_3. Таким образом, $A_3^2=3\cdot 2$.

Подобным образом размещения из n элементов можно расположить в n рядов. В каждом из них на первом месте стоит один из данных элементов x_i, к нему последовательно приписываются остальные $n-1$ элементов. Этим мы доказали формулу

$$A_n^2=n(n-1). \qquad (1)$$

Пример 1. Сколькими способами можно распределить два билета на разные кинофильмы между семью друзьями?

Число способов, с помощью которых можно распределить два билета на разные кинофильмы между семью друзьями, равно $A_7^2=7\cdot(7-1)=42$.

Чтобы в этом убедиться, выпишем все возможные размещения в виде двузначных чисел, первая цифра которых показывает, какому другу достался первый билет, вторая — какому второй:

12, 13, 14, 15, 16, 17,
21, 23, 24, 25, 26, 27,
. . . .
71, 72, 73, 74, 75, 76.

В каждом из семи рядов по 6 размещений — всего $7\cdot 6=42$ размещения, т. е. число способов распределения двух билетов в данной задаче равно 42.

Размещением из n элементов по k называют любой упорядоченный набор из k элементов, составленный из данных n элементов.

Количество размещений из n элементов по k обозначают через A_n^k. Например, A_n^3 получается следующим образом. Расположим размещения в n рядов. В i-м ряду поместим размещения, начинающиеся с элемента x_i. После элемента x_i поставим все возможные размещения из оставшихся $n-1$ элементов по 2, т. е. $(n-1)(n-2)$ различных размещений. Но всего строк n, поэтому $A_n^3=n(n-1)(n-2)$.

Подобным же образом

$$A_n^4=n(n-1)(n-2)(n-3).$$

Можно доказать, что

$$A_n^k=n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1).$$

Заметим, что любое размещение из n элементов по n — это одна из перестановок из n элементов, поэтому

$$A_n^n=n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1=n!.$$

Сочетанием из n элементов по k называют любую группу из k элементов, составленную из данных n элементов.

Число сочетаний из n элементов по k обозначают через C_n^k (по первой букве французского слова *combination* — сочетание).

Всякое размещение по k элементов можно рассматривать как сочетание. Разница заключается в том, что если в размещении переставить местами элементы, то получится другое размещение, но сочетание не зависит от порядка входящих в него элементов.

Вычисляя A_n^2, мы получили пары, отличающиеся порядком элементов, например x_1x_2 и x_2x_1. Из двух элементов можно составить $P_2=2!=2\cdot 1=2$ пары, поэтому $A_n^2=2!\cdot C_n^2=P_2\cdot C_n^2$.

Вычисляя A_n^k, мы получили наборы из k элементов, отличающиеся порядком элементов. Из k элементов можно составить $P_k=k!=k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$ групп элементов, поэтому $A_n^k=k!\cdot C_n^k=P_k\cdot C_n^k$.

Следовательно,

$$C_n^k=\frac{A_n^k}{P_k}=\frac{A_n^k}{k!}=\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}.$$

Пример 2. Сколькими различными способами из семи участников математического кружка можно составить команду из двух человек для участия в олимпиаде?

Так как порядок, в котором будут выбраны два человека, безразличен, то число различных случаев составить команду равно:

$$C_7^2=\frac{7\cdot 6}{2!}=21.$$

Пример 3. Из перетасованной колоды, состоящей из 36 карт, наугад взяты 4 карты. Какова вероятность того, что все взятые карты тузы?

Так как порядок, в котором будут взяты тузы, безразличен, то число всех равновозможных случаев взять 4 карты равно:

$$C_{36}^4=\frac{36\cdot 35\cdot 34\cdot 33}{4!}=58\,905.$$

Искомая вероятность равна $\frac{1}{58\,905}$.

871. Выпишите все размещения из четырех элементов x_1, x_2, x_3, x_4 по два. Чему равно A_4^2?

872. Вычислите:

а) A_4^3; б) A_5^2; в) A_5^3;
г) A_7^4; д) A_7^5; е) A_8^6.

873. Выпишите все сочетания из пяти элементов x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 по два. Чему равно C_5^2?

874. Вычислите:

а) C_4^3; б) C_5^4; в) C_5^3;

г) C_7^4; д) C_7^5; е) C_8^6.

875. Докажите, что $C_n^k = C_n^{n-k}$. Вычислите:

а) C_{10}^9; б) C_{10}^8; в) C_{12}^{10};

г) C_{12}^{11}; д) C_{200}^{199}; е) C_{1998}^{1997}.

876. Сколькими различными способами можно распределить между шестью лицами две разные путевки в санатории?

877. Сколькими способами можно распределить две одинаковые путевки между пятью лицами?

878. Сколькими способами можно присудить шести лицам три одинаковые премии?

879. Иванов и Степанов входят в группу из семи студентов, имеющих одинаковые шансы получить один из двух разных призов. Какова вероятность того, что:

а) Иванов получит первый приз, а Степанов — второй;

б) Иванов и Степанов получат призы;

в) Иванов получит первый приз;

г) Иванов получит один из двух призов?

880*. Из перетасованной колоды, состоящей из 36 карт, наугад взяты 4 карты. Какова вероятность того, что в эту четверку:

а) попадут тузы бубен, пик, червей и треф в указанном порядке;

б) попадут 4 туза (в любом порядке);

в) попадет туз бубен и его возьмут первым;

г) попадет туз бубен?

881*. В некотором царстве, в некотором государстве разбойника приговорили к смертной казни, и он подал царю прошение о помиловании. Добрый царь, большой знаток теории вероятностей, сказал: «Доверимся случаю, пусть разбойник сам решит свою судьбу. Выдайте ему мешок с полным набором костей домино и две игральные кости. Пусть он вытащит из мешка, не глядя, 1 кость домино или бросит две игральные кости — по своему выбору. Если полученная в этом испытании сумма очков окажется равной числу, которое он назовет до начала испытания, то быть посему — пусть живет».

Какой вид испытания должен выбрать разбойник и какую сумму назвать, чтобы вероятность остаться живым оказалась наибольшей?

4. Исторические сведения

Системы уравнений первой и второй степени встречаются еще в древневавилонских текстах. Вот, например, одна такая задача:

Площади двух своих квадратов я сложил: $25\frac{5}{12}$. Сторона второго квадрата равна $\frac{2}{3}$ стороны первого и еще 5. Найдите стороны.

Задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=25\frac{5}{12}, \\ y=\frac{2}{3}x+5. \end{cases}$$

Рассмотрим *пример* решения системы уравнений из «Арифметики» Диофанта:

$$\begin{cases} x+y=10, \\ x^2+y^2=68. \end{cases}$$

И здесь Диофант умело избежал решения квадратного уравнения общего вида. Он разделил первое уравнение на 2:

$$\frac{x+y}{2}=5,$$

ввел новое обозначение $d=\frac{x-y}{2}$, тогда $x=5+d$, $y=5-d$, и второе уравнение системы записал так:

$$(5+d)^2+(5-d)^2=68,$$
$$50+2d^2=68,$$
$$d^2=9,$$
$$d=3,\ x=8,\ y=2.$$

Система имеет еще одно решение при $d=-3$ — это пара $(2;\ 8)$.

Диофант первым из математиков ввел различные знаки для неизвестных величин, главным образом греческие буквы. Приведенное выше решение дано в современной записи.

Решите систему уравнений **(882—886)**:

882. *Из «Арифметики» Диофанта.*

а) $\begin{cases} x+y=20, \\ x^2+y^2=208; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=20, \\ x^2-y^2=80; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x=3y, \\ x^2+y^2=5(x+y); \end{cases}$ г) $\begin{cases} x=3y, \\ x^2+y^2=10(x-y); \end{cases}$

д) $\begin{cases} x=3y, \\ x^2-y^2=12(x-y); \end{cases}$ е) $\begin{cases} x=3y, \\ y^2=6x; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x=3y, \\ y^2=6(x-y); \end{cases}$ з) $\begin{cases} x-y=2, \\ x^2-y^2=x-y+20. \end{cases}$

883. *Из «Алгебры» ал-Хорезми (VII—VIII вв.).*

а) $\begin{cases} x+y=10, \\ xy=21; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=10, \\ x^2+y^2=40; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y=10, \\ x^2-y^2=x-y+54; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y=10, \\ x^2=4xy; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x+y=10, \\ (x+y)^2=2\frac{7}{9}x^2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x+y=10, \\ \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2\frac{1}{6}; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x+y=10, \\ y^2=81x; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x+y=10, \\ xy:|y-x|=5\frac{1}{4}. \end{cases}$

884. *Из «Алгебры» ал-Караджи (XI в.).*

а) $\begin{cases} x=\frac{3}{4}y, \\ xy+x+y=62; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=10, \\ xy=4x+5. \end{cases}$

885. *Из «Книги абака» Леонардо Пизанского (Фибоначчи) (XII—XIII вв.).*

а) $\begin{cases} xy-y=42, \\ x-y=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy+y=2, \\ x-y=2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y=10, \\ \left(\frac{x}{y}+10\right)\left(\frac{y}{x}+10\right)=122\frac{2}{3}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y=10, \\ \frac{x}{y}(x-y)=24. \end{cases}$

886. *Из книги «Косс» К. Рудольфа (XVI в.).*

а) $\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2)=539\,200, \\ (x-y)(x^2-y^2)=78\,400; \end{cases}$

б) $\begin{cases} xy+x+y=573, \\ x^2+y^2-x-y=1716. \end{cases}$

Вычислите (887—888):

887. а) $\sqrt{\frac{1}{169}}$, $\sqrt{30,25}$, $\sqrt{0}$, $\sqrt{1,44}$;

б) $\sqrt{6,25}$, $\sqrt{0,0121}$, $\sqrt{-9}$, $\sqrt{0,0256}$.

888. а) $\frac{6^3\cdot5^2}{3^3\cdot2^4}$; б) $\frac{10^3\cdot9^2}{6^3\cdot5^2}$; в) $2,5^3:5^3$;

г) $1,5^4:3^3$; д) $\frac{\left(3\frac{1}{3}\right)^3\cdot(0,1)^3}{3}$; е) $\frac{\left(1\frac{1}{2}\right)^4\cdot(0,2)^4}{0,15}$.

889. Сравните $\frac{3^{1997}+1}{3^{1998}+1}$ и $\frac{3^{1998}+1}{3^{1999}+1}$.

890. Определите число:

а) 10% которого составляют 2; б) 20% которого составляют 7; в) 15% которого составляют 1,5; г) 75% которого составляют 330.

891. Изменится ли знак неравенства:

а) $2<4$, если обе его части умножить на 2;

б) $3>1$, если обе его части умножить на -2;

в) $a<b$, если обе его части умножить на положительное (отрицательное) число?

892. Запишите приближение числа $\pi=3,1415926535...$ с недостатком и с избытком с точностью до 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001. Какому двойному неравенству в каждом случае удовлетворяет число π?

893. Какие из данных чисел являются рациональными и какие — иррациональными:

а) 0,3333; б) 0,4(5);
в) 0,232323...; г) 0,57578888;
д) 0; е) 1,21121112111211...;
ж) 2,718281828...; з) 0,1234567891011121314...?

894. Покажите примерное расположение чисел на числовой оси:

а) 2,7; 2,(71); 2,71; 2,7171; $2\frac{7}{9}$;

б) $-1,05$; $-1\frac{1}{20}$; $-1,(0,5)$; $-1,0505$; $-1,051$.

895. а) Найдите приближенно сумму чисел, округлив данные числа до сотых:

1) $1,342+3,463$; 2) $5,(6)+2,781$;
3) $12,(45)+0,3112$; 4) $1,(3)+5,(7)$.

б) Найдите приближенно произведение чисел, округлив данные числа и результат до первой значащей цифры:

1) $15\cdot2,(1)$; 2) $0,3\cdot0,(4)$;
3) $1,(1)\cdot2,(1)$; 4) $2,(5)\cdot0,(2)$.

896. Преобразуйте выражение в многочлен:

а) $6(3a+4b)-4(5a-b)+(a+b)$;

б) $2(p+q)+3(p-q)-(p+q)-(p-5q)$;

в) $(2a-3)(3a-1)-(4a+2)(a-3)$;

г) $(m-1)(m+2)-(m-3)(m+4)$;

д) $2(x+1)(x+2)-(3x-4)(x+2)$;

е) $3(-4a+1)(a-1)+2(3a-4)(a+2)$.

897. Разложите на множители:

а) $a(x+y)+b(x+y)$;

б) $a(x+y)-b(x+y)$;

в) $2x(3p-q)-(3p-q)$;

г) $m(x+y)-x-y$;

д) $n(x-y)-x+y$;

е) $ax+ay+(bx+by)$;

ж) $ac+ad-bc-bd$;

з) $ac-cx+a-x$;

и) $ax-a+x-1$;

к) $2ax-3bx-2ay+3by$;

л) $ax-bx+cx+ay-by+cy$;

м) $2ax-5ay+a-2bx+5by-b$.

Упростите выражение **(898—899)**:

898. а) $\frac{p^2-q^2}{(p+q)^2}:\frac{6p-6q}{3p+3q}$;

б) $\frac{3m^2-3n^2}{m^2+mn}\cdot\frac{m+n}{9m-9n}$;

в) $\frac{a^2+ab}{4a^2-4b^2}\cdot\frac{2a^3+2b^3}{a^2-ab}$;

г) $\frac{x^2-4y^2}{(x+2y)^2}:\frac{x^3-8y^3}{4y^2-2xy+x^2}$.

899. а) $\frac{3x^2+3xy}{4xy+6ay}\cdot\left(\frac{x}{ax+ay}+\frac{3}{2x+2y}\right)$;

б) $\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{a+b}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right):\frac{(a+b)^2}{ab}$;

в) $\left(\frac{x-1}{3x+(x-1)^2}-\frac{1-3x+x^2}{x^3-1}\right):\frac{1-2x+x^2-2x^3}{1+2x+2x^2+x^3}$;

г) $\left(\frac{a^2-ax}{a^2x+x^3}-\frac{2a^2}{x^3-ax^2+a^2x-a^3}\right)\cdot\left(1-\frac{x-1}{a}-\frac{x}{a^2}\right)$.

900. Найдите длины окружностей и диаметры 6 различных кругов с диаметрами от 2 до 12 см. Измерения можно проводить с помощью рулетки или нитки, которую можно потом измерить линейкой (можно использовать монеты, чашки, тарелки, консервные банки и пр.). Полученные результаты сведите в таблицу. Постройте график зависимости длины окружности от диаметра. Как расположены точки графика? Чему равно отношение длины окружности к диаметру? Можно ли считать результаты точными?

901. Диаметр велосипедного колеса равен 70 см. Найдите длину его окружности. Сколько оборотов сделает колесо в течение 1 мин, если скорость велосипедиста равна 7 м/с?

902. Орбиту Земли приближенно можно считать окружностью радиуса 150 млн км. Определите с точностью до 10 млн км путь Земли, проходимый в течение года. С точностью до 0,01 млн км определите расстояние, которое проходит Земля за 1 день, 1 ч, 0,5 ч.

903. План дома начерчен в масштабе 8 м в 1 см. Каков истинный размер комнаты, если на плане ее размеры равны 1,25 см и 1,5 см?

904. а) Масса 2 м стального троса 4,63 кг. Какова длина троса в мотке массой 50 кг?

б) Масса 2 м стального троса 6,4 кг. Какова длина троса, если его масса 1 ц?

905. Один погонный метр трубы диаметром 18 мм имеет массу 3,2 кг. Какова масса трубы такого же диаметра, длина которой 1,6 м?

906. а) Расстояние в 200 км проехали за 4 ч. Какова средняя скорость движения?

б) За сколько времени при такой же скорости движения можно было бы проехать 60 км, 120 км, 140 км?

907. Кокон шелкопряда имеет массу около 0,05 г и дает в среднем 450 м шелковой нити. Сколько метров шелковой нити дадут коконы общей массой 100 г?

908. Рецепт для приготовления кекса на 4 человека: 120 г маргарина, 120 г сахара, 120 г сметаны, 120 г муки и 2 яйца. Сколько нужно маргарина, сахара, сметаны, муки и яиц, чтобы приготовить кекс на:

а) 48 человек; б) 42 человека;
в) 60 человек; г) 57 человек?

909. а) Плотность железа равна 7800 кг/м^3. Каков объем тонны железа?

б) Плотность золота равна 19 300 кг/м^3. Найдите массу золотого бруска с размерами 3 см, 2 см, 12 см. Каков объем слитка золота в 100 кг?

910. а) Масса кубического метра алюминия 2700 кг. Какую массу имеет кубический сантиметр алюминия?

б) Кубический метр ртути имеет массу 13,6 т. Какую массу имел бы столб ртути высотой 760 мм, основание которого равно 1 мм^2?

911. Земля делает полный оборот (360°) вокруг своей оси за 24 ч. На какой угол она повернется за 3 ч?

912. а) Скорость равномерного движения тела v, время движения t, путь s. Запишите формулы для определения s, v и t.

б) Цена товара K, количество товара m, стоимость C. Запишите формулу зависимости K, m, C.

в) Производительность труда p, время работы t, объем выполненной работы A. Выразите зависимость для A, p и t формулой.

913. а) Приняв объем работы за 1, запишите формулу зависимости между производительностью труда p, временем t, необходимым для выполнения этой работы, и объемом этой работы.

б) Мощность двигателя W, время работы t, работа A. Выразите зависимость формулой для A, W, t.

в) Расход горючего на 1 км пути составляет n (л/км), пробег машины s (км), объем израсходованного горючего v (л). Выразите зависимость для s, v и n формулой.

914. Укажите на координатной плоскости все точки, у которых:

а) абсциссы равны 5; б) ординаты равны -4;
в) абсциссы равны 0; г) ординаты равны 0;
д) абсциссы и ординаты равны.

915. На координатной плоскости отметьте все точки, у которых:

а) абсциссы больше 1;
б) ординаты меньше -3;
в) абсциссы удовлетворяют неравенству $x<-1$;
г) ординаты удовлетворяют неравенству $y\geqslant 2$;
д) абсциссы удовлетворяют неравенству $-1<x<4$;
е) ординаты удовлетворяют неравенству $-4\leqslant y\leqslant 2$.

916. Укажите на координатной плоскости точки $(x;\ y)$, координаты которых удовлетворяют условиям:

а) $x=2,\ y>3$; б) $x>-1,\ y=-2$;
в) $0\leqslant x<2,\ y<3$; г) $x\geqslant 0,\ -1<y<3$;
д) $-2<x<4,\ 0<y\leqslant 2$; е) $-3<x\leqslant 2,\ -3\leqslant y<2$.

917. Постройте график функции $y=0{,}5x-1{,}5$.

а) При каких значениях x функция принимает положительные значения?

б) При каких значениях x функция принимает отрицательные значения?

в) Какие значения принимает y, если:
1) $x>6$; 2) $x<0$;
3) $-5<x<0$; 4) $5<x<7$?

918. Постройте график функции $y=x$. Какие значения принимает y, если:

а) $x>2$; б) $x<-1$; в) $1<x<4$; г) $-2<x<5$?

919. Постройте график функции $y=-2x$. Какие значения принимает y, если:

а) $x>3$; б) $x<1$; в) $4<x<7$; г) $-5<x<-1$?

920. Графики каких линейных функций образуют с положительной полуосью Ox углы, меньшие 45°? Приведите примеры.

921. Образует ли график функции с положительной полуосью Oy угол, меньший 45°, если:

а) $y=\frac{1}{3}x$; б) $y=-3x$; в) $y=7{,}2x$; г) $y=-\frac{4}{9}x$.

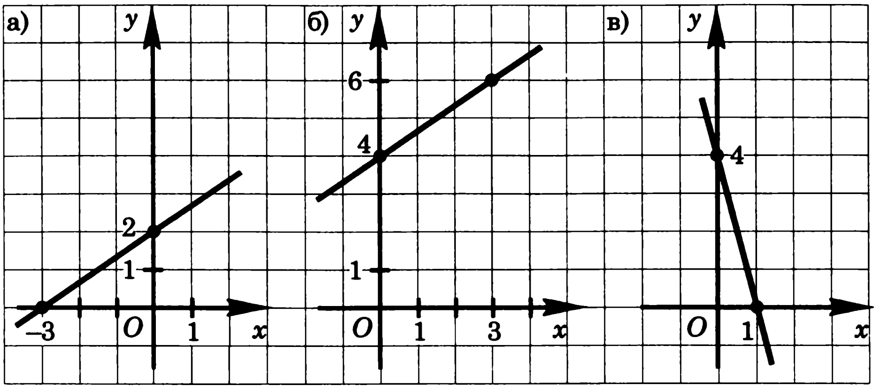


Рис. 109

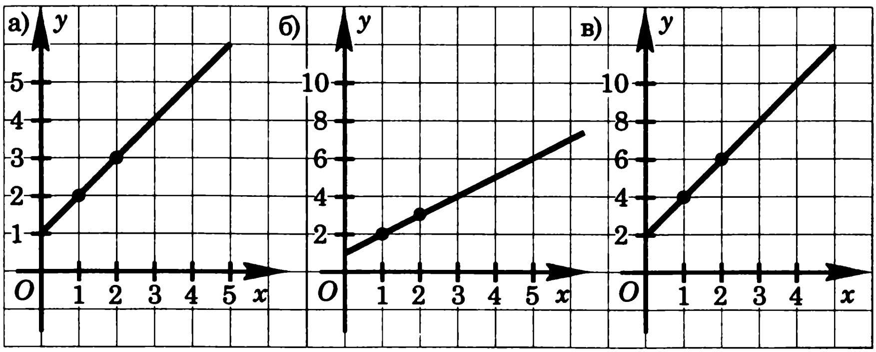


Рис. 110

922. На рисунке 109 представлены графики функций. Запишите формулу, которой задана каждая функция.

923. Два графика на рисунке 110 являются графиками одной и той же функции. Какие это графики? Напишите формулу, которой задана эта функция.

924. Постройте точки, координаты которых удовлетворяют условию:

а) $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$; б) $\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$.

Где лежат все точки, удовлетворяющие данному равенству?

925. Определите правило, по которому из каждого числа можно получить следующее, и вычислите еще одно число по этому правилу:

а) 40, 37, 34, 31, 28, ...; б) 100, 91, 82, 73, 64, ...;
в) 2, 3, 6, 11, 18, ...; г) 2, 3, 6, 7, 10, 11, ...

926. Равносильны ли уравнения:

а) $(x-2)(x+3)=0$ и $x^2+2x-3=0$;

б) $(x-3)(x-4)=0$ и $x^2+x-12=0$;

в) $\frac{1}{x+1}-x=1$ и $(x+1)(x+2)=0$;

г) $(3-x)(x-1)=0$ и $x-\frac{2}{1-x}=4$?

927. Решите уравнение:

а) $x^4+9=10x^2$;
б) $x^4-20x^2+64=0$;
в) $x^4-14x^2=15$;
г) $5x^4+3+8x^2=0$;
д) $x^4+x^2=0$;
е) $x^4-x^2=0$;
ж) $x^4+2x^2-3=0$;
з) $x^4-x^2-6=0$;
и) $x^3+4x^2+4x+1=0$;
к) $x^3+4=3x^2$;
л) $2x^3-3x^2+3x=2$;
м) $x^4-2x^3+x=132$.

928. Выразите x из уравнения:

а) $xy=5$; б) $x+xy=1$; в) $x^2+3y=2$; г) $y^2-xy=0$.

Решите систему уравнений **(929—930)**:

929. а) $\begin{cases} 4x+3y=6, \\ 2x+8y=1; \end{cases}$
б) $\begin{cases} 7x-3y=15, \\ 5x+6y=27; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x-3y=8, \\ 5y-7x=5; \end{cases}$
г) $\begin{cases} 6x-7y=40, \\ 5y-2x=-8. \end{cases}$

930. а) $\begin{cases} 2y+6x+6=0, \\ 5x+y=17; \end{cases}$
б) $\begin{cases} 7x-3y=27, \\ 5x-6y=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 6x-7y=16, \\ 2x+3y=-16; \end{cases}$
г) $\begin{cases} 5x+3y=2, \\ 3x+5y=-18; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 4(x+2y)-8=5x-2, \\ 3(2x-y)+6=24y+12; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 3(2x-y)-14(5x-3y)=7, \\ 6x-6y=3. \end{cases}$

931*. Учащиеся решали системы уравнений:

а) $\begin{cases} 3x+4y=5, \\ 6x+7y=8; \end{cases}$
б) $\begin{cases} 3x+5y=7, \\ 9x+11y=13; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x+5y=8, \\ 11x+14y=17; \end{cases}$
г) $\begin{cases} 5x+7y=9, \\ 11x+13y=15. \end{cases}$

Хотя системы эти различны, но ответы у всех оказались одинаковыми. Найдите правило, по которому они составлены. Проверьте догадку, составив и решив еще одну систему. Если это удастся, решите задачу в общем виде.

932. а) К уравнению $x-y=3$ подберите второе уравнение так, чтобы получившаяся система уравнений:

1) имела единственное решение;
2) имела бесконечное множество решений;
3) не имела решений.

б) Устно решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x+y=1, \\ x+z=2, \\ y+z=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x+8y=5, \\ 8x+5y=8. \end{cases}$

933. а) Ученик решил уравнение $5x+15=3x+9$ следующим образом: $5(x+3)=3(x+3)$, $5=3$ — и заявил, что уравнение корней не имеет, так как его решение приводит к нелепому результату. Прав ли ученик?

б) Ученик решил систему уравнений $\begin{cases} y=2(1-x), \\ 2x+y=8 \end{cases}$ способом подстановки, для чего выражение y из первого уравнения он подставил во второе уравнение. Проделайте устно это решение, объясните его.

в) Ученик решил систему уравнений $\begin{cases} 2x+y=8, \\ y=2(4-x) \end{cases}$ способом подстановки, для чего выражение y из второго уравнения он подставил в первое уравнение. Проделайте устно это решение, объясните его.

934. Составьте систему двух уравнений с двумя неизвестными, решением которой являлась бы пара чисел:

а) $(2;\ 3)$; б) $(1;\ 1)$;

в) $(-1;\ 2)$; г) $(-1;\ -2)$.

935. а) При каком k число 5 будет корнем уравнения $(k-1)x^2+7x-2k=0$?

б) Найдите коэффициенты приведенного квадратного уравнения, если известно, что числа 10 и -15 являются его корнями.

в) Докажите, что при любых числовых значениях a, b и c уравнение $x^2-2ax+a^2-b^2-c^2=0$ имеет корни.

936. Определите, при каких числовых значениях a и b система уравнений имеет бесконечное множество решений; не имеет решений:

а) $\begin{cases} 5x+(a-1)y=3b, \\ x-2y=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+8y=b, \\ \dfrac{x}{a-1}+(a-3)y=a+1. \end{cases}$

937. Для любых чисел a и b решите уравнение:

а) $x^2+2ax+a^2-b^2=0$; б) $x^2-2(a+b)x+4ab=0$;

з) $x^2-3ax+2a^2=0$; г) $x^2-ax-2a^2=0$.

938⁰. Решите уравнение:

а) $\frac{x-3}{x}=0$; б) $\frac{x}{x-1}=0$; в) $\frac{7}{x}=0$; г) $\frac{x+1}{x+1}=1$.

939. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{x+2}{y-1}=\frac{1}{2}, \\ xy+3y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x-2}{y+1}=\frac{1}{4}, \\ xy-4y=x. \end{cases}$

Постройте график функции **(940—941)**:

940. а) $y=\frac{1}{3}x$; б) $y=\frac{3}{4}x$; в) $y=-2\frac{1}{3}x$;
г) $y=2{,}5x$; д) $y=0$; е) $y=-x$.

941. а) $y=2x-3$; б) $y=-2x-3$; в) $y=3x+1$;
г) $y=-\frac{1}{2}x-3$; д) $y=\frac{1}{2}x-3$; е) $y=\frac{1}{3}x+1$.

942. Принадлежит ли графику функции $y=3{,}5x+1{,}2$ точка:
а) $(-1;\ -2)$; б) $(5;\ -7)$; в) $(-2;\ -5{,}8)$; г) $(4;\ 15{,}2)$?

943. Точка A принадлежит графику функции $y=-2x+0{,}5$. Определите неизвестную координату:
а) $A(x;\ 1{,}5)$; б) $A(4;\ y)$; в) $A(x;\ -2)$; г) $A(-3;\ y)$.

944. Определите координаты точки пересечения графиков функций:
а) $y=x$ и $y=-x$; б) $y=x$ и $y=2x-2$;
в) $y=2x-1$ и $y=-2x$; г) $y=0{,}5x-2$ и $y=x+3$.

945. Решите графическим способом систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x+y=1, \\ 2x-3y=-14; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x-3y=0, \\ 3x+2y=17; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x+2y=-1, \\ 2x-3y=-8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-y+1=0, \\ 2x+y-1=0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 7x-y-3=0, \\ 14x-2y+5=0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3x+y-1=0, \\ 6x+2y-2=0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 4x-2y+3=0, \\ x-3y-1=0; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 3x+y=13, \\ 2x-3y-5=0. \end{cases}$

946. Определите, сколько решений имеет система уравнений, и дайте геометрическое объяснение решения:

а) $\begin{cases} 2x+3y=5, \\ 2x+3y=-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-y=3, \\ 2x+y=3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-3y=5, \\ 2x-6y=10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x+y=5, \\ x+y=5. \end{cases}$

947. Решите графическим способом систему уравнений:

а) $\begin{cases} y=x^2-1, \\ y=x+1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y=x^2+x, \\ y=6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y=x^2-3x-4, \\ y=-x^2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y=-x^2+4, \\ y=x^2-4. \end{cases}$

948. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 20 км, вышел пешеход. Одновременно с ним из пункта B в пункт A выехал велосипедист, который встретил пешехода через 50 мин после своего выезда из B. Сколько времени потребовалось бы пешеходу для того, чтобы пройти весь путь из A в B, если известно, что велосипедист проделал бы тот же путь на 4 ч быстрее пешехода? Какое условие является лишним?

949. а) Бак, вмещающий 10 000 л, заполняется бензином двумя насосами, второй из которых вливает в минуту на 10 л меньше, чем первый. За 5 мин бак заполняется на 25%. Сколько литров бензина вливает каждый насос за 10 мин?

б) Двумя кранами бассейн наполняется за 1 ч 20 мин, а одним краном — за 2 ч. За какое время наполнится бассейн другим краном?

в) Бак наполняется через две трубы за 12 ч. Через сколько часов наполнится бак, если первые два часа были подключены обе трубы, а затем только одна, через которую в единицу времени поступает две трети того количества воды, которое поступает через другую трубу?

г) В бассейн проведены три трубы. Через первую бассейн наполняется за 6 ч, через вторую — за 8 ч, а через третью вся вода из наполненного бассейна выливается за 12 ч. За сколько времени наполнится бассейн водой, если открыть одновременно все три трубы?

950. а) Смешали 30%-ный раствор соляной кислоты с 10%-ным и получили 600 г 15%-ного раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

б) Морская вода содержит 5% соли по массе. Сколько пресной воды нужно добавить к 50 кг морской воды, чтобы концентрация соли составила 2%?

в) В сосуде было 12 л соляной кислоты. Часть кислоты отлили и сосуд долили водой до прежнего уровня. Затем снова отлили столько же и опять долили водой до прежнего уровня. Сколько литров жидкости отливали каждый раз, если в результате в сосуде оказался 25%-ный раствор кислоты?

951. *Из трактата «Девять отделов искусства счета» (Китай).* 5 волов и 2 барана стоят 11 таэлей, а 2 вола и 8 баранов стоят 8 таэлей. Сколько стоят отдельно вол и баран?

952. *Задача Евклида (III в. до н. э.).* Мул и осел по дороге с мешками шагали. Осел жаловался на свою непомерно тяжелую ношу. Мул обратился к попутчику с речью: «Если я возьму у тебя один мешок, то моя ноша станет вдвое тяжелее твоей. А вот если бы ты взял у меня один мешок, то наши ноши сравнялись бы». Сколько нес каждый из них?

953. *Задача Леонардо Пизанского (Фибоначчи).* Один говорит другому: «Дай мне 7 динариев, и я буду в 5 раз богаче тебя». А другой говорит: «Дай мне 5 динариев, и я буду в 7 раз богаче тебя». Сколько денег у каждого?

954. *Старинная задача (Китай, I в.).* Имеется 9 слитков золота и 11 слитков серебра, их взвесили, вес как раз совпал. Переложили слиток золота и слиток серебра, золото стало легче на 13 ланов. Спрашивается, каков вес слитка золота и слитка серебра, каждого в отдельности.

955. Имеются березовые и сосновые дрова. 7 м^3 березовых и 5 м^3 сосновых дров весят 7,44 т, а 9 м^3 березовых и 10 м^3 сосновых дров весят 11,28 т. Сколько весит 1 м^3 березовых и 1 м^3 сосновых дров?

956. В один из дней каникул учащиеся класса, кроме нескольких оставшихся дома, отправились погулять. Двенадцать учащихся — треть всех девочек и половина всех мальчиков — пошли в кино, а еще 13 человек — половина всех девочек и треть всех мальчиков — пошли на выставку. Сколько учащихся этого класса осталось дома?

957. *Старинная задача.* Крестьянин хочет купить лошадь и для этого продает рожь. Если он продаст 15 ц ржи, то ему не хватит для покупки лошади 80 р., а если он продаст 20 ц ржи, то после покупки у него останется 110 р. Сколько стоит лошадь?

958. *Старинная задача.* Некий человек покупал масло. Когда он давал деньги за 8 бочек масла, то у него осталось 20 алтын. Когда же стал давать за 9 бочек, то не хватило денег полтора рубля с гривною. Сколько денег было у человека? (1 алтын = 3 к., 1 гривна = 10 к.)

959*. Если продать 20 коров, то заготовленного сена хватит на десять дней дольше, если же прикупить 30 коров, то запас сена исчерпается десятью днями раньше. Сколько было коров и на сколько дней заготовлено сена?

960*. Если продать 20 коров, то заготовленного сена хватит на двадцать дней дольше, если же уменьшить выдачу сена на одну корову в день на 20%, заменив сено другими кормами, то сена коровам хватит на пятнадцать дней дольше запланированного. Сколько было коров и на сколько дней заготовлено сена?

961. *Из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого.* Три человека хотят двор купить. Первый покупатель говорит второму: дашь мне $\frac{3}{4}$ денег, что имеешь, и я один заплачу цену за двор. Второй говорит третьему: дашь мне $\frac{2}{5}$ из твоих денег, и я один заплачу цену за двор. Третий говорит первому: дашь мне $\frac{1}{3}$ из твоих денег, и я один заплачу цену за двор. А двору цена 100 р. Сколько каждый из покупателей имел денег?

962. *Из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого.* Три человека разговаривали между собой. Первый из них говорит второму: если бы мне взять от твоих денег $\frac{2}{4}$, а от третьего $\frac{3}{5}$, тогда было бы у меня 150 р. Второй говорит третьему: если бы я взял твоих денег $\frac{3}{5}$, а от первого $\frac{5}{7}$, то я тоже имел бы 150 р. Третий говорит первому: если бы я взял от твоих денег $\frac{5}{7}$, а от второго $\frac{2}{4}$, то тоже имел бы 150 р. Спрашивается, сколько каждый из них в то время имел денег.

963. Три друга хотели купить книгу за 17 р., но ни у кого не набралось нужной суммы. Первый говорит друзьям: «Дайте мне каждый по половине своих денег, и я куплю книгу». Второй говорит: «Дайте мне по трети своих денег, и я куплю книгу». Третий говорит: «Дайте мне по четверти своих денег, и я куплю книгу». Сколько денег было у каждого?

964. *Задача Адама Ризе.* Трое торгуют лошадь за 12 флоринов, но никто в отдельности не располагает такой суммой. Первый говорит двум другим: «Дайте мне каждый по половине своих денег, и я куплю лошадь». Второй говорит первому и третьему: «Дайте мне по одной трети ваших денег, и я приобрету лошадь». Наконец, третий говорит первым двум: «Дайте мне только по четверти ваших денег, и лошадь будет моя». Теперь спрашивается: сколько денег было у каждого?

965. *Из «Всеобщей арифметики» И. Ньютона.* Даны три металлических сплава. Один фунт первого сплава содержит 12 унций серебра, 1 унцию меди и 3 унции олова. Фунт второго сплава содержит 1 унцию серебра, 12 унций меди и 3 унции олова. Фунт третьего сплава содержит 14 унций меди, 2 унции олова и вовсе не содержит серебра. Как из этих трех сплавов нужно составить новый, фунт которого содержал бы 4 унции серебра, 9 унций меди и 3 унции олова?

966. *Из «Всеобщей арифметики» И. Ньютона.* Некто покупает 40 мер пшеницы, 24 ячменя и 20 овса за 15 фунтов 12 шиллингов[1]. Затем он производит вторую закупку тех же сортов в 26 мер пшеницы, 30 ячменя и 50 овса за 16 фунтов. Наконец, он делает третью закупку тех же сортов в 24 меры пшеницы, 120 ячменя и 100 овса за 34 фунта. Спрашивается цена меры каждого рода зерновых.

967. *Старинная задача (Китай, III в. до н. э.).* Из 3 снопов хорошего урожая, 2 снопов среднего урожая и 1 снопа плохого урожая получили 39 мер зерна. Из 2 снопов хорошего урожая, 3 снопов среднего урожая и 1 снопа плохого урожая получили 34 меры зерна. Из 1 снопа хорошего урожая, 2 снопов среднего урожая и 3 снопов плохого урожая получили 26 мер зерна. Спрашивается, сколько зерна получили из каждого снопа хорошего, среднего и плохого урожая.

---

[1] 1 фунт = 20 шиллингов (мера денег).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсцисса 14
Аргумент 18

Внесение множителя под знак корня 51

Вынесение множителя из-под знака корня 50

Гипербола 38
График функции 23

Дискриминант квадратного трехчлена 74
— квадратного уравнения 78

Зависимость
— прямая пропорциональная 141
Значение функции в точке 19

Интервал числовой 8, 10

Квадратный трехчлен 74
Координаты точки 14
Корень квадратный 41
— арифметический 43
Коэффициент пропорциональности 141

Множества числовые 11, 55

Неравенства свойства 4, 5
Неравенство двойное 5

Область определения функции 18
Ордината 14
Ось абсцисс 13
— ординат 13
Отрезок числовой 8

Парабола 31, 162
Параболы вершина 32, 167
— ось симметрии 31
Переменная зависимая 18
— независимая 18
Плоскость координатная 13
Полуинтервал числовой 9, 10

Принцип Дирихле 57
Приращение аргумента 22
— функции 22
Промежутки числовые 10

Разложение квадратного трехчлена на линейные множители 75
Решение системы двух уравнений с двумя неизвестными 209
— — трех уравнений с тремя неизвестными 210
Решение уравнения с двумя неизвестными 208
— с тремя неизвестными 209

Система координат 13
Система уравнений с двумя неизвестными 209
— с тремя неизвестными 210

Угловой коэффициент прямой 144, 149
Углы координатные 15
Уравнение биквадратное 99
— второй степени 78, 209
— квадратное 78
— неполное 80
— общего вида 78
— приведенное 89
— первой степени 209
— рациональное 98
— рациональное с двумя неизвестными 208
Уравнения равносильные 79

Формулы Виета 91
Функция 17, 18
— квадратичная 174
— линейная 147
— непрерывная 22
— нечетная 37
— постоянная 149
— четная 28

Четверти координатные 15

ОТВЕТЫ

13. ж) $(-2)^2<(-3)^2$; з) $4^2=(-4)^2$; и) $(-4)^2>1^2$.

18. Самый низкий из высоких выше самого высокого из низких.

23. а) $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1$; б) $-2,\ -1,\ 0$.

26. а) $[2;\ 4]$; б) $(2;\ 4)$; в) $[2;\ 4]$; г) $[2;\ 4]$; д) $(5;\ +\infty)$; е) $[5;\ +\infty)$; ж) $(-\infty;\ 0)$; з) $(-\infty;\ 0]$.

29. а) $[3;\ 7]$; б) $(3;\ 7)$; в) $(5;\ 6]$; г) $[5;\ 6)$; д) $[7;\ +\infty)$; е) $(-\infty;\ 8)$.

49. а) $y(6)=-23$, $y(-7)=29$, $y(0{,}5)=-1$, $y\left(\frac{2}{3}\right)=-1\frac{2}{3}$.

50. а) $y=2x$; б) $y=x-2$; в) $y=x+5$; г) $y=4x$; д) $y=\frac{1}{7}x$; е) $y=2x^2$.

55. а) $y=5x$; б) $y=2{,}5x$.

56. а) $y(1)=1$; $y(2)=0{,}5$; $y(5)=0{,}2$; $y(0{,}5)=2$; $y\left(\frac{1}{3}\right)=3$.

57. а) $y=2x-1$.

67. а) При $x>0$; б) при $x\geqslant 0$; в) при $x<0$; г) при $x\leqslant 0$.

82. а) $y_1<y_2$; б) $y_1>y_2$.

86. а) Нет; б) нет; в) да; г) да.

91. а) Нет; б) да; в) да.

92. а) При $x\neq 0$; б) при $x=0$; в) ни при каких x; г) при $x\geqslant 0$; д) при $x\leqslant 0$.

99. а) $y(1)>y(2)$; б) $y(2)>y(3)$; в) $y(1)>y(5)$.

106. в) $x=\frac{1}{3}$, $x=0{,}2$; $x=-0{,}5$; г) $y>0$; $0<y<0{,}5$; $-\frac{1}{3}<y<0$; д) $y>1$; $-1<y<-\frac{1}{3}$.

120. а) 3; б) 9; в) 5.

130. а) 3 и 4.

142. а) 13; б) 16; в) 19; г) 20.

143. а) 4,8; б) 5,6; в) 6,7; г) 7,3.

149. в) 1; г) 5.

150. а) При $x\geqslant 0$; б) при любых x; в) при $x\leqslant 0$; г) при $x=0$.

151. а) a; б) $-b$; в) 0; г) $-n$; д) $x+1$; е) $m-2$; ж) $3a+1$; з) $-p+4$.

152. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $1\frac{1}{5}$; г) $2\frac{1}{3}$.

153. а) 4; б) 9; в) 8; г) 27; д) 16; е) 81; ж) a^2; з) $|m^3|$.

154. а) $|x+1|$; в) $|1-m|$.

158. а) a^2; б) $x\sqrt{x}$, $x\geqslant 0$; д) $|ab|$; е) $2|mn|$; ж) $x^2|y|$; к) $4|y|\sqrt{xy}$, $xy\geqslant 0$; м) $11m^2n|k|\sqrt{n}$, $n\geqslant 0$.

161. а) $\sqrt{8}$; б) $-\sqrt{18}$; д) $\sqrt{4a^2}$; ж) $-\sqrt{24x^2}$.

162. ж) $\frac{x\sqrt{x}}{3}$, $x\geqslant 0$; з) $\frac{\sqrt{7a}}{4|b|}$; и) $\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{mn}{a}\right|\cdot\sqrt{\frac{3m}{b}}$, $\frac{m}{b}\geqslant 0$.

164. а) Например, $\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

165. а) $\sqrt{3\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{10}{3}}=\sqrt{\frac{30}{9}}=\frac{1}{3}\sqrt{30}$.

166. а) $\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{6}{9}}=\frac{\sqrt{6}}{3}\approx\frac{2,449}{3}\approx0,816.$

172. а) $\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)$; з) $mn(3-\sqrt{m})$, если $m\geqslant0$ и $n\geqslant0$; $mn(3+\sqrt{m})$, если $m\geqslant0$ и $n<0$.

183. а) 1000; б) 172; в) 17; г) 0,9; д) 21; е) $\frac{1}{123}$; ж) 1; з) $22\frac{5}{8}$.

184. а) 3; б) 0,25; в) 5,74; г) 2; д) 104; е) 11,3; ж) 64,5; з) 1,225; и) 2,32; к) $11\frac{11}{15}$.

185. а) 8; б) 3; в) 5,575; г) 0,1.

186. а) 0,0102; б) 1,2; в) 2; г) 16; д) 3,9; е) 1.

193. ж) $1\frac{5}{9}x^5y^4z^2$; з) $1\frac{7}{8}a^4b^2c^4$.

194. п) $64a^6b^{30}$; р) $1,641a^8b^{28}c^{44}$.

195. а) $10^{20}>90^{10}$; б) $0,1^{10}>0,3^{20}$.

196. ж) $27,5x^6y^{12}$; з) $-0,86a^4b^2$.

205. ж) $7n(2ax-3by-1)$; з) $7y(9x-12y+14)$.

214. а) (8,5; 4,5); б) (10; 50); в) (1; -1); г) (-1; -1); д) (31,8; 6,6); е) (5; -2); ж) $\left(\frac{1}{2};\ -1\frac{1}{6}\right)$; з) (0; 5); и) ($-11,5$; 14); к) (1; -1); л) (0,5; 0); м) нет решений.

216. а) (10; 12); б) (7; 6); в) (12; 8); г) (12; 21); д) (1; -2); е) (2; 1); ж) (17; 13); з) (6; 0); и) (3; 2); к) (7; 5).

219. а) 75 кг; б) 1,25 кг.

220. а) $11\frac{1}{9}$ %; б) $47\frac{1}{17}$ т.

221. а) На 12,5%; б) на 4%.

222. На $\frac{100p}{100+p}$ %; а) на 20%; б) на $16\frac{2}{3}$ %.

223. а) На $66\frac{2}{3}$ %; б) на 50%.

224. а) 1 р.; б) на 12,5% и на $14\frac{2}{7}$ %.

232. а) $\sqrt{3}-1$; б) $5-\sqrt{5}$; в) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; г) $4-\sqrt{10}$.

236. а) $\sqrt{10}$.

237. в) 42.

240. а) $\sqrt{2}+1$.

244. а) $2\sqrt{x}+1$; б) -1; в) $\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; г) $\frac{3}{\sqrt{m}-6}$.

245. а) 9; б) 0; в) нет решений; г) 0,5.

246. 4356.

247. 1,6 ч.

248. а) За 20 дней; б) за 12 мин.

249. Через $\frac{ab}{a+b}$ мин; а) через 9 мин; б) через 10 мин.

250. За $\frac{abc}{ab+ac+bc}$ ч; а) за 8 ч; б) за 6 ч.

251. За $\dfrac{abx}{ab-bx-ax}$ ч; а) за 21 ч; б) за 18 ч.

253. $\dfrac{2ab}{a+b}$ км/ч; а) 48 км/ч; б) 36 км/ч.

254. $\dfrac{2ab}{b-a}$ ч; а) 24 ч; б) 12 ч.

255. 28%.

256. $p=\dfrac{m_1p_1+m_2p_2}{m_1+m_2}$; а) $p=26$; б) $p=34$.

258. $\dfrac{(p-p_1)m_1}{p_2-p}$ г; а) 1200 г; б) 270 г.

259. 13,5 кг.

260. 1,5 кг.

261. 100 г.

262. 64 г.

263. 150 и 450 г.

264. $\dfrac{(p-p_2)m}{p_1-p_2}$ и $\dfrac{(p_1-p)m}{p_1-p_2}$ г; а) 300 и 150 г; б) 400 и 200 г.

265. 0,25 ведра по 10 гривен и 0,75 ведра по 6 гривен за ведро.

270. а) 1; б) 1; в) 49; г) 49; д) -4; е) 0; ж) 0; з) 1.

271. в) $(x-4)^2+1$; г) $(x+2)^2$; д) $(x+2{,}5)^2-12{,}25$;

е) $(x-1{,}5)^2-0{,}25$; ж) $2((x-2)^2-0{,}5)$; з) $3\left((x-1)^2-\dfrac{2}{3}\right)$;

и) $3\left(\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3}\right)$; к) $-4\left(\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}\right)$.

275. а) $2(x-1)(x-1{,}5)$; б) $3(x+2)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$.

276. а) $(x+5)(x+3)$; б) $4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$.

293. а) 0; 4; б) 0; -6; в) 0; $-\dfrac{1}{3}$.

294. б) 3; -3; в) 5; -5; г) 4; -4; д) 7; -7; е) нет корней.

295. а) $\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$; б) $\sqrt{5}$; $-\sqrt{5}$; в) $\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$; г) $-5\sqrt{2}$; $5\sqrt{2}$; д) $-0{,}5\sqrt{3}$; $0{,}5\sqrt{3}$.

296. а) 0; 6; б) 0; $\dfrac{4}{9}$; в) 0; $-1\dfrac{16}{19}$; г) 0; $\dfrac{-5\sqrt{3}}{3}$.

297. а) 0; б) 0; в) 0; 4; г) 0; $10\dfrac{1}{3}$; д) 0; $-1\dfrac{2}{9}$.

300. а) 0; 2; б) 0; -4; в) -2; 2; г) -4; 4; д) $-0{,}75$; 0,75.

303. $\dfrac{n}{m}$ и $-\dfrac{n}{m}$, если $m\neq0$; нет корней, если $m=0$ и $n\neq0$; x — любое число, если $m=n=0$.

308. а) 2; 4; б) -2; -3; в) -1; 2; г) -3; 2; д) нет корней; е) -2; ж) $\dfrac{-4-\sqrt{61}}{5}$; $\dfrac{-4+\sqrt{61}}{5}$; з) 0,5; 1,5; и) $-\dfrac{1}{3}$; 2.

309. а) $-0{,}5$; 1; б) 0,25; 0,5; в) $-2\frac{2}{3}$; 3; г) $-7\frac{1}{7}$; 7; д) 0,5; 2; е) 0,2; 5.

310. а) -1; 2,5; б) 6; 8; в) $-6\frac{5}{7}$; 7; г) $\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$; $\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$; д) $-0{,}5$; 9; е) $\frac{-13-\sqrt{253}}{14}$; $\frac{-13+\sqrt{253}}{14}$; ж) $-\frac{2}{3}$; $3\frac{1}{3}$; з) $-1{,}5$; 2,5.

311. а) -4; 5; б) $-2{,}5$; 2; в) $\frac{1}{3}$; 8; г) -1; 2; д) $-\frac{5}{6}$; 5; е) нет корней; ж) 2,5; 6; з) -1; 8.

315. При $m=-2\sqrt{3}$, $m=2\sqrt{3}$; б) ни при каких m; в) при $m=\frac{1}{3}$; г) при $m=0$, $m=-4$.

316. а) $\frac{1-\sqrt{1-a}}{a}$; $\frac{1+\sqrt{1-a}}{a}$; б) $2-2\sqrt{1-a}$; $2+2\sqrt{1-a}$.

317. а) При $a<1$; б) при $a=1$; в) при $a>1$.

318. а) a; $2a$; б) 0,5, если $a=0$; $\frac{1-\sqrt{1-a}}{a}$, $\frac{1+\sqrt{1-a}}{a}$, если $a\neq 0$ и $a<1$; 1, если $a=1$; нет корней, если $a>1$.

322. а) 2; б) нет корней; в) 0,5; 2; г) -3; $-\frac{1}{3}$; д) -12; -4; е) -2; 11; ж) нет корней; з) нет корней.

323. д) -2; 1; е) -2; 3; ж) -8; -6; з) -11; -6.

324. а) $-\frac{2}{3}$; 2; б) $2-\sqrt{14}$; $2+\sqrt{14}$; в) нет корней; г) $-1{,}5$; д) -2; $\frac{11}{16}$; е) $\frac{1-\sqrt{73}}{36}$; $\frac{1+\sqrt{73}}{36}$; ж) $\frac{1-\sqrt{29}}{14}$; $\frac{1+\sqrt{29}}{14}$; з) -1; $\frac{3}{14}$.

328. а) Нет корней; б) нет корней; в) $x_1+x_2=-3$; $x_1x_2=-2$; г) $x_1+x_2=3$; $x_1x_2=2$; д) $x_1+x_2=2$; $x_1x_2=1$; е) $x_1+x_2=-4$; $x_1x_2=4$.

341. 3 и 7.

343. а) 10 и 11; б) 14 и 15; в) 4 и 11; г) 16 и 28.

344. а) 7 и 13; б) -5 и 3.

345. а) 35 и 53; б) 51.

346. а) 160; б) 60 м^2; 4 см и 15 см; в) да, да, нет; г) в пятиугольнике.

347. а) 31; б) 7. **348.** а) 28 м; б) 5 и 5 см. **349.** На 20%, на 30%. **350.** На 5%, на 4%.

358. а) $-\sqrt{2}$; -1; 1; $\sqrt{2}$; б) -3; -1, 1; 3; в) -2; -1; 1; 2; г) -5; -1; 1; 5; д) -4; -2; 2; 4; е) нет корней; ж) $-\sqrt{3}$; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; з) $-2{,}5$; -2; 2; 2,5; и) -1; $-\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\sqrt{\frac{2}{3}}$; 1; к) $-\sqrt{0{,}6}$; $-\sqrt{0{,}4}$; $\sqrt{0{,}4}$; $\sqrt{0{,}6}$.

359. а) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; б) -4; 4; в) -4; 4; г) -5; 5; д) -1; 1; е) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; ж) $-\sqrt{3{,}5}$; $\sqrt{3{,}5}$; з) $-\sqrt{1{,}5}$; $\sqrt{1{,}5}$.

360. а) Нет корней; б) $-\sqrt{15}$; $\sqrt{15}$; в) нет корней; д) $-\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}$; $-\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}$; $\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}$; $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}$;

е) $-\sqrt{15+3\sqrt{21}}$; $-\sqrt{15-3\sqrt{21}}$; $\sqrt{15-3\sqrt{21}}$; $\sqrt{15+3\sqrt{21}}$.

365. а) -3; -2; 0; б) 0; 1; 3; в) -1; 0; 3; г) -5; 0; 2.

366. д) -2; -1; 1,5; е) $\frac{2}{3}$; 2; 3; ж) -3; -2; з) -1; 1; 2; 3.

372. а) 1; б) -2; в) нет корней; г) нет корней; д) -2.

373. а) 2; б) -4; в) нет корней.

374. а) -1; 0; 5; б) -6; 0; 3; в) 2; г) -1; д) нет корней.

376. а) Да; б) да; в) да; г) нет.

377. а) $\frac{1}{3}$; б) -1; в) 1; г) 10; д) -3; 3; е) -4; 5; ж) -3; 3; з) -5; 5.

378. а) -1; б) $\frac{16}{17}$; в) 0,5; г) 0,2.

379. а) -3; б) 0; в) 0; г) -2.

380. а) 2,5; б) 1; в) 1; г) 2.

381. а) 1,25; 2; б) -6; 4; в) нет корней; г) 1.

382. а) -16; 8; б) $-1,5$; в) $-1-\sqrt{6}$; $-1+\sqrt{6}$; г) 1; д) 7; е) $16\frac{1}{3}$; ж) нет корней.

383. а) -4; 2.

384. а) $\frac{5}{3}$; б) $\frac{7}{9}$. **385.** а) $\frac{6}{7}$; б) $\frac{1}{7}$; в) $\frac{3}{5}$.

386. а) 10 км/ч; б) 40 мин. **387.** 60 и 40 км/ч.

388. а) 10 км/ч; б) 4 км/ч. **389.** а) 48 и 40 деталей; б) 8 и 6 деталей.

390. а) 40 и 30 страниц; б) 2,5 и 3,5 м.

391. а) 25 и 20 ц; б) 14 ч; в) 4 и 12 км/ч.

392. За 10 и 15 ч. **393.** За 64 дня. **394.** 8 км/ч.

395. За 24 ч. **398.** а) -3; 1; б) нет корней; в) -1; 1; г) 2; 3; д) $\frac{-5-\sqrt{51}}{2}$; -6; 1; $\frac{-5+\sqrt{51}}{2}$.

399. а) $-\frac{1}{3}$; 1; б) -1; в) $\frac{3-\sqrt{17}}{4}$; $\frac{3+\sqrt{17}}{4}$; г) нет корней; д) $-1-\sqrt{6}$; -5; -1; $-1+\sqrt{6}$.

400. а) $(2x^2+3x+3)(x-1)+6$; б) $(x^3-x^2+2x+6)(x-1)+5$.

402. а) $(x^2+x+1)(x-2)$; б) $(x^2-x+1)(x-3)$;
в) $(x-1)(x-2)(x+3)$; г) $(x+1)(x+2)(x+3)$;
д) $(x-1)^2(x+2)^2$; з) $(x+1)^4$.

403. а) -1; -2; 1; б) -1; -2; -3; в) -4; г) -2; д) -4; 1; е) 1; 2.

404. а) 1; -2; б) -1; 2; в) -2; -1; 1; 3; г) -3; -1; 1; 2.

405. а) -3; 0,5; 2; б) -2; $-0,5$; 3; в) $-\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{3}$.

407. а) $7-2i$; б) $3+i$; в) $-18-38i$; г) $11,9+4,3i$.

408. а) $-i$; i; д) $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$; $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

409. а) $\frac{25}{39}$; б) 0; в) 32; г) 180.

410. а) $\frac{1}{6}$; б) $3\frac{67}{150}$; в) 1; г) $1\frac{37}{520}$.

412. а) 1,732; б) 2,236; в) 2,246. **413.** 1,41421.

415. а) Нет; б) нет; в) да; г) да; д) нет; е) нет.

418. а) 0,25; б) 50 000; в) 5000; г) 40 000.

419. а) $-\frac{1}{3a+2}$; б) $\frac{x^2+xy+y^2}{2(x^3+y^3)}$; в) $\frac{5}{6(x-y)}$; г) $\frac{ay-bx}{(a-b)xy}$; д) $\frac{2a-9}{a-3}$; е) $\frac{x^2+y^2}{2x}$; ж) $\frac{9x^2-25y^2}{15xy}$; з) $\frac{1}{3y}$; и) $a+\frac{1}{b}$; к) $4x+\frac{1}{3b}$.

420. а) 0; б) $\frac{3n-m-p-q}{(m-n)(n-p)(n-q)}$; в) 0; г) $\frac{4xy}{x^2-y^2}$; д) $\frac{4n^4}{m^4-n^4}$.

421. а) $\frac{1}{1-x}$; б) $-1-a$; в) $\frac{m^2-m+2}{m(m^2-4)}$; г) $\frac{1}{k-1}$; д) $\frac{4}{4-c^2}$; е) $\frac{y}{y^2-1}$; ж) -1; з) -1.

422. а) a; б) 2; в) $\frac{ab}{a+b}$; г) $\frac{xy}{x-y}$.

428. а) 36; 44; 63; б) при $a=-1$, 0, 2, 3.

436. а) $2m-3n$; б) $2a+3b$; в) a; $-b$; г) a; b.

443. а) $\frac{1}{x+2}$; б) $\frac{1}{x-1}$; в) $\frac{1}{x-1}$.

444. а) $\frac{1}{x-2}$; в) $\frac{x-5}{x-3}$.

445. а) $\frac{2x-3}{2x-7}$; б) $\frac{3x-1}{2x+9}$.

446. е) $\frac{x-12}{(x-1)(x+5)}$.

447. а) 0,5; 0,7; б) $\sqrt{2}$; $4\sqrt{2}$; в) $\frac{5-2\sqrt{31}}{11}$; $\frac{5+2\sqrt{31}}{11}$; г) нет корней; ж) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$; з) нет корней; и) -7; $\frac{3}{7}$; к) $-1,5$; $\sqrt{2}$; л) $\frac{4\sqrt{6}-2\sqrt{15}}{3}$; $\frac{4\sqrt{6}+2\sqrt{15}}{3}$; м) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$; $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$; н) $-\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$; $-\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$; о) нет корней; п) $-5\frac{1}{3}$; 0; р) 0; $\frac{6}{11}$.

450. а) $-\sqrt{\frac{9+\sqrt{145}}{2}}$; $\sqrt{\frac{9+\sqrt{145}}{2}}$; б) -4; 4; в) $-\sqrt{1+\sqrt{19}}$; $\sqrt{1+\sqrt{19}}$; г) $-\sqrt{7}$; $\sqrt{7}$; д) $-\sqrt{\frac{1-\sqrt{57}}{2}}$; $\sqrt{\frac{1+\sqrt{57}}{2}}$.

451. а) 1; б) -1; в) -2; -1; $-0,5$; 1; г) -1; д) -1; $\frac{1}{3}$; 3; е) -1; $\frac{2}{3}$; 1,5; ж) -5; 2; 5; з) -4; -3; 4; и) -3; -2; 3; к) -2; 2; 3.

452. а) -1; 0; 3; б) 0; $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; 5; в) 0; $\frac{1}{3}$; 3; г) 0; 1,5; 2; д) 5; 9; е) 3; 4; ж) -1; 0; з) $-\frac{7}{3}$; $\frac{1}{3}$; и) 0,5; 1; 2; к) -1; 0,5; 2.

453. а) 1; 25; б) 4; 25; в) 25; г) 49; д) -1; 0, 1; е) 0.

454. а) 3; б) 8; в) -2; г) 7; д) $2-\sqrt{7}$; $2+\sqrt{7}$; е) 4; ж) 6; з) 1.

455. а) $\frac{27-\sqrt{489}}{20}$; $\frac{27+\sqrt{489}}{20}$; б) $\frac{-5-\sqrt{57}}{2}$; $\frac{-5+\sqrt{57}}{2}$; в) нет корней; г) $-1,25$; 5; д) $2\frac{4}{7}$; 7; е) $\frac{-5-\sqrt{61}}{4}$; $\frac{-5+\sqrt{61}}{4}$.

456. а) $\frac{5}{3}$ и $\frac{5}{8}$; б) 22 см^3; в) 4 и 16; г) 12; 18; 90; д) 5; 7,5; 12,5.

457. За 18 смен.

458. а) 8 и 2; б) 4 и 12.

459. а) 3 и 12 ; б) 7 и 4.

460. а) 1 и 9; б) 8 и 8.

461. а) 420 деталей; б) 6600 деталей; в) 18 деталей.

463. а) $16\frac{2}{3}$ км; б) через 20 мин.

464. $14\frac{1}{6}$ км.

468. Через 6 ч.

469. а) 80 км.

472. а) 22 201; б) -111, $-\frac{1}{11}$.

473. 13 и -8.

476. 10 и 20%.

477. 11 и 12.

478. 32 см.

479. 15 и 10 га.

480. 1,2 и 2,4 кг.

481. По 25 г.

482. -11, -10, -9 или 9, 10, 11.

483. а) За 8 ч; б) за 6 и 8 ч.

484. а) 10 и 15 ч или 12 и 12 ч; б) 18 и 24 ч.

485. 24 года или 29 лет. В старинном руководстве написано: «...так как вопрос касается возраста дамы, то из вежливости нужно перед радикалом поставить нижний знак», т. е. считать, что возраст дамы 24 года.

486. а) 2 л.

487. а) 6 л; б) в 2 раза.

488. В 1,5 раза.

489. В 2 раза.

507. а) 8; б) $1\frac{1}{9}$; в) $\frac{2}{3}$.

508. а) $y=\frac{4}{3}x$; б) $y=-\frac{1}{8}x$; е) $y=1,5x$.

527. а) -1; б) $-\frac{1}{6}$.

532. а) $s=4t+5$; б) $s=6t+2$.

537. а) Первая точка двигалась в положительном направлении, вторая — в отрицательном; б) в момент $t=0$; в) в момент $t=4$; г) 0,5 и -1 м/с; д) $s=0,5t$; $s=-t+6$.

545. а) 7; б) 12; в) 7; г) -8.
546. а) 0; в) 0,2; г) 0,8.
550. а) x — любое число; б) x — любое целое число; в) $-1,5$; 2,5.
557. а) Да; б) нет; в) нет; г) да.
567. а) 12; б) 2 или -2; в) 8.
568. а) При $x \neq 0$; б) при $x = -2\sqrt{5}$; $2\sqrt{5}$; в) $y > 0,025$.
583. а) -1 или 1; б) $-0,008$.
586. а) 5; б) -8; в) 3.
587. а) $(-1; 0)$; б) $(-9; 0)$.
588. а) $x = 12$; б) $x = -7$.
593. а) $y = 0,5(x-5)^2$; б) $y = 5(x+4)^2$.
594. а) $y = 2(x+8)^2$.
595. а) Точка A принадлежит графику функции, точка B — нет.
596. а) -720; б) 7 или 5.
599. а) $y = x^2 + 5$; в) $y = 0,5x^2 + 3$.
602. а) $y = 2(x-5)^2 - 1$.
616. а) $y = x + 1$; б) $y = -2x + 10$.
617. а) $y = -x + 7$; б) $y = 2x - 4,5$.
619. а) $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 16$.
620. а) $3\frac{39}{154}$; б) $\frac{11}{40}$. **621.** а) $\frac{a^2}{a^3+b^3}$; б) 1. **622.** а) 1; б) $\frac{3-c}{c}$.
626. а) При $x \neq -1$; б) при $x \neq 1$.
627. д) При любых значениях x.
629. а) $\sqrt{3}+1$; б) $\sqrt{3}-1$; в) $\sqrt{2}-1$; д) $\sqrt{13}-2$; ж) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; и) $\sqrt{7}-\sqrt{5}$.
632. а) Нет; б) да; в) да; г) нет.
634. При $m = 1$ и $m = -2$.
636. При $t = 27$ и $t = -64$.
637. При $t = -2$ и $t = 3$.
685. а) 10; б) 7; в) $\sqrt{10}$; г) $\sqrt{58}$.
686. а) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$.
692. 6 дней.
693. За $\frac{100ab}{(a+b)(100+p)}$ ч; а) за 2 ч; б) за 1,5 ч.
702. 6 и 6 дм.
703. 70 см^2. **704.** 2,5 м. **705.** $2\frac{4}{13}$ ч.
725. а) 3,5; б) 15; в) 4; г) 2,8; д) $2\frac{2}{3}$; е) 1,4; ж) 10; з) $2\frac{2}{11}$; и) $2\frac{10}{13}$; к) $\frac{10}{17}$; л) $1\frac{2}{11}$; м) 16.
726. а) 2,1; б) 16,25; в) 108; г) 10; д) $\frac{7}{12}$; е) 0,5; ж) $\frac{12}{175}$; з) 0,9; и) 2.
739. а) На 5%; б) 840 деталей; в) 90%; ж) 12 т.
740. г) Нет; д) 100 м.
741. а) 31 машина; б) 14 г; в) 67,2 г.
742. а) 4,8 кг; б) 10 кг.
743. а) $14\frac{2}{7}$ м; б) 9 м.

746. а) На 120°; б) на 4 ч.
756. 12 и 8 станков.
760. 50 и 30 км/ч.
769. На 3 года.
770. 12 лет.
771. 16 лет. **772.** 16 мальчиков.
773. 15 лет.
774. 15 и 27 тыс. р.
775. 4,4 и 12,6 тыс. р.
776. 25%.
778. а) Да; б) нет.
780. б) Да; в) нет.
785. а) Да; б) нет.
786. а) Нет; б) да.
791. е) $(-2;\ -4)$; $(4;\ 2)$; ж) $(-3{,}5;\ 3{,}75)$; $(4;\ 0)$; з) $\left(\frac{5}{9};\ -\frac{2}{3}\right)$; $(0;\ 1)$; и) $(7;\ -2)$; $(11;\ -4)$.
792. а) $(-5;\ -4)$; $(4;\ 5)$; б) $(3;\ 2)$; $(-2;\ -3)$; в) $(2;\ 1)$; г) $(3;\ -1)$; д) $(-2{,}75;\ -3{,}25)$; е) $\left(-1\frac{1}{3};\ 1\frac{2}{3}\right)$.
793. а) $(x;\ -x)$, где x — любое число; б) $(x;\ x)$, где x — любое число; в) $(5{,}1;\ -4{,}9)$; г) $(-9{,}7;\ -10{,}3)$.
794. а) $(1;\ 6)$; $(6;\ 1)$; б) $(1;\ 5)$; $(-13;\ 19)$.
796. а) $(3;\ 2;\ 1)$; б) $(-1;\ -2;\ 3)$; в) $(2;\ 1;\ -1)$.
798. а) $(3;\ 4;\ 1)$; $(1;\ 2;\ 3)$; б) $(-1;\ -2;\ -3)$; $(-3;\ 0;\ -1)$.
800. а) 9 и 19; б) -11 и -21; 21 и 11; в) -4 и 7; г) 6 и -5.
802. а)12 и 9 м; б) 6 и 6м.
803. а) 40 и 32 детали; б) 5 м/с.
804. а) 3 и -8; -5 и -16; б) 18 и 14; -18 и -14.
805. а) 64; б) 24.
806. а) 25; б) 54; в) 34 и 43.
807. а) За 12 и 24 ч; б) за 10 дней.
808. а) За 12 и 8 дней; б) за 10 и 12 дней.
809. а) 50 и 25 деталей; б) 10 и 15 дней.
810. а) 36 и 12 ч; б) 30 и 20 ч.
811. а) 120 листов за 15 дней; б) 110 и 132 ч.
812. а) $(5x_1;\ 4-3x_1)$, где x — целое число.
814. а) $(4;\ -2)$; $(6;\ -4)$; $(0;\ -6)$; $(2;\ -8)$.
816. а) $(1;\ 2)$; $(3;\ -2)$; $(-1;\ -2)$; $(-3;\ 2)$;
д) $(3;\ 3)$; $(1;\ 3)$; $(2;\ 4)$; $(2;\ 2)$;
е) $(5;\ 1)$; $(5;\ -3)$; $(7;\ -1)$; $(3;\ -1)$.
817. Воробьев, голубей и горлиц 6, 20, 14 или 15, 10, 15.
832. а) 0,5; б) 2.
834. а) $a=-0{,}25$; $b=-5$; б) $a=-1$; $b\neq-2$.
838. а) $(-3;\ 3)$; $(3;\ 3)$; б) $(2;\ 1)$.
839. а) Нет решений; б) 2 решения; д) 2 решения. Указание. Преобразуйте второе уравнение к виду $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.
847. а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{6}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{3}$; д) 0; е) 1.

848. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) 1; г) 0. **850.** а) $\frac{4}{9}$; б) $\frac{5}{9}$.

851. а) $\frac{1}{28}$; б) $\frac{3}{28}$; в) $\frac{3}{28}$; г) 0. **852.** а) $\frac{1}{18}$. **853.** $\frac{1}{5}$. **854.** $\frac{1}{9}$.

856. а) $\frac{1}{20}$; б) $\frac{1}{60}$; в) $\frac{1}{120}$. **860.** $\frac{1}{4}$. **864.** $\frac{1}{3}$.

865. а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{3}$; г) 0. **867.** а) $\frac{1}{24}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{4}$.

868. а) 120; б) 720; в) 5040.
870. а) 10; б) 50; в) 380.
872. а) 24; б) 20; в) 60; г) 840.
873. а) 4; б) 5; в) 10.
874. а) 10; б) 45; в) 66; г) 12.
875. 30. **876.** 10. **877.** 20.

878. а) $\frac{1}{42}$; б) $\frac{1}{21}$; в) $\frac{1}{7}$; г) $\frac{2}{7}$.

882. а) (8; 12); (12; 8); б) (12; 8); в) (0; 0); (6; 2).
883. е) (6; 4); (4; 6); з) (3; 7); (7; 3).
885. в) (6; 4); (4; 6); г) (—15; 25); (8; 2).
886. а) (36; 64); (64; 36).

898. а) 0,5; б) $\frac{m+n}{3m}$. **899.** а) $\frac{3x}{4y}$; б) $\frac{1}{ab}$.

948. 5 ч. Лишнее условие «20 км».
949. а) 2550 и 2450 л; б) за 4 ч; в) за 27 ч; г) за 4,8 ч.
950. а) 150 и 450 г; б) 75 кг; в) 6 л.
952. 7 и 5 мешков.
956. 5 человек.
959. Для 120 коров на 50 дней. **963.** 5, 11 и 13 р.

ПОСЛЕСЛОВИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Учебник «Алгебра 8» продолжает серию учебников «МГУ — школе» авторов С. М. Никольского, М. К. Потапова, Н. Н. Решетникова, А. В. Шевкина. Этот учебник предназначен для общеобразовательных классов, в которых дополнительные материалы и сложные задачи можно не рассматривать. Если же имеется достаточно часов, если класс проявляет интерес к математике, то за счет *дополнений* в конце глав учебников, а также пунктов и отдельных задач со звездочкой, необязательных в обычных общеобразовательных классах, можно расширить и углубить содержание изучаемого материала до объема, предусмотренного программой для классов с углубленным изучением математики, т. е. учебники можно использовать как в обычных, так и в классах с углубленным изучением математики.

Авторы учебников серии «МГУ — школе» считают принципиально важным вести обучение школьников в рамках общеобразовательной программы и программы с углубленным изучением математики по одним и тем же учебникам, начиная с 7 класса. Тогда переход с одной программы обучения на другую не будет вызывать трудностей ни для учащихся, ни для учителей.

В 7 классе уже изучена тема «Действительные числа», позволяющая сформировать у учащихся представление о действительном числе как о длине отрезка, точнее, как о координате точки координатной оси. Это дает возможность значительно упростить рассуждения, связанные с построением графиков функций, с определением квадратного корня и т. п. При таком построении курса алгебры изучение функционального материала имеет полноценный научный фундамент.

Учебник «Алгебра 8» включает четыре главы: I. Простейшие функции. Квадратные корни. II. Квадратные и рациональные уравнения. III. Линейная и квадратичная функции. IV. Системы рациональных уравнений. К каждой главе имеются дополнения, содержащие исторические сведения и необязательный материал, не входящий в программу для общеобразовательных классов, а также задания для повторения.

Первая глава начинается с повторения и расширения сведений о числовых неравенствах, числовых множествах, координатной оси и системе координат на плоскости.

Основная цель первых пунктов — ввести новые обозначения, повторить свойства числовых неравенств, напомнить о том, что между точками координатной оси и всеми действительными числами, а также между точками координатной плоскости и упорядоченными парами чисел имеется взаимно однозначное соответствие. Иными словами, надо,чтобы учащиеся осознали, что координатная ось полностью заполнена числами, что она не «дырявая». Это будет вскоре использовано при построении графиков функций — надо, чтобы их можно было строить по всем точкам, а не только по «рациональным» (имеющим рациональные координаты) точкам.

Затем вводится понятие функции по Лобачевскому и Дирихле, говорится, что функция может быть задана или формулой, или таблицей, или графиком. Функцию, график которой является непрерывной линией, получаемой непрерывным движением карандаша без отрыва от бумаги, называют *непрерывной.* Определение непрерывной функции через непрерывность ее графика не требует от учащихся каких-либо особых усилий для его понимания. Рассматривая непрерывный график, легко убедить учащихся в том, что приведенное определение равносильно и такому определению: функция непрерывна, если малому изменению аргумента x соответствует малое изменение функции $f(x)$. В обычных классах не стоит пытаться как-либо пояснить это аналитически, достаточно убедиться в этом наглядно с помощью графика.

Второй параграф посвящен изучению простейших функций: $y=x$, $y=x^2$, $y=\frac{1}{x}$. При их рассмотрении вводятся понятия: возрастающая, убывающая, четная, нечетная функции — и показывается, как строить графики этих функций.

Параграф 3 посвящен квадратным корням. Так как в 7 классе уже изучены **все** действительные числа, то здесь надо сначала, используя непрерывность графика функции $y=x^2$, убедиться чисто графически в существовании только двух корней из положительного числа.

Что же касается свойств квадратных корней, то они в учебнике доказаны с использованием ранее доказанных утверждений.

В результате изучения главы I учащиеся должны овладеть основными понятиями, связанными с функциями, научиться применять их к простейшим функциям, добиться вполне осознанного и активного овладения операциями над квадратными корнями.

Глава II в основном посвящена квадратным уравнениям. Изложение материала отличается от традиционного лишь тем, что сначала изучается квадратный трехчлен и с опорой на этот материал вводятся формулы корней квадратного уравнения. В § 5 рассматриваются рациональные уравнения, конечно только те, которые связаны с решением одного или нескольких квадратных или линейных уравнений. Следует обратить внимание учащихся на то, что при решении рациональных уравнений надо пользоваться всеми свойствами алгебраических дробей, кроме правил сокращения (или умножения) дробей на множитель, содержащий неизвестную величину.

Особо надо подчеркнуть, что неправильное употребление правила сокращения дробей может привести к потере или приобретению «лишних» корней. Необходимо затратить достаточно времени на то, чтобы учащиеся научились решать текстовые задачи при помощи рациональных уравнений.

В результате изучения главы II учащиеся должны научиться решать квадратные уравнения и сводящиеся к ним рациональные уравнения и уметь применять эти знания к решению текстовых задач.

Глава III посвящена изучению линейной и квадратичной функций. При изучении функции $y=ax^2\ (a>0)$ необходимо обратить внимание на получение графика этой функции растяжением графика функции $y=x^2$. На примерах функций $y=kx$, $y=|x|$, $y=ax^2$ трижды отрабатывается прием переноса графика функции вдоль осей Ox и Oy. В качестве необязательного материала по этой теме даны уравнения прямой и окружности, показаны приемы построения графиков функций, содержащих модули.

В результате изучения главы III учащиеся должны научиться строить график любой линейной и квадратичной функций и твердо знать свойства этих функций.

Глава IV посвящена решению систем рациональных уравнений; основным приемом решения систем, который рассматривается в § 8, является способ подстановки. Таким образом, в этом параграфе рассматриваются системы, которые могут быть решены способом подстановки. Искусственные способы решения систем рациональных уравнений практически не рассматриваются. Все сводится так или иначе к способу подстановки.

В § 9 рассматриваются примеры применения графиков к решению систем уравнений и отдельных уравнений, решение которых приводит к решению системы уравнений графическим способом. Учащиеся должны понять, что применение графиков полезно при выяснении количества решений системы уравнений, знаков решений, различных оценках, но точных решений, вообще говоря, этот способ не дает. Точные решения получаются лишь в исключительных случаях, и эти случаи требуют дополнительной проверки.

В результате изучения главы IV учащиеся должны научиться решать системы рациональных уравнений и применять полученные знания для решения текстовых задач.

Ниже приведены три варианта примерного *тематического планирования*. **I вариант** предназначен для работы при наименьшем числе часов (102), **II вариант** — для работы при 119 часах, а **III вариант** — для работы по программе для классов (школ) с углубленным изучением математики (170 ч).

8 класс

I вариант: 3 ч в неделю, всего 102 ч

II вариант: 4 ч в неделю в I полугодии, 3 ч в неделю во II полугодии, всего 119 ч

В скобках указано число часов, отведенных на изучение главы, параграфа, пункта по **I варианту планирования**. Звездочкой отмечены дополнительные уроки при работе по **II варианту планирования.**

Глава I. Простейшие функции. Квадратные корни (25+6*)

1. Функции и графики (9).
1.1. Числовые неравенства (3).
1.2. Множества чисел (2).
1.3. Декартова система координат на плоскости (1).
1.4. Понятие функции (2).
1.5. Понятие графика функции (1).

2. Функции $y=x$, $y=x^2$, $y=\frac{1}{x}$ (7 + 2*).

2.1. Функция $y=x$ и ее график (2).
2.2. Функция $y=x^2$ $(1+1^*)$.
2.3. График функции $y=x^2$ (1).
2.4. Функция $y=\frac{1}{x}\,(x>0)$ (1).
2.5. График функции $y=\frac{1}{x}$ $(1+1^*)$.
Контрольная работа № 1 (1).

3. Квадратные корни (9+2*).
3.1. Понятие квадратного корня (2).
3.2. Арифметический квадратный корень (2).
3.3. Квадратный корень из натурального числа (1).
3.4. Приближенное вычисление квадратных корней (2*).
3.5. Свойства арифметических квадратных корней (3).
Контрольная работа № 2 (1).
Дополнения к главе I (2*).
Множества.

Глава II. Квадратные и рациональные уравнения (29+4*)

4. Квадратные уравнения (16).
4.1. Квадратный трехчлен (2).
4.2. Понятие квадратного уравнения (2).
4.3. Неполное квадратное уравнение (2).
4.4. Решение квадратного уравнения общего вида (3).
4.5. Приведенное квадратное уравнение (2).
4.6. Теорема Виета (2).
4.7. Применение квадратных уравнений к решению задач (2).
Контрольная работа № 3 (1).

5. Рациональные уравнения (13+1*).
5.1. Понятие рационального уравнения (1).
5.2. Биквадратное уравнение (2).
5.3. Распадающиеся уравнения (2).
5.4. Уравнение, одна часть которого алгебраическая дробь, а другая равна нулю (3).
5.5. Решение рациональных уравнений (2).

5.6. Решение задач при помощи рациональных уравнений (2).
5.7. Решение рациональных уравнений заменой неизвестных (1*).
Контрольная работа № 4 (1).
Дополнения к главе II (3*).
Разложение многочленов на множители и решение уравнений.
Комплексные числа.

Глава III. Линейная и квадратичная функции (20+4*)

6. Линейная функция (9+2*).
6.1. Прямая пропорциональная зависимость (2).
6.2. График функции $y=kx$ (3).
6.3. Линейная функция и ее график (3).
6.4. Равномерное движение (1).
6.5. Функция $y=|x|$ и ее график (1*).
6.6. Функции $y=[x]$ и $y=\{x\}$ (1*).
7. Квадратичная функция (11).
7.1. Функция $y=ax^2$ $(a>0)$ (2).
7.2. Функция $y=ax^2$ $(a\neq 0)$ (2).
7.3. Функция $y=a(x-x_0)^2+y_0$ (3).
7.4. График квадратичной функции (3).
Контрольная работа № 5 (1).
Дополнения к главе III (2*).
Функция $y=\dfrac{k}{x-x_0}+y_0$.
Уравнение прямой, уравнение окружности.
Построение графиков функций, содержащих модули.

Глава IV. Системы рациональных уравнений (19+2*)

8. Системы рациональных уравнений (10).
8.1. Понятие системы рациональных уравнений (2).
8.2. Системы уравнений первой и второй степени (3).
8.3. Решение задач при помощи систем уравнений первой и второй степени (3).
8.4. Решение задач при помощи систем рациональных уравнений (2).
9. Графический способ решения систем уравнений (9).
9.1. Графический способ решения систем двух уравнений первой степени с двумя неизвестными (2).
9.2 Графический способ исследования системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными (2).
9.3. Решение систем уравнений первой и второй степени графическим способом (2).
9.4. Примеры решения уравнений графическим способом (2).
Контрольная работа № 6 (1).
Дополнения к главе IV (2*).
Решение уравнений в целых числах.
Вероятность события.
Перестановки, размещения и сочетания.

Повторение (9+1*).

Повторение курса алгебры 8 класса (7+1*).

Итоговая контрольная работа № 8 (2).

III вариант (углубленное изучение математики)
5 ч в неделю, всего 170 ч

1. **Функции и графики (12).**
2. **Функции $y = x$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$ (11)**
3. **Квадратные корни (16).**
4. **Квадратные уравнения (20).**
5. **Рациональные уравнения (20).**
6. **Линейная функция (14).**
7. **Квадратичная функция (17).**
8. **Системы рациональных уравнений (16).**
9. **Графический способ решения систем уравнений (14).**

Решение задач (17).

Повторение (13).

Для повышения уровня математического образования в стране, совершенствования школьных учебников по инициативе ректора Московского университета академика В. А. Садовничего разработана Программа «МГУ — школе» и началось издание учебников, сохраняющих и развивающих лучшие традиции отечественного математического образования.

Авторы выражают благодарность учителям, приславшим свои замечания и предложения по совершенствованию учебников. Это О. В. Бощенко (г. Волгоград), О. А. Сухарева (Санкт-Петербург), В. И. Гридасов и Е. А. Удовиченко (г. Воронеж), И. С. Хавжу (Москва) и др.

Особо следует отметить учителей средней школы № 5 г. Пятигорска А. В. Рыжук и Н. А. Савенко, которые разработали собственную систему контроля знаний учащихся.

Авторы с благодарностью примут замечания и предложения, которые могут помочь в совершенствовании учебников.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I. ПРОСТЕЙШИЕ ФУНКЦИИ. КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

§ 1. Функции и графики

1.1. Числовые неравенства 3
1.2. Множества чисел 8
1.3. Декартова система координат на плоскости 13
1.4. Понятие функции . . . 17
1.5. Понятие графика функции 21

§ 2. Функции $y=x$, $y=x^2$, $y=\frac{1}{x}$

2.1. Функция $y=x$ и ее график 25
2.2. Функция $y=x^2$ . . . 28
2.3. График функции $y=x^2$ 30
2.4. Функция $y=\frac{1}{x}$ 33
2.5. График функции $y=\frac{1}{x}$ 35

§ 3. Квадратные корни

3.1. Понятие квадратного корня . . 40
3.2. Арифметический квадратный корень . . 43
3.3. Квадратный корень из натурального числа . 45
3.4. Приближенное вычисление квадратных корней 47
3.5. Свойства арифметических квадратных корней 49

Дополнения к главе I

1. Множества 55
2. Исторические сведения 58
3. Задания для повторения 60

Глава II. КВАДРАТНЫЕ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 4. Квадратные уравнения

4.1. Квадратный трехчлен 74
4.2. Понятие квадратного уравнения 78

4.3. Неполное квадратное уравнение 81
4.4. Решение квадратного уравнения общего вида 85
4.5. Приведенное квадратное уравнение . . 89
4.6. Теорема Виета 91
4.7. Применение квадратных уравнений к решению задач 95

§ 5. Рациональные уравнения

5.1. Понятие рационального уравнения 98
5.2. Биквадратное уравнение 99
5.3. Распадающиеся уравнения 102
5.4. Уравнение, одна часть которого алгебраическая дробь, а другая — нуль 105
5.5. Решение рациональных уравнений 108
5.6. Решение задач при помощи рациональных уравнений . . . 111
5.7*. Решение рациональных уравнений заменой неизвестных . 115

Дополнения к главе II

1. Разложение многочленов на множители и решение уравнений . . 118
2. Комплексные числа 124
3. Исторические сведения 127
4. Задания для повторения 129

Глава III. ЛИНЕЙНАЯ И КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИИ

§ 6. Линейная функция

6.1. Прямая пропорциональная зависимость 141
6.2. График функции $y=kx$ . . . 142
6.3. Линейная функция и ее график 147
6.4. Равномерное движение . . 152
6.5*. Функция $y=|x|$ и ее график 155
6.6*. Функции $y=[x]$ и $y=\{x\}$ 159

§ 7. Квадратичная функция

7.1. Функция $y=ax^2$ $(a>0)$ 161
7.2. Функция $y=ax^2$ $(a\neq 0)$. 167
7.3. Функция $y=a(x-x_0)^2+y_0$ . . 169
7.4. График квадратичной функции 174

Дополнения к главе III

1. График функции $y=\dfrac{k}{x-x_0}+y_0$ 178
2. Построение графиков функций, содержащих модули . 181
3. Уравнение прямой, уравнение окружности . . 185
4. Исторические сведения 188
5. Задания для повторения 190

Глава IV. СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 8. Системы рациональных уравнений

8.1. Понятие системы рациональных уравнений . . 208
8.2. Системы уравнений первой и второй степени 212
8.3. Решение задач при помощи систем уравнений первой и второй степени 218
8.4. Решение задач при помощи систем рациональных уравнений 220
8.5*. Решение уравнений в целых числах 226

§ 9. Графический способ решения систем уравнений

9.1. Графический способ решения системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными 230
9.2. Графический способ исследования системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными 234
9.3. Решение систем уравнений первой и второй степени графическим способом 239
9.4. Примеры решения уравнений графическим способом 242

Дополнения к главе IV

1. Вероятность события 245
2. Перестановки 249
3. Размещения и сочетания 250
4. Исторические сведения . 254
5. Задания для повторения 256

Предметный указатель . . 268
Ответы 269
Послесловие для учителя 279