И. А. Соловьев, В. В. Шевелев
А. В. Червяков, А. Ю. Репин

ПРАКТИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Линейная алгебра
Векторная алгебра
Аналитическая геометрия
Введение в математический анализ
Производная и ее приложения

ЛАНЬ

И. А. СОЛОВЬЕВ, В. В. ШЕВЕЛЕВ,
А. В. ЧЕРВЯКОВ, А. Ю. РЕПИН

ПРАКТИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебное пособие

ЛАНЬ®
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ · МОСКВА · КРАСНОДАР
2007

ББК 22.1я7
С 60

**Соловьев И. А., Шевелев В. В.,
Червяков А. В., Репин А. Ю.**

С 60 Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия, введение в математический анализ, производная и ее приложения: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2007. — 320 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-0751-4

Учебное пособие посвящено практическому освоению теоретического материала по следующим разделам высшей математики: векторная алгебра, аналитическая геометрия, элементы линейной алгебры, введение в математический анализ, дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Предлагается последовательное изучение методов решения основных задач по каждому разделу. Имеется большое количество задач для самостоятельного решения, которые снабжены ответами. Пособие содержит расчетно-графические задания по всем рассмотренным темам.

В пособии излагаются основы высшей математики, поэтому оно может быть полезным для студентов инженерных специальностей университетов, академий, технических, экономических, финансовых, экологических и сельскохозяйственных вузов как очной, так и заочной или дистанционной форм обучения. Расчетно-графические задания могут использоваться преподавателями в качестве заданий для самостоятельной внеаудиторной работы. Предполагается выпуск дальнейших частей учебного пособия.

ББК 22.1я7

Обложка
А. Ю. ЛАПШИН

ПРЕДИСЛОВИЕ

В соответствии с Государственным образовательным стандартом учебными планами всех математических, технических, экономических и многих других специальностей предусмотрено изучение основ высшей математики, которые затем используются в прикладных дисциплинах. Предлагаемое учебное пособие предназначено в первую очередь для студентов инженерных специальностей, оно может быть полезно и для студентов экономических и других специальностей как очной, так и заочной и дистанционной форм обучения.

В настоящем пособии осуществлена попытка соединить воедино материалы, связанные с теоретическими сведениями, подробными решениями типовых задач, а также задач повышенной трудности, задач, снабженных только ответами для самостоятельной работы как в аудиториях, так и вне аудиторий. Кроме того, приведены контрольные расчетно-графические задания, предназначенные для самостоятельной внеаудиторной работы. Среди рассмотренных задач имеется как набор основных традиционных, которые необходимы для начального освоения теоретического материала, так и новые задачи, ранее не входившие в существующие сборники задач.

В первой главе вводятся необходимые теоретические сведения из линейной алгебры, рассматриваются задачи, связанные с матричным исчислением, определителями, решением систем алгебраических уравнений, элементами линейных преобразований.

Во второй главе излагаются основные понятия векторной алгебры и методы решения задач по этому разделу.

В третьей и четвертой главах подробно излагаются приемы применения понятий векторной алгебры к решению задач аналитической геометрии на плоскости и в пространстве. Рассматриваются также и специфические задачи этого раздела, связанные с кривыми второго порядка, а также поверхностями.

Пятая глава посвящена применению теории пределов, исследованию свойств непрерывных функций.

В шестой главе рассматриваются задачи, связанные с понятием производной, а также применением этого понятия к исследованию свойств функции одной переменной. Предложены оригинальные постановки задач, связанные с устойчивостью операции дифференцирования.

В конце учебного пособия приводится большой набор расчетно-графических заданий, предназначенных для самостоятельной работы по всем представленным разделам. Каждое отдельное задание содержит по 30 задач.

В конце пособия представлены ответы к задачам для аудиторной и внеаудиторной работы для самостоятельного решения.

Предполагается выпуск дальнейших частей учебного пособия.

ГЛАВА 1

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Определение 1.1. Матрицей размера $m \times n$ ($m \times n$-матрицей) называется прямоугольная таблица чисел или функций a_{ij}, где $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$, состоящая из строк и столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \| a_{i,j} \|. \qquad (1.1)$$

Здесь a_{ij} — элементы матрицы, i — номер строки, j — номер столбца, числа. Нумерация строк и столбцов матрицы показана на рисунке 1.1.

$$\begin{array}{l} 1 \to 2 \to 3 \ \dots \ n \\ \downarrow \\ 2 \\ \downarrow \\ 3 \\ \vdots \\ \downarrow \\ m \end{array}$$

Рис. 1.1

Определение 1.2. Размерами матрицы называется совокупность чисел (m; n), первое из которых m обозначает число строк матрицы, а второе n — число столбцов.

Если число строк матрицы не равняется числу столбцов, т. е. $m \neq n$, то матрица называется прямоугольной, если же $m = n$ — квадратной:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1.2)$$

В случае квадратной матрицы (1.2) размеров $(n;\ n)$ используется термин «матрица порядка n».

У квадратной матрицы (1.2) различают главную диагональ, образуемую элементами a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}, и побочную диагональ, образуемую элементами a_{1n}, a_{2n-1}, ..., a_{n1}.

Определение 1.3. Квадратная матрица, все элементы которой, стоящие на главной диагонали, отличны от нуля, а все остальные элементы (недиагональные) равны нулю, называется диагональной матрицей.

Определение 1.4. Диагональная матрица, все диагональные элементы которой равны единице, называется единичной матрицей и чаще всего обозначается буквой E. Таким образом,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Вектором-столбцом или вектором-строкой называются матрицы, состоящие соответственно из одного столбца или одной строки:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad Y = (y_1\ y_2 \dots y_n). \tag{1.3}$$

Очевидно это матрицы размеров $(m;\ 1)$ и $(1;\ n)$ соответственно.

Определение 1.5. Матрица, у которой все элементы равны нулю, называется нулевой матрицей или (нуль-матрицей) и обозначается символом O.

ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

Определение 1.6 (равенство матриц). Две матрицы $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|b_{ij}\|$ считаются равными, если эти матрицы имеют одинаковые размеры и все их соответствующие элементы совпадают, т. е.

$$A = B, \text{ если } a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \tag{1.4}$$

Определение 1.7. Суммой двух матриц $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|b_{ij}\|$ ($i = 1, 2, ...; m$; $j = 1, 2, ..., n$) одинаковых размеров (m; n) называется матрица $C = \|c_{ij}\|$ ($i = 1, 2, ...; m$; $j = 1, 2, ..., n$) тех же размеров (m; n), элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц-слагаемых

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}. \qquad (1.5)$$

Обозначение суммы матриц: $C = A + B$.

Определение 1.8. Произведением матрицы $A = \|a_{ij}\|$ ($i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$) на вещественное число λ называется матрица $C = \|c_{ij}\|$ ($i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$) тех же размеров, элементы которой равны

$$c_{ij} = \lambda a_{ij} \quad (i = 1, 2, ..., m; \; j = 1, 2, ..., n). \qquad (1.6)$$

Обозначение: $C = \lambda A$ или $C = A\lambda$.

Определение 1.9. Матрица $B = \|b_{ij}\|$ ($i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$) называется транспонированной по отношению к матрице $A = \|a_{ij}\|$ ($i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., m$), если строки матрицы A превращаются в столбцы матрицы B с сохранением порядка их следования: $b_{ij} = a_{ij}$ для всех $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$. Транспонированная матрица обозначается символом A^T. Переход от матрицы A к матрице A^T называется транспонированием.

СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ СЛОЖЕНИЯ МАТРИЦ И УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦЫ НА ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО

1. $A + B = B + A$ — переместительное свойство.
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ — сочетательное свойство.
3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ — распределительное свойство относительно суммы матриц.
4. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ — распределительное свойство относительно суммы чисел (λ и μ).
5. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ — сочетательное свойство относительно числового множителя.
6. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
7. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
8. $A + O = A$ — сумма матрицы A и нулевой матрицы O.
9. Для каждой матрицы A существует противоположная матрица, которая удовлетворяет равенству $A + \bar{A} = O$.

Отсюда следует, что $\bar{A} = -A$, т. е. $\bar{A} = \| -a_{ij} \| = -\| a_{ij} \|$. Таким образом, $A + (-A) = O$.

Замечание. Разностью двух матриц A и B одинаковых порядков называется такая матрица C тех же порядков, которая в сумме с матрицей B дает матрицу A, т. е. если $B + C = A$, то $C = A - B$.

Из приведенных выше определений линейных операций над матрицами и их свойств следует, что разность двух матриц A и B может быть получена по правилу $C = A + (-1) \cdot B$.

Определение 1.10. Произведением матрицы A размеров $(m;\ k)$ на матрицу B размеров $(k;\ n)$ называется матрица $C = AB$ размеров $(m;\ n) = (m;\ k)(k;\ n)$, каждый элемент которой получается по правилу умножения «строка на столбец»:

c_{11} = элемент a_{11} первой строки матрицы A, умноженный на элемент b_{11} первого столбца матрицы B, + элемент a_{12} первой строки матрицы A, умноженный на элемент b_{21} матрицы B, + ..., + элемент a_{1k} первой строки матрицы A, умноженный на элемент b_{k1} первого столбца матрицы B; ...;

c_{ij} = элемент a_{i1} i-й строки матрицы A, умноженный на элемент b_{1j} j-го столбца матрицы B, + элемент a_{i2} i-й строки матрицы A, умноженный на элемент b_{2j} j-го столбца матрицы B, + ..., + элемент a_{ik} i-й строки матрицы A, умноженный на элемент b_{kj} j-го столбца матрицы B; ...;

c_{mn} = элемент a_{m1} m-й строки матрицы A, умноженный на элемент b_{1n} n-го столбца матрицы B, + элемент a_{m2} m-й строки матрицы A, умноженный на элемент b_{2n} n-го столбца матрицы B, + ..., + элемент a_{mk} m-й строки матрицы A, умноженный на элемент b_{kn} n-го столбца матрицы B.

Таким образом, элементы c_{ij} определяются по формуле

$$c_{ij} = \sum_{i=1}^{k} a_{ik} \cdot b_{ki} \quad (i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n), \tag{1.7}$$

т. е. элемент матрицы $C - c_{ij}$, стоящий в i-й строке и j-м столбце, равен сумме попарных произведений элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца B:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} + \ldots + \\ + a_{in}b_{nj} \quad (i = 1, \ldots m; \quad j = 1, \ldots, n).$$

Замечание. Из сформулированного определения операции перемножения матриц вытекает, что матрицу A можно умножать на матрицу B только в случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

СВОЙСТВА ОПЕРАЦИИ ПЕРЕМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ

1. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ — сочетательное свойство.
2. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ — распределительное свойство относительно суммы матриц.
3. $A \cdot (\lambda \cdot B) = \lambda \cdot (A \cdot B)$ — сочетательное свойство относительно числового множителя λ.
4. $A \cdot E = E \cdot A = A$ — произведение квадратной матрицы A и единичной матрицы E.
5. $(A \cdot B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$.

Замечание 1. По отношению к произведению двух матриц переместительный закон в общем случае не выполняется:

$$AB \neq BA.$$

Замечание 2. Для квадратной матрицы A ее степень n определяется следующим образом:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots A}_{n \text{ раз}} = A^{n-1} \cdot A, \quad n \in N, \quad A^0 = E. \qquad (1.8)$$

Каждой квадратной матрице (1.2) ставится в соответствие число, называемое определителем матрицы A и обозначаемое

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad (1.9)$$

где числа a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ называются элементами определителя.

В записи первый индекс i означает номер строки, а второй индекс j — номер столбца.

Определение 1.11. Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка A называется определитель n-го порядка, соответствующий той матрице, которая получается из матрицы A в результате вычеркивания i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}. Минор элемента обозначается обычно символом M_{ij}. Таким образом,

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.10)$$

Минор M_{11} для элемента a_{11} матрицы первого порядка A, состоящей всего из одного элемента, равен этому элементу.

Определение 1.12. Алгебраическим дополнением A_{ij} для элемента a_{ij} называется минор M_{ij} этого элемента, взятый со знаком «+», если сумма индексов строки и столбца $(i + j)$, на пересечении которых стоит этот элемент, четная, и со знаком «–», если сумма индексов нечетная.

Таким образом,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \quad (1.11)$$

Определение 1.13. Определителем порядка n, соответствующим матрице A, называется число, обозначаемое $\det A$ и вычисляемое по формуле

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j}.$$

Таким образом, по определению

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j}. \quad (1.12)$$

Каков бы ни был номер строки $i = 1, 2, \dots, n$ или столбца $j = 1, 2, \dots, n$, определитель n-го порядка равен сумме произведений элементов этой строки или этого столбца на их алгебраические дополнения, т. е.

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}. \tag{1.13}$$

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

1. Строки и столбцы определителя равноправны, т. е. величина определителя не изменится, если поменять местами его строки и столбцы с сохранением порядка их следования. Эта операция называется транспонированием определителя. В соответствии со сформулированным свойством $\det A = \det A^{\mathrm{T}}$.

2. При перестановке местами двух строк (или двух столбцов) определитель сохраняет свою абсолютную величину, но меняет знак на противоположный.

3. Определитель с двумя одинаковыми строками (или столбцами) равен нулю.

4. Умножение всех элементов некоторой строки (или некоторого столбца) определителя на число λ равносильно умножению определителя на число λ.

5. Если все элементы какой-либо строки (или какого-либо столбца) определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

6. Если элементы двух строк (или двух столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

7. Если к элементам некоторой строки (или некоторого столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (другого столбца), умноженные на произвольный множитель λ, то величина определителя не изменится.

8. Сумма произведений элементов какой-либо строки (какого-либо столбца) определителя на соответствующие алгебраические дополнения элементов любой другой строки (любого другого столбца) равна нулю.

9. Если все элементы i-й строки определителя представлены в виде суммы двух слагаемых $a_{ij} = b_j + c_j$, то определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки, кроме i-й, такие же, как и в заданном определителе,

а i-я строка в одном из слагаемых состоит из элементов b_j, а в другом — из элементов c_j.

Аналогичное свойство справедливо и для столбцов определителя.

10. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей: $\det(A\cdot B) = \det A\cdot\det B$.

Для вычисления определителя любого порядка можно применять метод последовательного понижения порядка определителя. Для этого пользуются правилом разложения определителя по элементам строки или столбца (1.13). Еще один способ вычисления определителей заключается в том, чтобы с помощью элементарных преобразований со строками (или столбцами), прежде всего в соответствии со свойствами 4 и 7 определителей, привести определитель к виду, когда под главной диагональю определителя (определяемой так же, как и для квадратных матриц) все элементы равны нулю. Тогда определитель равен произведению элементов, расположенных на главной диагонали.

При вычислении определителя последовательным понижением порядка для уменьшения объема вычислительной работы целесообразно с помощью свойства 7 определителей добиться обнуления части элементов какой-либо строки или какого-либо столбца определителя, что уменьшит число алгебраических дополнений, вычисляемых в (1.13).

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Определение 1.14. Квадратная матрица A называется вырожденной (особенной), если определитель этой матрицы равен нулю, и невырожденной (неособенной) в противном случае.

Определение 1.15. Для любой невырожденной матрицы A существует и притом единственная матрица A^{-1} такая, что

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E, \tag{1.14}$$

где E — единичная матрица тех же порядков, что и A. Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A.

Обратная матрица определяется формулой

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n n} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}, \qquad (1.15)$$

где A_{ij} — алгебраические дополнения элементов a_{ij}.

Для обратной матрицы справедливы следующие равенства:

1) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$;
2) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
3) $(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}$.

Кроме метода нахождения обратной матрицы, вытекающего из формулы (1.15) (метод присоединенной матрицы), существует метод нахождения обратной матрицы, называемый методом элементарных преобразований.

Определение 1.16. Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие преобразования:

1) перестановка строк (столбцов);

2) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;

3) прибавление к элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), предварительно умноженных на некоторое число.

Для нахождения матрицы A^{-1} построим прямоугольную матрицу $B = (A|E)$ порядков $(n;\ 2n)$, приписывая к матрице A справа единичную матрицу E через разделительную черту:

$$B = \left(\begin{array}{ccccccccc|c} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Далее, с помощью элементарных преобразований над строками, приводим матрицу B к виду $(E|A^{-1})$, что всегда возможно, если матрица A невырождена.

РАНГ МАТРИЦЫ

Определение 1.17. Пусть в матрице A размеров $(m;\ n)$, выбраны произвольно k строк и k столбцов ($k \leqslant \min(m;\ n)$). Элементы матрицы, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка k, определитель которой называется минором M_{kk} порядка k, или минором k-го порядка матрицы A.

Определение 1.18. Рангом матрицы называется максимальный порядок r отличных от нуля миноров матрицы A, а любой минор порядка r, отличный от нуля, — базисным минором. Обозначение: $\operatorname{rang} A = r$. Если $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$ и размеры матриц A и B совпадают, то матрицы A и B называются эквивалентными. Обозначение: $A \sim B$.

Основными методами вычисления ранга матрицы являются метод *окаймляющих миноров* и метод *элементарных преобразований*.

Суть метода окаймляющих миноров состоит в следующем. Пусть в матрице уже найден минор порядка k, отличный от нуля. Тогда далее рассматриваются лишь те миноры порядка $k + 1$, которые содержат в себе (т. е. окаймляют) минор k-го порядка, отличный от нуля. Если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k, в противном случае среди окаймляющих миноров $(k + 1)$-го порядка найдется отличный от нуля и вся процедура повторяется.

Понятие ранга матрицы тесно связано с понятием линейной независимости ее строк (столбцов).

Определение 1.19. Строки матрицы $A = \|a_{ij}\|$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$:

$$(a_{i_1 1}, a_{i_1 2}, \ldots, a_{i_1 n}), (a_{i_2 1}, a_{i_2 2}, \ldots, a_{i_2 n}), \ldots, (a_{i_k 1}, a_{i_k 2}, \ldots, a_{i_k n})$$

называются *линейно зависимыми*, если найдутся такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, что справедливо равенство

$$\begin{aligned} &\lambda_1 a_{i_1 j} + \lambda_2 a_{i_2 j} + \ldots + \lambda_k a_{i_k j} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \\ &\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_k^2 \neq 0 \quad (1 \leqslant i_k \leqslant m,\ \ 1 \leqslant k \leqslant m). \end{aligned} \tag{1.16}$$

Строки матрицы A называются линейно независимыми, если равенство (1.16) возможно лишь в случае, когда все числа $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Аналогичным образом определяется линейная зависимость и независимость столбцов матрицы A.

Определение 1.20. Если какая-либо строка (a_l) матрицы A (где $(a_l) = (a_{l1}, a_{l2}, \ldots, a_{ln})$) может быть представлена в виде

$$(a_l) = \lambda_1(a_{i_1}) + \lambda_2(a_{i_2}) + \ldots + \lambda_k(a_{i_k}), \qquad (1.17)$$

то в этом случае говорят, что указанная строка является линейной комбинацией строк $i_1, i_2, \ldots, i_k$.

Аналогичным образом определяется понятие линейной комбинации столбцов. Справедлива следующая теорема о базисном миноре.

Теорема 1.1. Базисные строчки и базисные столбцы линейно независимы. Любая строка (либо столбец) матрицы A является линейной комбинацией базисных строк (столбцов), т. е. строк (столбцов), пересекающих базисный минор. Таким образом, ранг матрицы A: $\operatorname{rang} A = k$ равен максимальному числу линейно независимых строк (столбцов) матрицы A.

1.2. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение 1.21. Множество L элементов любой природы x, y, z, ... называется линейным пространством, а сами элементы векторами, если выполнены следующие условия.

1. Имеется правило, в соответствии с которым любым двум элементам x и y множества ставится в соответствие определенный элемент z этого же множества, называемый суммой элементов x и y и обозначаемый $z = x + y$.

2. Имеется правило, в соответствии с которым любому элементу x из множества L и любому вещественному числу λ ставится в соответствие определенный элемент U того же множества L, называемый произведением элемента x на число λ, обозначаемый $U = \lambda x$.

Указанные два правила подчинены следующим восьми аксиомам.

1. $x + y = y + x$ — коммутативность суммы (перестановочное, переместительное свойство).

2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ — ассоциативность суммы (сочетательное свойство).

3. Существует нулевой элемент Θ такой, что $x + \Theta = x$ для любого элемента x множества L.

4. Для каждого элемента x существует противоположный элемент $(-x)$ такой, что $x + (-x) = \Theta$.

5. $1 \cdot x = x$ для любого элемента x множества L (особая роль числового множителя 1).

6. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ — ассоциативность умножения относительно числовых сомножителей λ, μ.

7. Дистрибутивность умножения относительно суммы чисел (распределительное свойство умножения относительно суммы чисел λ, μ):

$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x.$$

8. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ — дистрибутивность умножения относительно суммы векторов (элементов).

Из произвольных m элементов (векторов) $x_1, x_2, \ldots, x_m$ линейного пространства и вещественных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ можно построить линейную комбинацию $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_m x_m = y$, которая представляет некоторый элемент того же пространства. В частности, из любых векторов $x_1, x_2, \ldots, x_m$ можно построить линейную комбинацию, равную нулевому вектору:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_m x_m = \Theta. \tag{1.18}$$

Если в левой части (1.18) все $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ равны нулю, то такая линейная комбинация называется тривиальной.

Если же хотя бы один из коэффициентов линейной комбинации отличен от нуля ($\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_m^2 \neq 0$), то линейная комбинация называется нетривиальной.

Система векторов $x_1, x_2, \ldots, x_m$ называется линейно зависимой, если может быть построена нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору. Если же такую комбинацию нельзя построить нетривиальным образом, то система векторов (элементов) $x_1, x_2, \ldots, x_m$ называется линейно независимой.

Определение 1.22. Линейное пространство L называется n-мерным, если в нем имеется n линейно независимых элементов, а любые $n + 1$ элементов уже линейно зависимы. Часто n-мерное линейное пространство обозначается L_n.

Определение 1.23. Если число линейно независимых векторов элементов в линейном пространстве не ограничено, то такое линейное пространство называется бесконечномерным.

Определение 1.24. Базисом линейного пространства называется любая конечная упорядоченная система векторов — элементов множества L_n, если:

а) она линейно независима;

б) каждый элемент из L_n является линейной комбинацией элементов этой системы.

Определение 1.25. Максимальное число линейно независимых векторов элементов в системе векторов элементов называется рангом системы векторов и часто обозначается r.

Из определения базиса следует, что число векторов в базисе равно размерности пространства и каждый вектор x линейного n-мерного пространства L_n является линейной комбинацией базисных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$:

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n. \tag{1.19}$$

Коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ этой линейной комбинации называются координатами вектора x относительно базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Разложение любого вектора x, принадлежащего L_n, единственно.

Отсюда следует, что между вектором конечномерного линейного пространства и его координатами относительно базиса этого пространства существует взаимно однозначное соответствие.

1.3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1.3.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение 1.26. Система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.20}$$

Система называется *однородной*, если все $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$. Если хотя бы одно из чисел $b_1, b_2, \ldots, b_m$ отлично от нуля, то система называется *неоднородной*.

Система (1.20) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если ее решением является пустое множество.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет только *одно решение*, и неопределенной, если она имеет более одного решения.

Определение 1.27. *Основной матрицей системы* (1.20) называется матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1.21)$$

Определение 1.28. *Расширенной матрицей системы* (1.20) называется матрица, первые m столбцов которой совпадают со столбцами основной матрицы системы, а последний столбец составлен из правых частей уравнений (1.20):

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \qquad (1.22)$$

Система уравнений (1.20) может быть представлена в виде одного линейного уравнения между столбцовыми матрицами:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad (1.23)$$

которое есть линейное уравнение между векторами m-мерного линейного пространства $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n, \bar{b}$:

$$x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \ldots + x_n\bar{a}_n = \bar{b}. \qquad (1.24)$$

Отсюда следует, что вопрос о существовании решения системы (1.20) сводится к вопросу о разложении (1.23) матрицы-столбца правых частей

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Это разложение возможно только в том случае, если ранги системы векторов

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix};\ \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix};\ \dots;\ \bar{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\text{и}\ \ \bar{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix};\ \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix};\ \dots;\ \bar{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix};\ \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

равны. Это положение формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 1.2 (Кронекера–Капелли). Для того чтобы система (1.20) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы системы $\operatorname{rang} A$ равнялся рангу расширенной матрицы $\operatorname{rang} \tilde{A}$:

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A} = r. \tag{1.25}$$

Однородная система всегда совместна, так как она всегда имеет нулевое решение, которое называется тривиальным: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Если ранг r совместной системы равен числу неизвестных n, $r = n$, то система будет определенной.

Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, $r < n$, то система неопределенная. В этом случае для решения системы (1.20) выделяем любой базисный минор, его элементы в столбцах являются коэффициентами при r

неизвестных, которые называются базисными неизвестными системы (1.20). Остальные $n - r$ неизвестных называются свободными неизвестными. Выделив из заданной системы (1.20) подсистему уравнений с r базисными неизвестными и перенеся в правую часть каждого уравнения выделенной подсистемы слагаемые со свободными неизвестными, решаем последнюю, придавая произвольные значения свободным неизвестным.

Однородная система, для которой число уравнений меньше числа неизвестных ($m < n$), всегда имеет нетривиальное решение.

Однородная система, для которой число уравнений совпадает с числом неизвестных ($m = n$), имеет нетривиальное решение при $\det A = 0$ ($r < n$).

1.3.2. МЕТОД, ОСНОВАННЫЙ НА ПРИМЕНЕНИИ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ (МАТРИЧНЫЙ МЕТОД)

Любая квадратная система n уравнений (1.20) с n неизвестными на основании операции перемножения матриц может быть записана в матричном виде:

$$A \cdot X = B, \tag{1.26}$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ — основная матрица системы;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ — вектор-столбец неизвестных; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ — вектор-столбец правых частей.

Уравнение (1.26) называется матричным уравнением.

Если основная матрица квадратной системы невырождена, то решение этой системы можно записать с помощью обратной матрицы так:

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{1.27}$$

Матричное уравнение $Y \cdot A = B$ имеет решение

$$Y = B \cdot A^{-1}. \tag{1.28}$$

Матричным методом выгодно решать несколько квадратных систем с одинаковой невырожденной основной матрицей и разными правыми частями.

1.3.3. МЕТОД КРАМЕРА

Теорема 1.3 (Крамера).

1. Если определитель $\Delta = \det A$ основной матрицы квадратной системы (1.26) отличен от нуля ($\Delta \neq 0$), то система имеет единственное решение, которое определяется формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{1.29}$$

где Δ_1 — определитель, получающийся из Δ заменой элементов первого столбца элементами столбца свободных членов B; Δ_2 — заменой элементов второго столбца элементами столбца свободных членов B, ...; Δ_n — заменой элементов n-го столбца элементами столбца свободных членов B.

2. Если $\Delta = 0$, а хотя бы один из Δ_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) отличен от нуля, то система не имеет решений.

3. Если все определители $\Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_n = \Delta = 0$, то в случае:

а) неравенства ранга основной матрицы системы рангу расширенной матрицы $\operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang} \tilde{A}$ система не имеет решений;

б) равенства ранга основной матрицы системы рангу расширенной матрицы $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A} = r$, система имеет бесчисленное множество решений.

1.3.4. МЕТОД ГАУССА

Метод Гаусса состоит из двух основных этапов, называемых *прямым ходом* и *обратным ходом*.

Суть *прямого хода* заключается в последовательном исключении неизвестных с целью преобразования системы (1.20) к так называемому ступенчатому виду, когда основная матрица системы имеет на главной диагонали отличные от нуля элементы, а под главной диагональю находятся только нулевые элементы. Последовательное исключение неизвестных может производиться с использованием расширенной матрицы системы и тех же действий, что и при нахождении ранга этой матрицы, описанных в разделе 1.1. Рассмотрим вначале квадратную систему (1.20) $(m = n)$.

Первый шаг прямого хода. Пусть элемент $a_{11} \neq 0$. Он называется ведущим элементом на данном шаге преобразований. Получим под ним одни нулевые элементы, для этого вычтем из элементов второй строки расширенной матрицы системы соответствующие элементы первой строки, умноженные на число a_{21}/a_{11}, сокращенно:

$$(2)-(1)\cdot\frac{a_{21}}{a_{11}}.\ \text{Затем}\ (3)-(1)\cdot\frac{a_{31}}{a_{11}},\ldots,\ (m)-(1)\cdot\frac{a_{m1}}{a_{11}}:$$

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & & a_{1m} & b_1 \\ a_{21}-a_{11}\cdot\dfrac{a_{21}}{a_{11}} & a_{22}-a_{12}\dfrac{a_{21}}{a_{11}} & \ldots & a_{2m}-a_{1m}\cdot\dfrac{a_{21}}{a_{11}} & b_2-b_1\cdot\dfrac{a_{21}}{a_{11}} \\ & & & & \ldots \\ a_{m1}-a_{11}\cdot\dfrac{a_{m1}}{a_{11}} & a_{m2}-a_{12}\cdot\dfrac{a_{m1}}{a_{11}} & \ldots & a_{mm}-a_{1m}\cdot\dfrac{a_{m1}}{a_{11}} & b_m-b_1\cdot\dfrac{a_{m1}}{a_{11}} \end{array}\right).$$

В результате получим

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & b \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2m}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & \ldots & a_{mm}^{(1)} & b_m^{(1)} \end{array}\right).$$

Второй шаг прямого хода. Пусть элемент $a_{22}^{(1)} \neq 0$. На данном шаге он является ведущим элементом. Получим под ним одни нулевые элементы, для этого вычтем из элементов третьей строки расширенной матрицы системы соответствующие элементы второй строки, умноженные на число $\dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$, сокращенно:

$(3)-(2)\cdot\dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$. Затем $(4)-(2)\cdot\dfrac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}},\dots,(m)-(2)\cdot\dfrac{a_{m2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccccc|c}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & & b_1 \\
0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2m}^{(1)} & & b_2^{(1)} \\
0 & a_{32}^{(1)}-a_{22}^{(1)}\cdot\dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & \dots & a_{3m}^{(1)}-a_{2m}^{(1)}\cdot\dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & & b_{3m}^{(1)}-b_{2m}^{(1)}\cdot\dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\
0 & a_{m2}^{(1)}-a_{22}^{(1)}\cdot\dfrac{a_{m2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & \dots & a_{mm}^{(1)}-a_{2m}^{(1)}\cdot\dfrac{a_{m2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & & b_{mm}^{(1)}-b_{2m}^{(1)}\cdot\dfrac{a_{m2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}
\end{array}\right).$$

В результате получим

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\
0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2m}^{(1)} & b_2^{(1)} \\
0 & 0 & \dots & a_{3m}^{(2)} & b_3^{(2)} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & a_{mm}^{(2)} & b_m^{(2)}
\end{array}\right).$$

Последний, (m − 1)-й шаг прямого хода.

Пусть в результате $(m-2)$-го шага получена следующая матрица, эквивалентная исходной расширенной матрице:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccccc|c}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(m-1)} & a_{1m} & b_1 \\
0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2(m-1)}^{(1)} & a_{2m}^{(1)} & b_2^{(1)} \\
0 & 0 & & a_{3(m-1)}^{(2)} & a_{3m}^{(2)} & b_3^{(2)} \\
\dots & \dots & & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & a_{(m-1)(m-1)}^{(m-2)} & a_{(m-1)m}^{(m-2)} & b_{m-1}^{(m-2)} \\
0 & 0 & & a_{m(m-1)}^{(m-2)} & a_{mm}^{(m-2)} & b_m^{(m-2)}
\end{array}\right).$$

Пусть элемент $a_{(m-1)(m-1)}^{(m-2)}\neq 0$. Получим под ним нулевой элемент. Для этого вычтем из элементов последней строки расширенной матрицы системы соответствующие элементы предпоследней строки, умноженные на число

$$\frac{a_{(m-1)n}^{(m-2)}}{a_{(m-1)(m-1)}^{(m-2)}}, \frac{a_{m(m-1)}^{(m-2)}}{a_{(m-1)(m-1)}^{(m-2)}},$$

сокращенно:

$$(m)-(m-1)\cdot\frac{a_{m(m-1)}^{(m-2)}}{a_{(m-1)(m-1)}^{(m-2)}}.$$

В результате получим

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1(m-1)} & & a_{1m} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2(m-1)}^{(1)} & & a_{2m}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & & a_{3(m-1)}^{(2)} & & a_{3m}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{(m-1)(m-1)}^{(m-2)} & & a_{(m-1)m}^{(m-2)} & b_{m-1}^{(m-2)} \\ 0 & 0 & & 0 & & a_{mm}^{(m-1)} & b_m^{(m-1)} \end{array}\right).$$

Обратный ход начинается с записи системы, которой соответствует итоговая расширенная матрица, полученная в результате прямого хода:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1(m-1)}x_{m-1}+a_{1m}x_m &= b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2+\ldots+a_{2(m-1)}^{(1)}x_{m-1}+a_{2m}^{(1)}x_m &= b_2^{(1)}, \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ a_{(m-1)(m-1)}^{(m-2)}x_{m-1}+a_{(m-1)m}^{(m-2)}x_m &= b_{m-1}^{(m-2)}, \\ a_{mm}^{(m-1)}x_m &= b_m^{(m-1)}. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения находят x_m, подставляют найденное значение в предпоследнее уравнение и находят x_{m-1}, и т. д., в первое уравнение подставляют x_m, x_{m-1}, ..., x_2 и находят x_1.

Замечание.

1. Если какой-то из ведущих элементов оказывается равным нулю, то его меняют местами с одним из ненулевых элементов, принадлежащим этой же строке основной матрицы системы. Если же все элементы, принадлежащие строке основной матрицы системы, где отыскивается ведущий элемент, равны нулю, а за разделительной чертой находится ненулевой элемент $b_k^{(i)} \neq 0$, то решение прекращают, так как система оказывается несовместной.

2. Строки, целиком состоящие из нулей, удаляются. В результате прямого хода после вычеркивания нулевых строк появится ступенчатая матрица, у которой элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ отличны от нуля, а в столбцах под ними одни нулевые элементы. Тогда обратный ход начинается с системы вида:

$$\begin{array}{r}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} + a_{(n-1)n}x_n + a_{(n-1)(n+1)}x_{n+1} + \ldots + a_{(n-1)m}x_m = b_1, \\
a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{(n-1)(n-1)}^{(1)}x_{n-1} + a_{(n-1)n}^{(1)}x_n + a_{(n-1)(n+1)}^{(1)}x_{n+1} + \ldots + a_{(n-1)m}^{(1)}x_m = b_2^{(1)}, \\
\ldots\ldots\ldots, \\
a_{(n-1)(n-1)}^{(n-2)}x_{n-1} + a_{(n-1)n}^{(n-2)}x_n + a_{(n-1)(n+1)}^{(n-2)}x_{n+1} + \ldots + a_{(n-1)m}^{(n-2)}x_m = b_{n-1}^{(n-2)}, \\
a_{nn}^{(n-1)}x_n + a_{n(n+1)}^{(n-1)}x_{n+1} + \ldots + a_{nm}^{(n-1)}x_m = b_n^{(n-1)}.
\end{array}$$

Неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются базисными, а x_{n+1}, $x_{n+2}, \ldots, x_m$ — свободными. Свободные неизвестные переносятся в правые части:

$$\begin{array}{r}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} + a_{(n-1)n}x_n = -a_{(n-1)(n+1)}x_{n+1} - \ldots - a_{(n-1)m}x_m + b_1, \\
a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{(n-1)(n-1)}^{(1)}x_{n-1} + a_{(n-1)n}^{(1)}x_n = -a_{(n-1)(n+1)}^{(1)}x_{n+1} - \ldots - a_{(n-1)m}^{(1)}x_m + b_2^{(1)}, \\
\ldots\ldots\ldots, \\
a_{(n-1)(n-1)}^{(n-2)}x_{n-1} + a_{(n-1)n}^{(n-2)}x_n = -a_{(n-1)(n+1)}^{(n-2)}x_{n+1} - \ldots - a_{(n-1)m}^{(n-2)}x_m + b_{n-1}^{(n-2)}, \\
a_{nn}^{(n-1)}x_n = -a_{n(n+1)}^{(n-1)}x_{n+1} - \ldots - a_{nm}^{(n-1)}x_m + b_n^{(n-1)}.
\end{array}$$

Далее начинается описанное выше продолжение обратного хода метода Гаусса. Базисная неизвестная x_n из последнего уравнения выражается через $b_n^{(n-1)}$ и линейную комбинацию свободных неизвестных. Найденное выражение для x_n затем подставляется в предпоследнее уравнение, из которого находится x_{n-1} и т. д., пока из первого уравнения не будет получено выражение базисной неизвестной x_1 через b_1 и линейную комбинацию свободных неизвестных.

Если *однородная система* с m уравнениями и n неизвестными ($m < n$)

$$\begin{array}{r}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1(k-1)}x_{k-1} + a_{1k}x_k + a_{1(k+1)}x_{k+1} + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2(k-1)}x_{k-1} + a_{2k}x_k + a_{2(k-1)}x_{k+1} + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\
\ldots\ldots\ldots, \\
a_{(k-1)1}x_1 + a_{(k-1)2}x_2 + \ldots + a_{(k-1)(k-1)}x_{k-1} + a_{(k-1)k}x_k + a_{(k-1)(k+1)}x_{k+1} + \ldots + a_{(k-1)n}x_n = 0, \\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{(k)(k-1)}x_{k-1} + a_{(k)k}x_k + a_{(k)(k+1)}x_{k+1} + \ldots + a_{(k)n}x_n = 0, \\
\ldots\ldots\ldots, \\
a_{(k+1)1}x_1 + a_{(k+1)2}x_2 + \ldots + a_{(k+1)(k-1)}x_{k-1} + a_{(k+1)k}x_k + a_{(k+1)(k+1)}x_{k+1} + \ldots + a_{(k+1)n}x_n = 0, \\
\ldots\ldots\ldots, \\
a_{(m)1}x_1 + a_{(m)2}x_2 + \ldots + a_{(m)(k-1)}x_{k-1} + a_{(m)k}x_k + a_{(m)(k)}x_{k+1} + \ldots + a_{(m)n}x_n = 0
\end{array}$$

приводится к треугольному виду с ненулевыми элементами (для которых номер строки, в которой они расположены, равен номеру столбца) основной матрицы системы:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1(m-1)}x_{m-1} + a_{1m}x_m &= 0, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2(m-1)}^{(1)}x_{m-1} + a_{2m}^{(1)}x_m &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ a_{(m-1)(m-1)}^{(m-2)}x_{m-1} + a_{(m-1)m}^{(m-2)}x_m &= 0, \\ a_{mm}^{(m-1)}x_m &= 0, \end{aligned}$$

то ее решение тривиально: $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Если однородная система с m уравнениями и n неизвестными ($m < n$) приводится к ступенчатому виду

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1(k-1)}x_{k-1} + a_{1k}x_k + a_{1(k+1)}x_{k+1} + \ldots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2(k-1)}^{(1)}x_{k-1} + a_{2k}^{(1)}x_k + a_{2(k+1)}^{(1)}x_{k+1} + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ a_{(k-1)(k-1)}^{(m-2)}x_{k-1} + a_{(k-1)k}^{(m-2)}x_k + a_{(k-1)(k+1)}^{(m-2)}x_{k+1} + \ldots + a_{(k-1)n}^{(m-2)}x_n &= 0, \\ a_{kk}^{(m-1)}x_k + a_{k(k+1)}^{(m-1)}x_{k+1} + \ldots + a_{kn}^{(m-1)}x_n &= 0, \end{aligned}$$

то ее решение можно получить следующим образом. Поочередно столбец свободных неизвестных

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+2} \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

приравнивают столбцам единичной матрицы

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

и решают получающиеся системы уравнений. В результате будут получены решения, которые называются *фунда-*

ментальной совокупностью решений (ФСР) однородной системы алгебраических уравнений:

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} x_1 = c_1^{(1)} \\ x_2 = c_2^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_k = c_k^{(1)} \\ x_{k+1} = 1 \\ x_{k+2} = 0 \\ x_{k+3} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n = 0 \end{pmatrix}, \ \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} x_1 = c_1^{(2)} \\ x_2 = c_2^{(2)} \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_k = c_k^{(2)} \\ x_{k+1} = 0 \\ x_{k+2} = 1 \\ x_{k+3} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n = 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \bar{e}_{n-k} = \begin{pmatrix} x_1 = c_1^{(n-k)} \\ x_2 = c_2^{(n-k)} \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_k = c_k^{(n-k)} \\ x_{k+1} = 0 \\ x_{k+2} = 0 \\ x_{k+3} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n = 1 \end{pmatrix}. \quad (1.30)$$

Так как сумма двух решений произвольной однородной системы и произведение ее решения на любое вещественное число также являются решениями этой же системы линейных уравнений, то можно показать, что множество всех решений однородной системы образует линейное пространство L_{n-k}, элементами которого являются как вектор-столбцы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_{n-k}$, так и их линейные комбинации с произвольными множителями $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-k}$ из области вещественных чисел:

$$X = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \ldots + \alpha_{n-k} \bar{e}_{n-k}. \quad (1.31)$$

Если неоднородная система с m уравнениями и n неизвестными $(m < n)$

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1(k-1)}x_{k-1} + a_{1k}x_k + a_{1(k+1)}x_{k+1} + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2(k-1)}x_{k-1} + a_{2k}x_k + a_{2(k+1)}x_{k+1} + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\
&\ldots\ldots\ldots, \\
a_{(k-1)1}x_1 + a_{(k-1)2}x_2 + \ldots + a_{(k-1)(k-1)}x_{k-1} + a_{(k-1)k}x_k + a_{(k-1)(k+1)}x_{k+1} + \ldots + a_{(k-1)n}x_n &= b_{k-1}, \\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{(k)(k-1)}x_{k-1} + a_{(k)k}x_k + a_{(k)(k+1)}x_{k+1} + \ldots + a_{(k)n}x_n &= b_k, \\
&\ldots\ldots\ldots, \\
a_{(k+1)1}x_1 + a_{(k+1)2}x_2 + \ldots + a_{(k+1)(k-1)}x_{k-1} + a_{(k+1)k}x_k + a_{(k+1)(k+1)}x_{k+1} + \ldots + a_{(k+1)n}x_n &= b_{k+1}, \\
&\ldots\ldots\ldots, \\
a_{(m)1}x_1 + a_{(m)2}x_2 + \ldots + a_{(m)(k-1)}x_{k-1} + a_{(m)k}x_k + a_{(m)(k)}x_{k+1} + \ldots + a_{(m)n}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

приводится к треугольному виду с ненулевыми элементами (для которых номер строки, в которой они расположены, равен номеру столбца) основной матрицы системы, а затем члены со свободными неизвестными x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n переносятся в правые части, то система приобретает вид:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1(k-1)}x_{k-1} + a_{1k}x_k &= -a_{1(k+1)}x_{k+1} - \ldots - a_{1n}x_n + b_1,\\
a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2(k-1)}^{(1)}x_{k-1} + a_{2k}^{(1)}x_k &= -a_{2(k+1)}^{(1)}x_{k+1} - \ldots - a_{2n}^{(1)}x_n + b_2^{(1)},\\
&\ldots\ldots\ldots,\\
a_{(k-1)(k-1)}^{(m-2)}x_{k-1} + a_{(k-1)k}^{(m-2)}x_k &= -a_{(k-1)(k+1)}^{(m-2)}x_{k+1} - \ldots - a_{(k-1)n}^{(m-2)}x_n + b_{n-1}^{(m-2)},\\
a_{kk}^{(m-1)}x_k &= -a_{k(k+1)}^{(m-1)}x_{k+1} - \ldots - a_{kn}^{(m-1)}x_n + b_n^{(m-1)}.
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Решение этой системы находится в соответствии со следующей теоремой.

Теорема 1.4. Общее решение неоднородной системы есть сумма частного решения

$$\hat{X}_{\text{част. неодн.}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \hat{x}_k \\ \hat{x}_{k+1} = 0 \\ \hat{x}_{k+2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \hat{x}_n = 0 \end{pmatrix}$$

системы (1.32), когда все свободные неизвестные, полученные в результате $(m-1)$-го шага метода Гаусса, приравниваются к нулю:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1(k-1)}x_{k-1} + a_{1k}x_k &= b_1 - a_{1(k+1)}x_{k+1} - \ldots - a_{1n}x_n,\\
a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2(k-1)}^{(1)}x_{k-1} + a_{2k}^{(1)}x_k &= b_2^{(1)} - a_{2(k+1)}^{(1)}x_{k+1} - \ldots - a_{2n}^{(1)}x_n,\\
&\ldots\ldots\ldots,\\
a_{(k-1)(k-1)}^{(m-2)}x_{k-1} + a_{(k-1)k}^{(m-2)}x_k &= b_{k-1}^{(m-2)} - a_{(k-1)(k+1)}^{(m-2)}x_{k+1} - \ldots - a_{(k-1)n}^{(m-2)}x_n,\\
a_{kk}^{(m-1)}x_k &= b_k^{(m-1)} - a_{k(k+1)}^{(m-1)}x_{k+1} - \ldots - a_{kn}^{(m-1)}x_n,
\end{aligned}$$

и общего решения соответствующей однородной системы (1.31):

$$\hat{X}_{\text{общее неодн.}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \dots\dots\dots \\ \hat{x}_k \\ \hat{x}_{k+1} = 0 \\ \hat{x}_{k+2} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \hat{x}_n = 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} x_1 = c_1^{(1)} \\ x_2 = c_2^{(1)} \\ \dots\dots\dots \\ x_k = c_k^{(1)} \\ x_{k+1} = 1 \\ x_{k+2} = 0 \\ x_{k+3} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ x_n = 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\alpha_2 \begin{pmatrix} x_1 = c_1^{(2)} \\ x_2 = c_2^{(2)} \\ \dots\dots\dots \\ x_k = c_k^{(2)} \\ x_{k+1} = 0 \\ x_{k+2} = 1 \\ x_{k+3} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ x_n = 0 \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_k \begin{pmatrix} x_1 = c_1^{(n-k)} \\ x_2 = c_2^{(n-k)} \\ \dots\dots\dots \\ x_k = c_k^{(n-k)} \\ x_{k+1} = 0 \\ x_{k+2} = 0 \\ x_{k+3} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ x_n = 1 \end{pmatrix}.$$

1.4. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (ОТОБРАЖЕНИЯ)

Определение 1.29. Отображением множества L в множество K (или функцией на L со значениями в K) называется правило, по которому каждому элементу множества L ставится в соответствие определенный элемент множества K. Такое отображение обозначают f: $L \to K$.

Если при отображении f элементу $\bar{x}$, принадлежащему L, соответствует элемент $\bar{y}$, принадлежащий K, то элемент $\bar{y}$ называют образом элемента $\bar{x}$, а элемент $\bar{x}$ — прообразом элемента $\bar{y}$, и записывают это в виде $\bar{y} = f(\bar{x})$.

Отображение $\hat{A}$ одного линейного пространства в другое называется линейным, если для любых элементов $\bar{x}$ и $\bar{y}$, принадлежащих L, и для любого вещественного числа μ выполняются условия:

$$\hat{A}(\bar{x}+\bar{y})=\hat{A}\bar{x}+\hat{A}\bar{y} \text{ — аддитивность отображения;} \qquad (1.33)$$

$$\hat{A}(\mu\bar{x})=\mu\hat{A}\bar{x} \text{ — однородность отображения.} \qquad (1.34)$$

Определение 1.30. Линейное отображение $\hat{A}: L \to K$ называют линейным оператором, действующим из L в K.

Если линейное пространство K совпадает с L, то линейное отображение $\hat{A}: L \to K$ называется линейным преобразованием пространства L.

В тех случаях, когда K является множеством вещественных чисел $\mathbb{R}$ или множеством комплексных чисел $\mathbb{C}$, линейный оператор, действующий из L_n в $\mathbb{R}$ или из L_n в $\mathbb{C}$, называется линейной формой.

При линейном отображении $\hat{A}: L_n \to L_n$ и вектор-прообраз $\bar{x}$, и вектор-образ $\bar{y}=\hat{A}\bar{x}$ принадлежат одному и тому же линейному пространству, так что каждый из них разлагается по базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ этого пространства:

$$\bar{x}=x_1\bar{e}_1+x_2\bar{e}_2+\ldots+x_n\bar{e}_n=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}=X, \qquad (1.35)$$

$$\bar{y}=y_1\bar{e}_1+y_2\bar{e}_2+\ldots+y_n\bar{e}_n=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}=Y. \qquad (1.36)$$

С учетом (1.33)–(1.36) образ вектора $\bar{x}$ можно представить в виде:

$$\bar{y}=\hat{A}\bar{x}=\hat{A}(x_1\bar{e}_1+x_2\bar{e}_2+\ldots+x_n\bar{e}_n)=$$
$$=x_1(\hat{A}\bar{e}_1)+x_2(\hat{A}\bar{e}_2)+\ldots+x_n(\hat{A}\bar{e}_n).$$

Вектор $\hat{A}\bar{e}_k$, $k=1,2,\ldots,n$, — образ базисного вектора $\bar{e}_k$ — является вектором того же пространства L_n и задается своими координатами a_{ik} ($i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, n$) относительно базиса L_n:

$$\hat{A}\bar{e}_k = a_{1k}\bar{e}_1 + a_{2k}\bar{e}_2 + \ldots + a_{nk}\bar{e}_n = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \ldots \\ a_{nk} \end{pmatrix}. \tag{1.37}$$

Определение 1.31. Упорядоченная совокупность координатных столбцов (1.37) всех образов базисных векторов линейного пространства L_n образуют квадратную матрицу порядка n,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1.38}$$

в которой сконцентрирована вся информация о содержании линейного преобразования $\hat{A}$. Эта матрица называется *матрицей линейного преобразования* (оператора).

Таким образом, линейное преобразование можно задать в матричном виде:

$$Y = A \cdot X, \tag{1.39}$$

где A определено (1.38), а матрицы X и Y соответственно (1.35) и (1.36).

Пользуясь правилом перемножения матриц, уравнение (1.39) можно представить в виде системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = y_2, \\ \ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = y_n. \end{cases} \tag{1.40}$$

При $n = 2$ и $n = 3$ уравнения (1.40) характеризуют линейное преобразование соответственно плоскости и трехмерного пространства.

При $\det A \neq 0$ матрица преобразования A невырожденная и линейное преобразование называется *невырожденным*, причем X определяется по формуле (1.27), в которой матрицу B нужно заменить матрицей Y. В этом случае невырожденное линейное отображение определяет взаимно однозначное отображение X на Y и Y на X.

ДЕЙСТВИЯ НАД ЛИНЕЙНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ (ОТОБРАЖЕНИЯМИ)

Пусть $\hat{A}$ и $\hat{B}$ — два линейных оператора, $\hat{A}: L_n \to K_m$, $\hat{B}: L_n \to K_m$.

Определение 1.32. *Суммой операторов* $\hat{A}$ и $\hat{B}$ называется линейный оператор $\hat{A}+\hat{B}$, определяемый равенством

$$(\hat{A}+\hat{B})\overline{x} = \hat{A}\overline{x} + \hat{B}\overline{x}.$$

Определение 1.33. *Произведением линейного оператора* $\hat{A}$ *на скаляр* λ называется линейный оператор $\lambda\hat{A}$, определяемый равенством

$$\lambda\hat{A}\overline{x} = \lambda(\hat{A}\overline{x}).$$

Определение 1.34. *Нулевым оператором*, обозначаемым символом $\hat{O}$, называется оператор, отображающий все элементы пространства L_n в нулевой элемент пространства $K_m: \hat{O}\overline{x} = \Theta$.

Определение 1.35. Для каждого оператора $\hat{A}$ *противоположный оператор* $-\hat{A}$ определяется соотношением $-\hat{A} = (-1)\hat{A}$.

Множество всех линейных операторов (отображений), действующих из L_n в K_m, с определенными выше операциями суммы и умножения на скаляр и выбранным нулевым и противоположным операторами образуют линейное пространство.

Пусть $\hat{A}$ и $\hat{B}$ — линейные операторы, действующие из L_n в L_n, т. е.: $\hat{A}: L_n \to L_n$, $\hat{B}: L_n \to L_n$. Произведением операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ называется оператор $\hat{A}\times\hat{B}$, действующий по правилу:

$$(\hat{A}\times\hat{B})\overline{x} = \hat{A}\times(\hat{B}\overline{x}).$$

Справедливы следующие свойства линейных операторов, действующих из L_n в L_n:

$$\begin{aligned}
&1.\ \lambda(\hat{A}\times\hat{B})=(\lambda\hat{A})\times\hat{B}.\\
&2.\ (\hat{A}+\hat{B})\times\hat{C}=\hat{A}\times\hat{C}+\hat{B}\times\hat{C}.\\
&3.\ \hat{A}\times(\hat{B}+\hat{C})=\hat{A}\times\hat{B}+\hat{A}\times\hat{C}.\\
&4.\ (\hat{A}\times\hat{B})\times\hat{C}=\hat{A}\times(\hat{B}\times\hat{C}).
\end{aligned} \tag{1.41}$$

Определение 1.36. *Тождественным преобразованием* (оператором) $\hat{E}$ называется линейное отображение (оператор), действующее по правилу $\hat{E}\overline{x}=\overline{x}$.

Пусть вектор

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_1\overline{e}_1+x_2\overline{e}_2+x_3\overline{e}_3,$$

заданный в базисе $(\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3)$, преобразуется с помощью линейного оператора $\hat{A}$, матрица которого в данном базисе есть A:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},$$

вектор

$$Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=y_1\overline{e}_1+y_2\overline{e}_2+y_3\overline{e}_3,$$

т. е. $Y=A\cdot X$.

Введем в рассматриваемом трехмерном линейном пространстве новый базис $(\overline{e}_1',\overline{e}_2',\overline{e}_3')$, связанный со старым, следующими формулами перехода:

$$\begin{cases}\overline{e}_1'=b_{11}\overline{e}_1+b_{12}\overline{e}_2+b_{13}\overline{e}_3,\\ \overline{e}_2'=b_{21}\overline{e}_1+b_{22}\overline{e}_2+b_{23}\overline{e}_3,\\ \overline{e}_3'=b_{31}\overline{e}_1+b_{32}\overline{e}_2+b_{33}\overline{e}_3.\end{cases} \tag{1.42}$$

Тогда матрица A' преобразования вектора X в вектор Y в новом базисе будет иметь вид: $A'=B^{-1}\times A\times B$.

1.5. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Определение 1.37. Любой *ненулевой* вектор $\bar{x}$, удовлетворяющий уравнению

$$\hat{A}\bar{x} = \lambda\bar{x}, \tag{1.43}$$

называется *собственным* вектором линейного оператора $\hat{A}$, а число λ — *собственным значением* линейного оператора $\hat{A}$, соответствующим вектору $\bar{x}$.

Если задан базис соответствующего линейного пространства L_n, то уравнение (1.43) можно представить в матричном виде:

$$(A - \lambda E)\bar{x} = \Theta, \tag{1.44}$$

где A — матрица оператора $\hat{A}$, в заданном базисе (т. е. матрица порядка n); E — единичная матрица порядка n; Θ — нулевой столбец.

Определение 1.38. Матрица $(A - \lambda E)$ называется *характеристической матрицей линейного оператора* $\hat{A}$.

Уравнение (1.44) представляет собой линейную однородную систему уравнений, нетривиальные решения которой являются искомыми координатами собственных векторов и существуют только тогда, когда ранг $\operatorname{rang}(A - \lambda E) < n$, т. е. определитель

$$\det(A - \lambda E) = 0. \tag{1.45}$$

Определение 1.39. Многочлен $\det(A - \lambda E)$ относительно λ называется *характеристическим многочленом оператора* $\hat{A}$.

В развернутом виде характеристическое уравнение (1.45) запишется следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \tag{1.46}$$

или

$$\lambda^n - c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1}c_n\lambda + (-1)^n c_n = 0. \tag{1.47}$$

В общем случае характеристическое уравнение (1.47) линейного оператора $\hat{A}$ имеет n действительных или комплексных корней — собственных значений линейного оператора.

Для нахождения собственных векторов линейного оператора $\hat{A}$, соответствующих найденным собственным значениям оператора, необходимо найденное собственное значение λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ подставить в уравнение (1.44):

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0,\\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0,\\ \ldots\ldots\ldots,\\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0.\end{cases} \tag{1.48}$$

Решив полученную однородную систему уравнений для каждого собственного значения λ_i, найдем собственные векторы $\bar{x}^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, соответствующие этим собственным значениям.

Так как совместная система (1.48) является неопределенной, то собственные векторы находятся с точностью до числового множителя.

1.6. ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

В приложениях важную роль играет понятие ортогональности собственных векторов линейного оператора. Это понятие вводится, исходя из определения их скалярного произведения.

Определение 1.40. Линейное пространство $\tilde{E}$ называется *евклидовым пространством*, если выполнены следующие условия.

1. Имеется правило, с помощью которого любым двум элементам $\bar{x}$ и $\bar{y}$ этого пространства ставится в соответствие вещественное число, называемое скалярным произведением этих элементов и обозначаемое символом $(\bar{x}, \bar{y})$.

2. Указанное правило удовлетворяет следующим четырем аксиомам:

а) $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})$;

б) $(\bar{x} + \bar{y}, \bar{z}) = (\bar{x}, \bar{z}) + (\bar{y}, \bar{z})$;

в) $(\lambda\bar{x},\bar{y})=\lambda(\bar{x},\bar{y})$;

г) $(\bar{x},\bar{x})>0$, если $\bar{x}$ — ненулевой элемент; $(\bar{x},\bar{x})=0$, если $\bar{x}$ — нулевой элемент.

Определение 1.41. Два произвольных элемента $\bar{x}$ и $\bar{y}$ евклидова пространства $\tilde{E}$ называются ортогональными, если скалярное произведение этих элементов равно нулю.

Если скалярное произведение введено в n-мерном линейном пространстве L_n, то соответствующее ему евклидово пространство называется n-мерным евклидовым пространством $\tilde{E}_n$ (или $\tilde{E}^n$).

Если в $\tilde{E}^n$ выбран некоторый произвольный базис $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\dots,\bar{e}_n$ и

$$\bar{x}=x_1\bar{e}_1+x_2\bar{e}_2+\dots+x_n\bar{e}_n,\quad \bar{y}=y_1\bar{e}_1+y_2\bar{e}_2+\dots+y_n\bar{e}_n$$

— разложение векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ по этому базису, то скалярное произведение $(\bar{x},\bar{y})$ может быть определено равенством (удовлетворяющим аксиомам *а–г* скалярного произведения):

$$(\bar{x},\bar{y})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_iy_k, \tag{1.49}$$

где $a_{ik}=(\bar{e}_i,\bar{e}_k)$ — элементы матрицы $A=\|a_{ik}\|$ $(i=1,2,\dots,n;$ $k=1,2,\dots,n)$.

В формуле (1.49)

$$\sum_{i=1}^{n}z_i=z_1+z_2+\dots+z_n.$$

Определение 1.42. Если векторы базиса $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\dots,\bar{e}_n$ попарно ортогональны, т. е. $(\bar{e}_i,\bar{e}_k)=0$, если $i\neq k$, то такой базис называется ортогональным.

В ортогональном базисе у матрицы $A=\|a_{ik}\|$ $(i=1,2,\dots,n;$ $k=1,2,\dots,n)$ отличны от нуля только элементы на главной диагонали, остальные элементы равны нулю. Такая матрица называется диагональной. В этом случае скалярное произведение вычисляется по формуле

$$(\bar{x},\bar{y})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_iy_i. \tag{1.50}$$

Определение 1.43. Если дополнительно к условию ортогональности выполняется условие нормировки $(\bar{e}_i,\bar{e}_i)=$

$=1$ $(i=1,2,\ldots,n)$, то базис $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_n$ называется ортонормированным.

В ортонормированном базисе скалярное произведение равно сумме произведений соответствующих координат:

$$(\overline{x},\overline{y})=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n. \tag{1.51}$$

Теорема 1.5. Во всяком n-мерном евклидовом пространстве $\tilde{E}^n$ существует ортонормированный базис.

Любую систему линейно независимых векторов $\overline{g}_1,\overline{g}_2,\ldots,\overline{g}_n$ n-мерного евклидового пространства $\tilde{E}^n$ с помощью *процесса ортогонализации Шмидта* можно преобразовать в ортонормированный базис $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_n$ по формулам:

$$\overline{f}_1=\overline{g}_1,\ldots,\overline{f}_k=\overline{g}_k-\sum_{m=1}^{k-1}C_m^k\overline{f}_m \quad (k=2,3,\ldots,n),$$

где $C_m^k=\dfrac{(\overline{g}_k,\overline{f}_m)}{(\overline{f}_m,\overline{f}_m)}$, $\overline{e}_i=\dfrac{\overline{f}_i}{\sqrt{(\overline{f}_i,\overline{f}_i)}}$.

1.7. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ. ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ УРАВНЕНИЙ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Определение 1.44. Квадратичной формой, порождаемой матрицей $A=\|a_{ik}\|$ $(i=1,2,\ldots,n;\ k=1,2,\ldots,n)$, будем называть следующую величину:

$$(\overline{x},\overline{x})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_ix_k.$$

В общем случае формой нескольких переменных называется однородный многочлен от этих переменных, в соответствии со степенью которого форма может быть линейной, квадратичной, кубичной и т. д.

Квадратичные формы от двух переменных и, соответственно, от трех переменных записываются следующим образом:

$$F(x_1,x_2)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2, \tag{1.52}$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + \\ + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \tag{1.53}$$

или в матричном виде

$$F(x_1, x_2) = \tilde{X}^{\text{T}} \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{X}, \quad F(x_1, x_2, x_3) = X^{\text{T}} \cdot A \cdot X, \tag{1.54}$$

где

$$\tilde{X}^{\text{T}} = (x_1, x_2), \quad \tilde{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad X^{\text{T}} = (x_1, x_2, x_3), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \tag{1.55}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad a_{12} = a_{21}, a_{13} = a_{31}, a_{23} = a_{32}. \tag{1.56}$$

Матрицы $\tilde{A}$ и A называются симметричными. Из определения этих матриц следует, что они совпадают со своими транспонированными матрицами, т. е. $\tilde{A} = \tilde{A}^{\text{T}}$, $A = A^{\text{T}}$.

СВОЙСТВА СИММЕТРИЧНОЙ МАТРИЦЫ

1. Собственные значения симметричной матрицы (линейного оператора, представимого симметричной матрицей) с действительными элементами — действительные числа.

2. Собственные векторы симметричной матрицы (линейного оператора, представимого симметричной матрицей), соответствующие различным собственным значениям, — ортогональны.

Квадратичные формы (1.52), (1.53) при помощи линейного преобразования вида (1.39), (1.40) могут быть преобразованы к *каноническому виду*, т. е. к сумме квадратов

$$F(x_1, x_2) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2, \tag{1.57}$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2, \tag{1.58}$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — собственные значения матриц соответствующих форм. Для нахождения соответствующего линейного преобразования, приводящего (1.52) к (1.57) и (1.53) к (1.58), необходимо сделать следующее:

1) найти собственные векторы матриц $\tilde{A}$ и A, соответствующие собственным значениям λ_1, λ_2 и λ_1, λ_2, λ_3, и затем нормировать эти векторы, разделив их на числа, равные модулям. Указанные векторы должны быть попарно ортогональны:

$$\begin{aligned}&\tilde{x}^{(1)} = m_1\bar{i} + n_1\bar{j}, \quad \tilde{x}^{(2)} = m_2\bar{i} + n_2\bar{j}, \quad m_i^2 + n_i^2 = 1,\\ &m_i m_j + n_i n_j = 0; \quad i, j = 1, 2;\end{aligned} \tag{1.59}$$

$$\begin{aligned}&\tilde{x}^{(1)} = m_1\bar{i} + n_1\bar{j} + p_1\bar{k},\\ &\tilde{x}^{(2)} = m_2\bar{i} + n_2\bar{j} + p_2\bar{k},\\ &\tilde{x}^{(3)} = m_3\bar{i} + n_3\bar{j} + p_3\bar{k},\\ &m_i^2 + n_i^2 + p_i^2 = 1,\\ &m_i m_j + n_i n_j + p_i p_j = 0; \quad i, j = 1, 2, 3;\end{aligned} \tag{1.60}$$

2) матрицы линейного преобразования переменных запишутся так:

$$\begin{aligned}&\tilde{B} = \begin{pmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ m_3 & n_3 & p_3 \end{pmatrix},\\ &\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad \det\tilde{B} = \pm 1, \quad \det B = \pm 1,\end{aligned} \tag{1.61}$$

а сами линейные преобразования

$$\tilde{x}_1 = m_1 x_1 + n_1 x_2, \quad \tilde{x}_2 = m_2 x_1 + n_2 x_2, \tag{1.62}$$

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= m_1 x_1 + n_1 x_2 + p_1 x_3,\\ \tilde{x}_2 &= m_2 x_1 + n_2 x_2 + p_2 x_3,\\ \tilde{x}_3 &= m_3 x_1 + n_3 x_2 + p_3 x_3.\end{aligned} \tag{1.63}$$

3. Для приведения к каноническому виду общего уравнения кривой или поверхности второго порядка необходимо квадратичную форму, входящую в это уравнение, записать в каноническом виде, т. е. согласно (1.62) или (1.63); линейные по x_1, x_2 или x_1, x_2, x_3 члены уравнения преобразуются по формулам (1.67) или (1.68), и при $\lambda_i \neq 0$ их можно исключить переносом начала координат.

1.8. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1.1. Найти матрицу $C = 2A + B$, если

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & -5\\ -1 & 6\end{pmatrix}.$$

Решение. В соответствии с определением линейных операций над матрицами и их свойствами имеем:

$$C=2\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0 & -5\\ -1 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 6 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -15\\ -3 & 18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -13\\ 3 & 26\end{pmatrix}.$$

Замечание. Можно было решить эту задачу следующим образом:

$$C=\begin{pmatrix}2\cdot 2+3\cdot 0 & 2\cdot 1+3\cdot(-5)\\ 2\cdot 3+3\cdot(-1) & 2\cdot 4+3\cdot 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -13\\ 3 & 26\end{pmatrix}.$$

1.2. Даны матрицы

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix};$

2) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$

Найти $A\cdot B$.

Решение. В соответствии с определением операции умножения матриц имеем:

1) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1\cdot 1+1\cdot(-1)+2\cdot 1 & 1\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 4\\ 3\cdot 1+2\cdot(-1)+3\cdot 1 & 3\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 4\\ 4\cdot 1+3\cdot(-1)+2\cdot 1 & 4\cdot 1+3\cdot 2+2\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 11\\ 4 & 19\\ 3 & 18\end{pmatrix};$

2) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1\cdot 1+1\cdot 1+3\cdot 1 & 1\cdot 3+1\cdot 0+1\cdot 0 & 1\cdot 2+1\cdot 2+3\cdot(-1)\\ 1\cdot 1+0\cdot 1+2\cdot 1 & 1\cdot 3+0\cdot 0+2\cdot 0 & 1\cdot 2+0\cdot 2+2\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 3 & 3 & 0\end{pmatrix}.$

1.3. Вычислить $\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}^3.$

Решение. Исходя из определения степени матрицы с натуральным показателем, имеем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -15 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 & 30 \\ -45 & 10 \end{pmatrix}.$$

1.4. Найти значение многочлена $f(A)$ от матрицы A:

$$f(x) = x^2 - 5x, \ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Имеем

$$f(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^2 - 5\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1\cdot 1 + (-1)\cdot 2) & (1\cdot(-1) + (-1)\cdot 3) \\ (2\cdot 1 + 3\cdot 2) & (2\cdot(-1) + 3\cdot 3) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 10 & 15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 10 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-5 & -4+5 \\ 8-10 & 7-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}.$$

1.5. Найти все матрицы, перестановочные с данной:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Необходимо найти матрицу $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, удовлетворяющую условию $A \cdot B = B \cdot A$, или

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы, получим:

$$\begin{pmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ a+4c & b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b & 3a+4b \\ 2c+d & 3c+4d \end{pmatrix}.$$

Так как матрицы слева и справа должны быть равны, то, в соответствии с определением равенства матриц, получим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2a+3c = 2a+b, \\ 2b+3d = 3a+4b, \\ a+4c = 2c+d, \\ b+4d = 3c+4d. \end{cases}$$

Откуда следует, что

$$\begin{cases} b = 3c, \\ 2b = 3(d-a), \\ a + 4c = 2c + d, \\ b = 3c, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3c, \\ 2c = d - a, \end{cases} \Rightarrow d = a + 2c, \quad b = 3c, \quad a, c \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, $B = \begin{pmatrix} a & 3c \\ c & a+2c \end{pmatrix}$, где a, $c \in \mathbb{R}$.

1.6. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Найти $A^{\mathrm{T}} \cdot B^{\mathrm{T}}$.

Решение. Транспонируем матрицы A и B.

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \quad B^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Перемножая полученные матрицы, находим:

$$A^{\mathrm{T}} \cdot B^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -8 \\ 4 & 8 & 14 \\ -5 & 1 & -12 \end{pmatrix}.$$

1.7. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & 4 & -4 \end{vmatrix}.$$

Решение. Замечаем, что второй столбец определителя уже содержит один нулевой элемент. Прибавим к элементам второй строки элементы первой строки, умноженные на -1, а к элементам четвертой строки — элементы первой строки, умноженные на 5. Получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ (-3-3) & (1-1) & (1+4) & (-2-5) \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ (15+3) & (5-5) & (-5+4) & (10-4) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & 5 & -7 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 18 & 0 & -1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Разлагая полученный определитель по второй строке, имеем:

$$\Delta=(-1)^{1+2}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}-6 & 5 & -7\\ 2 & 1 & -1\\ 18 & -1 & 6\end{vmatrix}=-2\cdot\begin{vmatrix}-3 & 5 & -7\\ 1 & 1 & -1\\ 9 & -1 & 6\end{vmatrix}.$$

(Затем мы вынесли сомножитель 2 первого столбца на основании свойства 4.) Далее прибавим к элементам первого и второго столбца элементы третьего столбца определителя. Получим:

$$\Delta=-2\cdot\begin{vmatrix}-10 & -2 & -7\\ 0 & 0 & -1\\ 15 & 5 & 6\end{vmatrix}=-2\cdot 5\cdot\begin{vmatrix}-2 & -2 & -7\\ 0 & 0 & -1\\ 3 & 5 & 6\end{vmatrix}=10\cdot\begin{vmatrix}2 & 2 & 7\\ 0 & 0 & -1\\ 3 & 5 & 6\end{vmatrix}.$$

Здесь мы вынесли множитель в первом столбце, а затем общий множитель (-1) в первой строке. Разлагая теперь получившийся определитель третьего порядка по элементам второй строки, получим:

$$\Delta=10\cdot(-1)\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix}=10\cdot(10-6)=40.$$

Здесь определитель второго порядка вычислен в соответствии с его определением, по формуле

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{12}-a_{21}\cdot a_{22}.$$

1.8. Вычислить определитель матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 3 & 5 & -2 & 0\\ 4 & 0 & 1 & -1\\ 5 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow\det A=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 3 & 5 & -2 & 0\\ 4 & 0 & 1 & -1\\ 5 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Используя 7-е свойство определителя, вычтем из второй строки третью, из четвертой строки — соответствующие элементы первой строки определителя, умноженные соответственно на 3, 4, 5. Эти действия сокращенно будем обозначать так: $(2)-(1)\times 3$; $(3)-(1)\times 4$; $(4)-(1)\times 5$. Получим:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ (3-3\cdot1) & (5-3\cdot2) & (-2-3\cdot(-1)) & (0-3\cdot4) \\ (4-4\cdot1) & (0-4\cdot2) & (1-4\cdot(-1)) & (-1-4\cdot4) \\ (5-5\cdot1) & (1-5\cdot2) & (2-5\cdot(-1)) & (3-5\cdot4) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -12 \\ 0 & -8 & 5 & -17 \\ 0 & -9 & 7 & -17 \end{vmatrix}.$$

Далее, в соответствии с введенными обозначениями, выполним действия: (3) – (2) × 8; (4) – (2) × 9. Получаем

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -12 \\ (0-8\cdot0) & (-8-8\cdot(-1)) & (5-8\cdot1) & (-17-8\cdot(-12)) \\ (0-9\cdot0) & (-9-9\cdot(-1)) & (7-9\cdot1) & (-17-9\cdot(-12)) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & -3 & 79 \\ 0 & 0 & -2 & 91 \end{vmatrix}.$$

Выполним действия: $(4)-(3)\times\frac{2}{3}$. Имеем

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & -3 & 79 \\ (0-2/3\cdot0) & (0-2/3\cdot0) & (-2-(-3)\cdot2/3) & (91-79\cdot2/3) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & -3 & 79 \\ 0 & 0 & -2 & 115/3 \end{vmatrix}.$$

Так как элементы определителя, расположенные под его главной диагональю, равны 0, то, следовательно, определитель равен произведению элементов, расположенных на главной диагонали: $\det A = 1\cdot(-1)\cdot(-3)\cdot\frac{115}{3} = 115.$

1.9. Пользуясь свойством, состоящим в том, что определитель матрицы $C = A \cdot B$, которая представляет собой произведение квадратных матриц A и B одинаковых порядков, равен произведению определителей матриц A и B, т. е. $\det C = \det A \cdot \det B$, вычислить определитель матрицы $\det C$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 8 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем определители матриц A и B и затем перемножим их. Имеем

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 8 \\ 4 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (9 + 12) = 42.$$

Здесь мы умножили второй столбец определителя на (-4), прибавили к третьему столбцу, а затем разложили полученные значения определителя по второй строке.

Аналогично

$$\det B = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 9 & -6 \\ -1 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 9 & -6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 51.$$

Здесь мы умножили вторую строку на (-2) и прибавили к первой строке, а затем разложили получившийся определитель по первому столбцу. Перемножая полученные значения определителей, находим, что $\det C = 51 \cdot 42 = 2142$. Можно убедиться легко в том, что этот же результат мы получим, если найдем сначала матрицу C, перемножив матрицы A и B, при этом матрица C имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} -8 & 23 & 37 \\ -2 & 26 & 34 \\ -9 & 37 & 42 \end{pmatrix},$$

а затем вычислим $\det C$.

Кроме метода понижения порядка определителя (пример 1.7) и метода приведения к треугольному виду (пример 1.8), при вычислении определителей используется метод рекуррентных соотношений. Суть метода состоит в том, что исходный определитель D_n n-го порядка выражается через определители того же типа, но более низкого порядка, т. е. по рекуррентной формуле вида: $D_n = f(D_{n-1}, D_{n-2}, \ldots, D_{n-k})$, справедливой для всех натуральных n, больших k. Из этого соотношения, применяя метод математической индукции, получается формула, выражающая определитель D_n через определители $D_{n-1}, D_{n-2}, \ldots, D_{n-k}$.

В качестве примера применения указанного метода вычислим определитель Вандермонда:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Покажем, что при любом $n \geqslant 2$ определитель Вандермонда равен произведению всевозможных разностей $a_i - a_j$, где $1 \leqslant j < i \leqslant n$. В самом деле, при $n = 2$ имеем

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1.$$

Пусть утверждение доказано для определителей Вандермонда порядка $n - 1$:

$$D_{n-1} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n-1} (a_i - a_j),$$

где символ

$$\prod_{i=1}^{n} a_i$$

означает произведение элементов a_i, т. е.

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Докажем, что эта формула справедлива и для D_n. Для этого из последней n-й строки вычтем $(n-1)$-ю, умноженную на a_1, и далее последовательно вычитаем из k-й строки $(k-1)$-ю, умноженную на a_1. В результате получим

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_2 a_1 & a_3^2 - a_3 a_1 & \dots & a_n^2 - a_n a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_2^{n-2} a_1 & a_3^{n-1} - a_3^{n-2} a_1 & \dots & a_n^{n-1} - a_n^{n-2} a_1 \end{vmatrix}.$$

Далее разложим этот определитель по первому столбцу и вынесем из всех столбцов общие множители. В результате получим рекуррентное соотношение:

$$D_n = (a_2 - a_1)\cdot(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ a_2 & a_3 & & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & & a_n^2 \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2 - a_1)\cdot(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1)\times$$

$$\times \prod_{2\leqslant j<i\leqslant n} (a_i - a_j) = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} (a_i - a_j).$$

1.10. Методом присоединенной матрицы найти A^{-1}, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Прежде всего вычисляем определитель данной матрицы, чтобы убедиться в существовании обратной матрицы. Имеем

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Здесь мы прибавили к элементам второй строки элементы третьей строки, умноженные предварительно на (-1), а затем раскрыли определитель по второй строке. Так как определитель данной матрицы отличен от нуля, то обратная к ней матрица существует. Для построения присоединенной матрицы находим алгебраические дополнения элементов данной матрицы. Имеем

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&5\\2&3\end{vmatrix}=-4,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&5\\1&3\end{vmatrix}=2,\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&2\\1&2\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}5&6\\2&3\end{vmatrix}=-3,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2&6\\1&3\end{vmatrix}=0,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2&5\\1&2\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}5&6\\2&5\end{vmatrix}=13,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2&6\\1&5\end{vmatrix}=-4,\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2&5\\1&2\end{vmatrix}=-1.$$

В соответствии с формулой (1.15) транспонируем матрицу A^*:

$$A^*=\begin{pmatrix}-4&2&0\\-3&0&1\\13&-4&-1\end{pmatrix},\quad (A^*)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-4&-3&13\\2&0&-4\\0&1&-1\end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле (1.15) имеем

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&-3/2&13/2\\1&0&-2\\0&1/2&-1/2\end{pmatrix}.$$

1.11. Методом элементарных преобразований найти A^{-1}, если

$$A=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&1&5\\3&2&6\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н ие. Образуем матрицу B:

$$B=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&4&1&0&0\\2&1&5&0&1&0\\3&2&6&0&0&1\end{array}\right).$$

Обозначим строки матрицы B через α_1, α_2, α_3. Произведем над строками матрицы B следующие преобразования:

$$\alpha_2'=\alpha_2-2\alpha_1,\quad \alpha_3'=\alpha_3-3\alpha_1;\quad \alpha_3''=\alpha_3'-2\alpha_2';$$

$$\alpha_2''=-\frac{1}{3}\alpha_2,\quad \alpha_3'''=\frac{1}{2}\alpha_3'',\quad \alpha_1'=-4\alpha_2''+\alpha_1+2\alpha_3''',$$

$$\alpha_3^{\mathrm{IV}}=\alpha_3'''-\alpha_2'',\quad \alpha_3^{\mathrm{V}}=-\alpha_3^{\mathrm{IV}}.$$

В результате последовательно получаем

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&4&1&0&0\\2&1&5&0&1&0\\3&2&6&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&4&1&0&0\\0&-3&-3&-2&1&0\\0&-4&-6&-3&0&1\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&4&1&0&0\\0&1&1&2/3&-1/3&0\\0&1&0&1/2&-1&1/2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2/3&-2/3&1\\0&1&1&2/3&-1/3&0\\0&1&0&1/2&-1&1/2\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2/3&-2/3&1\\0&1&1&2/3&-1/3&0\\0&1&-1&-1/6&-2/3&1/2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2/3&-2/3&1\\0&1&0&1/2&-1&1/2\\0&0&1&1/6&2/3&-1/2\end{array}\right).$$

Следовательно, $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&1\\ \frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{6}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$

1.12. Найти A^{-1} для матрицы $A=\begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix}.$

Решение. Найдем A^{-1} методом присоединенной матрицы. Имеем $\det A=2$. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A. В данном случае алгебраическими дополнениями элементов матрицы будут соответствующие элементы самой матрицы, взятые со знаком в соответствии с формулой (1.11). Имеем $A_{11}=3$, $A_{12}=-4$, $A_{21}=-1$, $A_{22}=2$. Образуем присоединенную матрицу

$$A^*=\begin{pmatrix}3&-4\\-1&2\end{pmatrix}.$$

Транспонируем матрицу A^*:

$$(A^*)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}3&-1\\-4&2\end{pmatrix}.$$

Находим обратную матрицу по формуле (1.15):

$$A^{-1}=-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}3&-1\\-4&2\end{pmatrix}.$$

1.13. Методом окаймляющих миноров найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -4 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 8 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Минор второго порядка

$$M_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2\cdot 1-1\cdot 1=1\neq 0,$$

отличный от нуля, расположен в левом верхнем углу матрицы A. Минор третьего порядка

$$M_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=4-3=1\neq 0,$$

окаймляющий минор M_2, также отличен от нуля. Однако оба минора четвертого порядка, окаймляющие M_3,

$$M_4=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & -4 & 4 \\ 3 & 3 & 8 & 1 \end{vmatrix},\quad M_4=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & -4 & 1 \\ 3 & 3 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

равны нулю. Поэтому ранг матрицы A равен 3, а базисным минором является, например, представленный выше минор M_3.

Метод элементарных преобразований основан на том, что элементарные преобразования матрицы не меняют ее ранга. Используя эти преобразования, можно привести матрицу к виду, когда все ее элементы, кроме a_{11}, a_{22}, ..., a_{rr} ($r\leqslant \min(m, n)$), равны нулю. Это, очевидно, означает, что $\operatorname{rang} A=r$. Заметим, что если матрица n-го порядка имеет вид верхней треугольной матрицы, т. е. матрицы, у которой все элементы под главной диагональю равны нулю, то ее определитель равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали. Это свойство можно использовать при вычислении ранга матрицы методом элементарных преобразований: необходимо с их помощью привести матрицу к треугольной и тогда, выделив соответствующий определитель, найдем, что ранг матрицы равен числу элементов главной диагонали, отличных от нуля.

1.14. Методом элементарных преобразований найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix}5 & 7 & 12 & 48 & -14\\ 9 & 16 & 24 & 98 & -31\\ 14 & 24 & 25 & 146 & -45\\ 11 & 12 & 24 & 94 & -25\end{pmatrix}.$$

Решение. Обозначим i-ю строку матрицы A символом α_i. На первом этапе выполним элементарные преобразования $\alpha_2' = \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_1$, $\alpha_3' = \alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_1$; $\alpha_4' = \alpha_4 - \alpha_3 + \alpha_1$.

На втором этапе выполним преобразования

$$\alpha_3'' = \alpha_3' + \alpha_2', \alpha_4'' = \alpha_4' - \alpha_2'.$$

В результате получим

$$\begin{pmatrix}5 & 7 & 12 & 48 & -14\\ 9 & 16 & 24 & 98 & -31\\ 14 & 24 & 25 & 146 & -45\\ 11 & 12 & 24 & 94 & -25\end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix}5 & 7 & 12 & 48 & -14\\ 0 & -1 & 11 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -11 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{2}$$

$$\xrightarrow{2} \begin{pmatrix}5 & 7 & 12 & 48 & -14\\ 0 & -1 & 11 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4 & 6\end{pmatrix} \xrightarrow{3} \begin{pmatrix}5 & 7 & 12 & 48 & -14\\ 0 & -1 & 11 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{4}$$

$$\xrightarrow{4} \begin{pmatrix}5 & 7 & 12 & 12 & -7\\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

На третьем этапе мы переставили четвертую строку на место третьей, а третью — на место четвертой. На четвертом этапе мы разделили элементы четвертого и пятого столбцов соответственно на 4 и 2 и поменяли местами третий и четвертый столбцы. Из вида матрицы, получившейся после четвертого этапа преобразования, следует, что rang $A = 3$. Можно было бы продолжить преобразование матрицы A, добиваясь обнуления остальных элементов матрицы с различными индексами, но вряд ли это целесообразно при нахождении ранга матрицы. Заметим также, что получившуюся в результате элементарных преобразований нулевую строку можно было бы не писать при дальнейших преобразованиях матрицы, а просто вычеркнуть, что, очевидно, никак не повлияет на ранг исходной матрицы.

1.15. Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 1, \\ 7x_1 + 8x_2 + 18x_3 = 2, \\ 3x_1 + 7x_2 + 17x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение. Определим ранги основной A и расширенной $\tilde{A}$ матриц системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 7 & 8 & 18 \\ 3 & 7 & 17 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 10 & 1 \\ 7 & 8 & 18 & 2 \\ 3 & 7 & 17 & 3 \end{array}\right).$$

Начнем с расширенной матрицы. Произведем следующие действия: (2) – (1) × 7, (3) – (1) × 3, получаем

$$\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -20 & -52 & -5 \\ 0 & -5 & -13 & 0 \end{array}\right).$$

Разделим вторую строку на 4:

$$\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -5 & -13 & -1{,}25 \\ 0 & -5 & -13 & 0 \end{array}\right).$$

Вычтем из третьей строки вторую:

$$\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 10 & 2 \\ 0 & -5 & -13 & -1{,}25 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}25 \end{array}\right).$$

Получили, что у основной матрицы системы

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & -5 & -13 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

всего лишь две линейно независимые строки — первая и вторая, значит, $\operatorname{rang} A = 2$. Чтобы найти ранг расширенной матрицы системы, составим минор третьего порядка:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -1,25 \\ 0 & 0 & 1,25 \end{vmatrix} = 1\cdot(-5)\cdot(-1,25) = -6,25 \neq 0,$$

значит, $\operatorname{rang}\tilde{A} = 3$. Так как $\operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang}\tilde{A}$, то по теореме Кронекера–Капелли система несовместна.

1.16. Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение. Найдем ранги основной матрицы системы и расширенной матрицы. Имеем

$$\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \text{меняем местами} \\ \text{1 и 2 строки} \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} \text{из 2 строки} - (\text{1 строка})\times 3; \\ \text{из 3 строки} - \text{1 строка}; \\ \text{из 4 строки} - \text{1 строка} \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} \text{2 строку разделим на 10;} \\ \text{4 строку разделим на 10} \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} \text{из 3 строки} - (\text{2 строка})\times 5; \\ \text{из 4 строки} - (\text{2 строка})\times 2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} \text{из 4 строки} - \\ \text{3 строка} \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \text{удаляем} \\ \text{нулевую} \\ \text{четвертую} \\ \text{строку} \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Полученный результат показывает, что матрица A и расширенная матрица $\tilde{A}$ имеют одинаковый ранг:

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A} = 3,$$

таким образом, система уравнений совместна и имеет только одно решение.

1.17. Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 0x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Найдем ранги основной матрицы системы и расширенной матрицы. Имеем:

$$\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \text{меняем местами} \\ \text{1 и 5 строки} \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} (2)-(1)\times 5; \\ (3)-(1)\times 2; \\ (4)-(1)\times 3; \\ (5)-(1)\times 2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -13 & -5 & -3 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -8 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim [(4)\ \text{делим на}\ 2] \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -13 & -5 & -3 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \text{из одинаковых} \\ \text{строк 4 и 5} \\ \text{вычеркиваем} \\ \text{5-ю} \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -13 & -5 & -3 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} \text{2 и 3 переставили} \\ \text{местами} \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & -1 \\ 0 & -5 & -13 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} (3)-(2)\times 5; \\ (4)-(2)\times 2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 12 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim \left[(4)-(3)\times\frac{1}{2}\right] \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 12 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim [\text{вычеркиваем нулевую 4-ю строку}] \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 12 & 10 & 2 \end{array}\right).$$

Минор третьего порядка, совпадающий с определителем матрицы, эквивалентной для основной матрицы системы, отличен от нуля:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} = -12,$$

отсюда следует, что $\operatorname{rang} A = 3$. Поскольку этот же минор входит в состав расширенной матрицы системы, имеющей лишь три строки, то $\operatorname{rang}\tilde{A} = 3$ и по теореме Кронекера–Капелли система совместна. Так как число неизвестных $n = 4$ больше ранга основной матрицы системы, то система неопределенна и имеет бесчисленное множество решений. С учетом вида последней из эквивалентных матриц для расширенной матрицы системы запишем соответствующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ \quad -x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -1, \\ \qquad 12x_3 + 10x_4 = -1. \end{cases}$$

Пусть $x_4 = C$ (свободная неизвестная). Тогда из последнего уравнения системы получаем

$$x_3 = \frac{1}{12}(-1 - 10 \cdot C).$$

Применяя обратный ход метода Гаусса, последовательно определяем остальные неизвестные x_2, x_1.

1.18. Матричным способом решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 9. \end{cases}$$

Решение. Перепишем систему в матричном виде: $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Решение представляется в виде $X = A^{-1} \cdot B$. Обратная матрица для основной матрицы системы найдена в примере 1.11, ее вид

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.19. Решить по формулам Крамера систему уравнений из примера 1.18.

Р е ш е н и е. Определитель для основной матрицы системы вычисляется так:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 6 + 4 = 6;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 7 & 1 & 5 \\ 9 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} = -20 + 6 + 20 = 6;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -3 + 15 - 12 = 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 + 6 + 5 = 6;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{6}{6} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{6} = 0, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{6}{6} = 1.$$

Решение совпадает с тем, которое найдено матричным способом.

1.20. Решить систему уравнений из примера 1.18 методом Гаусса.

Решение. Имеем

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&4&5\\2&1&5&7\\3&2&6&9\end{array}\right)\sim\begin{bmatrix}(2)-(1)\times 2;\\(3)-(1)\times 3\end{bmatrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&4&5\\0&-3&-3&-3\\0&-4&-6&-6\end{array}\right)\sim[(2):(-3)]\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&4&5\\0&1&1&1\\0&-4&-6&-6\end{array}\right)\sim[(3)-(2)\times(-4)]\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&4&5\\0&1&1&1\\0&0&2&2\end{array}\right).$$

На этом прямой ход метода Гаусса закончен, и для проведения обратного хода составляем систему, которая соответствует последней матрице, эквивалентной исходной расширенной матрице системы:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3=5,\\ \qquad x_2+x_3=1,\\ \qquad\quad 2x_3=2.\end{cases}$$

Из последнего уравнения находим $x_3 = 1$, подставляя найденное x_3 во второе уравнение, найдем $x_2 = 1 - x_3 = 0$. Из первого уравнения найдем $x_1 = 5 - 2 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 = 1$.

1.21. Решить методом Гаусса систему из примера 1.17.

Решение. В результате элементарных преобразований над расширенной матрицей системы получили в конце прямого хода метода Гаусса следующую систему:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-x_4=1,\\ \quad -x_2-5x_3-x_4=-1,\\ \qquad\quad 6x_3+5x_4=1.\end{cases}$$

Здесь свободное неизвестное x_4, перенесем его в правые части, базисные неизвестные x_1, x_2, x_3 оставим в левых частях уравнений:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=x_4+1,\\ \quad -x_2-5x_3=x_4-1,\\ \qquad\quad 6x_3=-5x_4+1.\end{cases}$$

Найдем из последнего уравнения выражение x_3 и, подставив во второе уравнение, определим x_2. Имеем

$$x_3=-\frac{5}{6}x_4+\frac{1}{6},\quad x_2=1-5\left(\frac{5}{6}x_4+\frac{1}{6}\right)-x_4=\frac{1}{6}-\frac{31}{6}x_4.$$

Подставим теперь x_3 и x_2 в первое из уравнений и найдем x_1:

$$x_1 = -2\left(\frac{1}{6}-\frac{31}{6}x_4\right)-\left(-\frac{5}{6}x_4+\frac{1}{6}\right)+x_4+1=\frac{1}{2}+\frac{73}{6}x_4.$$

Таким образом, ответ запишется так:

$$\begin{cases} \forall x_4 \in \mathbb{R}, \\ x_1 = \frac{1}{2}+\frac{73}{6}x_4, \\ x_2 = \frac{1}{6}-\frac{31}{6}x_4, \\ x_3 = -\frac{5}{6}x_4+\frac{1}{6}. \end{cases}$$

1.22. Решить методом Гаусса систему уравнений из примера 1.15.

Решение. Запишем систему уравнений, соответствующую окончательному виду расширенной матрицы системы из примера 1.15:

$$\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -5 & -13 & -1{,}25 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}25 \end{array}\right), \quad \begin{cases} x_1+4x_2+10x_3=1, \\ -5x_2-13x_3=-1{,}25, \\ 0x_3=1{,}25. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что данная система несовместна, так как последнее уравнение неверно при любом значении x_3.

1.23. Найти фундаментальную систему решений для системы уравнений и записать общее решение этой системы:

$$\begin{cases} x_1+7x_2-8x_3+9x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0, \\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0, \\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0. \end{cases}$$

Решение. Основная матрица системы имеет вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -8 & 9 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен 2, причем минор второго порядка, расположенный в верхнем углу этой матрицы, не равен нулю, а все остальные его окаймляющие миноры третьего порядка равны нулю. Это означает, что третье и четвертое уравнения системы являются следствием первых двух. Отсюда следует, что все решения исходной системы являются решениями следующей системы, соответствующей первым двум строкам основной матрицы системы:

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 8x_3 + 9x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Здесь свободные неизвестные x_3 и x_4 следует перенести в правые части уравнений, оставив в левых частях базисные неизвестные x_1 и x_2:

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 = 8x_3 - 9x_4, \\ 2x_1 - 3x_2 = -3x_3 + 2x_4. \end{cases}$$

Решим систему матричным способом. Обратная матрица для квадратной матрицы второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

строится сокращенно следующим образом: переставляются местами элементы на главной диагонали, а элементы на побочных диагоналях меняют свой знак, полученная матрица делится на определитель прямой матрицы:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3) - 7\cdot 2 = -17.$$

Имеем $A^{-1} = \dfrac{1}{-17}\begin{pmatrix} -3 & -7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{17} & \dfrac{7}{17} \\ \dfrac{2}{17} & -\dfrac{1}{17} \end{pmatrix}.$

Далее получаем:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{17} & \dfrac{7}{17} \\ \dfrac{2}{17} & -\dfrac{1}{17} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8x_3 - 9x_4 \\ -3x_3 + 2x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{17}x_3 - \dfrac{13}{17}x_4 \\ \dfrac{19}{17}x_3 - \dfrac{20}{17}x_4 \end{pmatrix}.$$

Приравнивая столбец свободных членов $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ сначала к $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, затем к $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, получим фундаментальную систему решений

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{17} \\ \frac{19}{17} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{17} \\ -\frac{20}{17} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение исходной однородной системы получится в виде

$$X = \alpha X^{(1)} + \beta X^{(2)} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{3}{17} \\ \frac{19}{17} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -\frac{13}{17} \\ -\frac{20}{17} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot \frac{3}{17} + \beta \cdot \left(-\frac{13}{17}\right) \\ \alpha \cdot \left(\frac{19}{17}\right) + \beta \cdot \left(-\frac{20}{17}\right) \\ \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 \\ \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь α и β — произвольные действительные числа.

1.24. Найти общее решение неоднородной системы

$$x_1 + 7x_2 - 8x_3 + 9x_4 = 4.$$

Решение. Ранги основной матрицы системы и расширенной матрицы системы равны единице. Поскольку число неизвестных равно четырем, то количество базисных неизвестных равно единице (пусть базисной неизвестной будет x_1), а количество свободных неизвестных равно трем (пусть свободными неизвестными будут x_2, x_3, x_4). Перепишем систему так:

$$x_1 = -7x_2 + 8x_3 - 9x_4 + 4.$$

Приравнивая столбец свободных членов

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X^{(\text{общ. одн.})} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

получим фундаментальную систему решений однородной системы $x_1 + 7x_2 - 8x_3 + 9x_4 = 0$:

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X^{(2)} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X^{(3)} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение соответствующей однородной системы:

$$X^{(\text{общ. одн.})} = \alpha_1 \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где α_1, α_2, α_3 — любые действительные числа. Найдем теперь частное решение исходной неоднородной системы

$$x_1 + 7x_2 - 8x_3 + 9x_4 = 4.$$

Для этого положим все свободные неизвестные равными нулю: $x_1 + 7 \cdot 0 - 8 \cdot 0 + 9 \cdot 0 = 4$. Получили, что частное решение имеет вид

$$X^{(\text{частн. неодн.})} = \begin{pmatrix} x_1 = 4 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{pmatrix}.$$

Общее решение неоднородной системы есть сумма ее частного решения и общего решения соответствующей однородной системы:

$$X^{(\text{общ. неодн.})} = X^{(\text{общ. одн.})} + X^{(\text{частн. неодн.})} =$$

$$= \alpha_1 \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1.25. Найти общее решение неоднородной системы

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 8x_3 + 9x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 3, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Основная матрица системы совпадает с той, которая рассмотрена в примере 1.23. Нетрудно показать, что ранги расширенной матрицы системы и основной матрицы системы равны 2, система совместна. Система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 = 1 + 8x_3 - 9x_4, \\ 2x_1 - 3x_2 = 1 - 3x_3 + 2x_4. \end{cases}$$

Общее решение соответствующей однородной системы получено в примере 1.23, его вид таков:

$$X^{(\text{общ. одн.})} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{3}{17} \\ \frac{19}{17} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -\frac{13}{17} \\ -\frac{20}{17} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot \frac{3}{17} + \beta \cdot \left(-\frac{13}{17}\right) \\ \alpha \cdot \left(\frac{19}{17}\right) + \beta \cdot \left(-\frac{20}{17}\right) \\ \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 \\ \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 \end{pmatrix}.$$

Частное решение найдем, положив свободные неизвестные равными нулю:

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 = 1 + 8 \cdot 0 - 9 \cdot 0 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 = 1 - 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 1. \end{cases}$$

С помощью обратной матрицы для основной матрицы этой системы (она найдена в примере 1.23) получаем:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{3}{17} & \frac{7}{17} \\ \frac{2}{17} & -\frac{1}{17} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{17} \\ \frac{1}{17} \end{pmatrix},$$

отсюда следует, что

$$X^{(\text{частн. неодн.})} = \begin{pmatrix} \frac{10}{17} \\ \frac{1}{17} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$X^{(\text{общ. неодн.})}=\alpha\begin{pmatrix}\frac{3}{17}\\ \frac{19}{17}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-\frac{13}{17}\\ -\frac{20}{17}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{10}{17}\\ \frac{1}{17}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\cdot\frac{3}{17}+\beta\cdot\left(-\frac{13}{17}\right)+\frac{10}{17}\\ \alpha\cdot\left(\frac{19}{17}\right)+\beta\cdot\left(-\frac{20}{17}\right)+\frac{1}{17}\\ \alpha\cdot 1+\beta\cdot 0\\ \alpha\cdot 0+\beta\cdot 1\end{pmatrix}.$$

1.26. Найти координаты вектора

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},$$

если линейное преобразование, переводящее его в вектор

$$Y=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix},$$

задано системой уравнений

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=1,\\ -x_1+3x_2+4x_3=2,\\ 2x_1-3x_2+5x_3=3.\end{cases}$$

Решение. Найдем обратную матрицу для основной матрицы системы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 3 & 4\\ 2 & -3 & 5\end{pmatrix}.$$

Вычисляем определитель данной матрицы, чтобы убедиться в существовании обратной матрицы. Имеем

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 3 & 4\\ 2 & -3 & 5\end{vmatrix}=44\neq 0;\quad \begin{matrix}A_{11}=27, & A_{21}=-19, & A_{31}=-1,\\ A_{12}=13, & A_{22}=-1, & A_{32}=-7,\\ A_{13}=-3, & A_{23}=7, & A_{33}=5.\end{matrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{44}\begin{pmatrix}27 & -19 & -1\\ 13 & -1 & -7\\ -3 & 7 & 5\end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -\dfrac{7}{22} \\ -\dfrac{5}{22} \\ \dfrac{13}{22} \end{pmatrix}.$$

Полученное решение дает координаты искомого вектора.

1.27. Дано линейное преобразование с помощью системы уравнений
$$\begin{cases} g_1 = -x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3, \\ g_2 = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3, \\ g_3 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3. \end{cases}$$

Найти матрицу преобразования, будет ли она вырожденной?

Решение. С учетом матричной записи преобразования получим:
$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Здесь матрица преобразования

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

имеет отличный от нуля определитель, равный произведению всех элементов, расположенных на главной диагонали $\det A = (-1) \cdot 1 \cdot 1 = -1 \neq 0$ (отображение также невырожденное).

1.28. Имеются линейные преобразования $Ax = \{x_2 - x_3, x_1, x_1 + x_3\}$ и $Bx = \{x_2, 2x_2, x_1\}$ вектора $x = \{x_1, x_2, x_3\}$. Найти отображение $B \cdot (2A - B)x$.

Решение. Выпишем матрицы линейных отображений. Для этого запишем заданные отображения в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_1 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы в левых частях записанных матричных уравнений, получим

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_1 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 \\ b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} &a_{11} = 0, \quad a_{12} = 1, \quad a_{13} = -1, \\ &a_{21} = 1, \quad a_{22} = 0, \quad a_{23} = 0, \\ &a_{31} = 1, \quad a_{32} = 0, \quad a_{33} = 1. \\ &b_{11} = 0, \quad b_{12} = 1, \quad b_{13} = 0, \\ &b_{21} = 0, \quad b_{22} = 2, \quad b_{23} = 0, \\ &b_{31} = 1, \quad b_{32} = 0, \quad b_{33} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, матрицы A и B имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

С учетом свойств линейного преобразования найдем матрицу искомого линейного отображения:

$$B \cdot (2A - B) = 2B \cdot A - B \cdot B =$$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1.29. Пусть с помощью матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ производится преобразование вектора x в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$. Определить матрицу преобразования A' в базисе $\{e_1', e_2', e_3'\}$, если

$$e_1' = e_1 - e_2 + e_3, \quad e_2' = e_1 + e_2 - 2e_3, \quad e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3.$$

Р е ш е н и е. Выпишем матрицу преобразования старого базиса в новый:

$$B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу B^{-1}, предварительно убедившись, что она не вырождена:

$$\det B=\begin{vmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -2\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0,\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix},$$

$$B^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & -2 & 8\\ 8 & -1 & 4\\ -4 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

Найдем искомую матрицу преобразования по формуле

$$A'=B^{-1}\cdot A\cdot B=\begin{pmatrix}15 & -2 & 8\\ 8 & -1 & 4\\ -4 & 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -1 & 27\\ 5 & -1 & 14\\ -3 & 1 & -8\end{pmatrix}.$$

1.30. Применяя процесс ортогонализации Шмидта, построить ортонормированный базис $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ по данному базису $\{g_1, g_2, g_3\}$:

$$g_1=(1;\,1;\,0),\quad g_2=(2;\,0;\,1),\quad g_3=(0;\,1;\,-2).$$

Решение.

$f_1=g_1=(1;\,1;\,0)$,
$C_1^2=(g_2,f_1)/(f_1,f_1)=(2\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 0)/(1^2+1^2+0^2)=1$,
$f_2=g_2-C_1^2f_1=(2;\,0;\,1)-1\cdot(1;\,1;\,0)=(1;\,-1;\,1)$,
$C_1^3=(g_3,f_1)/(f_1,f_1)=(0\cdot 1+1\cdot 1+(-2)\cdot 0)/(1^2+1^2+0^2)=0{,}5$,
$C_2^3=(g_3,f_2)/(f_2,f_2)=(0\cdot 1+1\cdot(-1)+$
$+(-2)\cdot 1)/(1^2+(-1)^2+1^2)=-1$,
$f_3=g_3-C_1^3f_1-C_2^3f_2=(0;\,1;\,-2)-$
$-0{,}5\cdot(1;\,1;\,0)-(-1)\cdot(1;\,-1;\,1)=(0{,}5;\,-0{,}5;\,-1)$.

$$e_1=f_1/\sqrt{(f_1,f_1)}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};0\right);$$

$$e_2 = f_2 / \sqrt{(f_2, f_2)} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3} \right);$$

$$e_3 = f_3 / \sqrt{(f_3, f_3)} = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}; -\frac{\sqrt{6}}{6}; -\frac{\sqrt{6}}{6} \right).$$

1.31. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\hat{A}$ с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Будут ли собственные векторы ортогональны?

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, находим собственные значения $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$. Далее найдем собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = -1$. Составим систему

$$\begin{cases} (1-\lambda_1)x_1 + 2x_2 = 0, \\ 3x_1 + (2-\lambda_1)x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = 0.$$

Положим $x_1 = m$, где m — произвольное действительное число, отличное от нуля. Собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_1, имеет вид

$$x^{(1)} = m\vec{i} - m\vec{j} = \begin{pmatrix} m \\ -m \end{pmatrix}.$$

Для собственного вектора $\lambda_2 = 4$ получаем аналогично

$$\begin{cases} (1-\lambda_2)x_1 + 2x_2 = 0, \\ 3x_1 + (2-\lambda_2)x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow 3x_1 - 2x_2 = 0.$$

Положим $x_1 = m$, где m — произвольное действительное число, отличное от нуля, тогда

$$x^{(2)} = m\vec{i} + 1{,}5m\vec{j} = \begin{pmatrix} m \\ 1{,}5m \end{pmatrix}$$

и первый собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_1, имеет вид

$$x^{(1)} = m\bar{i} - m\bar{j} = \begin{pmatrix} m \\ -m \end{pmatrix}.$$

Найдем скалярное произведение собственных векторов: $x^{(1)} \cdot x^{(2)} = m \cdot m + (-m) \cdot 1{,}5m = -0{,}5m^2$. Чтобы векторы были ортогональны, необходимо, чтобы их скалярное произведение было равно нулю, но тогда $m = 0$, а этого быть не должно, так как по определению собственный вектор не может быть нулевым, следовательно, собственные векторы неортогональны.

1.32. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\hat{A}$, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Будут ли собственные векторы ортогональны?

Р е ш е н и е. Составим характеристическое уравнение

$$A = \begin{vmatrix} (-1-\lambda) & 1 & 1 \\ 1 & (-5-\lambda) & 1 \\ 1 & 1 & (-2-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 + 8\lambda^2 + 14\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda(\lambda^2 + 8\lambda + 14) = 0,$$

отсюда получаем $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = -4 \pm \sqrt{2}$.

Найдем собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 0$, из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} (-1-\lambda_1)x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 0, \\ 1 \cdot x_1 + (-5-\lambda_1)x_2 + 1 \cdot x_3 = 0, \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + (-2-\lambda_1)x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Определитель этой системы равен нулю, минор, стоящий в левом верхнем углу,

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

отсюда следует, что ранг основной матрицы системы равен 2 и линейно независимыми являются только первые два уравнения, при этом свободной неизвестной будет x_3, которую перенесем в правые части уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = -x_3, \\ x_1 - 5x_2 = -x_3. \end{cases}$$

Решаем систему по правилу Крамера:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -x_3 & 1 \\ -x_3 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{3}{2}x_3, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -x_3 \\ 1 & -x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}x_3.$$

Положим $x_3 = m$, где m — произвольное действительное число, тогда собственный вектор

$$x^{(1)} = 1{,}5m\vec{i} + 0{,}5m\vec{j} + m\vec{k} = \begin{pmatrix} 1{,}5m \\ 0{,}5m \\ m \end{pmatrix}.$$

Найдем собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = -4 - \sqrt{2}$, из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} (-1-\lambda_2)x_1 + 1\cdot x_2 + 1\cdot x_3 = 0, \\ 1\cdot x_1 + (-5-\lambda_2)x_2 + 1\cdot x_3 = 0, \\ 1\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + (-2-\lambda_2)x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3+\sqrt{2})x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + (-1+\sqrt{2})x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + (2+\sqrt{2})x_3 = 0. \end{cases}$$

Аналогично предыдущему случаю, третье уравнение есть следствие первых двух, поэтому третье уравнение отбрасываем и получаем следующую систему для определения координат второго собственного вектора:

$$\begin{cases} (3+\sqrt{2})x_1 + x_2 = -x_3, \\ x_1 + (-1+\sqrt{2})x_2 = -x_3, \end{cases}$$

отсюда получаем

$$x^{(2)} = 0{,}5\sqrt{2}m\vec{i} + (-2-1{,}5\sqrt{2})m\vec{j} + m\vec{k} = \begin{pmatrix} 0{,}5\sqrt{2}m \\ (-2-1{,}5\sqrt{2})m \\ m \end{pmatrix}.$$

Найдем собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_3 = -4+\sqrt{2}$, из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases}(-1-\lambda_3)x_1 + 1\cdot x_2 + 1\cdot x_3 = 0,\\ 1\cdot x_1 + (-5-\lambda_3)x_2 + 1\cdot x_3 = 0,\\ 1\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + (-2-\lambda_3)x_3 = 0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(3-\sqrt{2})x_1 + x_2 + x_3 = 0,\\ x_1 + (-1-\sqrt{2})x_2 + x_3 = 0,\\ x_1 + x_2 + (2-\sqrt{2})x_3 = 0.\end{cases}$$

Третье уравнение вновь есть следствие первых двух, поэтому третье уравнение отбрасываем и получаем следующую систему для определения координат третьего собственного вектора:

$$\begin{cases}(3-\sqrt{2})x_1 + x_2 = -x_3,\\ x_1 + (-1-\sqrt{2})x_2 = -x_3,\end{cases}$$

отсюда получаем

$$x^{(3)} = 0{,}5\sqrt{2}m\vec{i} + (2-1{,}5\sqrt{2})m\vec{j} + m\vec{k} = \begin{pmatrix}0{,}5\sqrt{2}m\\ (2-1{,}5\sqrt{2})m\\ m\end{pmatrix}.$$

Выясним, ортогональны ли собственные векторы. Для этого найдем их скалярные произведения:

$$x^{(1)}\cdot x^{(2)} = (1{,}5\cdot 0{,}5\sqrt{2} + 0{,}5\cdot(-1{,}5\sqrt{2}-2)+1)m^2 = 0,$$
$$x^{(1)}\cdot x^{(3)} = (1{,}5\cdot 0{,}5\sqrt{2} + 0{,}5\cdot(-1{,}5\sqrt{2}+2)+1)m^2 \neq 0,$$
$$x^{(2)}\cdot x^{(3)} = (0{,}5\sqrt{2}\cdot 0{,}5\sqrt{2} + (-2-1{,}5\sqrt{2})\cdot(2-1{,}5\sqrt{2})+1)m^2 \neq 0.$$

Таким образом, ортогональными являются только векторы $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$.

1.33. Привести к каноническому виду квадратичную форму, с помощью которой определяется уравнение кривой второго порядка $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 5x - 5y = 2$.

Р е ш е н и е. Квадратичная форма, определяющая данное уравнение, имеет вид

$$F(x,y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2 = 5x^2 + 3xy + 3yx + 5y^2,$$
$$a_{11} = 5,\ \ a_{12} = a_{21} = 3,\ \ a_{22} = 5.$$

Соответствующая ей матрица $\tilde{A}$ квадратичной формы такова:

$$A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}.$$

Составляем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & 3\\ 3 & 5-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow(5-\lambda)^2-9=0\Rightarrow\lambda_1=2,\quad\lambda_2=8.$$

Квадратичная форма в новой системе координат $Ox'y'$ запишется следующим образом: $F(x', y') = 2(x')^2 + 8(y')^2$. Найдем собственный вектор для $\lambda_1 = 2$. Составляем систему:

$$\begin{cases}(5-\lambda_1)x'+3y'=0,\\ 3x'+(5-\lambda_1)y'=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x'+3y'=0,\\ 3x'+3y'=0.\end{cases}\Rightarrow x'+y'=0\Rightarrow y'=-x'.$$

Положим $x' = m$, где m — произвольное действительное число, отличное от нуля, собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_1, имеет вид

$$x^{(1)}=m\vec{i}-m\vec{j}=\begin{pmatrix}m\\ -m\end{pmatrix}.$$

Нормируем этот вектор, разделив его координаты на модуль,

$$|x^{(1)}|=\sqrt{m^2+(-m)^2}=m\sqrt{2}:\ \tilde{x}^{(1)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.$$

Найдем собственный вектор для $\lambda_2 = 8$. Составляем систему:

$$\begin{cases}(5-\lambda_2)x'+3y'=0,\\ 3x'+(5-\lambda_2)y'=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3x'+3y'=0,\\ 3x'-3y'=0.\end{cases}\Rightarrow x'-y'=0\Rightarrow y'=x'.$$

Положим $x' = m$, где m — произвольное действительное число, отличное от нуля, собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_2, имеет вид

$$x^{(2)}=m\vec{i}+m\vec{j}=\begin{pmatrix}m\\ m\end{pmatrix}.$$

Нормируем этот вектор, разделив его координаты на модуль,

$$\left|x^{(2)}\right| = \sqrt{m^2 + m^2} = m\sqrt{2}: \ \tilde{x}^{(2)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Выпишем теперь матрицу линейного преобразования, элементы которой по строкам есть координаты собственных векторов:

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

а само искомое линейное преобразование имеет вид

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y', \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'.$$

Подставим эти зависимости в исходное уравнение кривой с учетом того, что квадратичная форма, входящая в это уравнение, уже найдена:

$$2(x')^2 + 8(y')^2 - 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) - 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(x')^2 + 8(y')^2 - 5\sqrt{2}x' = 2.$$

Выделим в полученном выражении полный квадрат:

$$2\left((x')^2 - 2 \cdot x' \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2\right) + 8(y')^2 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x' - \frac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2 + 4(y')^2 = 1.$$

Преобразование координат

$$x'' = x' - \frac{5\sqrt{2}}{4}, \ y'' = y'$$

означает параллельный перенос осей в новое начало координат

$$\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}; 0\right).$$

Окончательно получим следующее каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{(x'')^2}{1^2}+\frac{(y'')^2}{(0{,}5)^2}=1.$$

1.34. Привести к каноническому виду уравнение поверхности

$$3x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 4yz + 2x - 8y + 14z = 16.$$

Решение. Квадратичная форма, определяющая данное уравнение, имеет вид

$$F(x, y) = 3x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 4yz.$$

Соответствующая ей матрица $\tilde{A}$ квадратичной формы такова:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 2 & 4 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix}.$$

Для поиска собственных значений составляем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix}(3-\lambda) & 3 & 0\\ 2 & (4-\lambda) & -2\\ 0 & -2 & (5-\lambda)\end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda^3-12\lambda^2+39\lambda-28=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lambda_1=1,\quad \lambda_2=4,\quad \lambda_3=7.$$

Будем искать корни данного уравнения среди делителей свободного члена 28. Имеем, при $\lambda_1 = 1$ $f(\lambda) = \lambda^3 - 12\lambda^2 + 39\lambda - 28 = 0$. Разделим многочлен:

$$(\lambda^3 - 12\lambda^2 + 39\lambda - 28) : (\lambda - 1) = \lambda^2 - 11\lambda + 28,$$

отсюда $\lambda^2 - 11\lambda + 28 = 0$ и $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 7$. Квадратичная форма в новой системе координат $Ox'y'z'$запишется следующим образом: $F(x', y', z') = (x')^2 + 4(y')^2 + 7(z')^2$. Найдем собственный вектор для $\lambda_1 = 1$. Составляем систему:

$$\begin{cases}(5-1)x'+2y'+0\cdot z'=0,\\ 2x'+(4-1)y'-2z'=0,\\ 0\cdot x'-2y'+(5-1)z'=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'+y'=0,\\ 2x'+3y'-2z'=0,\\ y'-2z'=0.\end{cases}$$

Так как определитель системы равен нулю, а минор, составленный из элементов первой и последней строк

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

то второе уравнение есть следствие первого и третьего уравнений. Свободное неизвестное здесь y', а базисные x', z'. Отбросив второе уравнение и решая полученную систему из оставшихся уравнений относительно x', z', предварительно перенеся y' в правые части, получим $x' = -y'$, $z' = 0{,}5y'$. Полагая $y' = m$, где m — произвольное и отличное от нуля действительное число, найдем координаты первого собственного вектора: $x^{(1)} = -m\vec{i} + m\vec{j} + 0{,}5m\vec{k}$. Аналогично для $\lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = 7$ получим собственные векторы $x^{(2)} = m(\vec{i} + 0{,}5\vec{j} + \vec{k})$, $x^{(3)} = m(\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k})$. Нормируем их, разделив соответственно на модули:

$$|x^{(1)}| = m\sqrt{1+1+0{,}25} = 1{,}5m; \quad \tilde{x}^{(1)} = \frac{x^{(1)}}{|x^{(1)}|} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k};$$

$$|x^{(2)}| = m\sqrt{1+0{,}25+1} = 1{,}5m; \quad \tilde{x}^{(2)} = \frac{x^{(2)}}{|x^{(2)}|} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k};$$

$$|x^{(3)}| = m\sqrt{1+4+4} = 3m; \quad \tilde{x}^{(3)} = \frac{x^{(3)}}{|x^{(3)}|} = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}.$$

Выпишем матрицу линейного преобразования и само преобразование:

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} x &= -\frac{2}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}z', \\ y &= \frac{2}{3}x' + \frac{1}{3}y' + \frac{2}{3}z', \\ z &= \frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' - \frac{2}{3}z'. \end{aligned}$$

Подставим эти зависимости в заданное уравнение поверхности:

$$(x')^2 + 4(y')^2 + 7(z')^2 + 2\left(-\frac{2}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}z'\right) -$$

$$-8\left(\frac{2}{3}x' + \frac{1}{3}y' + \frac{2}{3}z'\right) + 14\left(\frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' - \frac{2}{3}z'\right) = 16.$$

Выделим полные квадраты в полученном уравнении:

$$((x')^2 - 2x' + 1 - 1) + 4((y')^2 + 2y' + 1 - 1) +$$
$$+ 7((z')^2 - 2z' + 1 - 1) = 16.$$

Формулы $x'' = x' - 1$, $y'' = y' + 1$, $z'' = z' - 1$ позволяют произвести параллельный перенос осей координат в новое начало координат (1; −1; 1). Окончательно получим следующее каноническое уравнение поверхности:

$$\frac{(x'')^2}{28} + \frac{(y'')^2}{7} + \frac{(z'')^2}{4} = 1,$$

которое является уравнением эллипсоида.

1.9. ЗАДАЧИ

1.35. Вычислить $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$, $\lambda \in R$.

1.36. Найти значение многочлена $f(A)$ от матрицы A:

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 5, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.37. Вычислить $AB - BA$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

1.38. Найти все матрицы B, перестановочные с

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.39. Найти все матрицы второго порядка, квадраты которых равны

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.40. Найти все матрицы второго порядка, квадраты которых равны

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.41. Методом элементарных преобразований найти обратную матрицу для матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

1.42. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 16\\ 9 & 10\end{pmatrix}.$$

1.43. Вычислить определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix}0 & b & c & d\\ b & 0 & d & c\\ c & d & 0 & b\\ d & c & b & 0\end{vmatrix}.$$

1.44. Вычислить определитель, приводя матрицу к треугольному виду

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 2 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 2 & 3\end{vmatrix}.$$

1.45. Вычислить ранг матрицы методом элементарных преобразований

$$A=\begin{pmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\ 75 & 94 & 53 & 132\\ 75 & 94 & 54 & 134\\ 25 & 32 & 20 & 48\end{pmatrix}.$$

1.46. Найти ранг матрицы A методом окаймляющих миноров

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & -1\\ 2 & -1 & -3 & 4\\ 5 & 1 & -1 & 7\\ 7 & 7 & 9 & 1\end{pmatrix}.$$

1.47. По правилу Крамера решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x+y-2z=6, \\ 2x+3y-7z=16, \\ 5x+2y+z=16. \end{cases}$$

1.48. Методом Гаусса решить систему

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=4, \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6, \\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12, \\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6. \end{cases}$$

1.49. Исследовать совместимость и найти общее решение системы

$$\begin{cases} 9x_1-3x_2+5x_3+6x_4=4, \\ 6x_1-2x_2+3x_3+4x_4=5, \\ 3x_1-x_2+3x_3+14x_4=-8. \end{cases}$$

1.50. Определить значения параметра a, при которых система имеет нетривиальные решения, и найти их:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=0, \\ 4x_1-x_2+7x_3=0, \\ x_1+ax_2+2x_3=0. \end{cases}$$

1.51. Методом Гаусса исследовать совместность и найти общее решение системы

$$\begin{cases} 8x_1+12x_2=20, \\ 14x_1+21x_2=35, \\ 9x_3+11x_4=0, \\ 16x_3+20x_4=0, \\ 10x_5+11x_6=22, \\ 15x_5+18x_6=33. \end{cases}$$

1.52. Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.53. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матриц оператора в этом базисе, если в некоторой ортонормированной системе матрица оператора имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

В задачах 1.54–1.60 определить, какие квадратичные формы являются положительно либо отрицательно определенными:

1.54. $\varphi = x_1^2 + 26x_2^2 + 10x_1x_2$.

1.55. $\varphi = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_2^2$.

1.56. $\varphi = x_1^2 - 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$.

1.57. $\varphi = 12x_1x_2 - 12x_1x_3 + 6x_2x_3 - 11x_1^2 - 6x_2^2 - 6x_3^2$.

1.58. $\varphi = 9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2x_3$.

1.59. $\varphi = 2x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4$.

1.60. $\varphi = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_4$.

В задачах 1.61–1.64 написать каноническое уравнение кривой второго порядка, определить ее тип.

1.61. $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$.

1.62. $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$.

1.63. $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$.

1.64. $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$.

ГЛАВА 2

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1. КООРДИНАТЫ ТОЧКИ И ВЕКТОРА

Определение 2.1. Любую совокупность действительных чисел $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ будем называть точкой, а сами числа — координатами этой точки.

Будем обозначать точки большими латинскими буквами, а координаты записывать в круглых скобках: $X(x_1; x_2; \ldots; x_n)$.

Точку $(0; 0; \ldots; 0)$ будем называть началом координат и обозначать O.

Определение 2.2. Пусть $A(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ и $B(b_1; b_2; \ldots; b_n)$ — две точки. Назовем вектором $\overrightarrow{AB}$ величину, определяемую следующим образом: $\overrightarrow{AB} = \{b_1 - a_1; b_2 - a_2; \ldots; b_n - a_n\}$. Точка $A(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ называется началом вектора, а точка $B(b_1; b_2; \ldots; b_n)$ — концом.

Векторы будем так же обозначать с помощью двух больших или одной маленькой латинских букв со стрелкой сверху, указывая их координаты в фигурных скобках: $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a} = \{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$.

Определение 2.3. Два вектора

$$\vec{a} = \{a_1; a_2; \ldots; a_n\} \text{ и } \vec{b} = \{b_1; b_2; \ldots; b_n\}$$

с одним и тем же числом координат называются равными в том и только в том случае, если равны соответствующие координаты $a_1 = b_1$; $a_2 = b_2$; $\ldots$; $a_n = b_n$.

Определение 2.4. Длиной (или модулем) вектора $\vec{a} = \{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$ назовем величину

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}.$$

Определение 2.5. Вектор $\vec{a} = \{0; 0; \ldots; 0\}$ называется нулевым вектором.

Определение 2.6. Вектор $\{-a_1; -a_2; \ldots; -a_n\}$ называется противоположным вектором по отношению к вектору

$$\vec{a} = \{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$$

и обозначается так: $-\vec{a} = \{-a_1; -a_2; \ldots; -a_n\}$.

Определение 2.7. Произведением вектора

$$\vec{a} = \{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$$

на действительное число λ называется вектор

$$\vec{c} = \{c_1; c_2; \ldots; c_n\} = \lambda\vec{a} = \{\lambda a_1; \lambda a_2; \ldots; \lambda a_n\}.$$

Определение 2.8. Векторы

$$\vec{a} = \{a_1; a_2; \ldots; a_n\} \text{ и } \vec{b} = \{b_1; b_2; \ldots; b_n\},$$

удовлетворяющие соотношению

$$\vec{a} = \{a_1; a_2; \ldots; a_n\} = \lambda\vec{b} = \{b_1 = \lambda a_1; b_2 = \lambda a_2; \ldots; b_n = \lambda a_n\},$$

называются коллинеарными.

Условие коллинеарности двух векторов в векторной форме:

$$\vec{a} = \lambda\vec{b}.$$

Условие коллинеарности двух векторов

$$\vec{a} = \{a_1; a_2; \ldots; a_n\} \text{ и } \vec{b} = \{b_1; b_2; \ldots; b_n\}$$

в координатной форме таково:

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \ldots = \frac{b_n}{a_n}.$$

СВОЙСТВА ОПЕРАЦИИ УМНОЖЕНИЯ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

1. $k(\lambda\vec{a}) = (k\lambda)\vec{a}$, здесь k и λ — действительные числа. (2.1)
2. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$. (2.2)

Определение 2.9. Назовем ортами векторы, имеющие только одну координату, равную единице, при этом остальные координаты равны нулю:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= \{a_1 = 1; a_2 = 0; \ldots; a_k = 0; \ldots; a_n = 0\},\\
\vec{e}_2 &= \{a_1 = 0; a_2 = 1; \ldots; a_k = 0; \ldots; a_n = 0\}, \ldots,\\
\vec{e}_k &= \{a_1 = 0; a_2 = 0; \ldots; a_k = 1; \ldots; a_n = 0\}, \ldots,\\
\vec{e}_n &= \{a_1 = 0; a_2 = 0; \ldots; a_k = 0; \ldots; a_n = 1\}.
\end{aligned} \qquad (2.3)$$

Заметим, что длина орта равна единице: $|\vec{e}_k|=1$.

Определение 2.10. Назовем двумерной декартовой прямоугольной системой координат (декартовой прямоугольной системой на плоскости) такую, которая определяется двумя ортами $\vec{i}=\{1;0\}$ и $\vec{j}=\{0;1\}$, исходящими из единого начала $O(0;\ 0)$, называемого началом координат. Множество концов векторов $x\vec{i}=x\{1;0\}=\{x;0\}$, где $x \in R$, коллинеарных орту $\vec{i}=\{1;0\}$, называется осью абсцисс. Множество концов векторов $y\vec{j}=y\{0;1\}=\{0;y\}$, где $y \in R$, коллинеарных орту $\vec{j}=\{0;1\}$, называется осью ординат.

Определение 2.11. Назовем трехмерной декартовой прямоугольной системой координат (декартовой прямоугольной системой координат в пространстве) такую, которая определяется тремя ортами $\vec{i}=\{1;0;0\}$, $\vec{j}=\{0;1;0\}$ и $\vec{k}=\{0;0;1\}$, исходящими из единого начала $O(0;\ 0;\ 0)$, которое называется началом координат. Множество концов векторов $x\vec{i}=x\{1;0;0\}=\{x;0;0\}$, где $x \in R$, коллинеарных орту $\vec{i}=\{1;0;0\}$, называется осью абсцисс. Множество концов векторов $y\vec{j}=y\{0;1;0\}=\{0;y;0\}$, где $y \in R$, коллинеарных орту $\vec{j}=\{0;1;0\}$, называется осью ординат. Множество концов векторов $z\vec{k}=z\{0;0;1\}=\{0;0;z\}$, где $z \in R$, коллинеарных орту $\vec{k}=\{0;0;1\}$, называется осью аппликат.

Определение 2.12. Суммой двух векторов

$$\vec{a}=\{a_1;a_2;\ldots;a_n\} \text{ и } \vec{b}=\{b_1;b_2;\ldots;b_n\}$$

с одним и тем же числом координат называется вектор $\vec{c}=\{c_1;c_2;\ldots;c_n\}$, координаты которого удовлетворяют условиям $c_i = a_i + b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

В двумерной и трехмерной декартовых прямоугольных системах координат сложение векторов по указанному способу соответствует сложению по правилу треугольника или (что то же самое) по правилу параллелограмма.

Правило треугольника. Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$ (рис. 2.1).

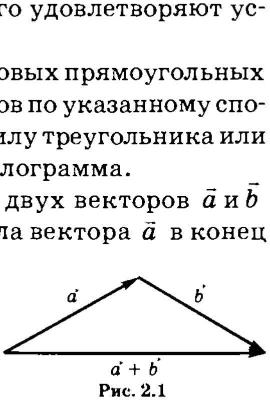


Рис. 2.1

Правило параллелограмма. Если неколлинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$

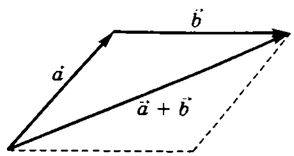


Рис. 2.2

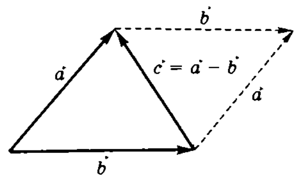


Рис. 2.3

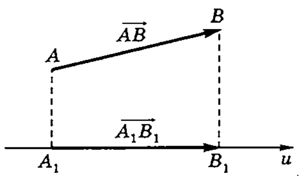


Рис. 2.4

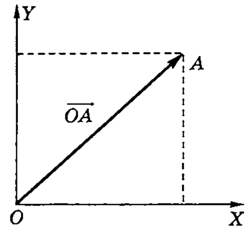


Рис. 2.5

приложены к общему началу и на них построен параллелограмм, то сумма $\vec{a}+\vec{b}$ (или $\vec{b}+\vec{a}$) этих векторов представляет собой диагональ указанного параллелограмма, идущую из общего начала (рис. 2.2).

Определение 2.13. Разностью векторов

$$\vec{a}=\{a_1;a_2;\ldots;a_n\} \text{ и } \vec{b}=\{b_1;b_2;\ldots;b_n\}$$

с одним и тем же числом координат называется вектор

$$\vec{c}=\{c_1;c_2;\ldots;c_n\}=\vec{a}+(-\vec{b})=\{a_1-b_1;a_2-b_2;\ldots;a_n-b_n\}.$$

В двумерной и трехмерной декартовых системах координат разность векторов находится по правилу треугольника (рис. 2.3).

Свойства операции нахождения суммы векторов:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$. (2.4)
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$. (2.5)
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$. (2.6)
4. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$. (2.7)

Векторы, в двумерной и трехмерной прямоугольных декартовых системах координат могут быть соответственно представлены с помощью разложения по ортам:

$$\vec{a}=\{a_x;a_y\}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j};\quad \vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}. \quad (2.8)$$

Проекцией вектора $\vec{a}=\overline{AB}$ на ось u называется величина направленного отрезка $\overline{A_1B_1}$ оси u (рис. 2.4) (A_1 и B_1 — основания перпендикуляров на ось и из точек A и B соответственно).

Координаты векторов в двумерной и трехмерной декартовых прямоугольных системах координат равны проекциям этих векторов на соответствующие оси координат.

Точка $A(x;\ y)$ изображается в двумерной декартовой прямоугольной системе координат как конец вектора $\overline{OA}=\{x;\ y\}$, если начало этого вектора фиксировано в начале координат (рис. 2.5).

2.2. ДЕЛЕНИЕ ВЕКТОРА В ДАННОМ ОТНОШЕНИИ

Пусть вектор $\overline{AB}=\{b_x-a_x;\, b_y-a_y;\, b_z-a_z\}$ задан координатами своего начала $A(a_x;\ a_y;\ a_z)$ и конца $B(b_x;\ b_y;\ b_z)$ и пусть точка $C(c_x;\ c_y;\ c_z)$ расположена между точками A и B (рис. 2.6), пусть при этом известно отношение длин векторов

$$\lambda=\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{CB}|},$$

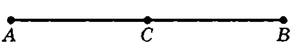


Рис. 2.6

тогда координаты точки $C(c_x;\ c_y;\ c_z)$ находят по формулам:

$$c_x=\frac{a_x+\lambda b_x}{1+\lambda},\quad c_y=\frac{a_y+\lambda b_y}{1+\lambda},\quad c_z=\frac{a_z+\lambda b_z}{1+\lambda}. \qquad (2.9)$$

2.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ

Пусть новая система координат $x'O'y'$ получается в результате параллельного переноса xOy в точку с новым началом координат $O'(a;\ b)$.

Выпишем формулы для выражения старых координат x и y точки через новые x' и y'

$$\begin{cases} x=x'+a, \\ y=y'+b. \end{cases} \qquad (2.10)$$

Новые координаты точки выражаются через старые так:

$$\begin{cases} x' = x - a, \\ y' = y - b. \end{cases} \tag{2.11}$$

Пусть новая система координат $x'O'y'$ получается поворотом старой системы xOy на угол φ. Отметим, что угол φ считается положительным, если поворот производится против часовой стрелки, и отрицательным, если по часовой.

Старые координаты точки выражаются через новые по формулам:

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{cases} \tag{2.12}$$

Новые координаты точки выражаются через старые по формулам:

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{cases} \tag{2.13}$$

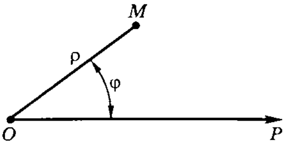
При суперпозиции (т. е. при переносе и повороте осей в произвольном порядке) указанных преобразований декартовых координат связь между ними определяется формулами:

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi + a, \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + b, \end{cases} \tag{2.14}$$

$$\begin{cases} x' = (x-a)\cos\varphi + (y-b)\sin\varphi, \\ y' = -(x-a)\sin\varphi + (y-b)\cos\varphi. \end{cases} \tag{2.15}$$

2.4. ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ И ЕЕ СВЯЗЬ С ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМОЙ

Полярная система координат на плоскости задается точкой O, называемой полюсом, лучом OP, исходящим из полюса и называемым полярной осью. Кроме того, задается масштабная единица длины.



e', $|e'| = 1$, $OM = \rho$

Рис. 2.7

Полярными координатами точки M называются два числа: ρ и φ, первое из которых (полярный радиус) ρ равно расстоянию точки M от полюса, а второе (полярный угол) φ — равен углу, отсчитываемому от полярной оси против часовой стрелки до направления $\overrightarrow{OM}$. Отметим, что угол φ определен с точностью до слагаемого, кратного 2π (рис. 2.7).

2.5. СВЯЗЬ МЕЖДУ ДЕКАРТОВЫМИ ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ И ПОЛЯРНЫМИ КООРДИНАТАМИ

Пусть начало декартовой прямоугольной системы координат XOY совпадает с полюсом полярной системы, ось OX совпадает по направлению с полярной осью, тогда между декартовыми и полярными координатами имеется связь, выражаемая формулами (рис. 2.8):

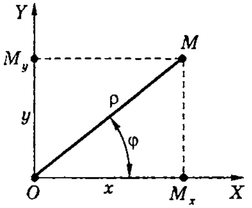


Рис. 2.8

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = y/x. \end{cases} \tag{2.16}$$

2.6. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

Определение 2.14. Линейной комбинацией n векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называется сумма произведений этих векторов на произвольные вещественные числа λ_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), т. е. выражение вида

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n. \tag{2.17}$$

Определение 2.15. Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называется *линейно зависимой*, если найдутся такие вещественные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что линейная комбинация этих векторов с указанными числами обращается в нулевой вектор, т. е. имеет место равенство

$$\begin{cases} \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}, \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 \neq 0. \end{cases} \tag{2.18}$$

Определение 2.15′. Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называется *линейно независимой*, если равенство нулевому вектору их линейной комбинации возможно лишь в случае, когда все числа λ_1, λ_2, ..., λ_n равны нулю, т. е.

$$\begin{cases} \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}, \\ \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0. \end{cases}$$

Необходимым и достаточным условием линейной зависимости двух ненулевых векторов является их *коллинеарность*. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называются *компланарными*, если они лежат либо в одной плоскости, либо в параллельных плоскостях. Необходимым и достаточным условием линейной зависимости трех ненулевых векторов является их компланарность. Любые три вектора на плоскости так же, как и любые четыре вектора в пространстве, линейно зависимы.

Условие компланарности трех векторов в трехмерном пространстве имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.19)$$

Определение 2.16. Три линейно независимых вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис в пространстве, если любой вектор $\vec{d}$ может быть представлен в виде некоторой линейной комбинации векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, т. е. если для любого вектора $\vec{d}$ найдутся такие вещественные числа λ, μ, ν, что справедливо равенство

$$\vec{d} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \nu \cdot \vec{c}. \qquad (2.20)$$

Определение 2.17. Два лежащих в плоскости α линейно независимых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис на этой плоскости, если любой лежащий в плоскости α вектор $\vec{c}$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. если для любого лежащего в плоскости α вектора $\vec{c}$ найдутся такие вещественные числа λ, μ, что справедливо равенство

$$\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}. \qquad (2.21)$$

Справедливы следующие фундаментальные утверждения:

- любая тройка некомпланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ образует базис в пространстве;
- любая пара лежащих в данной плоскости неколлинеарных векторов $\vec{a}, \vec{b}$ образует базис на этой плоскости.

Равенства (2.20) и (2.21) называются соответственно разложением векторов $\vec{d}$ и $\vec{c}$ по базисам ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в первом случае и $\vec{a}, \vec{b}$ — во втором).

Числа λ, μ, ν в случае равенства (2.20) называются координатами вектора $\vec{d}$ относительно базиса $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, в случае равенства (2.21) λ, μ — координаты вектора $\vec{c}$ относительно базиса $\vec{a}, \vec{b}$.

Разложение по базису любого вектора единственно, т. е. для любого вектора $\vec{d}$ его координаты относительно базиса определяются однозначно. Основное значение базиса состоит в том, что линейные операции над векторами при задании базиса становятся обычными линейными операциями над числами — координатами этих векторов. Это следует из свойства линейных операций над векторами, в силу которых, если

$$\vec{d}_1 = \lambda \cdot \vec{a}_1 + \mu \cdot \vec{b}_1 + \nu \cdot \vec{c}_1, \quad \vec{d}_2 = \lambda \cdot \vec{a}_2 + \mu \cdot \vec{b}_2 + \nu \cdot \vec{c}_2,$$

то

$$\vec{d}_1 + \vec{d}_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} + (\mu_1 + \mu_2)\vec{b} + (\nu_1 + \nu_2)\vec{c}$$

и для любого вещественного числа t

$$t \cdot \vec{d}_1 = (t \cdot \lambda_1)\vec{a} + (t \cdot \mu_1)\vec{b} + (t \cdot \nu_1)\vec{c}.$$

2.7. СКАЛЯРНОЕ, ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

2.7.1. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ И ЕГО СВОЙСТВА

Определение 2.18. Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. (Под углом между двумя векторами подразумевается тот угол, который не превосходит π.) Скалярное произведение обозначается $\vec{a}\cdot\vec{b}$. Если угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\angle(\vec{a};\vec{b})=\varphi$, то по определению скалярного произведения имеем

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi. \qquad (2.22)$$

Если хотя бы один вектор $\vec{a}$ или $\vec{b}$ нулевой, то скалярное произведение принимается равным нулю.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

1. Необходимым и достаточным условием ортогональности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения.

2. Два нулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ составляют острый (тупой) угол тогда и только тогда, когда их скалярное произведение положительно (отрицательно).

3. Из определений проекции вектора на ось и скалярного произведения двух векторов следует, что

$$\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}. \qquad (2.23)$$

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (переместительное свойство).

2. $(\lambda\cdot\vec{a})\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (сочетательное относительно числового множителя свойство).

3. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ (распределительное относительно суммы векторов свойство).

4. $\vec{a}\cdot\vec{a}>0$, если $\vec{a}$ — ненулевой вектор, и $\vec{a}\cdot\vec{a}=0$, если $\vec{a}$ — нулевой вектор.

ВЫРАЖЕНИЕ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определены своими декартовыми прямоугольными координатами

$$\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\},\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\},$$

то скалярное произведение этих векторов равно сумме попарных произведений их соответствующих координат, т. е.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2. \qquad (2.24)$$

Необходимым и достаточным условием ортогональности векторов $\vec{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$ является равенство

$$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0. \qquad (2.25)$$

Угол между векторами $\vec{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$ определяется формулой

$$\cos\varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (2.26)$$

Длина вектора $\vec{a}=\{x, y, z\}$ определяется формулой (вытекающей из (2.25) при $\vec{a}=\vec{b}$)

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (2.27)$$

Косинусы углов α, β, γ наклона вектора $\vec{a}=\{x, y, z\}$ к осям Ox, Oy и Oz соответственно называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$. Из определения проекции вектора на ось, геометрического смысла его координат следует, что

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$
$$\cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \qquad (2.28)$$
$$\cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Сумма квадратов направляющих косинусов любого вектора равна единице, т. е.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (2.29)$$

2.7.2. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ ВЕКТОРОВ И ЕГО СВОЙСТВА

Определение 2.19. Векторным произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на ненулевой вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, удовлетворяющий следующим трем условиям.

1. Длина вектора $\vec{c}$ равна произведению длин векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на синус угла между ними, т. е.

$$\vec{c} = |\vec{a}\cdot\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi. \qquad (2.30)$$

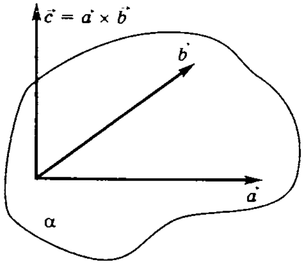


Рис. 2.9

2. Вектор $\vec{c}$ ортогонален к каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. Вектор $\vec{c}$ направлен так, что с конца вектора $\vec{c}$ поворот первого вектора-сомножителя $\vec{a}$ ко второму вектору-сомножителю $\vec{b}$ через наименьший угол рассматривается против часовой стрелки. Упорядоченная тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется левой, если кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$, наблюдаемый с $\vec{c}$, происходит по часовой стрелке.

Если хотя бы один вектор-сомножитель нулевой, то векторное произведение принимается равным нулевому вектору. Тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в указанном определении называется правой (рис. 2.9).

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

1. Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов является равенство нулю их векторного произведения.

2. Длина (или модуль) векторного произведения $|\vec{a} \times \vec{b}|$ равна площади S параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Если $\vec{e}$ — орт векторного произведения $\vec{a} \times \vec{b}$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = S \cdot \vec{e}. \qquad (2.31)$$

Ортом произвольного ненулевого вектора $\vec{c}$ называется единичный вектор $\vec{c}^0$, коллинеарный $\vec{c}$ и имеющий одинаковое с $\vec{c}$ направление $\vec{c}^0 = \vec{c}/|\vec{c}|$.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (2.32)

(свойство антиперестановочности сомножителей).

2. $(\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda \vec{a} \times \vec{b}$ (2.33)

(сочетательное свойство относительно числового множителя λ).

3. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$ (2.34)

(распределительное свойство относительно суммы векторов).

4. $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$ для любого вектора $\vec{a}$. (2.35)

ВЫРАЖЕНИЕ ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определены своими декартовыми прямоугольными координатами

$$\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\},\ \vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\},$$

то векторное произведение этих векторов имеет вид

$$\vec{a}\times\vec{b}=(y_1z_2-y_2z_1)\vec{i}+(z_1x_2-z_2x_1)\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k}. \quad (2.36)$$

Для запоминания формулы удобно использовать символ определителя.

Пользуясь приведенными в гл. 1 правилами вычисления определителей второго и третьего порядков, формулу (2.36) можно представить в виде

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}. \quad (2.37)$$

Следствие. Если два вектора

$$\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\} \text{ и } \vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$$

коллинеарны, то их координаты пропорциональны, т. е.

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}. \quad (2.38)$$

2.7.3. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ И ЕГО СВОЙСТВА

Определение 2.20. Если вектор $\vec{a}$ векторно умножить на вектор $\vec{b}$, а затем получившийся в результате вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ скалярно умножить на вектор $\vec{c}$, то в результате получается число $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}$, называемое смешанным произведением трех векторов $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ СМЕШАННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТРЕХ ВЕКТОРОВ

Смешанное произведение $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$, взятому со знаком плюс, если тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правая, и со знаком минус, если тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ левая. Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны, то $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}$ равно нулю.

Справедливо равенство

$$\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}). \tag{2.39}$$

В силу (2.39) смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ можно писать в виде $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$, не указывая при этом, какие именно два вектора (первые два или последние два) перемножаются векторно.

Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения (см. 2.19).

ВЫРАЖЕНИЕ СМЕШАННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТРЕХ ВЕКТОРОВ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Если три вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ определены своими декартовыми прямоугольными координатами

$$\vec{a}=\{x_1, y_1, z_1\}, \vec{b}=\{x_2, y_2, z_2\}, \vec{c}=\{x_3, y_3, z_3\},$$

то смешанное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ равняется определителю, строки которого соответственно равны координатам перемножаемых векторов, т. е.

$$\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{2.40}$$

Необходимым и достаточным условием *компланарности* трех векторов $\vec{a}=\{x_1, y_1, z_1\}, \vec{b}=\{x_2, y_2, z_2\}, \vec{c}=\{x_3, y_3, z_3\}$ является равенство нулю определителя, строками которого служат координаты этих векторов, т. е. равенство

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0. \tag{2.41}$$

2.8. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

2.1. Отрезок AB точками $C(3, 4)$ и $D(5, 6)$ разделен на три равные части. Найти координаты точек A и B.

Решение. Обозначим координаты точек A и B так: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Для отрезка AD точка C является серединой, потому $\lambda = AC/CD = 1$ и по формулам деления отрезка в данном отношении (2.6) получим

$$x_C = \frac{x_1 + \lambda x_D}{1+\lambda} = \frac{x_1 + x_D}{2}, \quad y_C = \frac{y_1 + \lambda y_D}{1+\lambda} = \frac{y_1 + y_D}{2}.$$

Подставим в последние равенства координаты x_C, y_C, x_D, y_D:

$$3 = (x_1 + 5)/2, \ \ 4 = (y_1 + 6)/2,$$

откуда находим $x_1 = 1$, $y_1 = 2$. Точка A имеет координаты $A(1, 2)$.

Поскольку точка D есть середина отрезка CB, то $x_D = (x_C + x_2)/2$, или $5 = (3 + x_2)/2$, отсюда $x_2 = 7$.

$$y_D = (y_C + y_2)/2, 6 = (4 + y_2)/2,$$

отсюда $y_2 = 8$. Получили $B(7, 8)$.

Ответ: $A(1, 2)$, $B(7, 8)$.

2.2. Систему координат XOY вначале параллельно перенесли так, что новое начало стало находиться в точке $O'(2, 3)$, а затем был совершен поворот осей на угол $\varphi = 30°$. Определить новые координаты точки A, если старые координаты в системе XOY таковы: $A(-1, 5)$. Определить, какие координаты имела точка B в старой системе XOY, если в новой системе координат она задается так: $B(4, -2)$.

Решение:

а) при параллельном переносе системы координат, координаты точки A станут такими:

$$\begin{cases} x'_A = x_A - a = -1 - 2 = -3, \\ y'_A = y_A - b = 5 - 3 = 2, \end{cases}$$

при повороте осей на угол 30° координаты точки A преобразуются следующим образом:

$$x''_A = x'_A \cos\varphi + y'_A \sin\varphi = (-3)\cos 30° + 2\sin 30° =$$
$$= -3\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}-3}{2} \approx 0{,}722;$$
$$y''_A = -x'_A \sin\varphi + y'_A \cos\varphi = -(-3)\sin 30° + 2\cos 30° =$$
$$= 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} \approx 3{,}598;$$

б) в системе координат XOY точка B имеет координаты:

$$x'_B = x''_B \cos\varphi - y''_B \sin\varphi = 4\cos 30° - (-2)\sin 30° \approx 3{,}732;$$
$$y'_B = x''_B \sin\varphi + y''_B \cos\varphi = 4\sin 30° + (-2)\cos 30° \approx 2{,}464.$$

В системе координат XOY точка B имеет координаты:

$$x_B = x'_B + a = 3{,}732 + 2 \approx 5{,}732; \quad y_B = y'_B + b \approx 5{,}464.$$

Ответ: $x''_A \approx 0{,}722$; $y''_A \approx 3{,}598$; $x_B \approx 5{,}732$; $y_B \approx 5{,}464$.

2.3. Декартовы координаты точки $A(4,\ 3)$ известны. Найти координаты этой точки в полярной системе координат, если полюс расположен в начале координат декартовой системы, а полярная ось совпадает по направлению с осью OX.

Решение. Воспользуемся формулами, связывающими полярные координаты с декартовыми:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5;$$
$$\operatorname{tg}\varphi = 3/4;\ \varphi = \operatorname{arctg} 0{,}75 \approx 36°53'.$$

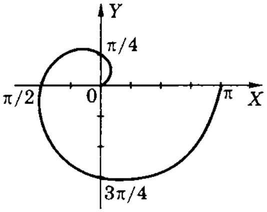


Рис. 2.10

Рекомендуем самостоятельно сделать чертеж к задаче.

Ответ: $\rho = 5$; $\varphi = \operatorname{arctg}\ 0{,}75 \approx$ $\approx 36°53'$.

2.4. Построить по точкам участок линии $\rho = 0{,}5\cdot\varphi$ (спираль Архимеда), $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, давая φ значения через $\pi/4$.

Решение. Составим таблицу:

φ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
ρ	0	$\pi/8 \approx$ $\approx 0{,}39$	$\pi/4 \approx$ $\approx 0{,}79$	$3\pi/8 \approx$ $\approx 1{,}18$	$\pi/2 \approx$ $\approx 1{,}57$	$5\pi/8 \approx$ $\approx 1{,}96$	$3\pi/4 \approx$ $\approx 2{,}11$	$7\pi/8 \approx$ $\approx 2{,}75$	$\pi \approx$ $\approx 3{,}14$

Соединив полученные точки плавной линией, построим искомую кривую (рис. 2.10).

2.5. Даны точки $A(1, 2, -2)$ и $B(3, 1, 4)$. Найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$. Найти $|\overrightarrow{AB}|$ и $|\overrightarrow{BA}|$.

Решение. Координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ находятся как разности соответствующих координат конца и начала векторов, т. е. разность соответствующих координат точек A и B. Имеем, таким образом,

$$\overrightarrow{AB} = \{3-1, 1-2, 4-(-2)\} = \{2, -1, 6\}, \text{ т. е. } \overrightarrow{AB} = 2\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}.$$

Очевидно, что координаты вектора $\overrightarrow{BA}$ противоположны по знаку координатам вектора $\overrightarrow{AB}$, т. е.

$$\overrightarrow{BA} = \{-2, 1, -6\} \text{ и } \overrightarrow{BA} = -2\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k}.$$

Длина или модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ находятся по формуле (2.27). Подставляя координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ в формулу (2.27), получим:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (6)^2} = \sqrt{4+1+36} = \sqrt{41}.$$

Очевидно, что $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{41}$.

2.6. Вычислить направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(-3, 2, 0)$ и $B(3, -3, 1)$.

Решение. Направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$ определяются по его координатам формулами (2.28). Находим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ так, как это было сделано в задаче (2.5). Имеем $\overrightarrow{AB} = \{3+3, -3+2, 1-0\} = \{6, -1, 1\}$. Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ находим по формуле

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{36+1+1} = \sqrt{38}.$$

Имеем теперь по формулам (2.28):

$$\cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{38}};$$

$$\cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{38}};$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{38}}.$$

2.7. Вектор $\vec{a}$ составляет с координатными осями одинаковые углы. Найти его координаты, если $|\vec{a}| = \sqrt{3}$.

Решение. Направляющие косинуса удовлетворяют условию (2.29), и так как углы, составляемые вектором $\vec{a}$ с координатными осями, равны, т. е. $\alpha = \beta = \gamma$, то с учетом этого (2.29) в рассматриваемом случае примет вид: $3\cos^2\alpha = 1$. Отсюда следует, что

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Зная направляющие косинусы и модуль вектора $|\vec{a}|$, найдем его координаты. Имеем в первом случае, когда

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$x = |\vec{a}|\cdot\cos\alpha = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = 1;$$

$$y = |\vec{a}|\cdot\cos\beta = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = 1;$$

$$z = |\vec{a}|\cdot\cos\gamma = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = 1.$$

Таким образом, $\vec{a} = \{1, 1, 1\}$. Аналогично, в случае когда

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

получим, что $\vec{a} = \{-1, -1, -1\}$.

2.8. Найти орт вектора $\vec{a} = \{3, -4, 12\}$.

Решение. В соответствии с определением орта — это единичный вектор $\vec{a}^0$, коллинеарный с $\vec{a}$ и имеющий одинаковое с $\vec{a}$ направление. Имеем

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}; \quad |\vec{a}| = \sqrt{9+16+144} = 13,$$

и, следовательно:

$$\vec{a}^0 = \left\{\frac{3}{13}, -\frac{4}{13}, \frac{12}{13}\right\}.$$

2.9. Написать разложение вектора $\vec{a}$ по векторам

$$\vec{p} = \{1, 2, 4\}; \vec{q} = \{1, -1, 1\}; \vec{r} = \{2, 2, 4\}; \vec{a} = \{-1, -4, -2\}.$$

Решение. Согласно (2.20) мы должны найти такие числа λ, μ, ν, что

$$\vec{a} = \lambda\cdot\vec{p} + \mu\cdot\vec{q} + \nu\cdot\vec{r}.$$

Подставляем в это равенство разложение векторов $\vec{a}, \vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, которыми они заданы в условии задачи, получим

$$-\vec{i}-4\vec{j}-2\vec{k}=\lambda\cdot(\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k})+\mu\cdot(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})+\nu\cdot(2\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}).$$

Пользуясь свойствами линейных операций над векторами, заданными разложением по базису, получим из последнего равенства

$$-\vec{i}-4\vec{j}-2\vec{k}=(\lambda+\mu+2\nu)\vec{i}+(2\lambda-\mu+2\nu)\vec{j}+(4\lambda+\mu+4\nu)\vec{k}.$$

Так как в левой и правой частях этого равенства записаны разложения одного и того же вектора $\vec{a}$ по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то, следовательно, должны выполняться равенства:

$$\begin{cases}\lambda+\mu+2\nu=-1,\\ 2\lambda-\mu+2\nu=-4,\\ 4\lambda+\mu+4\nu=-2.\end{cases}$$

Мы получили схему линейных уравнений для трех неизвестных величин λ, μ, ν. Решая эту систему, например, методом Гаусса (см. гл. 1), найдем искомые величины λ, μ, ν. Имеем:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&-1\\2&-1&2&-4\\4&1&4&-2\end{array}\right)\xrightarrow{1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&-1\\0&-3&-2&-2\\0&-3&-4&2\end{array}\right)\xrightarrow{2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&-1\\0&-3&-2&-2\\0&0&-2&4\end{array}\right).$$

Здесь мы на первом этапе (помеченном цифрой 1), в соответствии с методом Гаусса, первую строку таблицы (т. е. первое уравнение системы) умножили на –2 и прибавили ко второй строке (ко второму уравнению системы) поэлементно: первый элемент первой строки, умноженный на –2, сложили с первым элементом второй строки, второй элемент первой строки после умножения на –2 сложили со вторым элементом второй строки и т. д. Третья строка после первого этапа преобразования получена в результате умножения первой строки на –4 и сложения с третьей строкой.

На втором этапе к элементам третьей строки прибавили элементы второй строки, умноженные на –1. В получившейся таблице третья строка представляет собой сокращенную запись третьего уравнения рассматриваемой системы, которое после проведенных нами преобразований имеет вид: $-2\nu = 4$, откуда получим $\nu = -2$. Исходя из вида второй строки таблицы, второе уравнение системы имеет теперь вид $-3\mu - 2\nu = -2$. Откуда после подстановки найденного значения ν получим $-3\mu = -2 + 2 \cdot (-2) = 6$, или $\mu = 2$. Наконец, подставляя найденные значения ν и μ в первое уравнение системы $\lambda = -1 - 2\nu - \mu$, получим $\lambda = -1 + 4 - 2 = 1$, т. е. $\lambda = 1$.

Таким образом, искомое разложение имеет вид

$$\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q} - 2\vec{r}.$$

2.10. Коллинеарны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, построенные по векторам $\vec{p}$ и $\vec{q}$?

$$\vec{a} = 3\vec{p} - 4\vec{q};\ \vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q};\ \vec{p} = \{1, 1, 2\};\ \vec{q} = \{3, 1, 0\}.$$

Решение. Для решения этой задачи можно воспользоваться геометрическим свойством первого векторного произведения, т. е. найти координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ относительно базиса $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, а затем вычислить их векторное произведение. Имеем

$$\vec{a} = 3(\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) - 4(3\vec{i} + \vec{j}) = -9\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k},$$
$$\vec{b} = 2(\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) + 3(3\vec{i} + \vec{j}) = 5\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Вычисляя векторное произведение этих векторов по формуле (2.37), получим

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -9 & -1 & 6 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -9 & 6 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -9 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$= -22\vec{i} + 66\vec{j} - 22\vec{k}.$$

Так как векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ отлично от нулевого вектора, то, следовательно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны.

Другое, более быстрое решение. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то координаты этих векторов пропорциональны, но в данном случае: $3/2 \neq -4/1$.

2.11. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, где $A(1, 2, 1)$, $B(3, -1, 7)$, $C(7, 4, -2)$.

Решение. Из определения скалярного произведения (формула (2.30)) следует, что искомый косинус угла между векторами определяется формулой

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}.$$

Для нахождения $\cos\varphi$ по этой формуле необходимо найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, имеем:

$$\overrightarrow{AB} = \{2, -3, 6\}, \overrightarrow{AC} = \{6, 2, -3\}.$$

Вычисляя $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}, |\overrightarrow{AB}|$ и $|\overrightarrow{AC}|$, получим

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 6 + (-3)\cdot 2 + 6\cdot(-3)}{\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}\sqrt{6^2+2^2+(-3)^2}} = -\frac{12}{49}.$$

2.12. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, длины диагоналей параллелограмма, $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{p}})$ и $\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b}$, если

$$\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}, |\vec{p}| = 4\sqrt{2}, |\vec{q}| = 6, (\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \pi/4.$$

Решение. Площадь S параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна модулю векторного произведения этих векторов. Пользуясь алгебраическими свойствами векторного произведения, имеем

$$\vec{a}\times\vec{b} = (5\vec{p}+2\vec{q})\times(\vec{p}-3\vec{q}) = 5\cdot\vec{p}\times\vec{p} - 15\cdot\vec{p}\times\vec{q} + 2\cdot\vec{q}\times\vec{p} - 6\cdot\vec{q}\times\vec{q} =$$
$$= -15\cdot\vec{p}\times\vec{q} - 2\cdot\vec{p}\times\vec{q} = -17\cdot\vec{p}\times\vec{q}.$$

Здесь мы учли, что $\vec{p}\times\vec{p} = \vec{q}\times\vec{q} = \vec{0}$ согласно алгебраическому свойству 4 векторного произведения, а также алгебраическому свойству 1. Находим теперь, в соответствии с определением модуля векторного произведения (формула (2.31)),

$$S = |\vec{a}\times\vec{b}| = 17\cdot|\vec{p}\times\vec{q}| = 17\cdot|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cdot\sin(\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = 17\cdot 4\sqrt{2}\cdot 6\cdot\sin\frac{\pi}{4} =$$
$$= 17\cdot 4\cdot 6\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 17\cdot 6\cdot 4 = 408.$$

Таким образом, $S = 408$ (кв. ед.). Для определения длин диагоналей параллелограмма заметим, что одна из диагоналей, в соответствии с правилом параллелограмма сложения векторов, равна $\vec{a}+\vec{b}$, а другая, в соответствии с правилом вычитания, — $\vec{a}-\vec{b}$ (см. рис. 2.2, 2.3). Складывая и вычитая векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, получим

$$\vec{a}+\vec{b}=6\vec{p}-\vec{q}, \vec{a}-\vec{b}=4\vec{p}+5\vec{q}.$$

Для определения длин диагоналей параллелограмма, т. е. $|\vec{a}+\vec{b}|$ и $|\vec{a}-\vec{b}|$, воспользуемся формулой (2.27). Получим:

$$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})}=\sqrt{(6\vec{p}-\vec{q})^2}=\sqrt{36\vec{p}^2-12\vec{p}\cdot\vec{q}+\vec{q}^2}=$$

$$=\sqrt{36|\vec{p}|^2-12|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cos\frac{\pi}{4}+|\vec{q}|^2}=\sqrt{36\cdot 32-12\cdot 4\cdot\sqrt{2}\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+36}=$$

$$=\sqrt{36\cdot 32-36\cdot 8+36}=6\sqrt{32-8+1}=6\cdot 5=30.$$

Аналогично

$$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(4\vec{p}+5\vec{q})^2}=\sqrt{16\cdot 32+40\cdot 4\cdot\sqrt{2}\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+25\cdot 36}=2\sqrt{593}.$$

Для определения $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{p}})$ воспользуемся формулой (2.22), согласно которой

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{p}})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{p}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{p}|}.$$

Вычисляем величины, входящие в правую часть этого равенства:

$$\vec{a}\cdot\vec{p}=(5\vec{p}+2\vec{q})\cdot\vec{p}=5\vec{p}^2+2\vec{q}\cdot\vec{p}=5|\vec{p}|^2+2|\vec{q}|\cdot|\vec{p}|\cdot\cos\frac{\pi}{4}=$$

$$=5\cdot 32+2\cdot 6\cdot 4\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=160+48=208.$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{(5\vec{p}+2\vec{q})^2}=\sqrt{25|\vec{p}|^2+20|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cdot\cos\frac{\pi}{4}+4|\vec{q}|^2}=$$

$$=\sqrt{25\cdot 32+20\cdot 4\sqrt{2}\cdot 6\frac{\sqrt{2}}{2}+4\cdot 36}=2\sqrt{356}.$$

Подставляя полученные результаты в формулу для $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{p}})$, получим

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{p}})=\frac{208}{2\sqrt{356}\cdot\sqrt{2}}=\frac{13}{\sqrt{178}}.$$

Найдем теперь $\text{Пр}_{\vec a}\vec b$, т. е. проекцию вектора $\vec b$ на вектор $\vec a$. Для этого необходимо вычислить величины $\vec a\cdot\vec b$ и $|\vec a|$, входящие в формулу

$$\text{Пр}_{\vec a}\vec b=\frac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec a|}.$$

Имеем

$$\vec a\cdot\vec b=(5\vec p+2\vec q)(\vec p-3\vec q)=5\vec p^2-15\vec p\cdot\vec q+2\vec p\cdot\vec q-6\vec q^2=$$

$$=5|\vec p|^2-13\vec p\cdot\vec q-6|\vec q|^2=5\cdot32-13\cdot4\sqrt2\cdot6\frac{1}{\sqrt2}-6\cdot36=$$

$$=160-312-216=-368.$$

$$|\vec a|=\sqrt{\vec a\cdot\vec a}=\sqrt{(5\vec p+2\vec q)(5\vec p+2\vec q)}=$$

$$=\sqrt{25|\vec p|^2+20|\vec p|\cdot|\vec q|\cos\frac{\pi}{4}+4|\vec q|^2}=4\sqrt{89}.$$

Таким образом,

$$\text{Пр}_{\vec a}\vec b=-\frac{368}{4\sqrt{89}}=-\frac{92}{\sqrt{89}}.$$

2.13. Компланарны ли векторы

$$\vec a,\vec b,\vec c:\ \vec a=\{1,-2,1\},\vec b=\{3,1,-2\},\vec c=\{7,14,-13\}?$$

Р е ш е н и е. Для ответа на поставленный вопрос необходимо вычислить смешанное произведение этих векторов, и если оно окажется равным нулю, то это будет обозначать, что вектора $\vec a,\vec b,\vec c$ компланарны. Находим смешанное произведение $\vec a\cdot\vec b\cdot\vec c$ по формуле (2.40).

$$\vec a\times\vec b\cdot\vec c=\begin{vmatrix}1&-2&1\\3&1&-2\\7&14&-13\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1&-2\\14&-13\end{vmatrix}-(-2)\begin{vmatrix}3&-2\\7&-13\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}3&1\\7&14\end{vmatrix}=$$

$$=-13+28+2(-39+14)+42-7=15-50+35=0.$$

Так как смешанное произведение $\vec a\cdot\vec b\cdot\vec c$ оказалось равным нулю, то векторы $\vec a,\vec b,\vec c$ компланарны.

2.14. Даны вершины тетраэдра (см. рис. 2.11) $A(2,-1,2)$, $B(5,5,5)$, $C(3,2,0)$, $D(4,1,4)$. Вычислить: 1) объем тетраэдра; 2) его высоту, опущенную из вершины D; 3) угол между ребром AD и его гранью ABC.

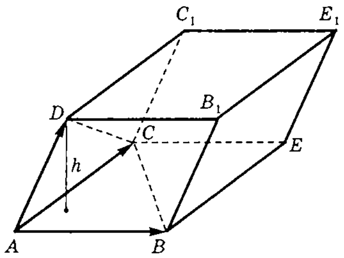


Рис. 2.11

Решение. 1. Объем тетраэдра V равен одной шестой части объема параллелепипеда $ABECDB_1E_1C_1$. Объем параллелепипеда по геометрическому свойству смешанного произведения равен модулю смешанного произведения, например, векторов $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$.

Таким образом, искомый объем определяется выражением

$$V = \frac{1}{6} | \overline{AB} \times \overline{AC} \cdot \overline{AD} |.$$

Для вычисления смешанного произведения найдем координаты векторов $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$. Имеем

$$\overline{AB} = \{3, 6, 3\}, \overline{AC} = \{1, 3, -2\}, \overline{AD} = \{2, 2, 2\}.$$

Вычисляя теперь смешанное произведение по формуле (2.40), получим:

$$V = \frac{1}{6} \left\| \begin{matrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6} \cdot |18 - 24 + 6 - 18 + 12 - 12| = 3.$$

2. Объем тетраэдра определяется также формулой

$$V = \frac{1}{3} Sh,$$

где S — площадь основания (в рассматриваемом случае это, очевидно, площадь треугольника ABC); h — высота пирамиды, которую необходимо найти. Площадь S треугольника ABC находим, руководствуясь геометрическим смыслом модуля векторного произведения, в соответствии с которым

$$S = \frac{1}{2} | \overline{AB} \times \overline{AC} |.$$

Найдем $\overline{AB} \times \overline{AC}$ по формуле (2.37):

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}(-12 - 9) - \bar{j}(-6 - 3) + \bar{k}(9 - 6) = -21\bar{i} + 9\bar{j} + 3\bar{k}.$$

Тогда, определяя модуль векторного произведения $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$, находим

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{441+81+9}=\sqrt{531}.$$

Так как $h = 3V/S$, а $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$, то

$$h=\frac{6V}{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}.$$

Подставляя полученные выше значения V и $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$, найдем, что

$$h=\frac{18}{\sqrt{531}}=\frac{6}{\sqrt{59}}.$$

3. Найдем угол между ребром AB и гранью ABC. Это угол φ между прямой AB и ее ортогональной проекцией на плоскость, которой принадлежит грань ABC (рис. 2.11). Для того чтобы найти угол φ, достаточно найти косинус угла ψ между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ (рис. 2.11). Тогда, так как $\psi = \varphi \pm \pi/2$ (в зависимости от того, острый или тупой угол ψ), $\cos\psi = \cos(\varphi \pm \pi/2) = \mp\sin\varphi$. Откуда следует, что $\sin\varphi = \mp\cos\psi$. Причем знак «−» соответствует случаю, когда $\cos\psi < 0$ (угол ψ тупой), а «+» — когда $\cos\psi > 0$. И в том, и другом случае $\sin\varphi > 0$. Оба случая легко учитываются соотношением $\sin\varphi = |\cos\psi|$. Учитывая, что

$$\cos\psi=\frac{|\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|},\ \text{получим}\ \sin\varphi=\left|\frac{|\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}\right|.$$

В числителе полученного выражения записан модуль смешанного произведения векторов $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, который можно вычислять описанным выше способом, зная координаты этих векторов. Однако в этом нет необходимости, так как вектор $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ мы нашли, отвечая на второй вопрос задачи. Поэтому скалярное произведение $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ проще найти непосредственно, через координаты перемножаемых векторов. Определяя модуль вектора $\overrightarrow{AD}$, имеем ($|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ был найден во втором пункте задачи):

$$\sin\varphi=\left|\frac{2\cdot(-21)+2\cdot 9+2\cdot 3}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{531}}\right|=\frac{3}{\sqrt{177}};$$

отсюда $\varphi=\arcsin\frac{3}{\sqrt{177}}\approx 13{,}03°$.

2.9.
ЗАДАЧИ

2.15. Треугольник задан координатами своих вершин $A(1, 2)$; $B(5, 3)$; $C(3, -2)$. Найти координаты точки пересечения медиан.

2.16. Даны вершины треугольника $A(2, -4)$; $B(4, -5)$ и $C(-4, 7)$. Определить середины его сторон.

2.17. Даны три вершины параллелограмма $A(2, -4)$; $B(4, -2)$; $C(-2, 4)$. Определить четвертую вершину D, противоположную B.

2.18. Даны вершины треугольника $A(2, 3)$; $B(4, -10)$; $C(-4, 1)$. Определить длину его медианы, проведенной из вершины B.

В задачах 2.19–2.21 заданы уравнения в полярной системе координат $\rho = \rho(\varphi)$. Получить уравнения этих линий в декартовой системе координат.

2.19. $\rho = 4(1 + \sin\varphi)$.

2.20. $\rho = 3(1 + \cos\varphi)$.

2.21. $\rho = 4(1 - \cos\varphi)$.

В задачах 2.22–2.24 заданы уравнения линий в декартовой системе координат. Получить полярные уравнения этих линий.

2.22. $(x^2 + y^2)^2 = 2y^3$.

2.23. $(x^2 + y^2)^3 = 4x^4$.

2.24. $(x^2 + y^2)^3 = 9(x^2 - y^2)^2$.

2.25. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j}, \vec{b} = -4\vec{j} + 2\vec{k}$.

2.26. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = \{6, 3, -3\}$ и удовлетворяющий условию $\vec{x} \cdot \vec{a} = 9$.

2.27. Найти проекцию вектора $\vec{a} = \{3\sqrt{2}, -7, -9\}$ на ось, составляющую с координатными осями Ox и Oz углы $\alpha = 45°$, $\gamma = 60°$, а с осью Oy — острый угол β.

2.28. Даны три вектора $\vec{a} = \{1, -1\}, \vec{b} = \{1, 1\}, \vec{c} = \{2, 4\}$. Найти разложение вектора $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$ по базису $\vec{a}, \vec{b}$.

2.29. Даны четыре вектора $\vec{a} = \{6, 3, 0\}, \vec{b} = \{3, -3, 6\}$, $\vec{c} = \{6, 6, -3\}, \vec{d} = \{9, 21, -21\}$. Найти разложение каждого из этих векторов, принимая в качестве базиса три остальных.

2.30. Даны вершины треугольника $A(2, 2, -3)$; $B(4, 1, -1)$; $C(0, -2, 1)$. Определить его внешний угол при вершине A.

2.31. Дан треугольник с вершинами $A(3,-2,8)$; $B(2,0,4)$; $C(8, 2, 0)$. Найти его площадь S и высоту BD.

2.32. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах

$$\vec{a} = 2\vec{p} + 4\vec{q}, \vec{b} = 2\vec{p} - 6\vec{q}, \text{ где } |\vec{p}| = 5, |\vec{q}| = 3 \text{ и } (\vec{p}; \vec{q}) = \pi/6.$$

2.33. Даны три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, удовлетворяющие условию $2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, $|\vec{b}| = 4$, $|\vec{c}| = \sqrt{2}$. Найти $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{c}$.

2.34. Вычислить синус угла между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах

$$\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}.$$

2.35. Показать, что $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{c}) \times \vec{b} = -2\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$.

2.36. Показать, что векторы

$$\vec{a} = -2\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}, \vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}, \vec{c} = -\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$$

компланарны, и разложить $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2.37. Показать, что точки $A(1, -2, -3)$; $B(0, 1, 0)$; $C(1, 2, -1)$ и $D(4, -1, -7)$ лежат в одной плоскости.

2.38. Показать, что объем параллелепипеда, построенного на диагоналях граней данного параллелепипеда, равен удвоенному объему данного параллелепипеда.

2.39. Даны три вектора:

$$\vec{a} = \{2, -2, 6\}, \vec{b} = \{-6, 6, 3\}, \vec{c} = \{3, -2, 5\}.$$

Вычислить $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$.

2.40. Доказать компланарность векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, зная, что $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$.

2.41. Показать, что

$$(\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c})[(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})] = 4\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}.$$

2.42. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{q} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}, \vec{r} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

2.43. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}, \vec{b} = 2\vec{p} + 2\vec{q} - 3\vec{r}, \vec{c} = \vec{p} + 2\vec{q} + 2\vec{r}$, где $\vec{p}, \vec{q}$ и $\vec{r}$ — взаимно ортогональные орты.

2.44. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = 6\vec{p} + 10\vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} - 6\vec{q}, \vec{c} = 4\vec{p} + 14\vec{q}$, где $|\vec{p}| = 1, |\vec{q}| = 2, (\vec{p}; \vec{q}) = 135°$.

2.45. Сила $\vec{F} = \{6, 8, -4\}$ приложена к точке $A(2, -1, -2)$. Определить величину и направляющие косинусы этой силы относительно начала координат.

2.46. Даны три силы

$$\vec{a} = \{1, -2, -4\}, \vec{b} = \{2, 1, -2\}, \vec{c} = \{-5, 0, 2\},$$

приложенные к точке $A(-2, 3, -3)$. Найти величину и направляющие косинусы этих сил относительно точки $B(1, 2, -2)$.

2.47. Вычислить работу силы $\vec{F} = \{2, 3, 4\}$, когда точка ее приложения перемещается по прямой из точки $A(1, 1, 1)$ в точку $B(3, -1, 2)$.

2.48. Даны три силы

$$\vec{F}_1 = \{1, 2, 3\}, \vec{F}_2 = \{2, 3, 1\}, \vec{F}_3 = \{-4, -3, -2\},$$

приложенные к одной точке. Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки $A(1, 2, 1)$ в точку $B(3, -2, -5)$.

2.49. Найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий трем уравнениям: $\vec{x} \cdot \vec{a} = \alpha, \vec{x} \cdot \vec{b} = \beta, \vec{x} \cdot \vec{c} = \gamma$.

2.50. Пусть α, β, γ — корни уравнения $x^3 + px + q = 0$. Вычислить

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}.$$

2.51. Доказать, что расстояние h между параллельными прямыми можно выразить формулой

$$h = \frac{|\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2|}{|\vec{r}_2|},$$

где $\vec{r}_1$ — вектор, идущий из точки на одной прямой в точку на другой прямой, а $\vec{r}_2$ — вектор, параллельный данной прямой.

2.52. Три вектора $\overline{OA}, \overline{OB}$ и $\overline{OC}$ удовлетворяют условию $\overline{OA} \cdot \overline{OB} + \overline{OB} \cdot \overline{OC} + \overline{OC} \cdot \overline{OA} = 0$. Доказать, что 1) векторы $\overline{OA}, \overline{OB}$ и $\overline{OC}$ компланарны; 2) точки A, B, C лежат на одной прямой.

ГЛАВА 3

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

3.1. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

В декартовой системе координат на плоскости *общее уравнение прямой* имеет вид

$$Ax + By + C = 0. \qquad (3.1)$$

При этом вектор, перпендикулярный прямой, носит название *нормального вектора* и имеет координаты

$$\vec{n} = \{A; B\}. \qquad (3.2)$$

К общему уравнению прямой можно прийти, записав условие ортогональности вектора $\vec{n} = \{A; B\}$ и *текущего вектора* $\overline{PM} = \{x - x_0; y - y_0\}$, который определяется заданной точкой прямой $P(x_0; y_0)$ и точкой прямой $M(x; y)$ с переменными координатами:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$
$$\text{или } Ax + By + C = 0, \text{ где } C = -Ax_0 - By_0. \qquad (3.3)$$

Если $B \neq 0$, то из общего уравнения прямой (3.1) получается *уравнение прямой с угловым коэффициентом*

$$y = kx + b, \;\; k = -A/B, \;\; b = -C/B, \qquad (3.4)$$

где $k = \operatorname{tg}\alpha$ — угловой коэффициент, равный тангенсу угла наклона прямой с положительным направлением оси абсцисс. Уравнение с угловым коэффициентом не описывает прямые, параллельные оси ординат.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $P(x_0; y_0)$ и имеющей угловой коэффициент k:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (3.5)$$

К уравнению (3.5) можно прийти, использовав формулу для тангенса угла наклона прямой к оси OX

$$k = \operatorname{tg}\alpha = (y - y_0)/(x - x_0). \tag{3.6}$$

Каноническое уравнение прямой

$$(y - y_0)/l = (x - x_0)/m \tag{3.7}$$

можно получить, записав условие коллинеарности вектора $\vec{a} = \{l; m\}$, называемого *направляющим вектором прямой*, и текущего вектора прямой $\overline{PM} = \{x - x_0; y - y_0\}$, определяемого точками $P(x_0; y_0)$ и $M(x; y)$, которые принадлежат прямой.

Аналогично можно получить *каноническое уравнение прямой, проходящей через две заданные точки* $P(x_0; y_0)$ и $Q(x_1; y_1)$

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}. \tag{3.8}$$

Если прямая не проходит через начало координат и не параллельна осям координат, то ее общее уравнение (3.3) может быть преобразовано к *уравнению прямой в отрезках*:

$$x/a + y/b = 1, \quad a = -C/B, \quad b = -C/B. \tag{3.9}$$

Здесь a и b — проекции отрезка прямой между точками пересечения с осями координат на эти оси координат.

Нормальное уравнение прямой:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \tag{3.10}$$

Параметр p — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, α — угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси абсцисс. Нормальное уравнение прямой можно получить из общего уравнения путем умножения всех его членов на множитель

$$\pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

знак которого должен быть противоположен знаку C.

Параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \end{cases} \tag{3.11}$$

получаются из канонического уравнения (3.7) приравниванием равенства отношений переменному параметру t:

$$(y - y_0)/l = (x - x_0)/m = t.$$

Уравнение прямой в полярной системе координат —

$$\rho = p/\cos(\varphi - \alpha), \tag{3.12}$$

определяется длиной перпендикуляра p, опущенного из полюса на прямую, и углом α, образованным этим перпендикуляром с полярной осью. Уравнение (3.12) получается из нормального уравнения (3.10) путем подстановки в него формул перехода от декартовых координат к полярным ($x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$) и косинуса разности $\cos(\varphi - \alpha) = \cos\varphi\cdot\cos\alpha + \sin\varphi\cdot\sin\alpha$.

Угол φ между двумя прямыми, а также условия *параллельности* и *перпендикулярности* этих прямых в случае задания:

а) уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ имеют следующий вид:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1}, \quad \cos\varphi = \frac{1 + k_1k_2}{\sqrt{1 + k_1^2}\sqrt{1 + k_2^2}},$$

$$\sin\varphi = \frac{k_2 - k_1}{\sqrt{1 + k_1^2}\sqrt{1 + k_2^2}}, \tag{3.13}$$

$$k_1 = k_2, \tag{3.14}$$

$$k_1 = -1/k_2; \tag{3.15}$$

б) общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ определяются формулами

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}, \quad \sin\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \tag{3.16}$$

$$A_1/A_2 = B_1/B_2, \tag{3.17}$$

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0;$$

в) каноническими уравнениями $(y - y_1)/l_1 = (x - x_1)/m_1$ и $(y - y_2)/l_2 = (x - x_2)/m_2$ определяются формулами

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{l_1m_2 - l_2m_1}{l_1l_2 + m_1m_2}, \quad \sin\varphi = \frac{l_1m_2 - l_2m_1}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}, \tag{3.18}$$

$$l_1/l_2 = m_1/m_2, \tag{3.19}$$
$$l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0. \tag{3.20}$$

Уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересечения двух данных прямых, заданных

а) общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, таково

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0; \tag{3.21}$$

б) уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, таково

$$k_1x - y + b_1 + \lambda(k_2x - y + b_2) = 0; \tag{3.22}$$

Расстояние от точки $P(x_0; y_0)$ до прямой, заданной

а) общим уравнением $Ax + By + C = 0$, таково

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0; \tag{3.23}$$

б) нормальным уравнением $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$, вычисляется по формуле

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p|. \tag{3.24}$$

Геометрический смысл неравенства первой степени с двумя неизвестными определяется следующими теоремами.

Теорема 2.1. Всякая прямая $Ax + By + C = 0$ разбивает плоскость XOY на две полуплоскости. Для координат всех точек $M(x; y)$, лежащих в одной полуплоскости, выполняется неравенство $Ax + By + C > 0$, для координат всех точек другой полуплоскости справедливо противоположное неравенство $Ax + By + C < 0$.

Теорема 2.2. Пусть прямая задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$.

Если отложить нормальный вектор $\overrightarrow{M}(x; y)$ от любой точки $P(x_0; y_0)$ этой прямой $\overrightarrow{PM} = \vec{n}$, то конец $M(x_0 + A; y_0 + B)$ отложенного вектора будет находиться в положительной полуплоскости от данной прямой, т. е.

$$A(x_0 + A) + B(y_0 + B) + C > 0.$$

Теорема 2.3. При параллельном переносе прямой $Ax + By + C = 0$ в направлении нормального вектора $\vec{n} = \{A; B\}$ величина $L(x; y) = Ax + By + C$ возрастает. При переносе этой прямой в противоположном направлении $L(x; y)$ убывает.

3.2. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Приведенное краткое изложение теории демонстрирует важность использования понятий векторной алгебры при получении и исследовании уравнений прямых на плоскости. В связи с этим рекомендуем перед рассмотрением нижеприведенных решений повторить следующие условия.

Условие коллинеарности двух векторов $\vec{a} = \{X_1; Y_1\}$ и $\vec{b} = \{X_2; Y_2\}$:

$$X_1/X_2 = Y_1/Y_2;$$

условия ортогональности двух векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = X_1X_2 + Y_1Y_2 = 0.$$

3.1. Получить уравнение прямой на плоскости, если известна точка $P(2; 3)$, через которую проходит прямая, и вектор, перпендикулярный прямой $\vec{n} = \{A; B\} = \{4; -1\}$.

Решение.

1-й шаг. Сделаем схематический чертеж (рис. 3.1).

2-й шаг. Выпишем координаты векторов, определяющих данный геометрический объект — прямую. Это нормальный вектор прямой

$$\vec{n} = \{A; B\} = \{4; -1\}$$

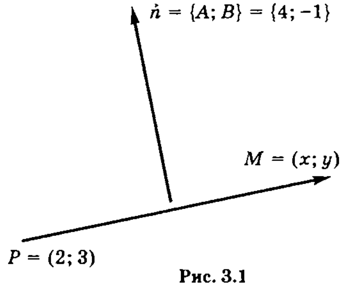


Рис. 3.1

и текущий вектор $\overline{PM} = \{x - 2; y - 3\}$.

3-й шаг. Выпишем одно из условий — ортогональности или коллинеарности, в соответствии с заданием. По условию задачи $\overline{PM} \perp \vec{n}$, поэтому воспользуемся условием ортогональности двух векторов в координатной форме

$$4(x - 2) + (-1)(y - 3) = 0.$$

4-й шаг. Произведем алгебраические преобразования, сводящие уравнение к известному виду. Получаем общее уравнение прямой $4x - y - 5 = 0$.

3.2. Получить уравнение прямой, проходящей через точку $P(-1; 2)$ и параллельной вектору $\vec{a} = \{l; m\} = \{8; -4\}$.

Решение.

1-й шаг. Сделаем схематический чертеж (рис. 3.2).

2-й шаг. Выпишем координаты векторов, определяющих данный геометрический объект — прямую. Это направляющий вектор прямой $\vec{a} = \{l; m\} = \{8; -4\}$ и текущий вектор $\overrightarrow{PM} = \{x+1; y-2\}$.

3-й шаг. Выпишем одно из условий — ортогональности или коллинеарности, в соответствии с заданием. По условию задачи $\overrightarrow{PM} \parallel \vec{a}$, поэтому воспользуемся условием коллинеарности двух векторов в координатной форме $(x + 1)/8 = (y - 2)/-4$. Получаем каноническое уравнение прямой.

3.3. Получить уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $P_0(1; 2)$ и $P_1(3; 2)$.

Решение.

1-й шаг. Сделаем схематический чертеж (рис. 3.3).

2-й шаг. Выпишем координаты векторов, определяющих данный геометрический объект — прямую. Это текущий вектор, лежащий на прямой $\overrightarrow{P_0M} = \{x-1; y-2\}$ и вектор, образованный двумя точками прямой

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \{3-1; 2-2\} = \{1; 0\}.$$

3-й шаг. Выпишем одно из условий — ортогональности или коллинеарности, в соответствии с заданием. По условию задачи $\overrightarrow{P_0M} \parallel \overrightarrow{P_0P_1}$, поэтому воспользуемся условием коллинеарности двух векторов в координатной форме $(x - 1)/2 = (y - 2)/0$. Получаем каноническое уравнение прямой. Иногда в ответ рассматриваемой задачи ошибоч-

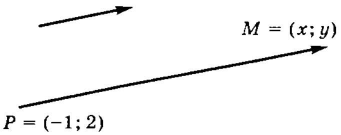


Рис. 3.2

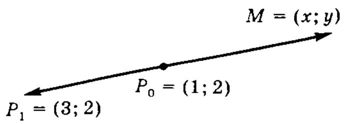


Рис. 3.3

но не записывают ту часть уравнения, где встречается в знаменателе нуль, ссылаясь на то, что на нуль делить нельзя. Однако уравнение $(x-1)/2=(y-2)/0$ не описывает деления на нуль, здесь лишь осуществлена символическая запись того, что текущий вектор $\overline{P_0M}$ коллинеарен вектору $\overline{P_0P_1}$, одна из компонент которого равна нулю.

3.4. Исходя из уравнения прямой в общем виде $3x-4y+20=0$, преобразовать это уравнение: 1) в уравнение с угловым коэффициентом; 2) в уравнение в отрезках; 3) в уравнение в каноническом виде; 4) в нормальное уравнение; 5) в параметрические уравнения; 6) в полярное уравнение.

Решение.

1) чтобы получить уравнение с угловым коэффициентом, решим исходное уравнение относительно y:

$$y=\frac{3}{4}x+5;$$

2) определим отрезки, которые отсекает данная прямая на осях координат. Полагая $x_0=0$, получим из общего уравнения $3\cdot 0-4\cdot y_0+20=0$ ординату точки пересечения данной прямой с осью OY, $y_0=b=5$. Полагая $y_1=0$, получим абсциссу точки пересечения данной прямой с осью абсцисс $3\cdot x_1-4\cdot 0+20=0$, $x_1=a=-20/3$. Подставим найденные значения в уравнения прямой в отрезках (3.9), получаем

$$\frac{x}{-20/3}+\frac{y}{5}=1;$$

3) определим координаты двух точек, принадлежащих данной прямой. В предыдущем пункте получены две такие точки: $P_0=(0;\ 5)$ и $P_1=(-20/3;\ 0)$. Теперь запишем каноническое уравнение прямой, проходящей через две точки (формула 3.8)

$$\frac{x-0}{-20/3-0}=\frac{y-5}{0-5}.$$

В итоге получаем каноническое уравнение прямой

$$\frac{x}{20/3}=\frac{y-5}{5};$$

4) чтобы записать нормальное уравнение прямой, согласно (3.10) необходимо вычислить

$$\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5.$$

Поскольку знак коэффициента $C = 20$ в уравнении $3x - 4y + 20 = 0$ положителен, то нормальное уравнение имеет вид

$$\left(-\frac{3}{5}\right)x + \frac{4}{5}y - 4 = 0;$$

5) чтобы получить параметрические уравнения, приравняем равенство в каноническом уравнении переменному параметру t:

$$\frac{x}{20/3} = \frac{y-5}{5} = t, \quad x = 0 + \frac{20}{3}t; \quad y = 5 + 5t;$$

6) полярное уравнение прямой получим из нормального уравнения, введя следующие обозначения: $p = 4$, $\cos\alpha = -3/5$, $\sin\alpha = 4/5$, $\alpha = \pi - \arcsin(4/5)$, отсюда $\rho = 4/\cos(\varphi - \pi + \arcsin(4/5))$.

3.5. Определить угол между двумя прямыми $y = 2x + 3$ и $y = -3x - 8$.

Решение. Имеем $k_2 = -3$, $k_1 = 2$, по формуле (3.13)

$$\operatorname{tg}\varphi = (-3 - 2)/(1 + 2\cdot(-3)) = 1, \varphi = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4 = 45°.$$

3.6. Прямая задана уравнением с угловым коэффициентом $y = 3x - 4$;

1) написать уравнение прямой, параллельной данной и проходящей через точку $P_0 = (1; 2)$; 2) написать уравнение прямой, перпендикулярной данной и проходящей через точку $P_0 = (1; 2)$.

Решение.

1) исходя из условия параллельности (3.14) двух прямых, заданных уравнениями с угловыми коэффициентами $k_2 = k_1 = 3$, получим с помощью формулы (3.5), что искомое уравнение имеет вид $y - 2 = 3(x - 1)$ или $y = 3x - 1$;

2) исходя из условия (3.15) перпендикулярности двух прямых, получаем $k_2 = -1/k_1 = -1/3$. Вновь воспользовавшись формулой (3.5), получим

$$y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 1) \text{ или } y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}.$$

3.7. Найти расстояние от точки $P(3; 8)$ до прямой $(x - 1)/3 = (y - 2)/4$.

Решение. Преобразуем данное уравнение к общему виду:

$$4(x-1)=3(y-2),\ \ 4x-3y+2=0.$$

Теперь воспользуемся формулой (3.23):

$$d=\frac{|4x_0-3y_0+2|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|4\cdot 3-3\cdot 8+2|}{\sqrt{25}}=2.$$

Можно было найти расстояние по-другому, с помощью нормального уравнения прямой. Составим нормальное уравнение из полученного выше уравнения в общем виде. Имеем:

$$\cos\alpha=-\frac{4}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=-0{,}8,\ \ -0{,}8x+0{,}6y-0{,}4=0.$$

Отсюда расстояние можно рассчитать по формуле (3.24): $d=|-0{,}8\cdot 3+0{,}6\cdot 8-0{,}4|=2.$

3.8. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P(2;-3)$ и точку пересечения прямых $3x+2y-4=0$ и $x-y+5=0$.

Решение.

Воспользуемся уравнением (3.21) пучка прямых $3x+2y-4+\lambda(x-y+5)=0$. Поскольку искомая прямая проходит через точку $P(2;-3)$, то, подставив координаты этой точки в уравнение пучка прямых, найдем параметр λ:

$$3\cdot 2+2\cdot(-3)-4+\lambda(2+3+5)=0,\ \lambda=0{,}4.$$

Искомое уравнение получается из уравнения пучка прямых путем подстановки в последнее найденного λ. Имеем $3x+2y-4+0{,}4\cdot(x-y+5)=0,\ 3{,}4x+1{,}6y-2=0.$

3.9. Составить уравнения биссектрис углов между прямыми $3x+4y-8=0$ и $5x-12y+1=0$.

Решение. Если точка $M(x;y)$ принадлежит одной из биссектрис углов, образованных прямыми, то расстояния от нее до прямых одинаковы. Пользуясь формулой (3.23), можно записать

$$\frac{|3x+4y-8|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|5x-12y+1|}{\sqrt{5^2+12^2}}.$$

Для всех точек одной из биссектрис функции $L_1(x,y)=3x+4y-8$ и $L_2(x,y)=5x-12y+1$ имеют одинаковые знаки, обращаясь в нуль в точке пересечения прямых. Для всех точек другой биссектрисы $L_1(x, y)$ и $L_2(x, y)$ имеют разные знаки (теорема 3.1). Отсюда уравнение первой биссектрисы

$$(3x + 4y - 8)/5 = (5x - 12y + 1)/13,\ \ 14x + 112y - 109 = 0,$$

а уравнение другой биссектрисы

$$(3x + 4y - 8)/5 = -(5x - 12y + 1)/13,\ \ 64x - 18y - 99 = 0.$$

3.10. Получить уравнения медианы, биссектрисы и высоты, выходящих из вершины треугольника, которая является пересечением двух сторон треугольника $3x - 4y + 8 = 0$ и $12x + 5y - 73 = 0$, если уравнение третьей стороны $x + y + 12 = 0$.

Решение. Сделаем схематический чертеж (рис. 3.4).

1. Найдем координаты вершины, из которой исходят искомые медиана, биссектриса и высота. Для этого решим совместно систему уравнений $3x - 4y + 8 = 0$, $12x + 5y - 73 = 0$. Из первого уравнения, умноженного на 4, вычтем второе уравнение, получаем $-21y = -105$, отсюда $x_B = 4$, $y_B = 5$. Итак, искомая вершина $B(4; 5)$. Найдем аналогично координаты других вершин A и C. Из второго уравнения системы уравнений $3x - 4y + 8 = 0$ и $x + y + 12 = 0$ выразим $x = -12 - y$ и подставим в первое уравнение, получаем $x_B = -8$, $y_B = -4$. Координаты вершины $A(-8; -4)$. Из второго уравнения системы $12x + 5y - 73 = 0$ и $x + y + 12 = 0$ вновь находим $x = -12 - y$ и подставляем в первое уравнение. При этом получим $x_C = 19$, $y_C = -31$. Координаты вершины $C(19; -31)$.

2. Найдем середину отрезка AC. Для этого воспользуемся формулами деления отрезка в данном отношении

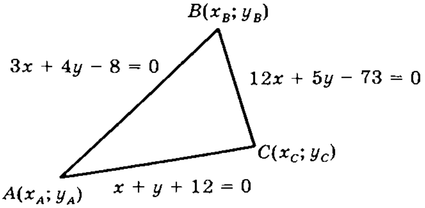


Рис. 3.4

$x_M = (-8+19)/2 = 5{,}5$, $y_M = (-4-31)/2 = -17{,}5$. Уравнение медианы получим как уравнение прямой, проходящей через две заданные точки B и M (формула (3.8)):

$$(x-4)/(5{,}5-4) = (y-5)/(-17{,}5-5),$$
$$(x-4)/1{,}5 = (y-5)/-22{,}5.$$

Упростим это уравнение, разделив все компоненты направляющего вектора $\vec{a} = \{1{,}5; -22{,}5\}$ на 1,5. Получим новый направляющий вектор, коллинеарный $\vec{a}$, с координатами $\vec{a}' = \{1; -15\}$. Уравнение искомой медианы принимает вид

$$(x-4)/1 = (y-5)/-15.$$

3. Чтобы найти уравнение биссектрисы, проходящей через вершину B, воспользуемся теоремой о том, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим к ней сторонам. С помощью формул деления отрезка в данном отношении (1.6)

$$x_K = \frac{x_A + \lambda x_C}{1+\lambda}, \quad y_k = \frac{y_A + \lambda y_C}{1+\lambda},$$

где

$$\lambda = AK/KC = AB/BC,$$

получаем

$$\lambda = \frac{AK}{KC} = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{(-8-4)^2 + (-4-5)^2}}{\sqrt{(19-4)^2 + (-31-5)^2}} = \frac{5}{13}.$$

Отсюда координаты основания биссектрисы, выходящей из вершины B, таковы: $K(x_K; y_K) = (-0{,}5; -11{,}5)$.

Уравнение биссектрисы получается с помощью формулы (3.8): $(x-4)/(-0{,}5-4) = (y-5)/(-11{,}5-5)$ или $(x-4)/-4{,}5 = (y-5)/-16{,}5$. Разделим все компоненты направляющего вектора биссектрисы $\vec{b} = \{-4{,}5; -16{,}5\}$ на $(-1{,}5)$, получим новый направляющий вектор $\vec{b}' = \{3; 11\}$, коллинеарный прежнему, заменяя координаты $\vec{b} = \{-4{,}5; -16{,}5\}$ в уравнении биссектрисы, получим новое уравнение для нее в виде $(x-4)/3 = (y-5)/11$.

4. Уравнение высоты из вершины B найдем как уравнение прямой, проходящей через точку $B(4;\ 5)$ и параллельной нормальному вектору $\vec{n} = \{1;\ 1\}$ прямой AC.

Запишем условие коллинеарности текущего вектора прямой $\overrightarrow{BQ} = \{x-4; y-5\}$ и вектора $\vec{n} = \{1;\ 1\}$: $(x-4)/1 = (y-5)/1$ — уравнение высоты.

3.11. Уравнение одной из сторон квадрата $ABCD$ – AB есть $x + 3y - 5 = 0$. Составить общее уравнение трех остальных сторон квадрата, если $P(-1;\ 0)$ — точка пересечения его диагоналей.

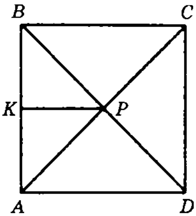


Рис. 3.5

Р е ш е н и е. Сделаем схематический чертеж (рис. 3.5).

1. Найдем координаты точки K пересечения AB с перпендикуляром PK, опущенным из точки P на AB, т. е. имеющим текущий вектор $\overrightarrow{PM} = \{x+1; y-0\}$ и перпендикулярным прямой AB (параллельным ее нормальному вектору $\vec{n} = \{1; 3\}$). Записав условие коллинеарности $\overrightarrow{PM}$ и $\vec{n}$, получим уравнение перпендикуляра PK:

$$(x+1)/1 = y/3,\ \ 3x - y + 3 = 0.$$

Умножим уравнение AB на 3 и из полученного вычтем уравнение PK, тогда получим $10y = 18$, $y_K = 1{,}8$, $x_K = -0{,}4$. Итак, $K(-0{,}4;\ 1{,}8)$.

2. Определим координаты точек $A(x_A;\ y_A)$ и $B(x_B;\ y_B)$. Для этого вначале вычислим $|KP|^2$:

$$|KP|^2 = (-1 - (-0{,}4))^2 + (0 - 1{,}8)^2 = 3{,}6.$$

Теперь запишем равенство квадратов расстояний

$$|AK|^2 = |BK|^2 = |PK|^2,$$

подставив в них найденное из уравнения прямой AB выражение для $x = 5 - 3y$. Имеем

$$(5 - 3y + 0{,}4)^2 + (y - 1{,}8)^2 = 3{,}6 \cdot 10y^2 - 36y + 28{,}8 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, получаем $y_1 = 2{,}4$; $y_2 = 1{,}2$. Подставим найденные y_1 и y_2 в уравнение прямой AB и получим соответствующие абсциссы точек A и B:

$$x_A = x_1 = -2{,}2,\ \ y_A = y_1 = 2{,}4;\ \ x_B = x_2 = 1{,}4,\ \ y_B = y_2 = 1{,}2.$$

Итак, $A(-2{,}2;\ 2{,}4)$, $B(1{,}4;\ 1{,}2)$.

3. Найдем координаты точек C и D, используя формулы деления отрезка в данном отношении и то, что точка P есть середина AC и BD:

$$x_P = \frac{x_A + x_C}{2} = -1; \quad y_P = \frac{y_A + y_C}{2} = 0; \quad C(-0{,}2; -2{,}4);$$

$$x_P = \frac{x_B + x_D}{2} = -1; \quad y_P = \frac{y_B + y_D}{2} = 0; \quad D(-3{,}4; -1{,}2).$$

4. Уравнение прямой AD найдем из условия коллинеарности текущего вектора этой прямой

$$\overline{AM} = \{x + 2{,}2; y - 2{,}4\}$$

и нормального вектора прямой AB $\vec{n} = \{1; 3\}$:

$$(x + 2{,}2)/1 = (y - 2{,}4)/3.$$

Преобразуем уравнение AD к общему виду: $3x - y + 9 = 0$.

5. Поступая аналогично предыдущему пункту, получим уравнение BC.

$$\overline{BM} = \{x - 1{,}4; y - 1{,}2\} \parallel \vec{n} = \{1; 3\},$$

$$(x - 1{,}4)/1 = (y - 1{,}2)/3 \text{ или } 3x - y - 3 = 0.$$

6. Уравнение CD найдем как уравнение прямой, проходящей через две точки (формула (3.8)):

$$(x - 0{,}2)/(-3{,}4 - 0{,}2) = (y - (-2{,}4))/(-1{,}2 - (-2{,}4)).$$

В знаменателях дробей в последнем равенстве можно заменить координаты направляющего вектора $\vec{a} = \{-3{,}6; 1{,}2\}$ на координаты коллинеарного вектора $\vec{a}' = \{-3; 1\}$, который получается из $\vec{a}$ делением на 1,2. Уравнение CD после этого приобретает вид $(x - 0{,}2)/-3 = (y - (-2{,}4))/1$ или $x + 3y + 7 = 0$ — общее уравнение прямой.

3.12. Даны уравнения одной из сторон AB ромба $ABCD$: $x - 3y + 10 = 0$, и одной из его диагоналей: $x + 4y - 4 = 0$. Диагонали ромба пересекаются в точке $P(0; 1)$. Найти уравнения остальных сторон ромба, расстояние от точки P до стороны AB и внутренние углы ромба.

Решение. Сделаем схематический чертеж (рис. 3.6).

1. Уравнение диагонали AC получим из условия ортогональности AC и BD и того, что BD проходит через точку P,

$$(x - 0)/1 = (y - 1)/4, \; 4x - y + 1 = 0.$$

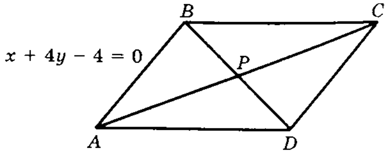


Рис. 3.6

2. Координаты точек A и B найдем из решений соответствующих систем уравнений:

$$\begin{cases} x-3y+10=0 \\ 4x-y+1=0 \end{cases} \Rightarrow A(7/11;39/11);$$

$$\begin{cases} x-3y+10=0 \\ x+4y-4=0 \end{cases} \Rightarrow B(-4;2).$$

3. Поскольку диагонали ромба делятся точкой пересечения пополам, то из формул деления отрезка в данном отношении найдем координаты точек $C(x_C;\, y_C)$ и $D(x_D;\, y_D)$:

$$x_P=\frac{x_A+x_C}{2};\quad 0=\frac{7/11+x_C}{2};\quad y_P=\frac{y_A+y_C}{2};$$

$$1=\frac{39/11+y_C}{2};\quad C(-7/11;-17/11),$$

$$x_P=\frac{x_B+x_D}{2};\quad 0=\frac{-4+x_D}{2};\quad y_P=\frac{y_B+y_D}{2};$$

$$1=\frac{2+y_D}{2};\quad D(4;0).$$

4. Уравнения сторон BC, CD и AD найдем как уравнения прямых, проходящих через две заданные точки (формула (3.8)):

$$BC:\frac{x+4}{-7/11+4}=\frac{y-2}{-17/11-2},\quad \frac{x+4}{37/11}=\frac{y-2}{-39/11},$$

$$39x+37y+82=0.$$

$$CD:\frac{x-4}{-7/11-4}=\frac{y-0}{-17/11-0},\quad \frac{x-4}{-51/11}=\frac{y}{-17/11},$$

$$x-3y-4=0.$$

$$AD:\frac{x-4}{7/11-4}=\frac{y-0}{39/11-0},\quad \frac{x-4}{-37/11}=\frac{y}{39/11},$$

$$39x+37y-156=0.$$

5. Расстояние от точки $P(0;\ 1)$ до прямой AB с уравнением $x - 3y + 10 = 0$ найдем следующим образом:

$$d = \frac{|0 - 3\cdot 1 + 10|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{7}{\sqrt{10}} = \frac{7\sqrt{10}}{10} \approx 2{,}21.$$

6. Угол между двумя прямыми AB и BC определяется из формулы (3.13):

$$\cos(\angle ABC) = \frac{1\cdot 39 - 3\cdot 37}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}\sqrt{39^2 + 37^2}} = -\frac{72}{170} \approx 0{,}4235,$$

$$\angle ABC = 115^\circ,\quad \angle BAD = \angle BCD = 65^\circ.$$

3.13. Изобразить область, описываемую системой неравенств

$$\begin{cases} x + y - 1 \leqslant 0 \quad (BC), \\ -x + y - 1 \leqslant 0 \quad (AB), \\ y \geqslant -1 \quad (AC). \end{cases}$$

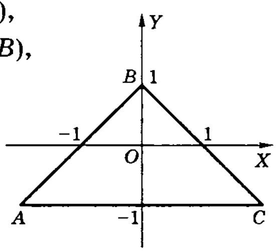


Рис. 3.7

Р е ш е н и е. Выберем в качестве пробной точки такую, которая не принадлежит ни одной из прямых, уравнения которых получаются из данных неравенств путем замены знаков неравенств на равенства. Проще всего считать пробной точкой $O(0;\ 0)$. Построим упомянутые прямые, предварительно преобразив их уравнения (рис. 3.7) к виду уравнений в отрезках.

$$AB\colon x/(-1) + y/1 = 1,$$
$$BC\colon x/1 + y/1 = 1,\quad AC\colon y = -1.$$

Получаем треугольник ABC, внутри которого находится пробная точка $O(0;\ 0)$.

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что координаты пробной точки удовлетворяют неравенствам (AB), (BC) и (AC):

$$0 + 0 - 1 < 0,\quad -0 + 0 - 1 < 0,\quad 0 > 1.$$

3.14. Найти наибольшее значение величины $L(x, y) = -2x + y$ внутри области, определяемой системой неравенств из задачи 3.13.

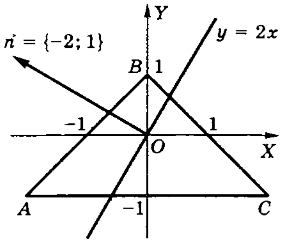


Рис. 3.8

Решение. Построим прямую $L(x, y) = -2x + y = 0$, т. е. $y = 2x$, и отложим нормальный вектор этой прямой $\vec{n} = \{-2; 1\}$ (рис. 3.8).

В соответствии с теоремой 3.3 при перемещении прямой $y = 2x$ в направлении вектора $\vec{n}$ величина $L(x, y) = -2x + y$ будет возрастать. Самая крайняя из этих параллельных прямых, которые имеют хотя бы одну общую точку с областью, лежащей внутри треугольника ABC и включающей в себя стороны треугольника, есть та, что проходит через вершину $A(-2; -1)$. В данной точке $L(x, y) = -2x + y = L(-2, -1) = L_{\max} = -2(-2) + (-1) = 3$.

Другое решение основано на том положении, что линейная функция, имеющая общие точки с замкнутой областью в виде выпуклого многоугольника, которая описывается соответствующей системой линейных неравенств, принимает наибольшее значение либо в вершинах многоугольника, либо на какой-то стороне многоугольника. Таким образом, чтобы определить наибольшее значение $L(x, y) = -2x + y$ внутри треугольника ABC, нужно выбрать наибольшее из чисел $L(x_A, y_A) = L(-2, -1) = 3$, $L(x_B, y_B) = L(0, 1) = 1$, $L(x_C, y_C) = L(2, -1) = -5$. Отсюда получим тот же результат, что и найденный выше: $L_{\max} = 3$, это значение достигается в точке $A(-2; -1)$.

3.3. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки этой же плоскости, называемой центром. Уравнение окружности с радиусом R и центром в точке $P_0(x_0; y_0)$ в декартовых координатах записывается следующим образом (рис. 3.9):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \qquad (3.25)$$

Уравнение (3.25) можно получить, записав равенство расстояния от текущей точки окружности $M(x; y)$ до центра $P(x_0; y_0)$ радиусу R:

$$pM = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = R,$$

а затем возведя обе части этого равенства в квадрат.

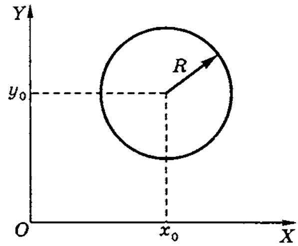


Рис. 3.9

При специальном выборе декартовой системы координат, когда начало координат совпадает с центром окружности, уравнение окружности принимает вид

$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (3.26)$$

Параметрические уравнения окружности, соответствующие (3.26):

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi. \qquad (3.27)$$

Уравнению (3.27) соответствует следующее полярное уравнение окружности:

$$\rho = R, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \qquad (3.28)$$

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух фиксированных точек этой же плоскости, называемых фокусами, есть данное положительное число $2a$, большее, чем расстояние $2c$ между фокусами.

В специально выбранной системе декартовых координат, когда фокусы располагаются на оси OX симметрично начала координат ($F_1(-a;\,0)$, $F_2(a;\,0)$), запишем равенство величин, упоминаемых в определении эллипса,

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = 2a > 2c. \qquad (3.29)$$

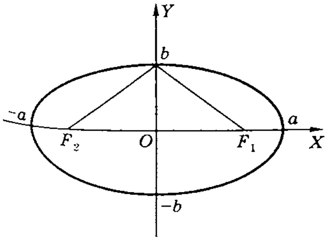


Рис. 3.10

Последовательно избавляясь от радикалов и вводя обозначение

$$b^2 = a^2 - c^2, \qquad (3.30)$$

получим следующее каноническое уравнение эллипса (рис. 3.10):

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1. \qquad (3.31)$$

Точки $A_1(-a;\ 0)$, $A_2(a;\ 0)$, $B_1(0;\ -b)$, $B_2(0;\ b)$ — называются вершинами эллипса, $O(0;\ 0)$ — центром эллипса. Отрезки $A_1A_2 = 2a$ и $B_1B_2 = 2b$ называются соответственно большой и малой осью эллипса. Расстояния от текущей точки эллипса $M(x;\ y)$ до его фокусов

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} \text{ и } r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$$

называются фокальными радиусами этой точки. Отношение $\varepsilon = c/a$ называется эксцентриситетом эллипса ($\varepsilon = c/a < 1$). Две прямые, параллельные малой оси и отстоящие от нее на расстояние a/ε, называются директрисами эллипса.

Уравнения директрис эллипса в декартовых координатах:

$$x = -c/a, \quad x = c/a. \tag{3.32}$$

Для любой точки эллипса $M(x;\ y)$ справедливо так называемое директориальное свойство:

$$r_1/d_1 = r_2/d_2 = \varepsilon, \tag{3.33}$$

где d_1 — расстояние от точки $M(x;\ y)$ до директрисы $x = -c/a$; d_2 — расстояние от точки $M(x;\ y)$ до директрисы $x = c/a$. Кроме того,

$$r_1 = a - \varepsilon x, \quad r_2 = a + \varepsilon x.$$

Фокальным параметром p эллипса называется половина хорды, проведенной через фокус параллельно малой оси,

$$p = \frac{b^2}{a}. \tag{3.34}$$

Параметрические уравнения эллипса, соответствующие (3.31), имеют следующий вид:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi. \tag{3.35}$$

Полярное уравнение эллипса (полюс находится в фокусе, полярная ось перпендикулярна директрисе и направлена в сторону, противоположную направлению к ближайшей от этого фокуса директрисе, p — фокальный параметр, определяемый формулой (3.34), $\varepsilon = c/a$ — эксцентриситет):

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \tag{3.36}$$

Уравнение касательной прямой к эллипсу (3.31) в точке $P_0(x_0;\ y_0)$:

$$xx_0/a^2 + yy_0/b^2 = 1. \qquad (3.37)$$

Прямая $Ax + By + C = 0$ касается эллипса (3.31), если

$$Aa^2 + Bb^2 - C^2 = 0. \qquad (3.38)$$

Условие касания прямой $y = kx + m$ эллипса (3.31):

$$k^2a^2 + b^2 = m^2. \qquad (3.39)$$

Касательная к эллипсу в произвольной точке $M_0(x_0; y_0)$ является биссектрисой внешнего угла M_0 треугольника $F_1F_2M_0$, имеющего своими вершинами фокусы эллипса F_1 и F_2 и данную точку M_0.

Оптическое свойство эллипса заключается в следующем. Если из одного фокуса испускается луч света, то после отражения от внутренней поверхности эллипса, этот луч пройдет через другой фокус.

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых абсолютное значение разности расстояний до двух заданных точек этой же плоскости, называемых фокусами, есть данное положительное число $2a$, меньшее, чем расстояние $2c$ между фокусами.

В специально выбранной системе декартовых координат, когда фокусы располагаются на оси OX симметрично относительно начала координат ($F_1(-a; 0)$, $F_2(a; 0)$), запишем равенство величин, упоминаемых в определении эллипса:

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = 2a < 2c. \qquad (3.40)$$

Последовательно избавляясь от радикалов и вводя обозначение

$$b^2 = c^2 - a^2, \qquad (3.41)$$

получим следующее каноническое уравнение гиперболы (рис. 3.11):

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1. \qquad (3.42)$$

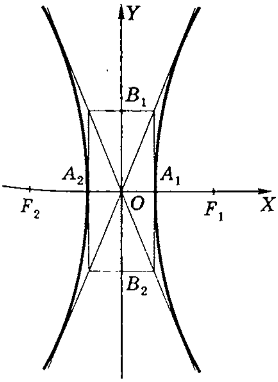


Рис. 3.11

Точки $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$ — действительные вершины, $B_1(0; -b)$,

$B_2(0;\,b)$ — мнимые вершины гиперболы, $O(0;\,0)$ — центр гиперболы. Отрезок $A_1A_2 = 2a$ называется действительной осью гиперболы, и $B_1B_2 = 2b$ — мнимой осью гиперболы. Расстояния от текущей точки гиперболы $M(x;\,y)$ до ее фокусов

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} \text{ и } r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$$

называются фокальными радиусами этой точки.

Отношение $\varepsilon = c/a$ называется эксцентриситетом гиперболы ($\varepsilon = c/a > 1$). Две прямые, параллельные малой оси и отстоящие от нее на расстоянии a/ε, называются директрисами гиперболы.

Директрисы гиперболы расположены на расстоянии $d = a/\varepsilon$ от центра. Асимптоты гиперболы имеют уравнения:

$$y = \pm\frac{b}{a}x. \qquad (3.43)$$

Если оси гиперболы равны, т. е. $a = b$, то гипербола называется равнобочной или равносторонней, ее уравнение имеет следующий вид:

$$x^2 - y^2 = a^2. \qquad (3.44)$$

Асимптотами равносторонней гиперболы являются биссектрисы координатных углов. Если за оси координат принять асимптоты равносторонней гиперболы, то ее уравнение примет вид

$$xy = a^2/2. \qquad (3.45)$$

Уравнения директрис гиперболы (3.42) в декартовых координатах:

$$x = \pm a/\varepsilon. \qquad (3.46)$$

Для любой точки гиперболы $M(x;\,y)$ справедливо так называемое, директориальное свойство

$$r_1/d_1 = r_2/d_2 = \varepsilon, \qquad (3.47)$$

где d_1 — расстояние от точки $M(x;\,y)$ до директрисы $x = -c/a$; d_2 — расстояние от точки $M(x;\,y)$ до директрисы $x = c/a$. Кроме того, $r_1 = a - \varepsilon x$, $r_2 = a + \varepsilon x$.

Фокальным параметром p называется половина хорды, проведенной через фокус перпендикулярно действительной оси:

$$p = b^2/a. \tag{3.48}$$

Параметрические уравнения гиперболы, соответствующие (3.42), имеют следующий вид:

$$x = a \cdot cht = a \cdot \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad y = b \cdot sht = b \cdot \frac{e^t - e^{-t}}{2}. \tag{3.49}$$

Полярное уравнение одной ветви гиперболы (полюс находится в фокусе, полярная ось перпендикулярна директрисе и направлена в сторону, противоположную направлению к ближайшей от этого фокуса директрисе, p — фокальный параметр, определяемый формулой (2.51), $\varepsilon = c/a$ — эксцентриситет):

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \tag{3.50}$$

Уравнение касательной прямой к гиперболе (3.42) в точке $P_0(x_0; y_0)$:

$$xx_0/a^2 - yy_0/b^2 = 1. \tag{3.51}$$

Прямая $Ax + By + C = 0$ касается гиперболы (3.42), если

$$Aa^2 - Bb^2 = C^2. \tag{3.52}$$

Условие касания прямой $y = kx + m$ гиперболы (3.42):

$$k^2a^2 - b^2 = m^2. \tag{3.53}$$

Касательная к гиперболе в произвольной точке $M_0(x_0; y_0)$ является биссектрисой внутреннего угла между фокальными радиусами точки касания.

Отрезок касательной гиперболы между асимптотами делится в точке касания пополам.

Гиперболы, имеющие уравнения

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1 \text{ и } y^2/b^2 - x^2/a^2 = 1, \tag{3.54}$$

называются сопряженными. Они имеют общие асимптоты, действительная ось каждой из них равна мнимой оси другой.

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых расстояние до некоторой

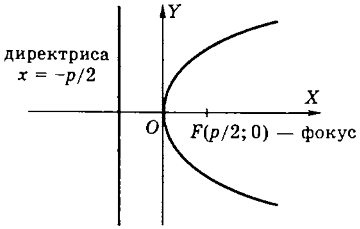


Рис. 3.12

фиксированной точки этой плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, не проходящей через фокус и называемой директрисой.

Чтобы записать уравнение параболы в каноническом виде, необходимо специальным образом выбрать систему декартовых координат. Ось OX пусть совпадает с перпендикуляром, опущенным из фокуса на директрису, начало координат пусть будет расположено на середине этого перпендикуляра. В этой системе координат (рис. 3.12) координаты фокуса $F(p/2;\, 0)$, а уравнение директрисы $x = -p/2$.

Записывая равенство величин, упоминаемых в определении параболы,

$$\sqrt{(x+p/2)^2+(y-y)^2} = -\sqrt{(x-p/2)^2+(y-0)^2}, \quad (3.55)$$

и последовательно избавляясь от радикалов, получим каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px. \quad (3.56)$$

Точка $O(0;\ 0)$ называется вершиной параболы. Величина p называется фокальным параметром или параметром параболы. Эксцентриситет параболы принимается равным единице $\varepsilon = 1$.

Параметрическое уравнение параболы, соответствующее (3.56),

$$y = t, \quad x = \frac{t^2}{2p}. \quad (3.57)$$

Полярное уравнение параболы (полюс находится в фокусе, полярная ось перпендикулярна директрисе и направлена в сторону, противоположную направлению от фокуса к директрисе, p — фокальный параметр):

$$\rho = \frac{p}{1-\cos\varphi}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \quad (3.58)$$

Касательная к параболе в точке $M_0(x_0;\, y_0)$ имеет уравнение

$$yy_0 = p(x + x_0). \tag{3.59}$$

Прямая $y = kx + b$ касается параболы (3.56), если

$$p = 2bk. \tag{3.60}$$

Касательная к параболе в произвольной точке является биссектрисой угла между фокальным радиусом точки касания и диаметром, проходящим через точку касания.

Геометрический смысл неравенства второй степени определяется следующей теоремой.

Теорема 3.4. Пусть уравнение второй степени $F(x, y) = 0$ определяет на плоскости некоторую кривую второго порядка. Тогда вся плоскость разбивается этой кривой на области: координаты любой точки каждой отдельной области удовлетворяют только одному неравенству: или $F(x, y) < 0$, или $F(x, y) > 0$.

3.4. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

3.15. Составить уравнение окружности с центром в точке $P_0(1; -2)$ и радиусом $R = 3$.

Решение. В соответствии с формулой (3.25) уравнение окружности запишется так: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2 = 9$.

3.16. Привести уравнение окружности $x^2 - 2x + y^2 + 6y = 6$ к каноническому виду. Определить координаты центра и радиус.

Решение. Используем формулы для полного квадрата суммы и разности и дополним до полного квадрата выражения

а) $x^2 - 2x = x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 = (x - 1)^2 - 1$;

б) $y^2 + 6y = y^2 - 2 \cdot y \cdot 3 + 3^2 - 3^2 = (y + 3)^2 - 9$.

Уравнение окружности можно переписать теперь следующим образом:

$$(x - 1)^2 - 1 + (y + 3)^2 - 9 = 6, \text{ или } (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4^2.$$

Центр окружности $O(1; -3)$, радиус $R = 4$.

3.17. Составить уравнение геометрического места точек на плоскости, каждая из которых вдвое ближе к точке $A(4; 0)$, чем к точке $B(1; 0)$.

Решение. Расстояние от текущей точки $M(x;\, y)$ искомой кривой до точки $A(4;\, 0)$ обозначим через

$$r_1 = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2},$$

до точки $B(1;\, 0)$ — через

$$r_2 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2}.$$

Из условия задачи следует, что $r_1 = 2r_2$, отсюда получаем

$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2}.$$

Возводя обе части последнего соотношения в квадрат, получим $(x-4)^2 + y^2 = 4((x-1)^2 + y^2)$. Раскроем скобки и приведем подобные члены: $x^2 + y^2 = (2\sqrt{3})^2$ — уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом $2\sqrt{3}$.

3.18. Найти эксцентриситет, координаты фокусов и вершин эллипса $x^2/25 + y^2/9 = 1$.

Решение. По условию $a^2 = 25$, $b^2 = 9$, отсюда $a = 5$, $b = 3$. В соответствии с обозначениями на рисунке 3.10 получаем $c = \sqrt{25-9} = 4$, $\varepsilon = 4/5 = 0{,}8$, $A_{1,2}(\mp 5;\, 0)$, $B_{1,2}(0;\, \mp 3)$, $F_{1,2}(\mp 4;\, 0)$.

3.19. Составить геометрическое место точек на плоскости, отношение расстояний которых до точки $F(4{,}5;\, 0)$ и до прямой $x = 0{,}5$ равно трем.

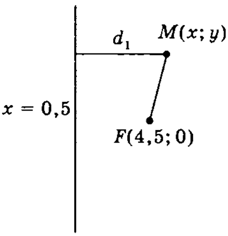


Рис. 3.13

Решение. Сделаем схематический чертеж (рис. 3.13).

Обозначим координаты текущей точки искомой кривой через $M(x;\, y)$. Тогда расстояние от точки $M(x;\, y)$ до прямой $x = 0{,}5$ равно $d_1 = |x - 0{,}5|$, а расстояние от точки $M(x;\, y)$ до точки $F(4{,}5;\, 0)$ равно

$$r_1 = \sqrt{(x-4{,}5)^2 + (y-0)^2}.$$

Из условия задачи следует $r_1 = 3d_1$, отсюда

$$\sqrt{(x-4{,}5)^2 + (y-0)^2} = 3\,|\,x - 0{,}5\,|.$$

После возведения обеих частей в квадрат и приведения подобных членов получим каноническое уравнение гиперболы: $x^2/2{,}25 - y^2/18 = 1$.

3.20. Составить геометрическое место точек, равноудаленных от точки $A(4; 1)$ и от оси ординат.

Решение. Исходя из определения параболы, заключаем, что искомое геометрическое место точек — парабола. Выберем специальным образом систему координат так, чтобы уравнение параболы имело канонический вид. Начало координат должно находиться на середине перпендикуляра, опущенного из фокуса на директрису, т. е. в точке $O'(2; 1)$. Координаты $X'O'Y'$ связаны с координатами XOY так: $x' = x - 2$, $y' = y - 1$. Параметр p равен расстоянию от фокуса до директрисы: $p = 4$. Уравнение параболы в системе координат $X'O'Y'$ $(y')^2 = 8x'$. Переходя к старым координатам XOY, получим $(y - 1)^2 = 8(x - 2)$.

3.21. Найти параметр p, координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $y^2 = 2px$, если известно, что касательная к этой параболе в некоторой точке имеет следующее уравнение в отрезках: $x/(-75) + y/15 = 1$.

Решение. Преобразуем уравнение касательной к параболе в точке $(x_0 = y_0{}^2/(2p);\ y_0)$ (формула (3.59)) к виду уравнения прямой в отрезках:

$$x/(-x_0) + y/(px_0/y_0) = 1.$$

Подставим в последнее соотношение абсциссу точки касания:

$$x/(-y_0{}^2/(2p)) + y/(y_0/2) = 1.$$

По условию $y_0/2 = 15$, $-y_0{}^2/(2p) = -75$, отсюда $y_0 = 30$, $p = 6$, уравнение директрисы $x = -p/2 = -3$, а координаты фокуса $F(p/2; 0) = F(3; 0)$.

3.22. Установить, что уравнение $\rho = 36/(4 - 5\cos\varphi)$ определяет гиперболу, и найти ее полуоси.

Решение. Разделим и числитель и знаменатель на 4. Преобразуем данное уравнение к виду

$$\rho = \frac{9}{\left(1 - \frac{5}{4}\cos\varphi\right)}.$$

Поскольку $\varepsilon = c/a = 5/4 > 1$, найденное уравнение определяет правую ветвь гиперболы. Пользуясь формулами (3.50), $b^2 = c^2 - a^2$ и равенством, определяющим эксцентриситет, получим систему уравнений для нахождения a и b. Имеем

$$\frac{c^2}{a^2}=\frac{25}{16}, \quad p=\frac{b^2}{a}=\frac{c^2-a^2}{a}=9, \quad a=16,$$

$$\varepsilon=\frac{5}{4}, \quad c=20, \quad b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{400-256}=12.$$

3.23. Составить полярное уравнение эллипса x^2/a^2+ $+\,y^2/b^2=1$ при условии, что направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится в центре эллипса.

Решение. Подставим в уравнение эллипса вместо x и y их выражения через полярный радиус ρ и угол φ.

Имеем

$$\frac{\rho^2\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\rho^2\sin^2\varphi}{b^2}=1, \rho^2\frac{b^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi}{a^2b^2}=1.$$

Заменим в числителе b^2 на a^2-c^2 и воспользуемся основным тригонометрическим тождеством

$$\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1, \quad \rho^2\frac{(a^2-c^2)\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi}{a^2b^2}=1.$$

$$\rho^2\frac{a^2-c^2\cos^2\varphi}{a^2b^2}=1, \quad \frac{\rho^2}{b^2}\left(1-\frac{c^2}{a^2}\cos^2\varphi\right)=1.$$

Подставим $\varepsilon^2=c^2/a^2$, тогда получим $\rho^2=b^2/(1-\varepsilon^2\cos^2\varphi)$.

3.24. В какой точке линейная функция $L(x,y)=\sqrt{2}x-y$ достигает максимума в области, описываемой неравенством $x^2/9+y^2/7\leqslant 1$?

Решение. Применяя теоремы 3.3 и 3.4, получим, что максимум $L(x,y)$ достигается в точке касания правой касательной к данному эллипсу, параллельной прямой $\sqrt{2}x-y=0$. Воспользуемся условием 3.39:

$$k=\sqrt{2}=\sqrt{2}x-2y, a=3, b=\sqrt{7}; 2\cdot 9+7=m^2.$$

Из двух значений $m=\pm 5$ выбираем $m=-5$, так как функция $L(x,y)=\sqrt{2}x-y$ достигнет максимума в данной области в направлении вектора $\vec{n}=\{\sqrt{2};-1\}$ на правой касательной $y=\sqrt{2}x-5$. Определим координаты точки касания, подставив в уравнение эллипса вместо y величину $\sqrt{2}x-5$. Отсюда

$$\frac{x^2}{9}+\frac{(\sqrt{2}x-5)^2}{7}=1,$$

$$25x^2-90\sqrt{2}x+162=0, \quad \Rightarrow x_1=x_2=1{,}8\sqrt{2}.$$

Подставим x_1 в уравнение касательной и найдем $y_1 = -1{,}4$. При этих x_1 и y_1 линейная функция достигает следующего максимального значения:

$$L_{\max}(1{,}8\sqrt{2},-1{,}4)=\sqrt{2}\cdot 1{,}8\cdot\sqrt{2}-(-1{,}4)=5.$$

3.5. ЗАДАЧИ

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

3.25. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;\,3)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=\{-2;5\}$.

3.26. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;\,2)$ параллельно вектору $\vec{a}=\{3;0\}$.

3.27. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $A(1;\,2)$ и $B(2;\,5)$.

3.28. Исходя из уравнения прямой в общем виде $3x + 2y - 8 = 0$, получить уравнение: 1) с угловым коэффициентом; 2) в отрезках; 3) в каноническом виде; 4) нормальное; 5) в параметрическом виде; 6) полярное.

3.29. Дана прямая $5x - 6y + 7 = 0$. Написать уравнение прямой: 1) параллельной данной и проходящей через точку $A(8;\,4)$; 2) перпендикулярной данной и проходящей через точку $B(1;\,-3)$.

3.30. Получить уравнение прямой, проходящей через точку $P(5;\,7)$ и точку пересечения прямых $x + 2y - 3 = 0$ и $2x - y + 4 = 0$.

3.31. Треугольник задан координатами своих вершин $A(1;\,2)$, $B(-3;\,5)$ и $C(4;\,-1)$. Составить уравнение медианы и высоты, выходящих из вершины A.

3.32. Треугольник задан координатами своих вершин $A(1;\,2)$, $B(4;\,6)$ и $C(7;\,10)$. Составить уравнение биссектрисы, выходящей из вершины A.

3.33. Найти точку A, симметричную точке $B(-2; 4)$ относительно прямой $3x - 5y + 1 = 0$.

3.34. В параллелограмме $ABCD$ известны уравнения сторон AD: $2x - y + 4 = 0$ и BC: $2x - y + 10 = 0$, а также уравнение диагонали AC: $x + y + 2 = 0$. Найти координаты вершин и точки пересечения диагоналей.

3.35. Найти площадь прямоугольного треугольника с вершиной в начале координат, две другие вершины которого являются точками пересечения прямой $2x - 3y - 6 = 0$ с осями координат.

3.36. В равнобедренном треугольнике ABC известны уравнения основания AC: $x + 2y = 0$ и боковой стороны AB: $x - y + 5 = 0$. Составить уравнение другой боковой стороны, если известно, что она проходит через точку $D(1; 5)$.

3.37. Даны уравнения биссектрис двух углов треугольника $x/2 + y/2 = 1$ и $(x + 3)/3 = (y + 3)/1$, а также координаты одной из вершин $A(2; 4)$. Составить уравнения сторон треугольника.

3.38. В треугольнике известны уравнения двух высот $(x - 1)/2 = (y - 3)/7$, $x = -14t + 10$, $y = -4t + 2$. Зная координаты одной из вершин треугольника $A(3; 4)$, найти уравнения сторон.

3.39. Составить уравнения прямых, перпендикулярных прямой $x/6 + y/2 = 1$ и отстоящих от точки $A(5; 4)$ на расстояние $\sqrt{10}$ единиц длины.

3.40. Определить, находится ли точка $M(1; 4)$ внутри треугольника, заданного уравнениями своих сторон $2x + 3y - 6 = 0$, $2x - 3y + 6 = 0$ и $y = -8$. Опишите область, заключенную внутри треугольника, включая границы, с помощью системы неравенств.

3.41. Найти наибольшее значение величины $L(x, y) = 3x + 4y + 8$ внутри области, определяемой системой неравенств $7x - 3y + 14 \geqslant 0$, $3x + y - 10 \leqslant 0$, $16x - y - 47 \geqslant 0$.

3.42. Найти наибольшее значение величины $L(x, y) = 30x + 29y$, которое она принимает внутри области, описываемой системой неравенств $2x + 5y \leqslant 70$, $2x + y \leqslant 29$, $8x + 9y \leqslant 144$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

3.43. Стороны треугольника заданы уравнениями:

$$a_i x + b_i y + c_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Доказать, что площадь треугольника S можно вычислить по формуле

$$S = \Delta^2/(2\Delta_1\Delta_2\Delta_3),$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

3.44. Площадь трапеции равна 2, а сумма диагоналей равна 4. Найти высоту трапеции.

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В задачах 3.45–3.47 привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду.

3.45. $9x^2 + 4y^2 - 36x + 8y + 5 = 0$.

3.46. $y = x^2 + 4x + 5$.

3.47. $4x^2 - 9y^2 + 8x - 36y - 68 = 0$.

В задачах 3.48–3.50 преобразовать полярные уравнения кривых второго порядка в канонические уравнения в декартовых координатах.

3.48. $\rho = \sin\varphi + \cos\varphi$.

3.49. $\rho = 9/(4 - 5\cos\varphi)$.

3.50. $\rho = 3/(2 + \sin\varphi)$.

3.51. Асимптоты гиперболы имеют уравнения $12y \pm 5x = 0$, а расстояние между фокусами равно 338. Составить каноническое уравнение гиперболы.

3.52. Составить уравнение параболы, имеющей директрису $x = -2$ и фокус $F(2; 4)$.

3.53. Составить уравнение эллипса, у которого малая полуось $a = 2$, а расстояние между фокусами равно 2.

3.54. Составить уравнение эллипса, если известны координаты его фокусов $F_1(-3; 0)$ и $F_2(3; 0)$, а также эксцентриситет $\varepsilon = 3/5$.

3.55. Составить и привести к каноническому виду уравнение линии, для которой отношение расстояний от каждой ее точки до точек $O(0; 0)$ и $A(0; 5)$ равно $9/4$.

3.56. Составить уравнение геометрического места точек, отношение расстояния которых до данной точки $B(0;\ 4)$ и до данной прямой $y - 1 = 0$ равно 2.

3.57. Найти площадь треугольника, образуемого осями координат и касательной к эллипсу $x^2/16 + y^2/3 = 1$ в точке $P(2;\ 2{,}25)$.

3.58. Найти расстояние между двумя касательными к эллипсу $x^2/24 + y^2/30 = 1$, параллельными прямой $2x - 4y + 23 = 0$.

3.59. Составить полярное уравнение гиперболы $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ при условии, что направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится в центре гиперболы $O(0;\ 0)$.

3.60. На плоскости произвольно выбраны две точки A и B. Найти геометрическое место точек, отстоящих от A на расстоянии вдвое меньше, чем от B.

3.61. Каково геометрическое место фокусов парабол, касающихся данной прямой и имеющих вершину в данной точке?

3.62. Окружность единичного радиуса катится по верхней стороне положительной ветви гиперболы $y = 1/x$. Будет ли линия, которую описывает центр окружности, ветвью какой-либо гиперболы?

ГЛАВА 4

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

4.1. ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ

В декартовой прямоугольной системе координат общее уравнение плоскости имеет вид

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{4.1}$$

При этом вектор, перпендикулярный плоскости, носит название нормального вектора и имеет координаты

$$\vec{n} = (A, B, C). \tag{4.2}$$

К общему уравнению плоскости можно прийти, записав условие ортогональности вектора $\vec{n} = (A; B; C)$ и текущего вектора $\overline{P_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$:

$$\begin{gathered} A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \\ \Rightarrow Ax + By + Cz + D = 0, \text{ где } D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельной двум неколлинеарным векторам $\vec{a} = (l_1, m_1, n_1)$ и $\vec{b} = (l_2, m_2, n_2)$, имеет вид с учетом условия компланарности трех векторов — текущего вектора $\overline{P_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ и векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.4}$$

Уравнение плоскости, проходящей через две данные точки $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и параллельной вектору

$\vec{a} = (l, m, n)$, также записывается с учетом условия компланарности трех векторов:

текущего вектора —

$$\overline{P_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0),$$

вектора, принадлежащего плоскости, —

$$\overline{P_0P_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0),$$

вектора $\vec{a}$ —

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.5)$$

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и $P_2(x_2, y_2, z_2)$, получается из условия компланарности трех векторов: текущего $\overline{P_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ и двух векторов, принадлежащих плоскости,

$\overline{P_0P_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ и $\overline{P_0P_2} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.6)$$

Нормальное уравнение плоскости имеет следующий вид:

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0. \qquad (4.7)$$

Параметр p — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормального вектора (4.2). Нормальное уравнение плоскости можно получить из общего уравнения (4.1) путем умножения всех его членов на множитель $\pm 1/\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, знак которого должен быть противоположен знаку свободного члена D.

Если в общем уравнении плоскости (4.1) ни один из коэффициентов A, B, C, D не равен нулю, то оно может быть преобразовано к виду уравнения плоскости в отрезках

$$x/a + y/b + z/c = 1, \quad a = -D/A, \quad b = -D/B, \quad c = -D/C. \qquad (4.8)$$

Здесь a, b и c — длины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат (считая каждый отрезок от начала координат), взятые со знаком плюс, если соответствующая координата пересечения положительна, и со знаком минус, если она отрицательна.

Расстояние от точки $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ до плоскости, заданной:

а) общим уравнением (4.1), вычисляется по формуле

$$d = |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D| \,/\, \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}; \tag{4.9}$$

б) нормальным уравнением (4.7), вычисляется по формуле

$$d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p|. \tag{4.10}$$

Геометрический смысл неравенства первой степени с тремя неизвестными определяется следующими теоремами.

Теорема 4.1. Всякая плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ разбивает трехмерное пространство на два полупространства. Для координат всех точек $M(x,\ y,\ z)$, лежащих в одном полупространстве, выполняется неравенство $Ax + By + Cz + D > 0$, для координат всех точек другого полупространства справедливо противоположное неравенство $Ax + By + Cz + D < 0$.

Теорема 4.2. Пусть плоскость задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Если отложить нормальный вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ от любой точки $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ этой прямой $\overline{P_0M} = \vec{n}$, то конец $M(x_0 + A, y_0 + B, z_0 + C)$ отложенного вектора будет находиться в положительном полупространстве от данной прямой, т. е. $A(x_0 + A) + B(y_0 + B) + C(z_0 + C) > 0$.

Теорема 4.3. При параллельном переносе плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ в направлении нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ величина $L(x,\ y,\ z) = Ax + By + Cz + D$ возрастает. При переносе этой прямой в противоположном направлении $L(x,\ y,\ z)$ убывает.

Общими уравнениями прямой в пространстве называются уравнения:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \tag{4.11}$$

которые описывают множество точек пересечения двух непараллельных плоскостей.

Канонические уравнения прямой

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \tag{4.12}$$

можно получить, записав условие коллинеарности вектора $\vec{a}=(l, m, n)$, называемого направляющим вектором прямой, и текущего вектора $\overline{P_0M}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, который определяется заданной точкой прямой $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и точкой прямой $M(x, y, z)$ с переменными координатами. Аналогично можно получить канонические уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и $Q(x_1, y_1, z_1)$,

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}; \tag{4.13}$$

здесь направляющий вектор прямой имеет координаты

$$\vec{a}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0).$$

Параметрические уравнения прямой, имеющей направляющий вектор $\vec{a}=(l, m, n)$,

$$x=x_0+lt,\quad y=y_0+mt,\quad z=z_0+nt, \tag{4.14}$$

получаются из канонических уравнений (4.12) приравниванием равенства отношений переменному параметру t:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t.$$

Условия взаимного расположения плоскостей и прямых, в частности условия перпендикулярности и параллельности, получаются путем рассмотрения соответствующих углов между векторами, которые определяют эти геометрические объекты.

Уравнение пучка всех плоскостей, проходящих через прямую пересечения двух данных плоскостей,

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ и } A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

имеет следующий вид:

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0. \tag{4.15}$$

Расстояние от точки $P_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямой, заданной уравнениями (4.12), вычисляется по формуле

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ m & k \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1-z_0 & x_1-x_0 \\ k & l \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ l & m \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \quad (4.16)$$

Расстояние между двумя прямыми

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2},$$

вычисляется по формуле

$$d=\left|\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}}\right|. \quad (4.17)$$

Многие задачи на прямую и плоскость в пространстве решаются с учетом взаимного расположения векторов, определяющих эти геометрические объекты, поэтому прежде чем приступить к рассмотрению приведенных ниже решений, рекомендуется повторить условия коллинеарности, ортогональности двух векторов и условие компланарности трех векторов.

4.2. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

4.1. Составить уравнение плоскости, которая перпендикулярна вектору $\vec{n}=(8,2,1)$ и проходит через точку $P_0(3, -5, 4)$.

Решение. Выпишем координаты текущего вектора: $\overline{P_0M}=(x-3, y+5, z-4)$. Запишем в координатной форме условие ортогональности векторов $\vec{n}$ и $\overline{P_0M}$:

$$8(x-3)+2(y+5)+1(z-4)=0,$$
$$8x+2y+z-18=0.$$

4.2. Две плоскости заданы своими общими уравнениями:

$$5x-4y+z-1=0,$$
$$10x+2y+4z-7=0.$$

Определить величину двугранного угла между этими плоскостями.

Решение. Двугранный угол между плоскостями измеряется, как известно, линейным углом, а последний равен углу между векторами, перпендикулярными плоскостям. Вектор, перпендикулярный первой плоскости, имеет координаты $\vec{n}_1 = (5, -4, 1)$, ко второй плоскости — $\vec{n}_2 = (10, 2, 4)$. Воспользуемся формулой для косинуса угла между двумя векторами

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{5 \cdot 10 + (-4) \cdot 2 + 1 \cdot 4}{\sqrt{5^2 + (-4)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{10^2 + 2^2 + 1^2}} \cong 0{,}69,$$

$$\varphi = \arccos(0{,}69) \cong 52°.$$

4.3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $P_0(2, -1, 2)$, $P_1(4, 3, 0)$, $P_2(5, 2, 1)$.

Решение. Составим координаты текущего вектора плоскости $\overline{P_0M} = (x-2, y+1, z-2)$ и векторов

$$\overline{P_0P_1} = (2, 4, -2), \overline{P_0P_2} = (3, 3, -1).$$

Для этих векторов справедливо условие компланарности:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Приведем уравнение плоскости к общему виду, для чего вычислим определитель, пользуясь правилом разложения по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (x-2)\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2x - 4y - 6z + 4 = 0, \quad x - 2y - 3z + 2 = 0.$$

4.4. Дано уравнение плоскости в общем виде $2x - 2y + z - 20 = 0$.

Преобразовать это уравнение: 1) в уравнение плоскости в отрезках; 2) в нормальное уравнение плоскости.

Решение.

1) вычислим величины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат, считая от начала координат. Полагая $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, получим $2x_0 - 2 \cdot 0 + 0 - 20 = 0$, $x_0 = 10 = a$. Пусть теперь $x_1 = 0$, $z_1 = 0$, тогда $2 \cdot 0 - 2 \cdot y_1 + 0 - 20 = 0$, $y_1 = -10 = b$. Наконец, найдем отрезок, отсекаемый плоскостью на оси OZ, для чего положим $x_2 = 0$, $y_2 = 0$, $2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + z_2 - 20 = 0$, $z_2 = 20 = c$. Уравнение плоскости в отрезках имеет вид

$$x/10 + y/(-10) + z/20 = 1;$$

2) чтобы записать нормальное уравнение плоскости, вычислим $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3.$

Поскольку знак у свободного члена отрицательный, то нормальное уравнение имеет вид

$$-2/3 \cdot x + 2/3 \cdot y - 1/3 \cdot z + 20/3 = 0.$$

4.5. Определить расстояние от точки $P_0(3, -7, 2)$ до плоскости

$$2x - y + 2z + 1 = 0.$$

Решение. Воспользуемся формулой (4.9)

$$d = |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D| / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} =$$
$$= |2 \cdot 3 - 1 \cdot (-7) + 2 \cdot 2 + 1| / \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 6.$$

4.6. Прямая задана своими общими уравнениями:

$$\begin{cases} 3x - 4y - z - 1 = 0, \\ x + 2y + 4z - 5 = 0. \end{cases}$$

Получить из этих уравнений: 1) канонические уравнения; 2) параметрические уравнения; 3) найти расстояние от точки $A(3{,}2;\ 4{,}4;\ -1)$ до данной прямой.

Решение.

1) найдем координаты двух точек, принадлежащих прямой, для этого полагаем вначале $z_0 = 0$ и подставляем его в уравнение прямой:

$$\begin{cases} 3x_0 - 4y_0 - 0 - 1 = 0, \\ x_0 + 2y_0 + 4 \cdot 0 - 5 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_0 - 4y_0 = 1, \\ x_0 + 2y_0 = 5, \end{cases} \Rightarrow x_0 = 2{,}2; \quad y_0 = 1{,}4.$$

Координаты первой точки прямой равны $P_0(2,2;\ 1,4;\ 0)$.

Теперь положим, например, $z_1 = 1$, и аналогично найдем координаты второй точки прямой $P_1(x_1, y_1, z_1)$:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4y_1 - 1 - 1 = 0, \\ x_1 + 2y_1 + 4\cdot 1 - 5 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 - 4y_1 = 2, \\ x_1 + 2y_1 = 1, \end{cases} \Rightarrow x_1 = 0{,}8; \quad y_1 = 0{,}1,$$

тогда координаты точки $P_1(0{,}8;\ 0{,}1;\ 1)$.

Составим координаты текущего вектора прямой

$$\overline{P_0M} = (x - 2{,}2;\ y - 1{,}4;\ z - 0)$$

и вектора $\overline{P_0P_1} = (-1{,}4; -1{,}3; 1)$, принадлежащего прямой. Запишем условие коллинеарности векторов $\overline{P_0M}$ и $\overline{P_0P_1}$:

$$(x - 2{,}2)/(-1{,}4) = (y - 1{,}4)/(-1{,}3) = z/1.$$

Умножая последние уравнения на $(-0{,}1)$, получим канонические уравнения прямой в следующем виде:

$$(x - 2{,}2)/14 = (y - 1{,}4)/13 = z/(-10);$$

2) чтобы найти параметрические уравнения прямой, положим

$$(x - 2{,}2)/14 = (y - 1{,}4)/13 = z/(-10) = t,$$
$$x = 2{,}2 + 14t, \quad y = 1{,}4 + 13t, \quad z = -10t;$$

3) расстояние от точки A до прямой найдем по формуле (4.16). В данном случае

$$x_1 = 3{,}2, \quad y_1 = 4{,}4, \quad z_1 = -1,$$
$$x_0 = 2{,}2, \quad y_0 = 1{,}4, \quad z_0 = 0,$$
$$l = 14, \quad m = 13, \quad n = -10,$$

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 4{,}4-1{,}4 & -1-0 \\ 13 & -10 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -1-0 & 3{,}2-2{,}2 \\ -10 & 14 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 3{,}2-2{,}2 & 4{,}4-1{,}4 \\ 14 & 13 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{14^2 + 13^2 + (-10)^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1146}}{\sqrt{465}} \cong 1{,}57.$$

4.7. Составить уравнение прямой, проходящей через данную точку $P_0(3,\ 4,\ 2)$ и перпендикулярной плоскости $8x - 4y + 5z - 4 = 0$.

Решение. Найдем координаты текущего вектора искомой прямой $\overline{P_0M} = (x - 3, y - 4, z - 5)$. Поскольку прямая перпендикулярна плоскости, то направляющим вектором прямой является нормальный вектор плоскости $\vec{n}=(8,4,5)$. Запишем условие коллинеарности векторов $\overline{P_0M}$ и $\vec{n}$, получим уравнение прямой:

$$(x-3)/8=(y-4)/(-4)=(z-2)/5.$$

4.8. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P_0(4,-3,2)$ и параллельной данной прямой:

$$\begin{cases} 2x-y-z+1=0, \\ 3x+2y+z-8=0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Определим координаты направляющего вектора прямой, для чего найдем векторное произведение векторов, перпендикулярных плоскостям $2x-y-z+1=0$ и $3x+2y+z-8=0$. Имеем $\vec{n}_1=(2,-1,-1)$, $\vec{n}_2=(3,2,1)$:

$$\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}-5\vec{j}+7\vec{k},$$

$\vec{a}=(1,-5,7)$ — направляющий вектор данной в условии прямой, а значит, он является также направляющим вектором искомой прямой. Уравнение искомой прямой выражает собой условие коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\overline{P_0M}$:

$$(x-4)/1=(y+3)/(-5)=(z-2)/7.$$

4.9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $(x-1)/2=(y-3)/4=z/(-1)$ и точку $P_1(1,5,2)$.

Р е ш е н и е. Запишем условие компланарности трех векторов: текущего $\overline{P_0M}=(x-1,y-3,z)$, вектора $\overline{P_0P_1}=(0,2,2)$, принадлежащего плоскости, и направляющего вектора данной прямой $\vec{a}=(2,4,-1)$, параллельного данной плоскости:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}=(x-1)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}-(y-3)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=$$

$$=-10(x-1)+4(y-3)-4z=0, \quad 5x-2y+2z+1=0$$

— искомое общее уравнение плоскости.

4.10. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(4, 2, 5)$, $A_2(0, 7, 2)$, $A_3(0, 2, 7)$, $A_4(1, 5, 0)$. Найти: 1) уравнение плоскостей $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$; 2) угол между ребром A_1A_3 и гранью $A_1A_2A_4$; 3) расстояние от вершины A_3 до грани $A_1A_2A_4$; 4) кратчайшее расстояние между прямыми A_1A_2 и A_3A_4; 5) уравнение высоты, опущенной из вершины A_3 на грань $A_1A_2A_4$.

Решение.

1) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ получим из условия компланарности трех векторов: текущего

$$\overline{A_1M} = (x-4, y-2, z-5)$$

и двух векторов, принадлежащих данной плоскости,

$$\overline{A_1A_2} = (-4, 5, -3) \text{ и } \overline{A_1A_3} = (-4, 0, 2),$$

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-2 & z-5 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (x-4)\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} + (z-5)\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 10x + 20y + 20z - 180 = 0, \quad x + 2y + 2z - 18 = 0$$

— искомое общее уравнение $A_1A_2A_3$. Аналогично получим уравнение плоскости $A_1A_2A_4$ из условия компланарности трех векторов:

$$\overline{A_1M} = (x-4, y-2, z-5), \quad \overline{A_1A_2} = (-4, 5, -3), \quad \overline{A_1A_4} = (-3, 3, -5),$$

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-2 & z-5 \\ -4 & 5 & -3 \\ -3 & 3 & -5 \end{vmatrix} = (x-4)\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} + (z-5)\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -16x - 11y + 3z + 71 = 0$$

— искомое общее уравнение $A_1A_2A_4$;

2) угол между ребром A_1A_3 и гранью $A_1A_2A_4$ выразим через угол между вектором

$$\overline{A_1A_3} = (-4, 0, 2) \text{ и } \vec{n} = (-16, -11, 3)$$

— нормальным вектором плоскости

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n} \cdot \overline{A_1A_3}}{|\vec{n}| \cdot |\overline{A_1A_3}|} = \frac{(-16)\cdot(-4) + (-11)\cdot 0 + 3\cdot 2}{\sqrt{(-16)^2 + (-11)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 2^2}} =$$

$$= \frac{70}{\sqrt{386} \cdot \sqrt{20}} \approx 0{,}7967, \quad \varphi \approx 41°.$$

Угол между ребром A_1A_3 и гранью $A_1A_2A_4$ $\psi = 180° - 41° \cong 139°$;

3) расстояние от вершины A_3 до грани $A_1A_2A_4$ вычислим по формуле (4.9)

$$d = |(-16)\cdot 0 + (-11)\cdot 2 - 3\cdot 7 - 61| / \sqrt{(-16)^2 + (-11)^2 + 3^2} \cong 3{,}56;$$

4) чтобы найти кратчайшее расстояние между прямыми A_1A_2 и A_3A_4, выпишем вначале уравнения этих прямых:

$$(x-4)/(-4) = (y-2)/5 = (z-5)/(-3),$$
$$(x-0)/1 = (y-2)/3 = (z-7)/(-7),$$

а затем воспользуемся формулой (4.17). Имеем

$$x_1 = 4,\ \ y_1 = 2,\ \ z_1 = 5,$$
$$x_2 = 0,\ \ y_2 = 2,\ \ z_2 = 7,$$
$$l_1 = -4,\ \ m_1 = 5,\ \ n_1 = -3,$$
$$l_2 = 1,\ \ m_2 = 3,\ \ n_2 = -7.$$

$$d = \left| \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}} \right| =$$

$$= \left| \frac{\begin{vmatrix} 0-4 & 2-2 & 7-5 \\ -4 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & -7 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -7 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}^2}} \right| = \left| \frac{\begin{vmatrix} -4 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & -7 \end{vmatrix}}{\sqrt{1926}} \right| \cong$$

$$\cong 70/43{,}886 \cong 1{,}595;$$

5) уравнение высоты из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$ получим из условия коллинеарности текущего вектора искомой прямой $\overline{A_4M} = (x-1, y-5, z)$ и нормального вектора плоскости $\vec{n} = (1, 2, 2)$,

$$(x-1)/1 = (y-5)/2 = z/2.$$

4.11. Составить уравнение плоскости, равноудаленной от точек $B(4, 1, 0)$ и $C(2, 0, 3)$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулами расстояния между точками и найдем координаты точки $A(0, 0, z)$, равноудаленной от двух данных точек, и приравняем величины $|AB| = |AC|$.

Имеем

$$|AB| = \sqrt{(4-0)^2 + (1-0)^2 + (0-z)^2},$$

$$|AC| = \sqrt{(2-0)^2 + (0-0)^2 + (3-z)^2},$$

$$17 + z^2 = 4 + (3-z)^2, \quad z = -2/3.$$

Уравнение искомой плоскости получим из условия ортогональности текущего вектора плоскости $\overline{AM} = (x, y, z + 2/3)$ и вектора $\overline{BC} = (-2, -1, 3)$:

$$-2 \cdot x - 1 \cdot y + 3 \cdot (z + 2/3) = 0, \ -2x - y + 3z + 2 = 0.$$

4.12. Найти точку пересечения прямой

$$(x - 2)/1 = (y - 3)/1 = (z + 1)/4$$

и плоскости

$$x + 2y + 3z - 10 = 0.$$

Р е ш е н и е. Выпишем параметрические уравнения данной прямой (формула (4.14)):

$$x = 2 + t, \ \ y = 3 + t, \ \ z = -1 + 4t.$$

Подставим координаты точек прямой в уравнение плоскости:

$$(2 + t) + 2(3 + t) + 3(-1 + 4t) - 10 = 0, t = 1/3.$$

Искомые координаты точки пересечения получаются в результате подстановки найденного $t = 1/3$ в параметрические уравнения прямой

$$x_0 = 2 + t = 7/3, \ \ y_0 = 3 + t = 10/3, \ \ z_0 = -1 + 4t = 1/3,$$

точка пересечения имеет координаты $P(7/3, 10/3, 1/3)$.

4.13. Найти координаты точки A', симметричной точке $A(0, -3, -2)$ относительно прямой $(x - 1)/3 = (y - 2)/4 = (z - 5)/1$.

Р е ш е н и е. Составим уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно данной прямой, воспользовавшись условием ортогональности текущего вектора $\overline{AM} = (x, y+3, z+2)$ и направляющего вектора прямой $\bar{a} = (3, 4, 1)$.

Имеем

$$3 \cdot x + 4 \cdot (y + 3) + 1 \cdot (z + 2) = 0,$$
$$3x + 4y + z + 14 = 0.$$

Аналогично тому, как это было сделано в задаче 4.12, найдем координаты точки пересечения прямой и плоскости,

$$x = 1 + 3t, \quad y = 2 + 4t, \quad z = 5 + t,$$
$$3(1 + 3t) + 4 \cdot (2 + 4t) + (5 + t) + 14 = 0, \quad t = -15/13,$$
$$x_0 = 1 + (-15/13) = -2/13, \quad y_0 = 2 + 4 \cdot (-15/13) = -34/13,$$
$$z_0 = 5 + (-15/13) = 50/13, \quad P(-32/13, -34/13, 50/13).$$

С помощью формул деления отрезка в данном отношении определим координаты точки A' из условия того, что P есть середина отрезка AA':

$$x_P = (x_A + x_{A'})/2, \quad y_P = (y_A + y_{A'})/2, \quad z_P = (z_A + z_{A'})/2,$$
$$x_{A'} = -64/13, \quad y_{A'} = -29/13, \quad z_{A'} = 126/13.$$

4.14. Найти координаты точки A', симметричной точке $A(2, 0, 2)$ относительно плоскости $4x + 6y + 4z - 50 = 0$.

Р е ш е н и е. Составим уравнение прямой, проходящей через точку A перпендикулярно данной плоскости:

$$(x - 2)/4 = (y - 0)/6 = (z - 2)/4.$$

Приведем уравнение прямой к параметрическому виду

$$(x - 2)/4 = (y - 0)/6 = (z - 2)/4 = t,$$
$$x = 2 + 2t, \quad y = 3t, \quad z = 2 + 2t.$$

Подобно тому, как это было сделано в задаче 4.12, найдем координаты точки пересечения найденной прямой и данной плоскости:

$$4 \cdot (2 + 2t) + 6 \cdot (3t) + 4 \cdot (2 + 2t) - 50 = 0, \quad t = 1,$$
$$x_P = 4, \quad y_P = 3, \quad z_P = 4.$$

С помощью формул деления отрезка в данном отношении определим координаты точки A' из условия того, что P есть середина отрезка AA':

$$x_P = (x_A + x_{A'})/2,\ \ y_P = (y_A + y_{A'})/2,\ \ z_P = (z_A + z_{A'})/2,$$
$$x_{A'} = 6,\ \ y_{A'} = 6,\ \ z_{A'} = 6.$$

4.15. Пусть $k = 2$ коэффициент гомотетии с центром в начале координат. Верно ли утверждение, что точка $A(2, 1, -1)$ принадлежит образу плоскости $2x + 3y + z - 3 = 0$?

Решение.

Формулы преобразования подобия с коэффициентом $k = 2$ имеют вид

$$x' = 2x,\ \ y' = 2y,\ \ z' = 2z.$$

Чтобы получить образ плоскости $2x + 3y + z - 3 = 0$, сделаем замену

$$x = x'/2,\ \ y = y'/2,\ \ z = z'/2.$$

После этого получим

$$2x' + 3y' + z' - 6 = 0.$$

Поскольку $2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + (-1) - 6 = 0$, следовательно, точка $A(2, 1, -1)$ принадлежит образу плоскости.

4.3. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Цилиндрической поверхностью называется поверхность, описываемая прямой (образующей), параллельной данному направлению и пересекающей данную линию (направляющую).

Если образующие параллельны оси OZ, то уравнение цилиндрической поверхности может быть представлено уравнением

$$F(x, y) = 0, \ \text{или} \ \ y = f(x), \ \text{или} \ \ x = \varphi(y). \qquad (4.19)$$

Если образующие параллельны оси OY, то уравнение цилиндрической поверхности может быть представлено уравнением

$$G(x, z) = 0, \quad \text{или} \quad z = r(x), \quad \text{или} \quad x = \varphi(z). \qquad (4.20)$$

Если образующие параллельны оси OX, то уравнение цилиндрической поверхности может быть представлено уравнением

$$H(y, z) = 0, \quad \text{или} \quad z = q(y), \quad \text{или} \quad y = \omega(z). \qquad (4.21)$$

ПОВЕРХНОСТЬ ВРАЩЕНИЯ

Пусть в плоскости XOZ задана своим уравнением линия $F(x, y) = 0$. Чтобы получить уравнение поверхности, образованной вращением этой линии вокруг оси OX, необходимо заменить z на $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$. Уравнение поверхности в таком случае принимает вид $F(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$. В таблице 4.1 приведены различные уравнения поверхностей вращения.

Таблица 4.1

Уравнение линии	Ось вращения	Уравнение поверхности вращения
$\begin{cases} F(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$	OX	$F(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$ (4.22)
$\begin{cases} F(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$	OZ	$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$ (4.23)
$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$	OX	$F(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$ (4.24)
$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$	OY	$F(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$ (4.25)
$\begin{cases} F(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$	OZ	$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$ (4.26)
$\begin{cases} F(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$	OY	$F(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0$ (4.27)

ОСНОВНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ИХ КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Сфера с центром в начале координат и радиусом R описывается уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \qquad (4.28)$$

Эллипсоид с центром в начале координат и главными осями, принадлежащими осям координат, описывается уравнением

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1. \tag{4.29}$$

Однополостный гиперболоид описывается уравнением

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1. \tag{4.30}$$

На рисунке 4.1 показан однополостный гиперболоид вращения относительно OZ $(a = b)$.

Двуполостный гиперболоид описывается уравнением

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = -1. \tag{4.31}$$

На рисунке 4.2 изображен двуполостный гиперболоид вращения относительно OZ $(a = b)$.

Эллиптический параболоид описывается уравнением

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 2z. \tag{4.32}$$

На рисунке 4.3 показан эллиптический гиперболоид вращения относительно OZ $(a = b)$.

Конус второго порядка описывается уравнением

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0. \tag{4.33}$$

На рисунке 4.4 изображен конус вращения относительно OZ $(a = b)$.

Гиперболический параболоид описывается уравнением

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 2z. \tag{4.34}$$

Гиперболический параболоид получается движением образующей параболы $z = -y^2/2b^2$ по направляющей параболе $z = x^2/2a^2$ (вершина образующей параболы скользит по направляющей). Образующую и направляющую параболы можно поменять местами. Результат будет таким же.

Геометрический смысл неравенства второй степени в трехмерном пространстве для поверхностей (4.19)–(4.34) определяется теоремой, аналогичной теореме 3.4, в которой слово «кривая» следует заменить на «поверхность».

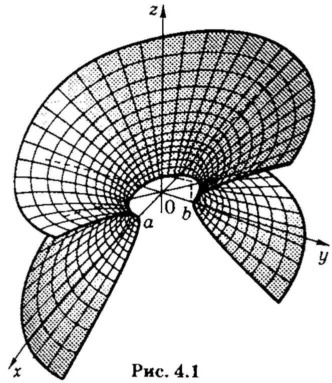


Рис. 4.1

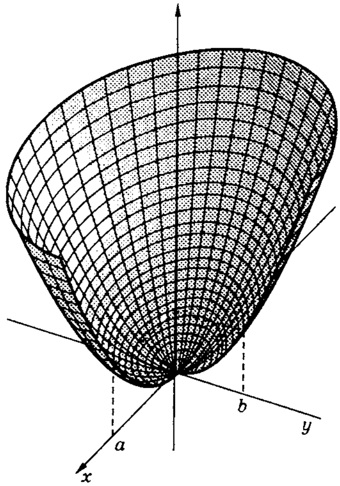


Рис. 4.3

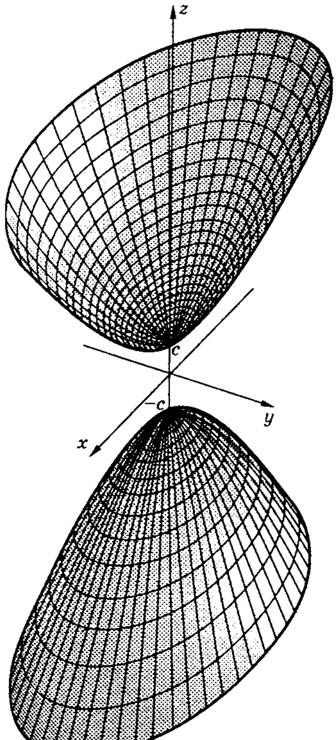


Рис. 4.2

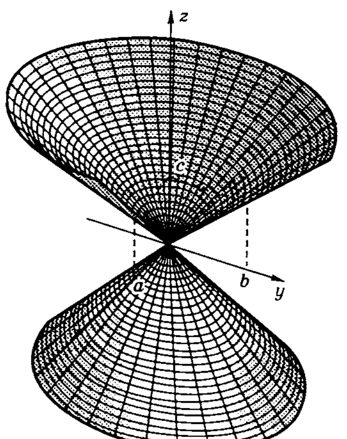


Рис. 4.4

4.4. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

4.16. Определить, какой геометрический образ соответствует в пространстве уравнению $x^2 + y^2 = 9$.

Решение. Поскольку данное уравнение не содержит z, то это уравнение определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси OZ.

4.17. Сфера проходит через точку $A(4, 2, 2)$ и имеет центр в точке $C(1, -1, -1)$. Составить ее уравнение.

Решение. Уравнение сферы с центром в начале координат имеет вид

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = R^2.$$

Поскольку центр данной сферы расположен в точке с координатами $C(1, -1, -1)$, то естественно совершить параллельный перенос системы координат так, чтобы новое начало находилось в точке C. Тогда старые координаты x, y, z будут связаны с новыми x', y', z' следующим образом:

$$x' = x - 1, \quad y' = y + 1, \quad z' = z + 1.$$

Отсюда в старых координатах уравнение сферы имеет вид

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = R^2.$$

Чтобы найти величину радиуса, подставим в уравнение сферы координаты точки $A(4, 2, 2)$:

$$(4-1)^2 + (2+1)^2 + (2+1)^2 = R^2, \quad R^2 = 27, \quad R = \sqrt{27}.$$

4.18. Какую поверхность определяет уравнение

$$x^2 - 2x - 3y^2 + 12y + 2z^2 + 12z - 11 = 0?$$

Решение. Выделим полные квадраты по x, y, z:

$$\begin{aligned}
&x^2 - 2x + 1^2 - 1^2 - 3(y^2 - 4y + 2^2 - 2^2) + \\
&\quad + 2(z^2 + 6z + 3^2 - 3^2) - 11 = 0, \\
&(x - 1)^2 - 3(y - 2)^2 + 2(z + 3)^2 = 18, \\
&(x - 1)^2/18 - (y - 2)^2/6 + (z + 3)^2/9 = 1
\end{aligned}$$

— уравнение однополостного гиперболоида с центром в точке $O'(1, 2, -3)$.

4.19. Какую поверхность определяет уравнение

$$x^2 + 2x + y^2 - 2y - 2z - 2 = 0?$$

Решение. Выделим полные квадраты по x, y:

$$x^2 + 2x + 1^2 - 1^2 + y^2 - 2y + 1^2 - 1^2 - 2(z + 1) = 0,$$
$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2(z + 2).$$

Совершим параллельный перенос системы координат так, чтобы новое начало находилось в точке $O'(-1, 1, -2)$, тогда старые координаты x, y, z будут связаны с новыми x', y', z' следующим образом:

$$x' = x + 1, \quad y' = y - 1, \quad z' = z + 2.$$

Отсюда в новых координатах уравнение поверхности имеет вид

$$(x')^2 + (y')^2 = 2z'.$$

Получили каноническое уравнение эллиптического параболоида.

4.20. Дано уравнение линии, лежащей в плоскости XOY, $4x^2 + py^2 = 1$ и координаты точки $A(3/2, 1, 1)$. Требуется: 1) составить уравнение поверхности, образованной вращением этой линии вокруг оси OX; 2) подобрать значение параметра p так, чтобы точка A лежала на поверхности вращения.

Решение.

1) поскольку линия вращается вокруг оси OX, то для получения уравнения поверхности вращения необходимо в соотношении $4x^2 + py^2 = 1$ заменить y на $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$. Имеем

$$4x^2 + p(\pm\sqrt{y^2 + z^2})^2 = 1, \quad 4x^2 + p(y^2 + z^2) = 1;$$

2) подставим вместо x, y, z координаты точки A и найдем значение параметра p:

$$4 \cdot (3/2)^2 + p(1^2 + 1^2) = 1, \quad p = -4.$$

Уравнение поверхности вращения после замены в нем p на -4 принимает вид

$$4x^2 - 4 \cdot (y^2 + z^2) = 1.$$

Последнее можно переписать так:

$$y^2/0{,}25 + z^2/0{,}25 - x^2/0{,}25 = -1.$$

Получили уравнение двуполостного гиперболоида вращения.

4.21. Установить, что плоскость $z-2=0$ пересекает эллипсоид $x^2/12+y^2/4+z^2/16=1$ по эллипсу. Составить его уравнение и найти полуоси и вершины.

Решение. Подставим в уравнение поверхности вместо z^2 число 4,

$$x^2/12+y^2/4+4/16=1,$$
$$x^2/12+y^2/4=3/4,$$
$$x^2/3^2+y^2/3=1,$$

отсюда эллипс имеет полуоси $a=3, b=\sqrt{3}$.

4.22. Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точки $A(-2, 0, 0)$ и от плоскости $x=2$.

Решение. Приравняем расстояния от точки до плоскости и между двумя точками:

$$|1\cdot x+0\cdot y+0\cdot z-2|/\sqrt{1^2+0^2+0^2}=$$
$$=\sqrt{(x+2)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}.$$

Возведем обе части равенства в квадрат:

$$(x-2)^2=(x+2)^2+y^2+z^2,\ \ x=-(y^2+z^2)/8.$$

Если заменить $x=-x'$, $y=y'$, $z=z'$, то в новых координатах уравнение примет вид канонического уравнения эллиптического параболоида:

$$2x'=((y')^2+(z')^2)/4.$$

4.23. В какой точке линейная функция $L(x, y, z)=x+$ $+y+z$ достигает максимума в области, описываемой неравенством $x^2+y^2+z^2\leqslant 4$?

Решение. При перемещении плоскости $x+y+z=0$ в направлении нормального вектора $\vec{n}=(1,1,1)$ функция $L(x, y, z)$ возрастает и достигает максимума в точке касания, которая находится на пересечении прямой $x=t, y=t,$ $z=t$ и сферы $x^2+y^2+z^2=4$,

$$t=\sqrt{4/3},\ \ P(\sqrt{4/3},\sqrt{4/3},\sqrt{4/3}),$$
$$L_{\max}=L(\sqrt{4/3},\sqrt{4/3},\sqrt{4/3})=3\cdot\sqrt{4/3}=2/\sqrt{3}.$$

4.5. ЗАДАЧИ

ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

4.24. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1, 2, -3)$ параллельно данной плоскости $3x - 8y + 4z - 1 = 0$.

4.25. Составить уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $A(0, 0, 0)$, $B(1, 4, 0)$ и $C(3, -2, 1)$.

4.26. Составить уравнение плоскости, проходящей через две точки $A(3, 5, 4)$, $B(5, 8, 3)$ параллельно вектору $\vec{a} = (-2, 4, 5)$.

4.27. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, 2, -3)$, перпендикулярно плоскости $x + 4y - 5z - 1 = 0$.

4.28. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, 2, 3)$ и параллельной данной прямой $x = 2t - 1$, $y = 4t + 2, z = -5t + 1$.

4.29. Найти расстояние между двумя прямыми $(x - 1)/2 = (y - 3)/3 = (z - 1)/4$ и $(x - 2)/2 = (y - 4)/3 = (z - 1)/1$.

4.30. Две грани куба лежат на плоскостях $2x - 2y + z - 1 = 0$, $2x - 2y + z - 5 = 0$. Вычислить объем куба.

4.31. В пучке плоскостей $2x - 3y + z - 3 + \lambda(x + 3y + 2z + 1) = 0$ найти плоскость, которая: 1) проходит через точку $A(1, -2, 3)$; 2) параллельна оси OZ.

4.32. Составить канонические и параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 5z + 4 = 0 \end{cases}.$$

4.33. Найти проекцию точки $A(5, 2, -1)$ на плоскость $2x - y + 3z + 23 = 0$.

4.34. Найти проекцию точки $A(-1, 2, 4)$ на прямую $(x - 1)/4 = (y - 2)/3 = z/5$.

4.35. Составить уравнение общего перпендикуляра к двум прямым $(x - 2)/4 = (y + 2)/(-2) = (z - 1)/1$ и $(x - 9)/8 = (y - 6)/4 = (z - 4)/1$.

4.36. Даны две вершины треугольника $A(-4, -1, 2)$ и $B(3, 5, -16)$. Составить уравнения всех сторон треугольника, зная, что середина стороны AC лежит на оси OY, а середина стороны BC — на плоскости XOZ.

4.37. Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью $3x + 6y + 4z - 24 = 0$ и координатными плоскостями.

4.38. Вычислить расстояние между двумя параллельными плоскостями $2x - 2y + z - 14 = 0$ и $2x - 2y + z + 1 = 0$.

4.39. Указать систему неравенств для области внутри пирамиды, образованной плоскостью $2x + 3y + 6z - 12 = 0$ и координатными плоскостями.

4.40. Найти наибольшее значение, которое принимает величина $L(x, y, z) = 2x + 4y + 6z + 5$ в области, описываемой системой неравенств $x + y - z \leqslant 0$, $3x + 3y - z \geqslant 0$, $x + y - 3 \leqslant 0$.

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В задачах № 4.41–4.44 составить уравнения поверхностей вращения данной линии вокруг данной оси. Построить поверхности.

4.41. $z = e^{x^2}$, $y = 0$, вокруг оси OZ.

4.42. $z = 5/x^2$, $y = 0$, вокруг оси OZ.

4.43. $z = x$, $y = 0$, вокруг оси OX.

4.44. $x^2/9 - y^2/4 = 1$, $z = 0$, 1) вокруг оси OY; 2) вокруг оси OX.

4.45. Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точки $A(0, 0, 3)$ и от плоскости $z = -3$.

4.46. Составить уравнение геометрического места точек, отношение расстояний каждой из которых от точки $A(0, 0, 10)$ и от плоскости $z = -3$ равно $\sqrt{2}$.

4.47. Найти радиус и центр сферы $x^2 - 2x + y^2 + 6y + z^2 - 4z = 2$.

4.48. Найти наибольшую координату z на линии пересечения цилиндра $x^2 + y^2 = 4$ и плоскости $z + y = 1$. Построить получающееся сечение.

ГЛАВА 5

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

5.1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

5.1.1. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Множество есть исходное понятие. Множества условимся обозначать большими буквами A, B, ..., Z, а элементы множества — малыми буквами a, b, ..., z. Символ $\in$ называется символом принадлежности элемента множеству и используется для обозначения того, что данный элемент, например a, принадлежит данному множеству A: $a \in A$. Если a не принадлежит A — пишут $a \notin A$. Символ $\subset$ называется символом вложения одного множества в другое. Запись $A \subset B$ означает, что каждый элемент множества A является элементом множества B. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то множества A и B называются равными (совпадающими) и это обозначается следующим образом: $A = B$. Если элементы некоторого множества B являются также элементами множества A, то множество B называется *подмножеством множества* A. При этом используется символ $\subseteq$ вложения подмножества в множество: $B \subseteq A$. Нижняя черта означает, что одним из подмножеств данного множества A является и само множество A: $A \subseteq A$. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается символом $\varnothing$. Для всякого множества A пустое множество $\varnothing$ является подмножеством: $\varnothing \subseteq A$. Множество всех подмножеств множества A будем обозначать $P(A)$. Всякое непустое подмножество множества A называется *собственным подмножеством*.

Для задания множества часто используются следующие два способа:

а) непосредственно перечисляются все элементы: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, например $A = \{1, 3, \ldots, 2n + 1\}$;

б) указывается свойство или свойства, объединяющие все элементы, например $A = \{a =$ целое число, большее $3\}$.

Множество, содержащее конечное число элементов, называется конечным, если же число элементов множества не ограничено, то оно называется бесконечным.

Пересечением (или произведением) множеств A и B называется множество X, содержащее все общие элементы этих множеств; пересечение множеств записывается с помощью символа $\bigcap$:

$$X = A \bigcap B = \{x\colon x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Множества A и B называются непересекающимися, если их пересечение пусто: $A \bigcap B = \varnothing$.

Объединением (или суммой) двух множеств A и B называется множество Y, состоящее из элементов, принадлежащих по крайней мере одному из этих множеств. Объединение множеств записывается с помощью символа $\bigcup$:

$$Y = A \bigcup B = \{y\colon y \in A \text{ или } y \in B\}.$$

Разностью множеств A и B называется множество R элементов, состоящее из всех элементов множества A, не являющихся элементами множества B. Разность множеств записывается с помощью символа $\backslash$:

$$R = A \backslash B = \{r\colon r \in A, r \notin B\}.$$

Если множество A есть подмножество множества B, то разность $B \backslash A$ называется дополнением A до B и обозначается так: $\bar{A} = B \setminus A$, при этом $B = A \bigcup \bar{A}$.

Операции над множествами обладают следующими свойствами:

1) коммутативностью: $A \bigcup B = B \bigcup A$; $A \bigcap B = B \bigcap A$;

2) ассоциативностью: $(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C)$; $(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C)$;

3) идемпотентностью: $A \bigcup A = A$; $A \bigcap A = A$;

4) дистрибутивностью: $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$; $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$.

5.1.2. ВЗАИМНО ОДНОЗНАЧНОЕ СООТВЕТСТВИЕ И ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ МНОЖЕСТВ

Если каждому элементу множества A поставлен в соответствие единственный элемент множества B и при этом каждому элементу множества B поставлен только один элемент множества A, то говорят, что между множествами A и B установлено взаимно однозначное соответствие. Множества, между которыми установлено взаимно однозначное соответствие, называются эквивалентными. Это обозначается следующим образом: $A \sim B$. Если два множества эквивалентны, то говорят, что они имеют одинаковую мощность или равномощны.

5.1.3. ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ

Пусть имеется два множества A и B, и пусть $a \in A$, $b \in B$. Множество всех возможных пар (a, b) образует новое множество, которое называется прямым произведением множеств A и B и обозначается $A \cdot B$.

5.2. МНОЖЕСТВО ВЕЩЕСТВЕННЫХ (ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ) ЧИСЕЛ

Различают следующие множества действительных чисел.

1. Множество натуральных чисел $N = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$.
2. Множество целых чисел $Z = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, ..., \pm n, ...\}$.
3. Множество рациональных чисел Q, т. е. чисел вида

$$\frac{p}{q}\left(q \neq 0, p \in Z, q \in Z\right),$$

$$Q = \left\{x : x = \frac{p}{q}, p \in Z, q \in Z, q \neq 0\right\}.$$

Множество всех вещественных чисел $R = Q \cup I$, где I — множество иррациональных чисел, т. е. чисел, представимых в виде бесконечной десятичной непериодической дроби.

5.2.1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

1. Правило сравнения.

Любые два числа связаны только одним из знаков:

$>$ (больше), $<$ (меньше), $=$ (равно).

Если $a > b$, то $b < a$. Если $a > b$, $b > c$, то $a > c$ (свойство транзитивности знака $>$).

2. Правило суммирования.

Любым двум вещественным числам a и b по определенному правилу ставится в соответствие вещественное число c, называемое их суммой и обозначаемое символом $c = a + b$. Для рациональных чисел $a = p_1/q_1$ и $b = p_2/q_2$ их сумма определяется следующим образом:

$$a + b = \frac{p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1}{q_1 \cdot q_2} = c,$$

нахождение суммы чисел называется операцией сложения.

Правило сложения вещественных чисел обладает следующими свойствами:

а) $a + b = b + a$ (переместительное или коммутативное свойство);

б) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (сочетательное или ассоциативное свойство);

в) существует вещественное число, обозначаемое 0 (ноль), такое, что для любого вещественного числа a справедливо равенство $a + 0 = a$;

г) для любого вещественного числа a существует число a' такое, что $a + a' = 0$; число a' называется противоположным для числа a.

3. Правило образования произведения.

Любым двум вещественным числам a и b ставится в соответствие вещественное число c, называемое их произведением и обозначаемое символом $c = a \cdot b$.

Для рациональных чисел $a = p_1/q_1$, $b = p_2/q_2$ их произведение определяется следующим образом:

$$a \cdot b = \frac{p_1 \cdot p_2}{q_1 \cdot q_2}.$$

Нахождение произведения чисел называется умножением.

Правило умножения вещественных чисел обладает следующими свойствами:

а) $a \cdot b = b \cdot a$ (переместительное свойство);

б) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (сочетательное свойство);

в) существует вещественное число, обозначаемое 1 (единицей), такое, что для любого числа a справедливо равенство $a \cdot 1 = a$;

г) для любого вещественного не равного нулю числа a существует вещественное число a' такое, что $a \cdot a' = 1$; число a' называется обратным числу a.

Свойство, связывающее правила сложения и умножения вещественных чисел:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Свойства, связывающие знак «больше» со знаком сложения и умножения:

а) если $a > b$, то для любого вещественного числа c справедливо неравенство

$$a + c > b + c;$$

б) если $a > b$, то для любого вещественного положительного числа c справедливо неравенство

$$a \cdot c > b \cdot c.$$

Свойство Архимеда. Каким бы ни было вещественное число a, можно число 1 повторить слагаемым столько раз, что полученная сумма превзойдет a. Каждому вещественному числу на числовой оси (прямой, на которой выбрана точка начала отсчета 0, задан масштаб и указано положительное направление) соответствует определенная точка.

Абсолютная величина — модуль вещественного числа a есть число, обозначаемое $|a|$ и определяемое формулой

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если} \quad a > 0, \\ -a, & \text{если} \quad a < 0. \end{cases}$$

Модуль вещественного числа обладает следующими основными свойствами:

1) $|a| \geqslant 0$; 2) $|a| = |-a|$; 3) $a \leqslant |a|, \ -a \leqslant |a|$;

4) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$; 5) $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$.

5.2.2. ОГРАНИЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Множество вещественных чисел X называется ограниченным сверху (снизу), если существует такое вещественное число M (число m), что каждый элемент x множества X удовлетворяет неравенству $x \leqslant M$ $(x \geqslant m)$.

Числа M и m называются верхней (нижней) гранью множества X, соответственно.

Любое ограниченное сверху (снизу) множество X имеет бесконечно много верхних (нижних) граней.

Наименьшая (наибольшая) из всех верхних (нижних) граней множества X называется точной верхней (нижней) гранью множества X и обозначается, соответственно, $\sup X$, $\inf X$ (sup от латинского «supremum» (супремум) «наивысшее», inf от латинского «infimum» (инфимум) «наименьшее»).

Данное выше определение точной верхней и точной нижней граней чаще формулируют в другой, эквивалентной форме.

Число $\overline{x}$ (число $\underline{x}$) называется точной верхней (точной нижней) гранью ограниченного сверху (снизу) множества X, если выполнены следующие условия:

1) каждый элемент $x \in X$ удовлетворяет неравенству $x < \overline{x} (x > \underline{x})$,

2) каково бы ни было вещественное число x', меньшее $\overline{x}$ (большее $\underline{x}$), найдется хотя бы один элемент $x_0 > x' (x_0 < x')$.

5.2.3. НЕКОТОРЫЕ КОНКРЕТНЫЕ МНОЖЕСТВА ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Различают следующие множества вещественных чисел.

1. Сегмент (замкнутый отрезок или отрезок) символическая запись $[a, b]$:

$$[a, b] = \{x: a \leqslant x \leqslant b\}.$$

2. Полусегмент — символическая запись $[a, b)$ или $(a, b]$:

$$[a, b) = \{x: a \leqslant x < b\}.$$
$$(a, b] = \{x: a < x \leqslant b\}.$$

3. Интервал — символическая запись (a, b):

$$(a, b) = \{x: a < x < b\}.$$

Замечание. Сегмент, полусегмент, интервал называются промежутками.

4. Окрестность точки x — любой интервал $(x - a, x + b)$, содержащий точку x.

5. ε-окрестность точки x — любой интервал $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$.

6. Числовая (бесконечная) прямая — символическая запись $(-\infty, +\infty)$:

$$(-\infty, +\infty) = \{x: -\infty < x < +\infty\}.$$

7. Полупрямая $[a, +\infty)$ или $(-\infty, b]$:

$$[a, +\infty) = \{x: a \leqslant x < +\infty\},$$
$$(-\infty, b] = \{x: -\infty < x \leqslant b\}.$$

8. Открытая полупрямая $(a, +\infty)$ или $(a, -\infty)$:

$$(a, +\infty) = \{x: a < x < +\infty\},$$
$$(-\infty, b) = \{x: -\infty < x < b\}.$$

9. Расширенная прямая — множество вещественных чисел, дополненное элементами $+\infty$ и $-\infty$, и обозначается $\bar{R}$. Элементы $+\infty$ и $-\infty$ называются иногда бесконечно удаленными точками расширенной числовой прямой.

5.2.4. СТРУКТУРА ОТКРЫТЫХ И ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВ НА ПРЯМОЙ

Точка $x \in R$ называется внутренней точкой множества R, если существует некоторая ε-окрестность точки x, принадлежащей целиком этому множеству.

Точка $x \in R$ называется предельной точкой множества $X \subset R$, если в любой ε-окрестности точки x найдется хотя бы одна точка x_1 множества X, отличная от x.

Множество $X \subset R$ называется открытым, если все точки этого множества являются внутренними.

Множество $X \subset R$ называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

5.3. ОСНОВНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ СИМВОЛЫ

Высказыванием называется предложение, относительно которого известно, что оно или истинно или ложно.

Конъюнкцией $a \wedge b$ высказываний a и b называют высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания одновременно истинны. Символ $\wedge$ заменяет в речи союз «и».

Дизъюнкцией $a \vee b$ высказываний a и b называют высказывание, которое ложно в том и только в том случае, когда оба высказывания ложны, а истинно, когда хотя бы одно из них истинно. Символ $\vee$ заменяет в речи союз «или».

Импликацией $a \Rightarrow b$ высказываний a и b называют высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда a истинно, а b ложно.

Отрицанием a (или $\bar{a}$) высказывания называется высказывание, утверждающее, что a ложно.

Эквивалентностью $a \Leftrightarrow b$ высказываний a и b называется высказывание, истинное только тогда, когда оба высказывания a и b одновременно истинны или ложны. Высказывание $a \Leftrightarrow b$ означает, что a является необходимым и достаточным условием b.

Истинному высказыванию обычно ставят в соответствие логическую единицу, а ложному — логический ноль.

Результаты применения этих операций могут быть представлены в виде таблицы истинности алгебры высказываний (табл. 5.1).

Законы де Моргана: 1) отрицание конъюнкции эквивалентно дизъюнкции отрицаний: $\overline{a \wedge b} \Leftrightarrow \bar{a} \vee \bar{b}$; 2) отрицание дизъюнкции эквивалентно конъюнкции отрицаний: $\overline{a \vee b} \Leftrightarrow \bar{a} \wedge \bar{b}$.

Таблица 5.1

a	b	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \Rightarrow b$	$a \Leftrightarrow b$
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1

5.4. КВАНТОРЫ

В математике некоторые словесные выражения представляются с помощью символов (кванторов): $\forall$ (квантор всеобщности) означает «каково бы ни было», «для любого»; $\exists$ (квантор существования) означает «существует»; символ «:» означает группу слов «такое, что», «выполняется», «удовлетворяет условию».

Отрицание под знаком $\forall$ превращает его в знак $\exists$, и наоборот, отрицание под знаком $\exists$ превращает его в знак $\forall$.

5.5. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Последовательностью называется закон, сопоставляющий множеству натуральных чисел N множество действительных чисел x_n. Последовательность обозначается как $\{x_n\}$ или x_n.

Число x_k при конкретном k называется членом (элементом) последовательности, а k — его номером. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху* (*снизу*), если существует такое число M, что все члены последовательности, начиная с некоторого номера N, удовлетворяют неравенству $\{x_n\} < M$ $(x_n > M)$. Символически это записывается следующим образом:

$$\exists M,\ \forall n \in N\colon x_n < M \ \ (x_n > M). \qquad (5.1)$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если существует такое число $M > 0$, что все члены последовательности, начиная с некоторого номера N, удовлетворяют неравенству $|x_n| < M$. Символически это записывается следующим образом:

$$\exists M\colon \forall n \in N \Rightarrow |x_n| < M. \qquad (5.2)$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется *неограниченной сверху* (*снизу*), если для любого $M > 0$ $(M < 0)$ существует такое n, что справедливо неравенство $x_n > M$ $(x_n < M)$. Символически это записывается следующим образом:

$$\forall M > 0 \ \ (\forall M < 0),\ \exists n \in N\colon x_n > M \ \ (x_n < M). \qquad (5.3)$$

Последовательность называется *неограниченной*, если для любого $M > 0$ существует такое $n \in N$, что справедливо неравенство $|x_n| > M$.

Символически это записывается следующим образом:

$$\forall M \exists n \in N: |x_n| > M. \qquad (5.4)$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется *строго возрастающей* (*строго убывающей*), если начиная с некоторого номера k, для любых двух натуральных k_1 и k_2, таких, что $k_1 > k_2$, выполняется неравенство $x_{k_1} > x_{k_2}$ ($x_{k_1} < x_{k_2}$).

Символически это записывается следующим образом:

$$\forall k_1 \in N, \forall k_2 \in N : k_1 > k_2 > k \Rightarrow x_{k_1} > x_{k_2} (x_{k_1} < x_{k_2}). \qquad (5.5)$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*), если, начиная с некоторого номера k, для любых двух натуральных k_1 и k_2, таких, что $k_1 > k_2$, выполняется неравенство $x_{k_1} \geqslant x_{k_2}$ ($x_{k_1} \leqslant x_{k_2}$).

Символически это записывается следующим образом:

$$\forall k_1 \in N, \forall k_2 \in N : k_1 > k_2 > k \Rightarrow x_{k_1} \geqslant x_{k_2} \quad (x_{k_1} \leqslant x_{k_2}). \qquad (5.6)$$

Возрастающие, убывающие, неубывающие и невозрастающие последовательности называются *монотонными*, а две первые — *строго монотонными*.

Число a называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$ при $n \to \infty$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такое $K(\varepsilon) \in N$, что как только начнет выполняться неравенство $n \geqslant K(\varepsilon)$, станет справедливо и неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Обозначается предел последовательности

$$a = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

Символически это определение записывается следующим образом:

$$a = \lim_{n \to \infty} x_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists K(\varepsilon) \in N : \forall n \geqslant K(\varepsilon) \Rightarrow | x_n - a | < \varepsilon. \qquad (5.7)$$

Проиллюстрируем геометрический смысл предела последовательности. Отложим по оси абсцисс номера членов последовательности, а по оси ординат — значения x_n, и вдоль горизонтальной прямой $y = a$ проводим сколь угодно узкую полосу шириной 2ε. Эта полоса разбивает все множество точек последовательности на два подмножества: одно подмножество, содержащее бесконечное число членов, начинающихся с номера $K(\varepsilon) + 1$, будет содержаться внутри этой полосы, другое подмножество, содержащее конечное число первых членов до номера $K(\varepsilon)$ включительно, находится вне этой полосы.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, а не имеющая предела — *расходящейся*.

Число a не является пределом последовательности $\{x_n\}$ при $n \to \infty$, если $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $\forall K \in N\ \exists n > K$: $|x_n - a| \geqslant \varepsilon$.

Символически это записывается следующим образом:

$$a \neq \lim_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall k \in N\ \exists n > K : |x_n - a| \geqslant \varepsilon. \quad (5.8)$$

Последовательность $\{x_n\}$ не имеет конечного предела, если

$$\forall M > 0\ \exists n \in N: |x_n| > M. \quad (5.9)$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется *положительно бесконечно большой* и используется обозначение $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если для любого сколь угодно большого положительного числа M существует натуральное число $n(M)$, такое что начиная с номера $n(M) + 1$ все элементы этой последовательности удовлетворяют неравенству $x_n > M$.

Символическая запись этого определения:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \ \exists n(M) \in N\colon\ \forall n > n(M) \Rightarrow x_n > M. \quad (5.10)$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется *отрицательно бесконечно большой* и используется обозначение

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty,$$

если для любого сколь угодно большого по модулю отрицательного числа M существует натуральное число $n(M)$, такое, что начиная с номера $n(M) + 1$ все элементы этой последовательности удовлетворяют неравенству $x_n < M$.

Символическая запись этого определения:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0\ \ \exists n(M) \in N\colon\ \forall n > n(M) \Rightarrow x_n < M. \quad (5.11)$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется *объединенной бесконечно большой* и используется обозначение $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, если для любого сколь угодно большого положительного числа M существует натуральное число $n(M)$, такое, что начиная с номера $n(M)+1$ все элементы этой последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n| > M$.

Символическая запись этого определения:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \ \exists n(M) \in N\colon \forall n > n(M) \Rightarrow |x_n| > M. \quad (5.12)$$

Положительная, отрицательная и объединенная бесконечно большие последовательности называются сокращенно *бесконечно большими*.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *положительной бесконечно малой*, если для любого сколь угодно малого положительного ε существует такой зависящий только от ε номер $K(\varepsilon)$, что как только начнет выполняться неравенство $n > K(\varepsilon)$, станет справедливо и неравенство $0 \leqslant x_n \leqslant \varepsilon$. Для описанного в данном определении предела будем использовать следующее обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +0$.

Символическая запись этого определения:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists K(\varepsilon) \in N\colon \forall n > K(\varepsilon) \Rightarrow 0 \leqslant x_n < \varepsilon. \quad (5.13)$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется *отрицательной бесконечно малой*, если для любого сколь угодно малого положительного ε существует такой зависящий только от ε номер $K(\varepsilon)$, что как только начнет выполняться неравенство $n > K(\varepsilon)$, станет справедливо и неравенство $-\varepsilon < x_n \leqslant 0$. Для описанного в данном определении предела будем использовать обозначение

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -0.$$

Символическая запись этого определения:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists K(\varepsilon) \in N : \forall n > K(\varepsilon) \Rightarrow -\varepsilon < x_n \leqslant 0. \quad (5.14)$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется *объединенной бесконечно малой*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $K(\varepsilon)$, что как только начнет выполняться неравенство $n > K(\varepsilon)$, станет справедливо и неравенство $|x_n| < \varepsilon$. Для описанного в данном определении предела будем использовать обозначение

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Символическая запись этого определения:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists K(\varepsilon)\in N : \forall n > K(\varepsilon) \Rightarrow |x_n| < \varepsilon. \quad (5.15)$$

Положительная, отрицательная и объединенная бесконечно малые последовательности сокращенно называются *бесконечно малыми*.

Подмножество $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ называется подпоследовательностью $\{x_{n_k}\}$.

Число a называется *предельной точкой* (или *частичным пределом*) последовательности $\{x_n\}$, если из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к a.

Замечание. В окрестности предельной точки последовательности $\{x_n\}$ содержится бесконечное число членов этой последовательности.

Наибольший (наименьший) частичный предел числовой последовательности $\{x_n\}$ называется ее верхним (нижним) пределом и обозначается символом

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \ (\underline{\lim}_{n\to\infty}\, x_n).$$

ПРИЗНАКИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРЕДЕЛА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Последовательность называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что для любого натурального $n > N(\varepsilon)$ и любого натурального p выполняется неравенство

$$|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon.$$

Геометрический смысл фундаментальной последовательности заключается в следующем. Если все члены этой последовательности расположить на числовой оси, то всегда можно указать бесконечное число членов, расстояния между которыми будут меньше любого наперед заданного положительного числа ε.

Последовательность называется *нефундаментальной*, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого натурального K существуют натуральные не равные друг другу $n > K$ и $m > K$, для которых справедливо неравенство

$$|x_n - x_m| \geqslant \varepsilon.$$

1. *Критерий Коши.* Для того чтобы последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

2. Для того чтобы монотонная последовательность сходилась, необходима и достаточна ее ограниченность.

Следствие. Пусть дана бесконечная система отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$, ..., каждый последующий из которых содержится в предыдущем, и пусть модуль разности $|b_n - a_n|$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Тогда существует точка, и притом только одна, принадлежащая всем этим отрезкам.

3. Для того чтобы последовательность была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной и чтобы ее верхний и нижний пределы совпадали.

ОБЩИЕ СВОЙСТВА СХОДЯЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

1. Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Замечание. Если последовательность сходится, то она имеет только одну предельную точку.

2. *Теорема Больцано–Вейерштрасса.* Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

3. Из любой неограниченной последовательности можно выделить бесконечно большую подпоследовательность.

4. Из произвольной последовательности можно выделить либо сходящуюся, либо бесконечно большую подпоследовательность.

5. *Теорема о предельном переходе в неравенстве.* Если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ и } \lim_{n\to\infty} y_n = b,$$

и, начиная с некоторого номера, выполняются неравенства $x_n \leqslant y_n$ $(x_n \geqslant y_n)$, то $a \leqslant b$ $(a \geqslant b)$.

Если элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$, принадлежат отрезку $[a, b]$, то ее предел также принадлежит этому отрезку.

6. *Теорема о трех последовательностях.* Если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ и } \lim_{n\to\infty} y_n = a,$$

и, начиная с некоторого номера, выполняется двойное неравенство $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

7. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b,$ (5.16)

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b,$ (5.17)

в) если $b \neq 0$, то, начиная с некоторого номера, определена последовательность $\{x_n/y_n\}$ (т. е. существует номер $K \in N$ такой, что для любого $n > K$ $y_n \neq 0$) и

$$\lim_{n\to\infty}(x_n / y_n) = a / b. \tag{5.18}$$

СВОЙСТВА БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

1. Неограниченная монотонная последовательность сходится к $+\infty$, если она не убывает (возрастает), и к $-\infty$, если она не возрастает (убывает).

2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, и, начиная с некоторого номера, выполняется двойное неравенство $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = +\infty$. Аналогично, если одновременно

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \text{ и } \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty, \text{то } \lim_{n\to\infty} z_n = -\infty.$$

3. Если последовательность $\{x_n\}$ — бесконечно большая (положительная бесконечно большая, отрицательная бесконечно большая), то начиная с некоторого номера определена последовательность $\{1/x_n\}$, которая является бесконечно малой (положительной бесконечно малой, отрицательной бесконечно малой).

4. Если последовательность $\{x_n\}$ — бесконечно малая (положительная бесконечно малая, отрицательная бесконечно малая) и для любого натурального n $x_n \neq 0$, то

последовательность $\{1/x_n\}$ является бесконечно большой (положительной бесконечно большой, отрицательной бесконечно большой).

5. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.

Замечание. Для бесконечно больших последовательностей в общем случае аналогичная теорема несправедлива.

6. Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную является бесконечно малой последовательностью.

7. Произведение бесконечно большой последовательности на ограниченную является бесконечно большой последовательностью.

8. Произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

9. Произведение конечного числа бесконечно больших последовательностей есть бесконечно большая последовательность.

10. Если, начиная с некоторого номера $K + 1$, элементы некоторой последовательности $\{y_n\}$ по модулю не меньше элементов бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$, то последовательность $\{y_n\}$ — бесконечно большая.

11. *Теорема Штольца.* Пусть $\{y_n\}$ — возрастающая бесконечно большая последовательность, и пусть последовательность $\{(x_n - x_{n-1})/(y_n - y_{n-1})\}$ сходится к предельному значению a. Тогда последовательность $\{x_n/y_n\}$ также сходится к пределу a.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, то говорят, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n / y_n)$ содержит неопределенность типа «0/0».

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (или $-\infty$) и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ (или $-\infty$), то говорят, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n / y_n)$ содержит неопределенность типа «∞/∞».

5.6. ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

5.6.1. ВВЕДЕНИЕ ПОНЯТИЯ ФУНКЦИИ И ОСНОВНЫЕ СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИЙ

Пусть заданы два множества действительных чисел $X \subseteq R$ и $Y \subseteq R$ и задано соответствие f, по которому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие единственный элемент $y \in Y$.

Символически это записывается следующим образом:

$$f(x) = \{y = f(x) \in Y \subseteq R : x \subset X\}.$$

При этом число $x \in X$ называют *аргументом*, множество X — *областью допустимых значений аргумента* (*областью определения или областью существования функции*) и обозначают с помощью символа $D(f)$. Число $y \in Y$, соответствующее $x \in X$, называют значением функции, множество Y называют *областью значения функции* f и обозначают с помощью символа $R(f)$.

Рассмотрим множество $A \subset D(f)$, тогда множество $B = \{y : y = f(x),\ x \in A\}$, называется образом подмножества A и обозначается $B = f(A)$. В частности, $R(f) = f(D(f))$.

Множество точек плоскости с декартовыми координатами $(x, f(x))$, $x \in X$ называют *графиком функции* f, определенной на множестве $X \subseteq R$.

Если задана формула, указывающая последовательность математических действий, которые следует выполнить с аргументом x, чтобы получить явное выражение для y, то говорят, что функция определена *явным аналитическим способом*: $y = f(x)$.

Если задано соотношение $F(x, y) = 0$, $x \in X = D(f)$, из которого y находится в результате решения уравнения $F(x, y) = 0$, то говорят о *неявном способе задания функции*.

Замечание. Если для некоторого $x \in X = D(f)$ уравнение $F(x, y) = 0$ имеет несколько решений, то говорят, что соотношение $F(x, y) = 0$ задает многозначную функцию. Если зависимость y от x задана с помощью двух функций от некоторого вспомогательного переменного $t \in T \subseteq R$, называемого параметром,

$$\begin{cases} x = \psi(t) \\ y = \varphi(t) \end{cases}, \quad t \in T \subseteq R.$$

то говорят о *параметрическом способе* задания функции.

Если дискретному набору значений аргумента сопоставлен дискретный набор значений функции с помощью таблицы, то говорят о *табличном способе задания функции*:

x_k	x_1	x_2	...	x_n
y_k	y_1	y_2	...	y_n

Алгоритмическим способом задания функции называют такой, когда задано точное предписание, определяющее вычислительный процесс, начинающийся с произвольного (допустимого) исходного значения x и направленный на получение значения y.

Графическим способом задания функции называют тот, при котором зависимость y от x определяется линией на плоскости XOY.

Заметим, что это приближенный способ, зависящий от масштаба и точности измерения абсциссы и ординаты отдельных точек графика.

Если аргумент x функции $y = f(x)$ является функцией другого аргумента $x = w(s) \in R(w)$, $s \in D(w)$, то говорят, что на множестве $D(w)$ задана сложная функция $y = f(w(s))$ независимого аргумента s.

Функция $y = f(x)$ называется *инъективной*, если разным значениям аргумента $x_1 \neq x_2$ соответствуют разные значения функции $y_1 = f(x_1) \neq y_2 = f(x_2)$.

Если задана инъективная функция $y = f(x)$, то уравнение $y = f(x)$ определяет *обратную функцию* $x = f^{-1}(y)$.

Из определения обратной функции следует $(f^{-1})^{-1} = f$, $f^{-1}(f(x)) = x$ для $\forall x \in X = D(f)$, $f(f^{-1}(y)) = y$ для $\forall y \in R(f)$.

Замечание. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы $y = x$ первой и третьей четверти координатной плоскости XOY.

5.6.2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве $x \in X = D(f) \subseteq R$, называется *четной*, если для $\forall x \in X = D(f)$ и $\forall(-x) \in X = D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси OY. Область допустимых значений аргумента четной функции симметрична относительно точки $x = 0$.

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве $x \in X = D(f) \subseteq R$, называется *нечетной*, если для $\forall x \in X = D(f)$ и $\forall(-x) \in X = D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат — точки (0, 0). Область допустимых значений аргумента нечетной функции симметрична относительно точки $x = 0$.

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве $x \in X = D(f)$, называется *функцией общего вида* (ни четной, ни нечетной), если существует хотя бы одно значение $x \in X = D(f)$, для которого одновременно выполняются два неравенства:

$$f(-x) \neq f(x) \text{ и } f(-x) \neq -f(x).$$

Замечание. График функции общего вида не обладает симметрией ни относительно оси OY, ни относительно начала координат — (0, 0). Область допустимых значений аргумента функции общего вида не симметрична относительно точки $x = 0$.

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной сверху*, если $\exists M$, такое, что для $\forall x \in X = D(f)$: $y = f(x) \leqslant M$.

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной снизу*, если $\exists M$, такое, что для $\forall x \in X = D(f)$: $y = f(x) \geqslant M$.

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной*, если $\exists M \geqslant 0$, такое, что $\forall x \in X = D(f) \Rightarrow |f(x)| \leqslant M$.

Верхняя (нижняя) точная грань множества $R(f)$, являющегося областью значений функции $y = f(x)$, называется *точной верхней (точной нижней) гранью функции* $y = f(x)$.

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве $x \in X = D(f) \in R$, называется *периодической*, если существует отличное от нуля положительное число $T \in R$, что для

$\forall x \in X = D(f)$: $x + T \in X = D(f)$, $x - T \in X = D(f)$ и справедливо равенство

$$f(x + T) = f(x - T) = f(x). \tag{5.19}$$

Наименьшее из положительных чисел $T \neq 0$, при котором выполняется равенство (5.19) для периодической функции $y = f(x)$, называется *периодом* этой функции.

Замечание. Область допустимых значений аргумента периодической функции представляет собой неограниченное числовое множество.

Замечание. Функция $y = \text{const}$ — периодическая, но не имеющая периода. График периодической функции получается из графика $y = f(x)$, построенного на отрезке (полуотрезке, интервале), протяженностью в один период, путем параллельного переноса графика $y = f(x)$ в направлении и против направления оси OX на расстояния, кратные периоду. Если функция $y = f(x)$ имеет период T, то функция $y = f(ax + b)$, где $a = \text{const} > 0$, $b = \text{const}$, имеет период T/a.

Прямая $y = ax + b$ на плоскости XOY называется *наклонной асимптотой* для графика функции $y = f(x)$ при неограниченном увеличении в положительную сторону аргумента x (в отрицательную сторону), если для любого положительного $\varepsilon > 0$ существует такое положительное число $M(\varepsilon) > 0$ (отрицательное число $M(\varepsilon) < 0$), что как только начнет выполняться неравенство $x \geqslant M(\varepsilon)$ ($x \leqslant M(\varepsilon)$), станет справедливо и неравенство $\sup|f(x) - (ax + b)| \leqslant \varepsilon$.

Замечание. В частном случае, когда $a = 0$, то наклонная асимптота называется *горизонтальной*.

Геометрический смысл приведенных определений асимптот заключается в том, что при движении по асимптоте в сторону от начала координат максимум отклонения точек асимптоты от точек кривой $y = f(x)$ стремится к нулю. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве $X = D(f)$, называется:

а) *возрастающей*, если для $\forall x_1 \in X$ и $\forall x_2 \in X$ таких, что $x_1 > x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$;

б) *неубывающей*, если для $\forall x_1 \in X$ и $\forall x_2 \in X$ таких, что $x_1 > x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) \geqslant f(x_2)$;

в) *убывающей*, $f(x_1) < f(x_2)$;

г) *невозрастающей*, $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Во всех четырех случаях функция $y = f(x)$ называется *монотонной*. Возрастающие и убывающие функции называются *строго монотонными*. Точка $(x_{\max}, f(x_{\max}))$ называется *локальным максимумом* функции $y = f(x)$, если существует δ-окрестность точки $x_{\max}$: $(x_{\max} - \delta, x_{\max} + \delta)$ такая, что при всех $x \in (x_{\max} - \delta, x_{\max} + \delta) \subset D(f)$ и $x \neq x_{\max}$ выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_{\max}).$$

Точка $(x_{\min}, f(x_{\min}))$ называется *локальным минимумом* функции $y = f(x)$, если существует δ-окрестность точки $x_{\min}$: $(x_{\min} - \delta, x_{\min} + \delta)$ такая, что при всех

$$x \in \left(x_{\min} - \delta, x_{\min} + \delta\right) \subset D\left(f\right) \text{ и } x \neq x_{\min}$$

выполняется неравенство $f(x) > f(x_{\min})$.

Если для функции $y = f(x)$ при всех $x \in X = D(f)$ существует единственная точка максимума (минимума), то она называется точкой *глобального максимума* (минимума). Функция $y = f(x)$ называется *строго выпуклой вверх* (*выпуклой*) на интервале $x \in (a, b) \subset D(f)$, если для любых двух разных $x_1 \in (a, b)$ и $x_2 \in (a, b)$ выполняется условие

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \tag{5.20}$$

Функция $y = f(x)$ называется *строго выпуклой вниз* (*вогнутой*) на интервале $x \in X = D(f)$, если для любых двух разных $x_1 \in (a, b)$ и $x_2 \in (a, b)$ выполняется условие

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \tag{5.21}$$

Геометрический смысл этих понятий заключается в том, что на участке выпуклости вверх (выпуклости вниз) середина любой хорды располагается под графиком $y = f(x)$ (над графиком $y = f(x)$).

Точки, в которых меняется выпуклость вверх на выпуклость вниз или выпуклость вниз на выпуклость вверх, называются *точками перегиба*.

5.6.3. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

К основным элементарным функциям относятся $y = C$ (C — константа), степенная функция $y = x^{\alpha}$ ($x \in R$), показательная функция $y = a^x$ ($x, a \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$), логарифмическая функция $y = \log_a x$ ($x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$), тригонометрические функции:

$$y = \sin x,\quad y = \cos x,\quad y = \operatorname{tg} x,\quad y = \operatorname{ctg} x,$$

обратные тригонометрические функции:

$$y = \arcsin x,\quad y = \arccos x,\quad y = \operatorname{arctg} x,\quad y = \operatorname{arcctg} x.$$

Другие элементарные функции образуются из основных с помощью арифметических операций, примененных произвольное конечное число раз, а также с помощью суперпозиции с основными элементарными функциями, примененной также любое конечное число раз.

Элементарные функции обычно делят на следующие классы.

1. Многочлены (полиномы) — это функции, которые могут быть заданы формулами вида

$$y = P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Если $a_n \neq 0$, то число $n \in N$ называется степенью данного многочлена.

2. Рациональные функции (рациональные дроби) — это функции вида

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степеней n и m соответственно.

3. Иррациональные функции — это функции, которые могут быть заданы с помощью конечного числа рациональных функций, степенных функций с рациональными показателями, которые связываются основными арифметическими действиями.

4. Трансцендентные функции — это функции, не являющиеся иррациональными. К трансцендентным функциям относятся все прямые и обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции.

5.7. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

5.7.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ И ЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

Определение предела по Коши. Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к a (обозначается так: $x \to a$) (или в точке $x = a$), если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такое зависящее только от ε положительное число $\delta(\varepsilon) > 0$, что как только начнет выполняться неравенство $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$, станет справедливо и неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Символически это определение записывается следующим образом:

$$A = \lim_{x \to a} f(x) :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < |x - a| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon. \quad (5.22)$$

Если $a \in D(f(x)$ и $A = f(a)$, функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x = a$.

Определение предела по Коши можно сформулировать в терминах окрестностей точки a расширенной прямой $\bar{R}$ (к расширенной числовой прямой $\bar{R}$ добавлены две бесконечно удаленные точки $\{-\infty; +\infty\}$).

Точка A расширенной числовой прямой $\bar{R}$ называется пределом функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к a (или в точке $x = a$), если для любой сколь угодно малой ε-окрестности точки $A - F_\varepsilon(A)$ существует такая проколотая δ-окрестность $U_\delta(a)$ точки a, размеры которой определяются числом ε, что $f(U_\delta(a)) \subset F_\varepsilon(A)$.

Символически это определение записывается следующим образом:

$$A = \lim_{x \to a} f(x) :\Leftrightarrow \forall F_\varepsilon(A)\, \exists U_\delta(a) : f(U_\delta(a)) \subset F_\varepsilon(A). \quad (5.23)$$

Преимущество этого определения предела по Коши заключается в том, что оно вбирает в себя как приведенное выше, так и все приведенные ниже определения.

Запишем традиционные определения пределов по Коши при $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to \infty$, а также те определения, в которых описывается стремление $f(x)$ к $+\infty$, $f(x)$ к $-\infty$ и $f(x)$ к ∞ в символическом виде.

$$A=\lim_{x\to+\infty} f(x):\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)>0:\forall x>N(\varepsilon)\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon. \quad (5.24)$$

$$A=\lim_{x\to-\infty} f(x):\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)<0:\forall x<N(\varepsilon)\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon. \quad (5.25)$$

$$A=\lim_{x\to\infty} f(x):\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)>0:\forall x,|x|>N(\varepsilon)\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon. \quad (5.26)$$

$$+\infty=\lim_{x\to+\infty} f(x):\Leftrightarrow \forall M>0\ \exists N(M)>0:\forall x,x>N(M)\Rightarrow|f(x)-A|>M. \quad (5.27)$$

$$+\infty=\lim_{x\to-\infty} f(x):\Leftrightarrow \forall M>0\ \exists N(M)<0:\forall x,x<N(M)\Rightarrow f(x)>M. \quad (5.28)$$

$$+\infty=\lim_{x\to\infty} f(x):\Leftrightarrow \forall M>0\ \exists N(M)>0:\forall x,|x|>N(M)\Rightarrow f(x)>M. \quad (5.29)$$

$$-\infty=\lim_{x\to+\infty} f(x):\Leftrightarrow \forall M<0\ \exists N(M)>0:\forall x,x>N(M)\Rightarrow f(x)<M. \quad (5.30)$$

$$-\infty=\lim_{x\to-\infty} f(x):\Leftrightarrow \forall M<0\ \exists N(M)<0:\forall x,x<N(M)\Rightarrow f(x)<M. \quad (5.31)$$

$$-\infty=\lim_{x\to\infty} f(x):\Leftrightarrow \forall M<0\ \exists N(M)>0:\forall x,|x|>N(M)\Rightarrow f(x)<M. \quad (5.32)$$

$$\infty=\lim_{x\to+\infty} f(x):\Leftrightarrow \forall M>0\ \exists N(M)>0:\forall x,x>N(M)\Rightarrow|f(x)|>M. \quad (5.33)$$

$$\infty=\lim_{x\to-\infty} f(x):\Leftrightarrow \forall M<0\ \exists N(M)<0:\forall x,x<N(M)\Rightarrow|f(x)|>M. \quad (5.34)$$

$$\infty=\lim_{x\to\infty} f(x):\Leftrightarrow \forall M>0\ \exists N(M)>0:\forall x,x>N(M)\Rightarrow|f(x)|>M. \quad (5.35)$$

$$+\infty=\lim_{x\to a} f(x):\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall M>0\ \exists\delta(M)>0:\forall x,0<|x-a|<\delta(M)\Rightarrow f(x)>M. \quad (5.36)$$

$$-\infty=\lim_{x\to a} f(x):\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall M<0\ \exists\delta(M)>0:\forall x,0<|x-a|<\delta(M)\Rightarrow f(x)<M. \quad (5.37)$$

$$\infty=\lim_{x\to a} f(x):\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall M>0\ \exists\delta(M)>0:\forall x,0<|x-a|<\delta(M)\Rightarrow|f(x)|>M. \quad (5.38)$$

Определение предела функции по Гейне. Точка $A\in R$ называется пределом функции $y=f(x)$ в точке $x=a$ (при $x\to a\in R$), если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента x, стремящейся к a, элементы которой отличны от a, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к точке A. Символически определение предела функции по Гейне записывается следующим образом:

$$A = \lim_{x \to a} f(x), \quad A \in R, \quad a \in R : \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall \{x_n\}, \ (x_n \neq a) : \lim_{n \to +\infty} x_n = a \Rightarrow \tag{5.39}$$
$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = A, \quad A \in R, \quad a \in R.$$

Определения предела функции по Коши и Гейне эквивалентны.

Определение *предела справа по Коши*. Число $A \in R$ называется *пределом справа функции* $y = f(x)$ в точке $a \in R$ (обозначается: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A$),

если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такое зависящее только от ε положительное число $\delta(\varepsilon) > 0$, что как только начнет выполняться неравенство $0 < x - a < \delta(\varepsilon)$, станет справедливо и неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Символически это определение записывается следующим образом:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = A, \quad a \in R, \quad A \in R :$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : (0 < x - a < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \tag{5.40}$$
$$\Rightarrow | f(x) - A | < \varepsilon).$$

Определение *предела слева по Коши*. Число $A \in R$ называется *пределом слева функции* $y = f(x)$ в точке $a \in R$ (обозначается: $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A$),

если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такое зависящее только от ε положительное число $\delta(\varepsilon) > 0$, что как только начнет выполняться неравенство $0 < a - x < \delta(\varepsilon)$, станет справедливо и неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Символически это определение записывается следующим образом:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = A, \quad a \in R, \quad A \in R :$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : (0 < a - x < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \tag{5.41}$$
$$\Rightarrow | f(x) - A | < \varepsilon).$$

Если $A^+ \neq A^-$, то точка $x = a$ называется точкой разрыва первого рода функции $y = f(x)$.

Если хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности, то точка $x = a$ называется точкой разрыва второго рода.

Геометрический смысл определения предела (5.22) заключается в следующем.

Пусть $y = f(x)$ монотонная функция в некоторой окрестности точки a. Тогда, для любого сколь угодно малого ε путем проецирования ε-окрестности оси OY $A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$ через график функции $y = f(x)$ на ось OX определяется окрестность $a - \delta_1(\varepsilon) < x < a + \delta_2(\varepsilon)$. Сжимая ε-окрестность $A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$ в точку A при уменьшении ε, соответствующая проецируемая на ось OX окрестность $a - \delta_1(\varepsilon) < x < a + \delta_2(\varepsilon)$ сжимается в точку $x = a$.

Приведем отрицание определения (5.22) предела функции по Коши.

Число A не является пределом функции $y = f(x)$ при $x \to a$, если существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ существует такое $x \in X = D(f)$, что одновременно выполняются два неравенства: $0 < |x - a| < \delta$ и $|f(x) - A| \geqslant \varepsilon_0$. Символическая запись этого определения:

$$\begin{gathered} A \neq \lim_{x \to a} f(x) :\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in X = D(f): \\ ((0 < |x - a| < \delta) \wedge (|f(x) - A| \geqslant \varepsilon_0)). \end{gathered} \tag{5.42}$$

Приведем отрицание определения (5.40) предела функции по Гейне.

Число A не является пределом функции $y = f(x)$ при $x \to a$, если существует сходящаяся к a последовательность $\{x_n\}$ ($x_n \in X = D(f)$ и $x_n \neq a$) такая, что для соответствующей последовательности либо $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n)$ не существует, либо $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n)$ существует, конечен, но $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) \neq A$.

Символическая запись этого определения:

$$\begin{gathered} A \neq \lim_{x \to a} f(x) :\Leftrightarrow \exists \{x_n\},\ \lim_{x \to a} x_n = a, \\ (x_n \in X = D(f) \wedge x_n \neq a)\ \overline{\exists} \lim_{n \to +\infty} f(x_n) \vee \lim_{n \to +\infty} f(x_n) \neq A. \end{gathered} \tag{5.43}$$

Функция $y = f(x)$ не имеет конечного предела при $x \to a$, если для любого A, принадлежащего множеству действительных чисел R, существует такое $\varepsilon_0(A) > 0$, что для любого $\delta > 0$ $\exists x \in X = D(f)$ такое, что одновременно выполняются два неравенства: $0 < |x - a| < \delta$ и $(|f(x) - A| \geqslant \varepsilon_0)$. Символическая запись этого определения:

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq A : \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall A \in R\, \exists \varepsilon_0(A) > 0 (\forall \delta > 0\, \exists x(\delta) \in X = D(f) \in R): \tag{5.44}$$
$$((0 < |x(\delta) - a| < \delta) \wedge (|f(x(\delta)) - A| \geqslant \varepsilon_0)).$$

Функция $y = f(x)$ не имеет предела $+\infty$ при $x \to a$, если существует такое действительное число $M > 0$, что для любого положительного δ существует $x(\delta)$, принадлежащее области допустимых значений функции, такое, что одновременно справедливы два неравенства:

$$|x(\delta) - a| < \delta \text{ и } f(x(\delta)) < M.$$

Символическая запись этого определения такова:

$$+\infty \neq \lim_{x \to a} f(x) : \Leftrightarrow \exists M > 0 \forall \delta > 0\, \exists x(\delta) \in X = D(f):$$
$$((|x(\delta) - a| < \delta) \wedge (f(x(\delta)) < M)). \tag{5.45}$$

Если для некоторой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, принадлежащих области допустимых значений аргумента $X = D(f)$ функции $y = f(x)$, при $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0$ существует предел $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = A$, то он называется *частичным пределом* функции в точке x_0. Наибольший и наименьший частичные пределы в точке x_0 называются соответственно верхним и нижним пределом функции $f(x)$ в точке a и обозначаются $\overline{\lim\limits_{x \to a}} f(x)$ и $\underline{\lim\limits_{x \to a}} f(x)$.

5.7.2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ

Предел постоянной функции равен ее значению.

Если существуют пределы $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A, \lim\limits_{x \to a} q(x) = B$, где $A \in \overline{R}, a \in \overline{R}, B \in \overline{R}$, то

1) предел суммы или разности равен соответственно сумме или разности пределов:

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)=A\pm B; \qquad (5.46)$$

2) предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)=A\cdot B. \qquad (5.47)$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

$$\lim_{x\to a}(C\cdot f(x))=C\cdot\lim_{x\to a}f(x),\ \text{где } C=\text{const}; \qquad (5.48)$$

3) при отличном от нуля пределе знаменателя

$$\lim_{x\to a}g(x)=B\neq 0$$

предел частного равен частному от пределов:

$$\lim_{x\to a}(f(x)/g(x))=\lim_{x\to a}f(x)/\lim_{x\to a}g(x)=A/B; \qquad (5.49)$$

4) если в некоторой δ-окрестности точки a (за исключением, быть может, самой точки a) заданы функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ и справедливо двойное неравенство $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$ и, кроме того, существуют равные пределы для крайних функций этого двойного неравенства

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}h(x),$$

то существует предел для центральной функции двойного неравенства, равный пределу крайних функций

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}h(x)=\lim_{x\to a}g(x);$$

5) если существуют

$$\lim_{x\to a}f(x)=b \text{ и } \lim_{y\to b}F(y)$$

и в некоторой проколотой окрестности точки b $f(x)\neq b$, тогда в точке a существует предел сложной функции $F(f(x))$:

$$\lim_{x\to a}F(f(x))=\lim_{y\to b}F(y).$$

5.7.3. БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ И БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ

Функция $y=f(x)$ называется положительной бесконечно большой в точке $x=a$ (при $x\to a$), где $a\in\overline{R}$, если для любого сколь угодно большого положительного числа $M>0$ существует зависящая только от M окрестность

$U_M(a) \in X = D(f)$ точки a такая, что $f(x) > M$ для всех $x \in U_M(a)$ или

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty. \tag{5.50}$$

Функция $y = f(x)$ называется отрицательной бесконечно большой в точке $x = a$ (при $x \to a$), где $a \in \overline{R}$, если для любого сколь угодно большого по модулю отрицательного числа $M < 0$ существует зависящая только от M окрестность $U_M(a) \in X = D(f)$ точки a, такая, что $f(x) < M$ для всех $x \in U_M(a)$ или

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty. \tag{5.51}$$

Функция $y = f(x)$ называется объединенной бесконечно большой в точке $x = a$ (при $x \to a$), где $a \in \overline{R}$, если для любого сколь угодно большого положительного числа $M > 0$ существует зависящая только от M окрестность $U_M(a) \in X = D(f)$ точки a такая, что $|f(x)| > M$ для всех $x \in U_M(a)$ или

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty. \tag{5.52}$$

Положительная, отрицательная и объединенная бесконечно большие функции сокращенно называются бесконечно большими.

Функция $y = f(x)$ называется положительной бесконечно малой в точке $x = a$ (при $x \to a$), где $a \in \overline{R}$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует зависящая только от ε проколотая δ-окрестность $U_\delta(a) \in X = D(f)$ точки a такая, что $0 < f(x) < \varepsilon$ для всех $x \in U_\delta(a)$ или

$$\lim_{x \to a} f(x) = +0. \tag{5.53}$$

Функция $y = f(x)$ называется отрицательной бесконечно малой в точке $x = a$ (при $x \to a$), где $a \in \overline{R}$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует зависящая только от ε проколотая δ-окрестность $U_\delta(a) \in X = D(f)$ точки a такая, что $-\varepsilon < f(x) < 0$ для всех $x \in U_\delta(a)$ или

$$\lim_{x \to a} f(x) = -0. \tag{5.54}$$

Функция $y = f(x)$ называется объединенной бесконечно малой в точке $x = a$ (при $x \to a$), где $a \in \overline{R}$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует зависящая только от ε проколотая δ-окрестность $\overset{\circ}{U}_\delta(a) \in X = D(f)$ точки a такая, что $|f(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ или

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0. \tag{5.55}$$

Положительная, отрицательная и объединенная бесконечно малая функции сокращенно называются бесконечно малыми.

5.7.4. СВОЙСТВА БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИХ ФУНКЦИЙ

1. Если функция $y = f(x)$ бесконечно большая при $x \to a$, где $a \in \overline{R}$, то функция $1/f(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$.

2. Если функция $y = f(x)$ бесконечно малая при $x \to a$, где $a \in \overline{R}$, то функция $1/f(x)$ является бесконечно большой при $x \to a$.

3. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций при $x \to a$, где $a \in \overline{R}$, является бесконечно малой функцией.

Замечание. Для бесконечно больших функций в общем случае аналогичная теорема несправедлива.

4. Произведение бесконечно малой при $x \to a$ $(a \in \overline{R})$ функции на ограниченную является бесконечно малой функцией.

5. Произведение конечного числа бесконечно больших функций при $x \to a$, где $a \in \overline{R}$, является бесконечно большой функцией.

6. Произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x \to a$, где $a \in \overline{R}$, является бесконечно малой функцией.

7. Если функция $y = f(x)$ имеет при $x \to a$, где $a \in \overline{R}$, предел, равный A, то $(f(x) - A)$ есть бесконечно малая при $x \to a$.

8. Если функция $y = f(x)$ представима при $x \to a$, где $a \in \overline{R}$ в виде $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая, то

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

9. Всякая бесконечно большая функция при $x \to a$ является неограниченной.

5.7.5. ДВА ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ПРЕДЕЛА

Первый замечательный предел раскрывает неопределенность типа «0/0»:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (5.56)$$

Второй замечательный предел раскрывает неопределенность типа «1^{∞}»:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^{x}=e\approx 2{,}71828\ldots \qquad (5.57)$$

Число e — иррациональное число, основание натуральных логарифмов

$$\log_e x=\ln x. \qquad (5.58)$$

5.7.6. НЕКОТОРЫЕ СПОСОБЫ РАСКРЫТИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

1. Раскрытие неопределенности типа «∞/∞» при $x\to\infty$ ($x\to\pm\infty$), когда под знаком предела находится отношение степенных многочленов.

Рекомендация. Необходимо разделить и числитель, и знаменатель на аргумент в старшей степени и воспользоваться теоремами, суть которых отражена формулами (5.46), (5.48), (5.49).

В результате получится, если и в числителе, и знаменателе многочлены записаны в приведенной форме,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0}=\begin{cases}0, & m<n,\\ a_m/b_n, & m=n,\\ \infty, & m>n.\end{cases}$$

2. Раскрытие неопределенности типа «0/0» при $x\to a$, когда под знаком предела находится отношение бесконечно малых многочленов.

Рекомендация. Необходимо разложить многочлены в числителе и знаменателе на множители, произвести сокращение на $(x-a)$ и воспользоваться теоремами, суть которых отражена формулами (5.46), (5.48), (5.49):

$$\lim_{x\to a}\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)^k P_{m-k}(x)}{(x-a)^j Q_{n-j}(x)}=$$

$$=\begin{cases}0, & k>j,\\ P_{m-k}(a)/Q_{n-j}(a), & k=j,\\ \infty\cdot\operatorname{sign}(P_{m-k}(a)/Q_{n-j}(a)), & k<j.\end{cases}$$

3. Раскрытие неопределенности типа «0/0» при $x \to a$ ($a \in \bar{R}$), когда под знаком предела находится отношение, содержащее иррациональности.

Рекомендация. Необходимо и числитель, и знаменатель умножить и разделить на величины, сопряженные каждой иррациональности, произвести сокращение одинаковых выражений и воспользоваться теоремами, суть которых отражена формулами (5.46), (5.48), (5.49). Выпишем некоторые взаимно сопряженные иррациональности:

$$\sqrt{\theta(x)} \pm A \leftrightarrow \sqrt{\theta(x)} \mp A,$$

$$\sqrt[3]{\theta(x)} \pm A \leftrightarrow \sqrt[3]{\theta^2(x)} \mp A\sqrt[3]{\theta(x)} + A^2.$$

4. Раскрытие неопределенности типа «0/0» при $x \to a$ ($a \in \bar{R}$), когда под знаком предела функции $\sin\alpha(x)$, $\operatorname{tg}\alpha(x)$, $\arcsin\alpha(x)$, $\operatorname{arctg}\alpha(x)$, $1-\cos 2\alpha(x)$ от бесконечно малого аргумента $\alpha(x)$ при $x \to a$ ($a \in \bar{R}$).

Рекомендация. Необходимо каждую функцию дополнить до отношения, которое находится под знаком предела в первом замечательном пределе (5.56) (путем умножения и деления на одну и ту же величину).

5. Раскрытие неопределенности типа «1^∞», когда под знаком предела при $x \to a$ ($a \in \bar{R}$) можно выделить величину $(f(x))^{g(x)}$, где $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$.

Рекомендация. Необходимо представить функцию $f(x)$ в виде $1 + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$, переписать выражение $(f(x))^{g(x)}$ в следующем виде:

$$(f(x))^{g(x)} = ((1+\alpha(x))^{1/\alpha(x)})^{\alpha(x)g(x)}$$

и воспользоваться вторым замечательным пределом (5.57).

6. Раскрытие неопределенности типа «∞/∞», когда под знаком предела имеется отношение степенного многочлена к алгебраической сумме показательных функций с основаниями, большими единицы.

Рекомендация. Необходимо вынести за скобки старшую степень x из степенного многочлена, показательную функцию с наибольшим основанием — из алгебраической суммы показательных функций, воспользоваться теоремами, суть которых отражена формулами (5.46), (5.48), (5.49), и результатом задачи 5:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n c_n^x + b_{n-1}c_{n-1}^x + \ldots + b_1 c_1^x + b_0} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^m(a_m + a_{m-1}x^{-1} + \ldots + a_1 x^{1-m} a_0 x^{-m})}{c_n^x(b_n + b_{n-1}(c_{n-1}/c_n)^x + \ldots + b_1(c_1/c_n)^x + b_0(1/c_n)^x)} = 0.$$

7. Раскрытие неопределенности типа «∞/∞», когда под знаком предела находится отношение многочлена по степеням x и алгебраической суммы логарифмов с основаниями, большими единицы.

Рекомендация. Необходимо вынести за скобки старшую степень x из степенного многочлена, логарифмическую функцию с наибольшим основанием — из алгебраической суммы логарифмических функций, воспользоваться теоремами, суть которых отражена формулами (5.46), (5.48), (5.49), и результатом задачи 5:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n \log_{c_n} x + b_{n-1}\log_{c_{n-1}} x + \ldots + b_1 \log_{c_1} x + b_0} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^m(a_m + a_{m-1}x^{-1} + \ldots + a_1 x^{1-m} + a_0 x^{-m})}{\log_{c_n} x(b_n + (b_{n-1}\log_{c_{n-1}} x + \ldots + b_1 \log_{c_1} x + b_0)/\log_{c_n} x)} = \infty.$$

8. Раскрытие неопределенности типа «$\infty \cdot 0$».

Рекомендация. Раскрытие неопределенности типа «$\infty \cdot 0$» заключается в сведении ее к неопределенности типа «∞/∞» или «$0/0$» с помощью алгебраических преобразований выражения под знаком предела. Пусть $a \in \overline{R}$ и

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \lim_{x\to a} g(x) = 0,$$

тогда

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} f(x)/(1/g(x)).$$

9. Раскрытие неопределенности типа «0^0».

Рекомендация. Раскрытие неопределенности типа «0^0» заключается в сведении ее к неопределенности типа «∞/∞» или «$0/0$» с помощью алгебраических преобразований выражения под знаком предела. Пусть $a \in \bar{R}$ и

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0, \lim_{x \to a} g(x) = 0,$$

тогда

$$\lim_{x \to a} (f(x))^{g(x)} = \lim_{x \to a} \exp(g(x) \ln f(x)) = \lim_{x \to a} \exp(g(x)/(1/\ln f(x)))$$

или

$$\lim_{x \to a} (f(x))^{g(x)} = \lim_{x \to a} \exp(g(x) \ln f(x)) = \lim_{x \to a} \exp(\ln f(x)/(1/g(x))).$$

5.7.7. СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИХ, ТАБЛИЦЫ ОСНОВНЫХ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ВЕЛИЧИН

Функции $f(x)$ и $g(x)$, для которых

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \text{ и } \lim_{x \to a} g(x) = 0,$$

называются бесконечно малыми одного порядка при $x \to a$, если существует отличный от нуля конечный предел их отношения. Символически это записывают:

$$f(x) \underset{x \to a}{=} O(g(x))$$

(символ O читается «О большое»).

Символ O обладает следующими свойствами.

1. $f(x) \underset{x \to a}{=} O(g(x)) \Leftrightarrow g(x) \underset{x \to a}{=} O(f(x)).$

2. $f(x) \underset{x \to a}{=} O(g(x)) \wedge g(x) \underset{x \to a}{=} O(\varphi(x)) \Rightarrow f(x) \underset{x \to a}{=} O(\varphi(x)).$

Функция $f(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка малости по сравнению с функцией $g(x)$ при $x \to a$, если существует равный нулю предел их отношения.

Символически это записывается:

$$f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$$

(символ o читается «о малое»)

$$\Leftrightarrow \exists \lim_{x\to a}(f(x)/g(x)) = 0. \qquad (5.59)$$

При этом функция $g(x)$ называется бесконечно малой более низкого порядка (соответственно $f(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка).

Справедливы следующие теоремы.

1. Произведение любого конечного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ и отличных от нуля в некоторой выколотой окрестности точки a есть при $x \to a$ бесконечно малая функция более высокого порядка по сравнению с каждым сомножителем.

2. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются несравнимыми бесконечно малыми при $x \to a$, если не существует ни конечного, ни бесконечного предела их отношения. Функция $f(x)$ называется бесконечно малой k-го порядка малости относительно $g(x)$ при $x \to a$, а число k — порядком малости, если $f(x)$ и $(g(x))^k$ — бесконечно малые одного порядка: $f(x) = O(g(x))^k$.

Бесконечно малые при $x \to a$ функции $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми при $x \to a$, если предел их отношения при $x \to a$ равен единице.

Символически это записывается:

$$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to a}(f(x)/g(x)) = 1. \qquad (5.60)$$

СВОЙСТВА ЭКВИВАЛЕНТНЫХ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ФУНКЦИЙ

1) $f(x) \sim g(x) \Rightarrow (f(x) - g(x) \underset{x\to a}{=} (f(x)) \wedge f(x) - g(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)))$; (5.61)

2) пусть $f(x) \sim g(x)$, а функция $u(z) \neq 0$ для $\forall z \in U(b)$ и $\lim\limits_{z\to b} u(z) = a$, тогда $f(u(z)) \sim g(u(z))$.

Пусть

$$V_n(x), n = \overline{1, N}$$

— бесконечно малые функции при $x \to a$,

$$S(x)=\sum_{k=1}^{N}V_k(x)$$

— их сумма, которая также бесконечно малая функция при $x\to a$. Если

$$V_k(x)\underset{x\to a}{=}o(V_1(x))$$

при $\forall k=\overline{2,N}$, то $V_1(x)$ называется главной частью суммы $S(x)$ бесконечно малых функций $V_n(x)$.

Замечание. Если в сумме содержатся несравнимые слагаемые, то их главную часть определить не удается.

Справедливы следующие свойства бесконечно малых, для суммы которых можно выделить главную часть.

1. Если сумма

$$S(x)=\sum_{k=1}^{N}V_k(x)$$

конечного числа бесконечно малых при $x\to a$ функций $V_n(x), n=\overline{1,N}$ имеет главную часть $V_j(x)$, то $S(x)\sim V_j(x)$.

2. $\exists U_\delta(a)$, что при $\forall x\in U_\delta(a)$ сумма

$$S(x)=\sum_{k=1}^{N}V_k(x)$$

бесконечно малых при $x\to a$ функций $V_n(x), n=\overline{1,N}$ сохраняет знак своей главной части.

ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, тогда

$$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x),$$

$$\sqrt[\beta]{1+\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)/\beta,$$

$$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x),$$

$$\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x),$$

$$\operatorname{arctg}\alpha(x)\sim\alpha(x),$$

$$1-\cos\alpha(x)\sim\alpha^2(x)/2,$$

$$a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\cdot\ln a,$$

$$\log_a(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)/\ln a.$$

При раскрытии неопределенности типа «0/0» используется следующее утверждение, позволяющее применять таблицу эквивалентных бесконечно малых функций.

Предел отношения двух бесконечно малых функций $x \to a$ равен пределу отношений эквивалентных им величин, т. е.

$$(f(x) \sim u(x) \wedge g(x) \sim v(x)) \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{u(x)}{v(x)}.$$

5.7.8. СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИХ ФУНКЦИЙ

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$, где $a \in \overline{R}$, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \text{ или } \lim_{x \to a} f(x) = -\infty \text{ или } \lim_{x \to a} f(x) = \infty. \quad (5.62)$$

Две функции $f(x)$ и $g(x)$ называются бесконечно большими одного порядка при $x \to a$, где $a \in \overline{R}$, если предел их отношения существует, конечен и отличен от нуля. Символически это записывают:

$$f(x) \underset{x \to a}{=} O(g(x))$$

(символ O читается «O большое»).

Символ O обладает следующими свойствами:

$$1)\ f(x) \underset{x \to a}{=} O(g(x)) \Leftrightarrow g(x) \underset{x \to a}{=} O(f(x)); \quad (5.63)$$

$$2)\ f(x) \underset{x \to a}{=} O(g(x)) \wedge g(x) \underset{x \to a}{=} O(\varphi(x)) \Rightarrow f(x) \underset{x \to a}{=} O(\varphi(x)).$$

Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются несравнимыми бесконечно большими при $x \to a$, если не существует ни конечного, ни бесконечного предела их отношения.

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой более низкого порядка роста по сравнению с функцией $g(x)$ при $x \to a$, а функция $g(x)$ — бесконечно большой более высокого порядка роста, если существует равный нулю предел их отношения $f(x)/g(x)$. Это эквивалентно обращению в ∞, $+\infty$ или $-\infty$ предела отношения обратной величины $f(x)/g(x)$.

Символически это записывается:

$$f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$$

(символ o читается «о малое»)

$$\Leftrightarrow \exists \lim_{x\to a} f(x)/g(x)=0 \vee \exists \lim_{x\to a} f(x)/g(x) \neq \begin{cases} +\infty, \\ -\infty, \\ \infty. \end{cases}$$

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой k-го порядка относительно $g(x)$ при $x \to a$, если $f(x)$ и $(g(x))^k$ бесконечно большие одного порядка: $f(x) = O(g(x))^k$. Бесконечно большие при $x \to a$ функции $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными бесконечно большими, если предел их отношения при $x \to a$ равен единице. Символически это записывается:

$$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)/g(x)=1. \qquad (5.64)$$

Свойство эквивалентности для бесконечно больших функций при $x \to a$ симметрично:

$$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow g(x) \sim f(x), \qquad (5.65)$$

и транзитивно:

$$(f(x) \sim u(x)) \wedge (u(x) \sim g(x)) \Rightarrow f(x) \sim g(x). \qquad (5.66)$$

Справедлива следующая теорема.

Пусть $V_n(x)\,(n=\overline{1,N})$ — бесконечно большие функции при $x \to a$, а

$$S(x)=\sum_{k=1}^{N} V_k(x)$$

их сумма, которая также бесконечно большая функция при $x \to a$. Если $V_k(x) \underset{x\to a}{=} o(V_1(x))$ при $\forall k=\overline{2,N}$, то $V_1(x)$ называется главной частью суммы $S(x)$ бесконечно больших функций $V_n(x)$.

Замечание. Если в сумме содержатся несравнимые слагаемые, то их главную часть определить не удается.

Справедливы следующие свойства бесконечно малых, для суммы которых можно выделить главную часть.

1. Если сумма

$$S(x)=\sum_{k=1}^{N} V_k(x)$$

конечного числа бесконечно больших при $x \to a$ функций $V_n(x)\,(n=\overline{1,N})$ имеет главную часть $V_j(x)$, то $S(x) \sim V_j(x)$.

2. Сумма бесконечно большой функции $x \to a$ и ограниченной функции эквивалентна этой бесконечно большой.

5.8. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

5.1. Найти предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^5-6n^4+3n+5}{(n+1)^6-(n-2)^6}.$$

Решение. Прежде всего преобразуем знаменатель этой последовательности, используя формулы сокращенного умножения:

$$(n+1)^6-(n-2)^6=((n+1)^3-(n-2)^3)((n+1)^3+(n-2)^3)=$$
$$=3((n+1)^2+(n+1)(n-2)+(n-2)^2)((n+1)^2-(n+1)\times$$
$$\times(n-2)+(n-2)^2)(2n-1)=$$
$$=3(2n-1)(3n^2-3n+3)(n^2-n+7).$$

Подставим этот результат в исходный предел и разделим числитель и знаменатель дроби на n^5, после этого, отбрасывая бесконечно малые, получим требуемый предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3-6/n+3/n^4+5/n^5}{3(2-1/n)(3-3/n+3/n^2)(1-1/n+7/n^2)}=1/6.$$

5.2. Найти предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n-1}-\sqrt[3]{n^3+10}}{\sqrt{n^2+1}-\sqrt[4]{n+1}}.$$

Решение. Разделим числитель и знаменатель дроби на n. После преобразований и отбрасывания бесконечно малых величин получим требуемый результат:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n-1}-\sqrt[3]{n^3+10}}{\sqrt{n^2+1}-\sqrt[4]{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n-1}/n-\sqrt[3]{n^3+10}/n}{\sqrt{n^2+1}/n-\sqrt[4]{n+1}/n}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2/n-1/n^2}-\sqrt[3]{1+10/n^3}}{\sqrt{1+1/n^2}-\sqrt[4]{1/n^3+1/n^4}}=-1.$$

5.3. Найти предел последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{(n+2)(n+7)}-n).$$

Р е ш е н и е. Умножим и разделим общий член последовательности на $\sqrt{(n+2)(n+7)}+n$ и используем формулу сокращенного умножения:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(\sqrt{(n+2)(n+7)}-n)\cdot(\sqrt{(n+2)(n+7)}+n)}{(\sqrt{(n+2)(n+7)}+n)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{((n+2)(n+7)-n^2)}{n(\sqrt{((n+2)(n+7))/n^2}+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{9n+14}{n(\sqrt{(1+2/n)(1+7/n)}+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9+14/n}{(\sqrt{(1+2/n)(1+7/n)}+1)}=9/2.$$

5.4. Найти предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!+(n+1)!}{(n-1)!+(n+1)!}.$$

Р е ш е н и е. Из определения факториала следуют простые соотношения:

$$n!=(n-1)!\cdot n,\ (n+1)!=(n-1)!\cdot n\cdot(n+1).$$

После их подстановки и сокращения общего множителя получается

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!\cdot n+(n-1)!\cdot n\cdot(n+1)}{(n-1)!+(n-1)!\cdot n\cdot(n+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2/n}{1+1/n+1/n^2}=1.$$

5.5. Найти предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+2n+3}{2n^2-2n+5}\right)^{5-7n}.$$

Р е ш е н и е. В данном случае имеем неопределенность «1^∞»:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+2n+3}{2n^2-2n+5}\right)^{5-7n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4n-2}{2n^2-2n+5}\right)^{5-7n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{4n-2}{2n^2-2n+5}\right)^{\frac{2n^2-2n+5}{4n-2}}\right)^{\frac{(4n-2)(5-7n)}{2n^2-2n+5}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{(4-2/n)(5/n-7)}{2-2/n+5/n^2}}=$$

$$=e^{-14}\cong 0.$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ

5.6. Найти предел функции

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2x^3+6x^2+x-2}{9x^4+5x^3+7x^2+x+1}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2x^3+6x^2+x-2}{9x^4+5x^3+7x^2+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^4-2x^3+6x^2+x-2}{x^4}}{\dfrac{9x^4+5x^3+7x^2+x+1}{x^4}}=$$

$$=\frac{3-2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+6\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}-2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^4}}{9+5\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+7\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^4}}=$$

$$=\frac{3-2\cdot0+6\cdot0+0-2\cdot0}{9+5\cdot0+7\cdot0+0+0}=\frac{1}{3}.$$

5.7. Вычислить предел

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{2-x}-\frac{12}{8-x^3}\right).$$

Решение. Подстановка значения $x=2$ в выражение, стоящее под знаком предела, дает неопределенность типа «$\infty-\infty$». Для ее раскрытия приведем к общему знаменателю указанные дроби. Имеем

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{2-x}-\frac{12}{8-x^3}\right)=\lim_{x\to2}\frac{4+2x+x^2-12}{8-x^3}=\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x-8}{8-x^3}=$$

(имеем неопределенность «0/0»)

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+4)}{(2-x)(4+2x+x^2)}=-\frac{2+4}{4+4+4}=-\frac{1}{2}.$$

5.8. Вычислить предел

$$\lim_{x\to10}\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}.$$

Решение. Определяем с помощью подстановки $x=10$ в выражение под знаком предела, что в данном случае имеется неопределенность типа «0/0». Раскрываем ее умножением и делением на выражение, сопряженное числителю дроби:

$$\lim_{x\to 10}\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}=\lim_{x\to 10}\frac{(\sqrt{x-1}-3)(\sqrt{x-1}+3)}{(x-10)(\sqrt{x-1}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 10}\frac{x-10}{(x-10)(\sqrt{x-1}+3)}=\lim_{x\to 10}\frac{1}{\sqrt{x-1}+3}=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{6}.$$

5.9. Вычислить предел

$$\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}).$$

Решение. В данном случае мы имеем неопределенность типа «$\infty-\infty$». Для ее раскрытия умножим и разделим исследуемое выражение на сопряженное значение. Получим

$$\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1-x^2+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0.$$

5.10. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}6x}{\sin 3x}.$$

Решение. Для вычисления этого предела, представляющего собой неопределенность типа «0/0», лучше всего воспользоваться теоремой о замене бесконечно малых функций эквивалентными величинами.

В соответствии с этой теоремой при $x\to 0$, $\operatorname{tg}6x\sim 6x$, $\sin 3x\sim 3x$. С учетом этого имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}6x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{3x}=2.$$

5.11. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin 2x-\cos 2x}{1-\sin 2x-\cos 2x}.$$

Решение. Под знаком предела имеем неопределенность типа «0/0». Для ее раскрытия воспользуемся известными формулами тригонометрии:

$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\ 1-\cos 2x=2\sin^2 x.$$

С учетом этого получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin 2x-\cos 2x}{1-\sin 2x-\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x+2\sin x\cos x}{2\sin^2 x-2\sin x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x(\sin x+\cos x)}{2\sin x(\sin x-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}=\frac{0+1}{0-1}=-1.$$

5.12. Вычислить предел

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}.$$

Решение. Имеем неопределенность типа «0/0». В данном случае воспользоваться таблицей эквивалентных бесконечно малых функций нельзя, так как аргументы $\sin 5x$ и $\sin 2x$ при $x\to\pi$ не являются бесконечно малыми. Поэтому введем новую переменную $x-\pi=t$ и преобразуем рассматриваемый предел к новой переменной. Имеем

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(5\pi+5t)}{\sin(2\pi+2t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi+5t)}{\sin 2t}=$$

$$=-\lim_{t\to 0}\frac{\sin 5t}{\sin 2t}=-\lim_{t\to 0}\frac{5t}{2t}=-\frac{5}{2}.$$

5.13. Вычислить

$$\lim_{x\to\pi}(\pi-x)\operatorname{ctg}x.$$

Решение. Данный предел представляет собой неопределенность типа «$0\cdot\infty$». Для ее раскрытия введем новую переменную $\pi-x=t$. Тогда

$$\lim_{x\to\pi}(\pi-x)\operatorname{ctg}x=\lim_{t\to 0}t\operatorname{ctg}(\pi-t)=-\lim_{t\to 0}t\operatorname{ctg}t=-\lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{tg}t}=-1.$$

5.14. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\operatorname{arctg}4x}-\sqrt[3]{1-\operatorname{arctg}4x}}{\sqrt{1-\arcsin 3x}-\sqrt{1+\operatorname{arctg}3x}}.$$

Решение. Здесь мы имеем неопределенность типа «0/0». Для ее раскрытия заменим входящие под знак предела функции им эквивалентными.

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\operatorname{arctg}4x}-\sqrt[3]{1-\operatorname{arctg}4x}}{\sqrt{1-\arcsin 3x}-\sqrt{1+\operatorname{arctg}3x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+4x}-\sqrt[3]{1-4x}}{\sqrt{1-3x}-\sqrt{1+3x}}.$$

Устраняем неопределенность домножением и делением на соответствующие сопряженные иррациональности. Имеем теперь

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(\sqrt[3]{1+4x}-\sqrt[3]{1-4x})(\sqrt[3]{(1+4x)^2}+\sqrt[3]{1+4x}\sqrt[3]{1-4x}+\sqrt[3]{(1-4x)^2})}{(\sqrt[3]{(1+4x)^2}+\sqrt[3]{1+4x}\sqrt[3]{1-4x}+\sqrt[3]{(1-4x)^2})(\sqrt{1-3x}+\sqrt{1+3x})}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{(\sqrt{1-3x}+\sqrt{1+3x})}{(\sqrt{1-3x}-\sqrt{1+3x})}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+4x-1+4x)(\sqrt{1-3x}+\sqrt{1+3x})}{(\sqrt[3]{(1+4x)^2}+\sqrt[3]{1+4x}\sqrt[3]{1-4x}+\sqrt[3]{(1-4x)^2})(1-3x-1-3x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{8x(\sqrt{1-3x}+\sqrt{1+3x})}{-6x(\sqrt[3]{(1+4x)^2}+\sqrt[3]{1+4x}\sqrt[3]{1-4x}+\sqrt[3]{(1-4x)^2})}=$$

$$=\frac{-4}{3}\cdot\frac{1+1}{1+1+1}=-\frac{8}{9}.$$

5.15. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin 2x}-\frac{1}{\operatorname{tg}2x}\right).$$

Решение. Вычисляемый предел представляет собой неопределенность типа «$\infty-\infty$». Для ее раскрытия приведем к общему знаменателю дроби, представив предварительно $1/\operatorname{tg} 2x$ в виде $\cos 2x/\sin 2x$. Получим, выполняя указанные преобразования:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin 2x}-\frac{1}{\operatorname{tg}2x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin 2x}-\frac{\cos 2x}{\sin 2x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}=0.$$

5.16. Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx}.$$

Решение. Имеем неопределенность 1^∞. С помощью преобразований, изложенных в разделе 5.7.5 (п. 5), получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x/k}\right)^{x/k}\right)^{mk}=e^{mk}.$$

5.17. Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+1}{x^3-1}\right)^{x^3}.$$

Решение. Вычисление этого предела также связано с раскрытием неопределенности типа 1^∞. Проведем преобразования, рекомендованные в разделе 5.7.5 (пункт 5). Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+1}{x^3-1}\right)^{x^3}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{(x^3-1)/2}\right)^{(x^3-1)/2}\right)^{\frac{x^3}{(x^3-1)/2}}=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{(x^3-1)/2}\right)^{(x^3-1)/2}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{(x^3-1)/2}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3}{x^3-1}}=e^{2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1-1/x^3}}=e^2.$$

Здесь мы воспользовались непрерывностью композиции непрерывных функций.

5.18. Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{2-x}}.$$

Решение. Этот предел не является неопределенностью, так как при

$$x\to\infty\ \frac{4x^2-x+1}{2x^2+x+1}\to 2,\ \text{а}\ \frac{x^3}{2-x}\sim -x^2\to-\infty.$$

Следовательно:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{2-x}}=\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{3x-1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{2-x}}=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{3x-1}{2x^2+x+1}\right)\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{2-x}}=2^{-\infty}=0.$$

5.19. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 2\mp 0}\operatorname{arctg}\frac{1}{2-x}.$$

Решение. При $x\to 2-0$ величина $1/(2-x)\to+\infty$, так как условие $x\to 2-0$ означает, что x стремится к 2 слева, т. е. остается все время меньше 2.

Тогда $\operatorname{arctg}(1/(2-x)) \to \pi/2$. Таким образом,

$$\lim_{x\to 2-0} \operatorname{arctg}\frac{1}{2-x} = \frac{\pi}{2}.$$

Аналогично, при $x \to 2+0$ величина $1/(2-x) \to -\infty$, так как x больше 2 при указанном предельном переходе. Тогда $\operatorname{arctg}(1/(2-x)) \to -\pi/2$. Таким образом,

$$\lim_{x\to 2+0} \operatorname{arctg}\frac{1}{2-x} = -\frac{\pi}{2}.$$

5.20. Вычислить пределы

$$\lim_{x\to 0\pm 0} \frac{1}{1+3^{2/x}}.$$

Р е ш е н и е. При $x \to 0+0$ ($x \to +0$) величина $2/x \to +\infty$. Тогда $3^{2/x} \to 0$. Следовательно, $1/(1+3^{2/x}) \to 0$. Таким образом,

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{1+3^{2/x}} = 0.$$

Рассуждая аналогично, получим, что при $x \to 0-0$ ($x \to -0$) величина $2/x \to -\infty$, тогда $3^{2/x} \to -\infty$, следовательно, $1/(1+3^{2/x}) \to 1$. Таким образом,

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{1}{1+3^{2/x}} = 1.$$

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

5.21. Исследовать непрерывность функции

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 3-x, & \text{если } 1 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Непрерывность данной функции может нарушаться только в точке 1. На промежутках $[0, 1)$ и $(1, 4]$ функция непрерывна. Исследуем непрерывность функции в точке 1. Напомним, что если функция непрерывна в точке a, то должны выполняться условия

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a).$$

В данном случае $f(1) = 4x = 4$.

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} 4x = 4; \quad \lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} (3-x) = 2.$$

Таким образом, нарушается условие равенства односторонних пределов (т. е. предел в точке 1 не существует). Следовательно, рассматриваемая функция не является непрерывной в точке 1.

5.22. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} e^{3x}, & \text{если } x<0, \\ a+5x, & \text{если } x\geqslant 0. \end{cases}$$

При каком выборе числа a функция $f(x)$ будет непрерывной?

Р е ш е н и е. Запишем условие непрерывности функции в точке $x = 0$, где она пока не является непрерывной в силу произвольности числа a. Имеем

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0+0} f(x)=f(0).$$

В данном случае

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0} e^{3x}=e^0=1;$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0-0} (a+5x)=a;$$

$$f(0)=(a+5x)\big|_{x=0}=a.$$

Для непрерывности в точке $x = 0$ должно выполняться условие $a = 1$.

5.23. Исследовать функцию

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{если } |x|\leqslant 1, \\ 1, & \text{если } |x|>1 \end{cases}$$

на непрерывность и выяснить характер точек разрыва.

Р е ш е н и е. Нарушение непрерывности в данном случае возможно в точках $x = \pm 1$. Имеем в точке $x = 1$

$$\lim_{x\to 1-0} x^3=1,\ \lim_{x\to 1+0} 1=1, f(1)=1 \Rightarrow$$

в точке $x = 1$ функция непрерывна. Исследуем точку $x = -1$. Имеем

$$\lim_{x\to -1-0} f(x)=\lim_{x\to -1-0} 1=1;\quad \lim_{x\to -1+0} f(x)=\lim_{x\to -1+0} x^3=-1;\quad f(-1)=-1.$$

Таким образом, нарушается одно из условий непрерывности. Следовательно, в точке $x = -1$ функция имеет разрыв 1-го рода, так как существуют, но не равны между собой односторонние пределы функций в этой точке.

5.24. Исследовать функцию

$$f(x)=\frac{5^{1/x}}{1+5^{1/x}}$$

на непрерывность и выяснить характер точек разрыва.

Решение. Функция определена всюду, за исключением точки $x=0$. Исследуем поведение функции в окрестности точки $x=0$. Найдем односторонние пределы

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\frac{5^{1/x}}{1+5^{1/x}}=0,$$

так как при $x\to 0-0$, т. е. слева от нуля, $1/x\to -\infty \Rightarrow 5^{1/x}\to 0$.

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\frac{5^{1/x}}{1+5^{1/x}}=\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{5^{-1/x}+1}=1,$$

так как при $x\to 0+0$ $1/x\to +\infty$ $5^{-1/x}\to 0$.

Таким образом, односторонние пределы функции в точке $x=0$ существуют, но не равны между собой. Следовательно, в точке $x=0$ функция $f(x)$ имеет разрыв первого рода.

5.25. Исследовать функцию

$$f(x)=\frac{\sin 3x}{x}$$

на непрерывность и выяснить характер точек разрыва.

Решение. Односторонние пределы этой функции существуют и равны 3:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin t}{t}=3$$

(сделана замена $3x=t$).

В самой точке $x=0$ функция не определена. Таким образом, в точке $x=0$ имеем устранимый разрыв. Он устраняется доопределением данной функции значением 3 в точке $x=0$. Новая функция

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{x}, & x\neq 0\\ 3, & x=0\end{cases}$$

будет уже непрерывна в точке $x=0$.

5.26. Исследовать функцию $f(x)=e^{-\frac{2}{(x-1)}}$ на непрерывность и выяснить характер разрыва.

Решение. Функция определена всюду, кроме точки $x=1$. В этой точке односторонние пределы равны

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0} e^{-\frac{2}{x-1}}=\infty,$$

так как при $x \to 1-0$ $-2/(x-1) \to +\infty$ и

$$e^{-\frac{2}{x-1}} \to \infty \quad \lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0} e^{-\frac{2}{x-1}}=0,$$

так как при $x \to 1+0$ $-2/(x-1) \to -\infty$ и $e^{-\frac{2}{x-1}} \to 0$.

Предел слева в точке $x=1$ равен бесконечности, следовательно, в точке $x=1$ функция

$$e^{-\frac{2}{x-1}}$$

имеет разрыв второго рода.

5.27. Функция $f(x)$ не определена при $x=0$. Определить число $f(0)$ так, чтобы $f(x)$ была непрерывна при $x=0$, если

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt{4+x}-2}.$$

Решение. Найдем предел $f(x)$ в точке $x=0$.
Имеем

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt{4+x}-2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{1+x}-1)(\sqrt{4+x}+2)(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)}{(\sqrt{4+x}-2)(\sqrt{4+x}+2)(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x-1)(\sqrt{4+x}+2)}{(4+x-4)(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}+2}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}=\frac{4}{3}.$$

Данная функция будет непрерывной в точке $x=0$, если положить $f(0)=4/3$.

5.9. ЗАДАЧИ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

5.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2n^2+1}{3n^2}$

5.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2n^3+10n^2-1}{5n^2+4n}$

5.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2n+1)^4-(3n-1)^4}{(3n-1)^4+(2n+1)^4}$

5.31. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{n^5+3n-4}}{n+3}$

5.32. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{n^4+4}-\sqrt[4]{n^5+1}}{\sqrt[5]{3n^4+5}+\sqrt[4]{n^5+1}}$

5.33. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+1}-n)^2}{\sqrt[3]{n^6+7}}$

5.34. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n!}{2(n+1)!-3n!}$

5.35. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2(n+3)!+(n+2)!}{4(n+3)!-(n+2)!}$

5.36. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3}n}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{4}n}$

5.37. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{2n^2}$

5.38. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+4}-n\right)$

5.39. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\ldots+\dfrac{1}{n(n-1)}\right)$

5.40. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-1)(3n+1)}\right)$

5.41. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4^n-2}{4^n+2}$

5.42. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^{\frac{1}{n}}-1}{3^{\frac{1}{n}}+2}$

5.43. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{n^3+2}\cdot\sin(n^3+2)}{n+1}$

5.44. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt[3]{8n^3+1}}$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ

5.45. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+8}{x^3-4}$

5.46. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x^4+3x^2+4}{x+2}+3\right)$

5.47. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x}{x-2}$

5.48. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^3-9x}$

5.49. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-2x^2-x+2}$

5.50. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{27x^3-1}{3x^2+2x-1}$

5.51. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-2x^2-x+2}$

5.52. $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{12}{8-x^3}\right)$

5.53. $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{3x+6}{x^2-5x+4}+\dfrac{x-4}{x^2-3x+2}\right)$

5.54. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^n-1}{x^m-1}$, m, n — целые числа

5.55. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+7}{x^3-9x^2+2x-4}$

5.56. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x^2+3}{x^2+5x+2}$

5.57. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-2x^4+3x^2+4x+2}{x^6+7x^5+8x^4+2x+9}$

5.58. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+3x-4x^3}{1+x^2-2x^3}$

5.59. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^4}{x^3+3x^2+1}-x+1\right)$

5.60. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{4x^2-1}-\dfrac{x^2}{4x+1}\right)$

5.61. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^5+(x+2)^5+\ldots+(x+10)^5}{x^5+10^5}$

5.62. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^3}-1}{x^3}$

5.63. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^3+1}+\sqrt[3]{x^2+4}}{\sqrt[5]{x^5+1}-\sqrt[4]{x^6+7}}$

5.64. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}-1}$

5.65. $\lim\limits_{x\to 11}\dfrac{\sqrt{x-2}-3}{x-11}$

5.66. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-8\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$

5.67. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$

5.68. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+h}-\sqrt[3]{1-h}}{h}$

5.69. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{x+1}-1}{\sqrt[n]{x+1}-1}$

5.70. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1+2x}}{2x+x^2}$

5.71. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{56+x^3}-\sqrt{12+x^2}}{x-2}$

5.72. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-4})$

5.73. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$

5.74. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{(x+1)(x+2)}-x)$

5.75. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2-5x+6}-\sqrt{x^2-3x+2})$

5.76. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{3/2}(\sqrt{x^3+3}-\sqrt{x^3-3})$

5.77. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$

5.78. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\alpha x^2)}{\sin(\beta x^2)}$

5.79. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha x)}{\sin(\beta x)}$

5.80. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\arcsin(2x)}{\sin(2x)}$

5.81. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2-\arcsin(3x^2)}{x^2+\operatorname{arctg}x^2}$

5.82. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^4}$

5.83. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3(2x)}{x\arcsin(2x)}$

5.84. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x^2)^2x^3}{\operatorname{tg}^3x^2-\sin^3x^2}$

5.85. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin(3x)}-\dfrac{1}{\operatorname{tg}(3x)}\right)$

5.86. $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x+1}{\left(\frac{\pi}{2}+x\right)^2}$

5.87. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin(5x)}{\sin(3x)}$

5.88. $\lim\limits_{x\to \pi}(\pi-x)\operatorname{ctg}x$

5.89. $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{4}}\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos(2x)}$

5.90. $\lim\limits_{x\to -\pi}\dfrac{1+\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{4}+\sin\frac{x}{4}\right)}$

5.91. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\alpha x^2)-\cos(\beta x^2)}{x^4}$

5.92. $\lim\limits_{x\to y}\dfrac{\sin^2(2x)-\sin^2(3y)}{4x^2-9y^2}$

5.93. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{3+\cos x}}{\sin^2 x}$

ГЛАВА 6

ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

6.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Определение 6.1. Производной функции $y = f(x_0)$ в данной фиксированной точке x_0 называется предел отношения приращения функции $\Delta y(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ к приращению аргумента $\Delta x = x - x_0$ при стремлении приращения аргумента к нулю и если такой предел существует (конечный или бесконечный):

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x}.$$

Символическое изображение производной может быть и таким: $dy/(dx)$, или $\dot{y}(x)$, или $y'_x(x)$ (здесь индекс указывает, по какой переменной находится производная).

Операция нахождения производной называется дифференцированием.

Геометрический смысл производной заключается в следующем. Производная $f'_x(x_0)$ в точке $(x_0;\ f(x_0))$ численно равна тангенсу того угла, который образует касательная к кривой $y = f(x)$ в этой точке с положительным направлением оси абсцисс.

Механический смысл производной заключается в следующем. Производная пути $s(t)$ по времени t движущейся прямолинейно материальной точки равна мгновенной скорости этой точки: $s'_x(t) = v_{\text{мгн}}$.

Определение 6.2. Пределы (конечные или бесконечные)

$$y'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x},\ y'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x}$$

называются соответственно левой и правой производными функции $y = f(x)$ в данной фиксированной точке x_0.

Определение 6.3. Если функция $y = f(x)$ имеет разрыв первого рода в точке x_0, то выражения

$$y'_-(x_0 - 0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x},$$

$$y'_+(x_0 + 0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x}$$

называются соответственно левой и правой в расширенном смысле производными функции $y = f(x)$ в данной фиксированной точке x_0.

Определение 6.4. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в данной фиксированной точке x, если ее приращение $\Delta y(x)$ может быть представлено в виде $\Delta y(x) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)$, где A — конечное число, а

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0.$$

Определение 6.5. Дифференциалом функции $y = f(x)$ в данной фиксированной точке x называется величина, обозначаемая $dy(x)$ и определяемая следующим образом: $dy(x) = A\Delta x$, здесь A — конечное число, $A\Delta x$ — главная линейная относительно приращения аргумента Δx часть приращения функции $\Delta y(x) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)$, а

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0.$$

Теорема 6.1. Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируемой в данной точке x, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную.

Следствие. В случае дифференцируемости функции $y = f(x)$ ее дифференциал находится по формуле $dy(x) = y'(x)\Delta x$. Поскольку $dx = \Delta x$, то последнее соотношение можно переписать так: $dy(x) = y'(x)dx$.

Геометрический смысл дифференциала заключается в следующем: $dy(x)$ равен приращению ординаты касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0;\ f(x_0))$, когда приращение аргумента равно $dx = \Delta x$.

6.2. ПРАВИЛА НАХОЖДЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ СУММЫ, РАЗНОСТИ, ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ЧАСТНОГО ФУНКЦИЙ

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x),$$
$$d(u(x) \pm v(x)) = du(x) \pm dv(x), \tag{6.1}$$

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x),$$
$$d(u(x) \cdot v(x)) = v(x)du(x) + u(x)dv(x), \tag{6.2}$$

в частности, постоянный множитель C можно выносить за знак производной или дифференциала

$$(C \cdot u(x))' = C \cdot u'(x), \quad d(C \cdot u(x)) = C \cdot du(x).$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}, \quad v(x) \neq 0, \\ d\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) &= \frac{v(x) \cdot du(x) - u(x) \cdot dv(x)}{v^2(x)}, \quad v(x) \neq 0. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Здесь предполагалось, что все производные или дифференциалы, формирующие и левые, и правые части равенств (6.1)–(6.3), существуют и конечны.

6.3. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ. ПРОИЗВОДНЫЕ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ, ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ. ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

Теорема 6.2. Пусть функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема в некоторой точке t_0, а функция $y = f(x)$ дифференцируема в соответствующей точке $x_0 = \varphi(t_0)$, тогда сложная двухзвенная функция $f(\varphi(t))$ дифференцируема в точке t_0 и ее производная по t равна произведению производной первого звена по второму с сохранением его аргумента на производную второго звена по t, т. е.

$$f'_t(\varphi(t_0)) = f'_\varphi(\varphi(t_0))\varphi'_t(t_0).$$

Теорема 6.3. Пусть функция $y = f(x)$ строго монотонна и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0. Пусть, кроме того, функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и производная $f'_x(x_0) \neq 0$. Тогда существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, которая определена в некоторой окрестности точки $y_0 = f(x_0)$, дифференцируема в этой точке и имеет производную, равную $1/(f'(x_0))$.

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

1. $(C = \text{const})' = 0.$ (6.4)

2. $((x(t))^n)'_t = n(x(t))^{n-1} \cdot x'_t(t),$ (6.5)

$n = \text{const}, \quad (\sqrt{x(t)})'_t = \dfrac{1}{2\sqrt{x(t)}} \cdot x'_t(t).$

3. $(a^{x(t)})'_t = a^{x(t)} \cdot \ln a \cdot x'_t(t),$

$a = \text{const} > 0, \quad a \neq 1, \quad (e^{x(t)})'_t = e^{x(t)} \cdot x'_t(t).$ (6.6)

4. $(\log_a(x(t)))'_t = \dfrac{1}{x(t)\ln a} \cdot x'_t(t),$ (6.7)

$a = \text{const} > 0, \quad a \neq 1, \quad (\ln(x(t)))'_t = \dfrac{1}{x(t)} \cdot x'_t(t).$

5. $(\sin(x(t)))'_t = \cos(x(t)) \cdot x'_t(t).$ (6.8)

6. $(\cos(x(t)))_t' = -\sin(x(t)) \cdot x'_t(t).$ (6.9)

7. $(\operatorname{tg}(x(t)))'_t = \dfrac{1}{\cos^2(x(t))} \cdot x'_t(t).$ (6.10)

8. $(\operatorname{ctg}(x(t)))'_t = -\dfrac{1}{\sin^2(x(t))} \cdot x'_t(t).$ (6.11)

9. $(\arcsin(x(t)))'_t = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x(t))^2}} \cdot x'_t(t).$ (6.12)

10. $(\arccos(x(t)))'_t = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(x(t))^2}} \cdot x'_t(t).$ (6.13)

11. $(\operatorname{arctg}(x(t)))'_t = \dfrac{1}{1+(x(t))^2} \cdot x'_t(t).$ (6.14)

12. $(\operatorname{arcctg}(x(t)))'_t = -\dfrac{1}{1+(x(t))^2} \cdot x'_t(t).$ (6.15)

13. $(\mathrm{sh}(x(t)))'_t = \mathrm{ch}(x(t)) \cdot x'_t(t).$ (6.16)

14. $(\mathrm{ch}(x(t)))'_t = \mathrm{sh}(x(t)) \cdot x'_t(t).$ (6.17)

15. $$(\mathrm{th}(x(t)))'_t = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x(t))} \cdot x'_t(t). \quad (6.18)$$

16. $$(\mathrm{cth}(x(t)))'_t = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x(t))} \cdot x'_t(t). \quad (6.19)$$

17. $$(\mathrm{Arsh}(x(t)))'_t = \frac{1}{\sqrt{1+(x(t))^2}} \cdot x'_t(t). \quad (6.20)$$

18. $$(\mathrm{Arth}(x(t)))'_x = \frac{1}{1-(x(t))^2} \cdot x'_t(t). \quad (6.21)$$

6.4. ИНВАРИАНТНОСТЬ ФОРМЫ ПЕРВОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Теорема 6.4. Пусть функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема в некоторой точке t_0, а функция $y = f(x)$ дифференцируема в соответствующей точке $x_0 = \varphi(t_0)$, тогда первый дифференциал может быть представлен и как произведение производной по t на дифференциал по t: $dy = f'_t(x(t))dt$, и как произведение производной по x на дифференциал по x: $dy = f'_x(x)dx$. (Это свойство называется инвариантностью формы первого дифференциала.)

6.5. ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Если функция представляет собой произведение (или отношение) большого количества функций или функцию в степени функция, то удобно применять логарифмическое дифференцирование по следующим алгоритмам.

1. Если $y(x) = \varphi_1^m(x) \cdot \varphi_2^l(x) \cdot \ldots \cdot \varphi_n^k(x)$,
то $\ln(y(x)) = m\ln\varphi_1(x) + l\ln\varphi_2(x) + \ldots + k\ln\varphi_n(x)$ и по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{1}{y(x)} y'_x(x) = \frac{m}{\varphi_1(x)} \varphi'_{1x}(x) + \frac{l}{\varphi_2(x)} \varphi'_{2x}(x) + \ldots + \frac{k}{\varphi_n(x)} \varphi'_{nx}(x),$$

отсюда

$$y'_x(x) = y(x)\cdot\left(\frac{m}{\varphi_1(x)}\varphi'_{1x}(x) + \frac{l}{\varphi_2(x)}\varphi'_{2x}(x) + \ldots + \frac{k}{\varphi_n(x)}\varphi'_{nx}(x)\right),$$

подставляя вместо $y(x)$ ее выражение в виде произведения функций, получим

$$y'_x(x) = \varphi_1^m(x)\cdot\varphi_2^l(x)\cdot\ldots\cdot\varphi_n^k(x)\times$$
$$\times\left(\frac{m}{\varphi_1(x)}\varphi'_{1x}(x) + \frac{l}{\varphi_2(x)}\varphi'_{2x}(x) + \ldots + \frac{k}{\varphi_n(x)}\varphi'_{nx}(x)\right).$$

2. Если

$$y(x) = \frac{\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(x)\cdot\ldots\cdot\varphi_n(x)}{\omega_1(x)\cdot\omega_2(x)\cdot\ldots\cdot\omega_k(x)},$$

то $\ln(y(x)) = \ln\varphi_1(x) + \ln\varphi_2(x) + \ldots + \ln\varphi_n(x) - \ln\omega_1(x) - \ln\omega_2(x) - - \ldots - \ln\omega_k(x)$ и по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{1}{y(x)}y'_x(x) = \frac{1}{\varphi_1(x)}\varphi'_{1x}(x) + \frac{1}{\varphi_2(x)}\varphi'_{2x}(x) + \ldots + \frac{1}{\varphi_n(x)}\varphi'_{nx}(x) -$$
$$-\frac{1}{\omega_1(x)}\omega'_{1x}(x) - \frac{1}{\omega_2(x)}\omega'_{2x}(x) - \ldots - \frac{1}{\omega_k(x)}\omega'_{kx}(x),$$

отсюда

$$y'_x(x) = y(x)\cdot\left(\frac{1}{\varphi_1(x)}\varphi'_{1x}(x) + \frac{1}{\varphi_2(x)}\varphi'_{2x}(x) + \ldots + \frac{1}{\varphi_n(x)}\varphi'_{nx}(x) -\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\omega_1(x)}\omega'_{1x}(x) - \frac{1}{\omega_2(x)}\omega'_{2x}(x) - \ldots - \frac{1}{\omega_k(x)}\omega'_{kx}(x)\right),$$

подставляя вместо $y(x)$ ее выражение в виде отношения функций, получим

$$y'_x(x) = \frac{\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(x)\cdot\ldots\cdot\varphi_n(x)}{\omega_1(x)\cdot\omega_2(x)\cdot\ldots\cdot\omega_k(x)}\cdot\left(\frac{1}{\varphi_1(x)}\varphi'_{1x}(x) + \frac{1}{\varphi_2(x)}\varphi'_{2x}(x) + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \frac{1}{\varphi_n(x)}\varphi'_{nx}(x) - \frac{1}{\omega_1(x)}\omega'_{1x}(x) - \frac{1}{\omega_2(x)}\omega'_{2x}(x) - \ldots - \frac{1}{\omega_k(x)}\omega'_{kx}(x)\right).$$

3. Если $y(x) = [\varphi_1(x)]^{\varphi_2(x)}$, то $\ln(y(x)) = \varphi_2(x)\cdot\ln\varphi_1(x)$ и по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{1}{y(x)}y'_x(x) = \left(\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}\cdot\varphi'_{1x}(x) + \varphi'_{2x}(x)\cdot\ln\varphi_1(x)\right),$$

отсюда

$$y'_x(x)=y(x)\cdot\left(\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}\cdot\varphi'_{1x}(x)+\varphi'_{2x}(x)\cdot\ln\varphi_1(x)\right),$$

подставляя вместо $y(x)$ ее выражение, получим

$$y'_x(x)=[\varphi_1(x)]^{\varphi_2(x)}\cdot\left(\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}\cdot\varphi'_{1x}(x)+\varphi'_{2x}(x)\cdot\ln\varphi_1(x)\right).$$

6.6. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Пусть функция задана параметрически:

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \quad t_0\leqslant t\leqslant t_1, \end{cases}$$

тогда

$$y'_x=\frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}. \tag{6.22}$$

6.7. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Определение 6.6. Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема, тогда производная от производной этой функции называется второй производной и обозначается и вычисляется: $y''_{xx}=(f'_x(x))'$.

Механический смысл второй производной заключается в следующем. Вторая производная пути $s(t)$ по времени t движущейся прямолинейно материальной точки равна мгновенному ускорению этой точки: $s'_x(t)=a_{\text{мгн}}$.

Вторая производная от функции, заданной параметрически,

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$$

находится по одной из следующих формул:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(y'_x)'_t}{(x'_t)},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{dx}{dt}\cdot\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{d^2x}{dt^2}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2}. \tag{6.23}$$

Определение 6.7. Пусть существует производная $(n+1)$-го порядка для функции $y = f(x)$. Тогда дифференциалом $(n+1)$-го порядка называется дифференциал от дифференциала n-го порядка $d^{n+1}(f(x)) = d^n(f(x))$.

Если x — независимая переменная, то

$$d^{n+1}(f(x)) = f^{(n)}(x)dx.$$

Производные n-го порядка для основных элементарных функций:

$$\begin{aligned}
&(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n, \quad a > 0, \quad a \neq 1,\\
&(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\pi/2),\\
&(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\pi/2),\\
&(x^m)^{(n)} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n},\\
&(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!/x^n.
\end{aligned}$$

Формула Лейбница для производной n-го порядка от произведения функций:

$$\begin{aligned}
(uv)^n &= u^{(n)}v + \frac{n}{1!}u^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \ldots +\\
&+ \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots + uv^{(n)}.
\end{aligned} \tag{6.24}$$

6.8. ТЕОРЕМЫ РОЛЛЯ, ЛАГРАНЖА, КОШИ

Теорема (Ролля) 6.5. Пусть выполняются условия:

а) функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$;

б) функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$;

в) на концах отрезка функция принимает одинаковые значения $f(a) = f(b)$.

Тогда существует по крайней мере одна точка $c \in [a; b]$, в которой производная равна нулю $f'_x(c) = 0$.

Теорема (Лагранжа) 6.6. Пусть выполняются условия:

а) функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$;

б) функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$.

Тогда существует по крайней мере одна точка $c \in [a; b]$, в которой $f(b) - f(a) = f'_x(c)(b - a)$.

Теорема (Коши) 6.7. Пусть выполняются условия:

а) функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$;

б) функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ дифференцируемы на интервале $(a; b)$.

Тогда существует по крайней мере одна точка $c \in [a; b]$, в которой $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'_x(c)}{g'_x(c)}$.

6.9. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Теорема 6.8. (правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей типа «0/0»). Пусть выполняются условия:

а) функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ определены в некоторой окрестности точки a, где a — число или символы $\pm\infty$;

б) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$;

в) существуют производные $f'_x(x)$ и $g'_x(x)$ в упомянутой окрестности, за исключением, быть может, самой точки a, причем $(f'_x(x))^2 + (g'_x(x))^2 \neq 0$ при $x \neq a$;

г) существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f'_x(x)}{g'_x(x)}.$$

Тогда справедливо равенство

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'_x(x)}{g'_x(x)}.$$

Теорема 6.9. (правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей типа «∞/∞»). Пусть выполняются условия:

а) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$;

б) существуют производные $f'_x(x)$ и $g'_x(x)$ в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a;

в) $(f'_x(x))^2 + (g'_x(x))^2 \neq 0$ в упомянутой окрестности;

г) существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f'_x(x)}{g'_x(x)}.$$

Тогда справедливо равенство

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'_x(x)}{g'_x(x)}.$$

6.10. ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА

Теорема 6.10 (формула Тейлора). Пусть существуют значения $f(x)$, $f'_x(x)$, ..., $f_x^{(n+1)}(x)$ на интервале $(a; b)$. Пусть x_0 — любое значение из упомянутого интервала. Тогда справедлива формула Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'_x(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''_x(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ + \ldots + \frac{f_x^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}(x), \tag{6.25}$$

где остаточный член $R_{n+1}(x)$ может быть представлен в одном из следующих видов:

а) в форме Шлемильха–Роша

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}(1 - \theta)^{n-p+1}}{n!p} f(x_0 + \theta(x - x_0)),$$

где p — произвольное положительное число, а θ — некоторое число, удовлетворяющее условию $0 < \theta < 1$;

б) в форме Лагранжа

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f(x_0 + \theta_1(x - x_0)),$$

где θ_1 — некоторое число, удовлетворяющее условию $0 < \theta_1 < 1$;

в) в форме Коши

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}(1 - \theta_2)^n}{n!} f(x_0 + \theta_2(x - x_0)),$$

где θ_2 — некоторое число, удовлетворяющее условию $0 < \theta_2 < 1$;

г) в форме Пеано $R_{n+1}(x) = o((x - x_0)^n)$.

При $x_0 = 0$ формула Тейлора имеет следующий вид:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'_x(0)}{1!}x + \frac{f''_x(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f_x^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x) \tag{6.26}$$

и носит название формулы Маклорена.

ТАБЛИЦА РАЗЛОЖЕНИЙ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ ПО ФОРМУЛЕ МАКЛОРЕНА

1. $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (6.27)$$

2. $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \quad (6.28)$$
$$\ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{n+1}(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

3. $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \quad (6.29)$$
$$\ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{n+1}(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

4. $$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \ldots \quad (6.30)$$
$$\ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n +$$
$$+ R_{n+1}(x), \quad -1 < x < 1.$$

5. $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad (6.31)$$
$$\ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x), \quad -1 < x < 1.$$

6.11. УРАВНЕНИЯ КАСАТЕЛЬНОЙ И НОРМАЛИ К ГРАФИКУ КРИВОЙ

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0;\ f(x))$, если она не параллельна оси ординат, т. е. если $f'_x(x) \neq \pm\infty$, таково: $y = f(x_0) + f'_x(x_0)(x - x_0)$. Если же касательная в точке $(x_0;\ f(x_0))$ параллельна оси ординат, то ее уравнение $x = x_0$.

Уравнение нормали (т. е. прямой, перпендикулярной касательной) к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0;\ f(x_0))$, если эта нормаль не параллельна оси ординат, т. е. если $f_x'(x) \neq 0$, таково:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'_x(x_0)}(x - x_0).$$

Если же нормаль в точке (x_0; $f(x_0)$) параллельна оси ординат, то ее уравнение $x = x_0$.

Определение 6.8. Углом между кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ в их общей точке $M_0(x_0; y_0)$ называется угол между касательными к этим кривым в данной точке $M_0(x_0; y_0)$.

6.12. ИНТЕРВАЛЫ МОНОТОННОСТИ, ЭКСТРЕМУМЫ

Определение 6.9. Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на интервале (a; b), если для любых $x_1, x_2 \in (a; b) \in$ ОДЗ, удовлетворяющих неравенству $x_1 > x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$).

Теорема 6.11 (критерий возрастания или убывания функции на интервале). Для того чтобы функция $y = f(x)$, имеющая конечную или бесконечную производную на интервале (a; b) $\in$ ОДЗ, возрастала (убывала), необходимо и достаточно, чтобы на этом интервале выполнялись условия: а) $f'_x(x) \geqslant 0$ ($f'_x(x) \leqslant 0$); б) $f'_x(x)$ не обращалась в нуль ни на одном отрезке (α; β) $\in$ (a; b) $\in$ ОДЗ.

Определение 6.10. Функция $y = f(x)$ имеет локальный максимум (минимум) в точке $x = a$, если для любых значений из окрестности этой точки, принадлежащих ОДЗ, таких, что $x \neq a$, выполняется неравенство $f(x) < f(a)$ ($f(x) > f(a)$).

Теорема 6.12 (о необходимом условии экстремума функции). Если в точке $x = a$ существует экстремум функции $y = f(x)$, то в этой точке должно выполняться одно из условий:

а) производная в этой точке равняется нулю $f'_x(a) = 0$;

б) производная в этой точке не существует, но функция $y = f(x)$ в этой точке непрерывна.

Определение 6.11. Точки, которые удовлетворяют необходимому условию экстремума, называются критическими точками первого рода.

Теорема 6.13 (первое достаточное условие существования точки экстремума по первой производной). Если при переходе слева направо через критическую точку первого рода первая производная меняет свой знак с плюса на минус, то эта точка является точкой максимума, если с минуса на плюс, то минимума.

Теорема 6.14 (второе достаточное условие существования точки экстремума по второй производной). Если вторая производная имеет в критической точке первого рода знак плюс ($f''_{xx}(x) > 0$), то в этой точке минимум, если же минус ($f''_{xx}(x) < 0$), то в этой точке — максимум.

Теорема 6.15 (третье достаточное условие существования точки экстремума по n-й производной). Если $(n + 1)$ — четное число, $f^{(1)}(a) = f^{(2)}(a) = f^{(3)}(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0$, а непрерывная в точке $x = 0$ производная $f^{(n+1)}(a) > 0$, то в точке $x = a$ — минимум, если же $f^{(n+1)}(a) < 0$, то в этой точке максимум.

Определение 6.12. Наибольший (наименьший) из всех локальных максимумов (минимумов) называется глобальным максимумом (глобальным минимумом).

6.13. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ И ИНТЕРВАЛЕ

Определение 6.13. Число $M(m)$ называется наибольшим (наименьшим) значением непрерывной функции $f(x)$ на $[a, b]$, если для $\forall x \in [a, b]$ справедливо неравенство $f(x) \leqslant M$ $(f(x) \geqslant m)$.

Теорема 6.16. Непрерывная на отрезке функция достигает своего наибольшего и наименьшего значений либо на концах отрезка, либо во внутренних точках локальных экстремумов.

Определение 6.14. Наибольшим (наименьшим) значением непрерывной функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$ назовем значение ее глобального максимума (глобального минимума), если он существует.

Замечание. Наибольшего или наименьшего значений непрерывной функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$ может не существовать.

6.14. ИНТЕРВАЛЫ ВЫПУКЛОСТИ, ВОГНУТОСТИ, ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Определение 6.15. Функция $y = f(x)$ называется выпуклой (вогнутой) на интервале $(a; b) \in$ ОДЗ, если для любых $x \in (a; b)$ график линии $y = f(x)$ располагается выше (ниже) любой своей хорды, принадлежащей $(\alpha; \beta) \in [a; b]$ или ниже (выше) любой своей касательной на $(\alpha; \beta) \in [a; b]$.

Определение 6.16. Пусть для плоской кривой $y = f(x)$ выполняются условия:

1) функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = c$;

2) в точке $P(c; f(c))$ кривая имеет единственную касательную;

3) в достаточно малой окрестности точки $P(c; f(c))$ кривая расположена внутри одной пары вертикальных углов, образуемых касательной и нормалью к кривой функции $y = f(x)$;

4) при переходе через $x = c$ слева направо в некоторой окрестности $(c - \delta; c + \delta) \in$ ОДЗ меняется выпуклость на вогнутость или вогнутость на выпуклость, тогда точка $P(c; f(c))$ называется точкой перегиба функции $y = f(x)$.

Если при $x = c$ функция $f(x)$ непрерывна, а $f'(x)$ имеет разрыв первого рода при $x = c$, тогда эта точка называется угловой точкой графика функции $f(x)$.

Теорема 6.17 (о необходимом условии существования точки перегиба). Если $x = a$ — точка перегиба, то в этой точке должно выполняться одно из условий:

а) вторая производная в этой точке равняется нулю $f''_{xx}(x) = 0$;

б) вторая производная в этой точке не существует, но функция $y = f(x)$ в этой точке непрерывна и в ней существует единственная касательная к графику $y = f(x)$.

Определение 6.17. Точки, которые удовлетворяют необходимому условию существования точки перегиба, называются критическими точками второго рода.

Теорема 6.18 (первое достаточное условие существования точки перегиба по второй производной). Если в точке $x = a$ функция непрерывна и в ней существует касательная, а вторая производная при переходе слева направо через критическую точку меняет свой знак, то эта точка является точкой перегиба.

Теорема 6.19 (второе достаточное условие существования точки перегиба по n-й производной). Если $(n+1)$ — нечетное число, $f^{(1)}(a) = f^{(2)}(a) = f^{(3)}(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0$, а $f^{(n+1)}(a) \neq 0$, то точка $x = a$ является точкой перегиба функции $y = f(x)$.

6.15. ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ

1. Найти область допустимых значений аргумента (ОДЗ $= D(f)$).

2. Исследовать на четность–нечетность.

Определение 6.18. Функция $y = f(x)$ называется четной, если при любых $x \in$ ОДЗ и $(-x) \in$ ОДЗ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат. ОДЗ четной функции симметрична относительно начала координат.

Определение 6.19. Функция $y = f(x)$ называется нечетной, если при любых $x \in$ ОДЗ и $(-x) \in$ ОДЗ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат. ОДЗ нечетной функции симметрична относительно начала координат.

Определение 6.20. Функция $y = f(x)$ называется функцией общего вида, если существуют x_1, $x_2 \in D(f)$: $-x_1$, $-x_2 \in D(f)$ и $f(x_1) \neq f(-x_1)$, $f(x_2) \neq f(-x_2)$.

3. Исследовать на периодичность.

Определение 6.21. Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое число $T > 0$, что при всех $x \in$ ОДЗ $\Rightarrow x \pm T \in$ ОДЗ и выполняются равенства $f(x \pm T) = f(x)$.

Определение 6.22. Наименьшее положительное число $T > 0$, удовлетворяющее определению 6.19, называется периодом функции $f(x)$.

4. Исследовать на непрерывность и точки разрыва.

Точки разрыва ищутся там, где функция не существует или меняет свое аналитическое выражение. В этих точках находятся односторонние пределы. Если они не существуют, равны бесконечности или не совпадают, то соответственно в этих точках разрыв второго или первого рода. Если же односторонние пределы равны друг другу, но не совпадают со значением функции в этой точке, то в данной точке функция имеет устранимый разрыв.

Теорема 6.20. Если в точке $x = a$ функция $y = f(x)$ имеет производную, то в этой точке функция непрерывна.

Теорема 6.21. Элементарная функция непрерывна в тех точках, в которых она определена.

5. Исследовать на асимптоты.

Определение 6.23. Асимптотой к графику функции $y = f(x)$ называется прямая $Ax + By + C = 0$, при перемещении вдоль которой от начала координат в $+\infty$ или $-\infty$ максимум отклонения графика кривой $y = f(x)$ от прямой $Ax + By + C = 0$ стремится к нулю.

Вертикальные асимптоты ищут в точках разрыва второго рода, на краях ОДЗ и в точках, где меняется аналитическое выражение функций. При этом в этих точках находятся односторонние пределы.

Если при приближении к точке a слева или справа односторонний предел обращается в бесконечность, то с соответствующей стороны от $x = a$ прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой.

Коэффициенты k и b наклонной асимптоты $y = kx + b$ находятся по формулам:

$$k = \lim_{x \to +\infty\ (\text{или } -\infty)} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to +\infty\ (\text{или } -\infty)} (f(x) - kx).$$

Если $k = 0$, то асимптота называется горизонтальной.

6. Исследовать на экстремумы и найти интервалы возрастания и убывания.

7. Исследовать на точки перегиба и найти интервалы выпуклости и вогнутости.

8. Найти область изменения функции, точки пересечения графика с осями координат и другие характерные точки.

6.16. КРИВИЗНА КРИВОЙ

Определение 6.24. Угол, образованный двумя касательными, проведенными из одной точки к данной кривой, которая не пересекает саму себя, называется углом смежности.

Определение 6.25. Кривизной кривой, которая не пересекает саму себя, называется предел отношения угла смежности $\Delta\alpha$ к длине дуги Δl, стягиваемой касательными, образующими угол $\Delta\alpha$, при стремлении длины дуги к нулю и если такой предел существует:

$$K = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta l}.$$

Определение 6.26. Величина, обратная кривизне, называется радиусом кривизны.

Определение 6.27. Окружность, находящаяся в области вогнутости кривой, имеющая в данной точке кривой общую касательную и радиус, равный радиусу кривизны, называется окружностью кривизны. Круг, охватываемый этой окружностью, называется кругом кривизны. Центр круга кривизны называется центром кривизны.

Если кривая задана уравнением в декартовой системе координат $y(x) = f(x)$, кривизна, радиус кривизны и центр кривизны соответственно вычисляются по формулам:

$$K = \frac{\left|\dfrac{d^2 f}{dx^2}\right|}{\left(1 + \left(\dfrac{df}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}. \tag{6.32}$$

$$R(x) = \frac{1}{K(x)} = \frac{\left(1 + \left(\dfrac{df}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\left|\dfrac{d^2 f}{dx^2}\right|}. \tag{6.33}$$

$$X = x - \frac{\dfrac{df}{dx}\left(1 + \left(\dfrac{df}{dx}\right)^2\right)}{\dfrac{d^2 f}{dx^2}}, \quad Y = y + \frac{1 + \left(\dfrac{df}{dx}\right)^2}{\dfrac{d^2 f}{dx^2}}. \tag{6.34}$$

Если кривая задана параметрически:

$$\begin{cases} x = \alpha(t), \\ y = \beta(t), \end{cases}$$

то кривизна, радиус кривизны и центр кривизны соответственно вычисляются по формулам:

$$K = \frac{\left|\frac{d^2\beta}{dt^2}\cdot\frac{d\alpha}{dt} - \frac{d\beta}{dt}\cdot\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right|}{\left(\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2\right)^{3/2}}, \tag{6.35}$$

$$R(t) = \frac{\left(\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2\right)^{3/2}}{\left|\frac{d^2\beta}{dt^2}\cdot\frac{d\alpha}{dt} - \frac{d\beta}{dt}\cdot\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right|}, \tag{6.36}$$

$$\begin{aligned} X &= x - \frac{\left(\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2\right)\cdot\frac{d\beta}{dt}}{\frac{d^2\beta}{dt^2}\cdot\frac{d\alpha}{dt} - \frac{d^2\alpha}{dt^2}\cdot\frac{d\beta}{dt}}, \\ Y &= y + \frac{\left(\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2\right)\cdot\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{d^2\beta}{dt^2}\cdot\frac{d\alpha}{dt} - \frac{d^2\alpha}{dt^2}\cdot\frac{d\beta}{dt}}. \end{aligned} \tag{6.37}$$

Если кривая задана уравнением в полярной системе координат $\rho = \rho(\varphi)$, то кривизна, радиус кривизны и центр кривизны соответственно вычисляются по формулам:

$$K = \frac{\left|(\rho(\varphi))^2 + 2\cdot\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 - \rho(\varphi)\cdot\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}\right|}{\left((\rho(\varphi))^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2\right)^{3/2}}, \tag{6.38}$$

$$R(\varphi)=\frac{\left((\rho(\varphi))^2+\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2\right)^{3/2}}{\left|(\rho(\varphi))^2+2\cdot\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2-\rho(\varphi)\cdot\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}\right|}, \qquad (6.39)$$

$$\begin{cases} X=\rho\cos\varphi-\dfrac{\left(\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2\right)\cdot\left(\rho\cos\varphi+\frac{d\rho}{d\varphi}\sin\varphi\right)}{\rho^2+2\cdot\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2-\rho\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}}, \\ Y=\rho\sin\varphi-\dfrac{\left(\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2\right)\cdot\left(\rho\sin\varphi-\frac{d\rho}{d\varphi}\cos\varphi\right)}{\rho^2+2\cdot\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2-\rho\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}}. \end{cases} \qquad (6.40)$$

6.17. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

6.1. Найти приращение функции $\Delta f(x_0, \Delta x)$ в точке x_0, если:

а) $f(x)=\sqrt{x},\ x_0=1,\ \Delta x=0{,}21$;

б) $f(x)=\sin x,\ x_0=\pi/2,\ \Delta x=\pi/3$.

Решение.

а) $\Delta f(x_0,\Delta x)=\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}=\sqrt{1+0{,}21}-\sqrt{1}=0{,}1$.

б) $\Delta f(x_0, \Delta x) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = \sin(\pi/2 + \pi/3) - \sin(\pi/2) = -0{,}5$.

6.2. Доказать, что если $f(x) = 0$ и

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0, \text{ то } \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0).$$

Решение. Имеем

$$f'(x)\big|_{x=0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\Big|_{x=0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-0}{\Delta x}\Big|_{x=0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=0.$$

6.3. Пользуясь определением производной, найти производную функции $f(x) = \cos mx$.

Решение.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(mx + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin\left(mx + m/2 \cdot \Delta x\right)\sin(m/2 \cdot \Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= -2 \lim_{\Delta x \to 0} \sin(mx + m/2 \cdot \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(m/2 \cdot \Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= 2\sin(mx) \cdot (m/2) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(m/2 \cdot \Delta x)}{(m/2 \cdot \Delta x)} = -m \cdot \sin(mx).$$

Здесь использовался первый замечательный предел

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1.$$

6.4. Пользуясь определениями левой и правой производных функции $f(x)$ в точке x_0, найти их для

$$f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}} \text{ и } x_0 = 0.$$

Решение.

$$f_{\pm}(x) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\sqrt{1 - e^{-(0+\Delta x)^2}} - \sqrt{1 - e^{-0^2}}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \sqrt{\frac{1 - e^{-(\Delta x)^2}}{(\Delta x)^2}} =$$

$$= \pm \lim_{\Delta x \to \pm 0} \sqrt{\frac{1 - e^{-(\Delta x)^2}}{(\Delta x)^2}} = \pm 1.$$

6.5. Исходя из определения производной, доказать, что производная четной (нечетной) дифференцируемой функции есть функция нечетная (четная).

Решение.

$$f'(-x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-x + \Delta x) - f(-x)}{\Delta x} =$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-f(x - \Delta x) + f(x)}{-(-\Delta x)} = f'(x), & \text{если } f(-x) = -f(x), \\ \lim\limits_{\Delta x \to 0} -\left(\dfrac{f(x - \Delta x) - f(-x)}{-\Delta x}\right) = -f'(x), & \text{если } f(-x) = f(x). \end{cases}$$

6.6. Исходя из определения производной, доказать, что производная периодической функции есть периодическая функция.

Решение.

$$f'(x \pm T) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f((x \pm T) + \Delta x) - f(x \pm T)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f((x + \Delta x) \pm T) - f(x \pm T)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ С ПОМОЩЬЮ ТАБЛИЦЫ ПРОИЗВОДНЫХ И ПРОСТЕЙШИХ ПРАВИЛ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

6.7. $f(x) = 4x^3 - \dfrac{5}{x^7} - 8\sqrt[6]{x^5} + 10.$

Решение.

$$f'(x) = (4x^3 - 5x^{-7} - 8x^{\frac{5}{6}} + 10)' = [((x)^n)' = nx^{n-1}, (\mathrm{const})' = 0] =$$

$$= 4(x^3)' - 5(x^{-7})' - 8(x^{\frac{5}{6}})' + (10)' = 4 \cdot 3x^{3-1} - 5 \cdot (-7)x^{-7-1} -$$

$$- 8 \cdot \frac{5}{6} x^{\frac{5}{6}-1} + 0 = 12x^2 + 35x^{-8} - \frac{20}{3} x^{-\frac{1}{6}} = 12x^2 + \frac{35}{x^8} - \frac{20}{3\sqrt[6]{x}}.$$

Производная определена при $x \in (0; +\infty)$.

6.8. $f(x) = 3x^2 - 4x^{-0,5} + 7\sqrt[3]{x^2} - \dfrac{8}{\sqrt[5]{x^4}}.$

Решение.

Перепишем функцию так:

$$f(x) = 3x^2 - 4x^{-0,5} + 7x^{2/3} - 8x^{-4/5},$$

$$f'(x) = 3 \cdot 2x^{2-1} - 4 \cdot (-0,5)x^{-0,5-1} + 7 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} - 8 \cdot (-\frac{4}{5})x^{-\frac{4}{5}-1} =$$

$$= 6x + \frac{2}{\sqrt{x^3}} + \frac{32}{5\sqrt[5]{x^9}} + \frac{14}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Производная определена при $x \in (0; +\infty)$.

6.9. $f(x) = 4x \ln x + 5\dfrac{e^x}{\cos x}.$

Решение.

Рекомендуется воспользоваться правилами дифференцирования суммы, произведения и частного функций.

$$(f(x))' = \left(x\ln x - 5\frac{e^x}{\cos x}\right)' =$$

$$= [(uv)' = u'v + uv', (u/v)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, (x)' = 1, (e^x)' = e^x,$$

$$(\ln x)' = 1/x, (\cos x)' = -\sin x] =$$

$$= (x)'\ln x + x(\ln x)' - 5\frac{(e^x)'\cos x - e^x(\cos x)'}{\cos^2 x} = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} -$$

$$-5\cdot\frac{e^x\cdot\cos x - e^x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} = \ln x + 1 - 5\cdot\frac{e^x\cdot\cos x + e^x\cdot\sin x}{\cos^2 x}.$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ

6.10. $f(x) = \sin(x^2)$.

Решение. Данная функция — сложная двухзвенная: первое внешнее звено — синус, второе внутреннее звено, аргумент первого звена — это квадратичная функция. Производная сложной функции есть производная первого звена по его аргументу с сохранением этого аргумента, умноженная на производную второго звена по x:

$$(f(x))' = (\sin(x^2))' = \cos(x^2)\cdot(x_2)' = \cos(x^2)\cdot 2x.$$

Нередко допускаются такие ошибочные решения:

1. $(f(x))' = \cos x \cdot 2x$. Здесь в производной первого звена не сохранен его аргумент x^2.

2. $f'(x) = \cos 2x$. Здесь производная второго звена записана на месте аргумента первого звена.

6.11. $f(x) = \mathrm{tg}(2^x\cdot\sqrt{x})$.

Решение.

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(2^x\cdot\sqrt{x})}(2^x\cdot\sqrt{x})' = \frac{1}{\cos^2(2^x\cdot\sqrt{x})}((2^x)'\cdot\sqrt{x} + 2^x\cdot(\sqrt{x})') =$$

$$= \frac{1}{\cos^2(2^x\cdot\sqrt{x})}(2^x\ln 2\cdot\sqrt{x} + 2^x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}),\quad x\in(0;+\infty).$$

6.12. Найти производную сложной трехзвенной функции

$$f(x)=\arcsin(\sqrt{1-e^x}),\ x\leqslant 0.$$

Решение.

Здесь первое внешнее звено — арксинус, второе — корень квадратный, третье — сумма единицы и экспоненты. Дифференцируем последовательно:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-e^x})^2}}\cdot(\sqrt{1-e^x})'=\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^x)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-e^x}}\cdot(1-e^x)'=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^x)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-e^x}}\cdot(0-e^x)=\frac{-e^x}{2\cdot e^{x/2}\sqrt{1-e^x}}=\frac{-e^{x/2}}{2\sqrt{1-e^x}},\quad x<0.$$

6.13. $f(x)=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\log_3 x}{x^5}\right)$.

Решение.

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\dfrac{\log_3 x}{x^5}\right)^2}\cdot\frac{(\log_3 x)'\cdot x^5-\log_3 x\cdot(x^5)'}{(x^5)^2}=$$

$$=\frac{1}{1+\left(\dfrac{\log_3 x}{x^5}\right)^2}\cdot\frac{\dfrac{1}{x\ln 3}\cdot x^5-\log_3 x\cdot 5x^4}{x^{10}};\quad x\in(0;+\infty).$$

6.14. Найти производную функции

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}(x^2\cdot\sin(1/(5x))), & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

и вычислить ее значение в точке $x_0=0$.

Решение. Найдем производные при $x\neq 0$. Имеем

$$f'(x)=\frac{1}{1+(x^2\cdot\sin(1/5x))^2}\cdot(x^2\cdot\sin(1/(5x)))'=$$

$$=\frac{1}{1+(x^2\cdot\sin(1/(5x)))^2}\cdot((x^2)'\cdot\sin(1/(5x))+x^2\cdot(\sin(1/(5x)))')=$$

$$=\frac{1}{1+(x^2\cdot\sin(1/(5x)))^2}\cdot(2x\cdot\sin(1/(5x))+x^2\cdot\cos(1/(5x))\cdot(-1/(5x^2)))=$$

$$=\frac{1}{1+(x^2\cdot\sin(1/(5x)))^2}\cdot\left(2x\cdot\sin(1/(5x))-\frac{\cos(1/(5x))}{5}\right),\quad x\neq 0.$$

Поскольку односторонние пределы

$$\lim_{x\to 0\pm 0}\sin(1/5x)$$

не существуют, то не существуют и односторонние пределы у $f'(x)$ при $x_0 = 0$.

Чтобы найти производную в заданной точке, воспользуемся определением производной.

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\left((0+\Delta x)^2\cdot\sin\left(\frac{1}{5(0+\Delta x)}\right)\right)-0}{\Delta x}.$$

Поскольку предел произведения ограниченной функции $\sin(1/(5\Delta x))$ на бесконечно малую Δx равен нулю, то получаем, что $y'(0) = 0$.

Заметим, что исходная функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 = 0$. В самом деле, функция определена как в самой точке $x_0 = 0$, так и в некоторой ее окрестности, кроме того,

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{arctg}(x\cdot\sin(1/(5x)))=0=f(0).$$

6.15. $f(x)=\sqrt[3]{1+x+x^2}\cdot\operatorname{ctg}(\log_7(\arccos(4^{2x})))$.

Решение.

$$(f(x))'=((1+x+x^2)^{1/3})'\cdot\operatorname{ctg}(\log_7(\arccos(4^{2x}))+$$
$$+(1+x+x^2)^{1/3}(\operatorname{ctg}(\log_7(\arccos(4^{2x})))'=$$
$$=\frac{1}{3}(1+x+x^2)^{-2/3}\cdot(1+x+x^2)'\cdot\operatorname{ctg}(\log_7(\arccos(4^{2x}))+$$
$$+(1+x+x^2)^{1/3}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2(\log_7(\arccos(4^{2x})))}\cdot(\log_7(\arccos(4^{2x})))'\right)=$$
$$=\frac{1/3}{\sqrt[3]{(1+x+x^2)^2}}\cdot(0+1+2x)\cdot\operatorname{ctg}(\log_7(\arccos(4^{2x}))-$$
$$-\frac{(1+x+x^2)^{\frac{1}{3}}}{\sin^2(\log_7(\arccos(4^{2x})))}\cdot\frac{1}{\arccos(4^{2x})\cdot\ln 7}(\arccos(4^{2x}))'=$$
$$=\frac{1}{3}\frac{(1+2x)\cdot\operatorname{ctg}(\log_7(\arccos(4^{2x}))}{\sqrt[3]{(1+x+x^2)^2}}-$$
$$-\frac{(1+x+x^2)^{1/3}}{\sin^2(\log_7(\arccos(4^{2x})))}\cdot\frac{1}{\arccos(4^{2x})\cdot\ln 7}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(4^{2x})^2}}\right)\cdot(4^{2x})'=$$

$$=\frac{1}{3}\frac{(1+2x)\cdot \mathrm{ctg}(\log_7(\arccos(4^{2x}))}{\sqrt[3]{(1+x+x^2)^2}}+$$

$$+\frac{(1+x+x^2)^{1/3}}{\sin^2(\log_7(\arccos(4^{2x})))}\cdot\frac{1}{\arccos(4^{2x})\cdot\ln 7}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(4^{2x})^2}}\times$$

$$\times 4^{2x}\ln 4\cdot(2x)'=\frac{1}{3}\frac{(1+2x)\cdot \mathrm{ctg}(\log_7(\arccos(4^{2x}))}{\sqrt[3]{(1+x+x^2)^2}}+$$

$$+\frac{(1+x+x^2)^{1/3}}{\sin^2(\log_7(\arccos(4^{2x})))}\cdot\frac{1}{\arccos(4^{2x})\cdot\ln 7}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(4^{2x})^2}}4^{2x}\ln 4\cdot 2.$$

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ОПЕРАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

6.16. Показать, что при $n\to\infty$ значения двух функций $f(x)\equiv 0$ и $g(x)=(1/n)\sin(\pi/6+2n^2x)$ в точке $x=\pi$ становятся сколь угодно близкими друг другу, в то время как модуль разности их производных в данной точке стремится к бесконечности.

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}|g(\pi)-f(\pi)|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\sin(\pi/6+2n^2\pi)-0\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0.$$

Производные имеют вид $f'(x)\equiv 0$, $g'(x)=2n\cdot\cos(\pi/6+$ $+2n^2x)$, в частности

$$f'(\pi)\equiv 0,\quad g'(\pi)=2n\cdot\cos(\pi/6+2n^2\pi)=n\sqrt{3}.$$

$$\lim_{n\to\infty}|g'(\pi)-f'(\pi)|=\lim_{n\to\infty}|n\sqrt{3}-0|=\infty.$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ С ПОМОЩЬЮ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

6.17. $f(x)=x^3\cos^5x(\mathrm{arctg}\,x)^7\ln^4x(\arcsin x)^{10}$.

Решение.

$$\ln(f(x))=\ln(x^3\cos^5x(\mathrm{arctg}\,x)^7\ln^4x(\arcsin x)^{10}).$$

$$(\ln(f(x)))'=(3\ln x+5\ln(\cos x)+7\ln(\mathrm{arctg}\,x)+$$
$$+4\ln(\ln x)+10\ln(\arcsin x))'.$$

$$\frac{1}{f(x)}(f(x))'=3\cdot\frac{1}{x}+5\cdot\frac{1}{\cos x}(-\sin x)+7\cdot\frac{1}{\mathrm{arctg}\,x}\cdot\frac{1}{1+x^2}+$$

$$+4\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}+10\cdot\frac{1}{\arcsin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(f(x))' = (x^3 \cos^5 x (\operatorname{arctg} x)^7 \ln^4 x (\arcsin x)^{10}) \times$$
$$\times \left(3 \cdot \frac{1}{x} - 5 \cdot \operatorname{tg} x + 7 \cdot \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2} + \right.$$
$$\left. + 4 \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} + 10 \cdot \frac{1}{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right).$$

6.18. $f(x) = \dfrac{x^4(1+x)^5}{\sqrt{(x+8)(x-2)}}$.

Решение.

$$(\ln(f(x)))' = \left(4\ln x + 5\ln(1+x) - \frac{1}{2} \cdot \ln(x+8) - \frac{1}{2} \cdot \ln(x-2)\right)'.$$

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = \frac{4}{x} + \frac{5}{1+x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-2}.$$

$$f'(x) = \frac{x^4(1+x)^5}{\sqrt{(x+8)(x-2)}} \cdot \left(\frac{4}{x} + \frac{5}{1+x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-2}\right).$$

6.19. $f(x) = x^x$.

Решение.

$$\ln f(x) = \ln x^x, \quad \ln f(x) = x \ln x.$$
$$(\ln f(x))' = (x \ln x)'.$$
$$\frac{1}{f(x)} \cdot (f(x))' = (x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)'.$$
$$\frac{1}{f(x)} \cdot (f(x))' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$
$$(f(x))' = f(x) \cdot (\ln x + 1) = x^x \cdot (\ln x + 1).$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ НЕЯВНО

6.20. Найти производную $y_x'(x)$ функции $f(x, y(x)) = y^2(x) + x^2 - 1 = 0$, заданной неявно.

Решение. Будем искать производную от обеих частей равенства. Имеем $(y^2(x) + x^2 - 1)_x' = (0)_x'$, $2 \cdot y(x) \cdot y_x'(x) + 2 \cdot x = 0$. Здесь выражение $y^2(x)$ рассматривалось как сложная двухзвенная функция: возведение во вторую степень — первое внешнее звено, $y(x)$ — второе внутреннее звено. Отсюда $y_x'(x) = -x/(y(x))$.

6.21. Найти производную $y'_x(x)$ функции $f(x,\ y(x)) = \ln y(x) + \operatorname{ctg} x^2 - 2x = 0$, заданной неявно.

Решение.

$$(\ln y(x) + \operatorname{ctg} x^2 - 2x)'_x = (0)'_x,$$

$$\frac{1}{y(x)} \cdot y'_x(x) - \frac{2x}{\sin^2 x^2} - 2 = 0,$$

отсюда $y'_x(x) = y(x) \cdot (2x/(\sin^2 x^2) + 2)$.

6.22. Найти производную $y'_x(x)$ функции

$$f(x,y(x)) = e^{y^2(x)} - \arcsin y(x) - x^3 - 1 = 0,$$

заданной неявно.

Решение. $(e^{y^2(x)} - \arcsin y(x) - x^3 - 1)'_x = (0)'_x$,

$$2y(x) \cdot y'_x(x) \cdot e^{y^2(x)} - \frac{y'_x(x)}{\sqrt{1-y^2(x)}} - 3x^2 = 0,$$

отсюда
$$y'_x(x) = \frac{3x^2}{2 \cdot y(x) \cdot e^{y^2(x)} - \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2(x)}}}.$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

6.23. Найти производную $y'_x(x)$ функции $x(t) = t^2$, $y(t) = \sin t^3$.

Решение.
$$y'_x(x) = \frac{(\sin t^3)'_t}{(t^2)'_t} = \frac{3t^2 \cdot \cos t^3}{2t} = \frac{3}{2} \cdot t \cdot \cos t^3.$$

6.24. Найти производную $y_x'(x)$ функции $x(t) = \operatorname{ctg} t^2$, $y(t) = \operatorname{arcctg} t^4$.

Решение.
$$y'_x(x) = \frac{(\operatorname{arcctg} t^4)'_t}{(\operatorname{ctg} t^2)'_t} = \frac{-\dfrac{1}{1+t^8} \cdot 4t^3}{-\dfrac{1}{\sin^2 t^2} \cdot 2t} = \frac{2t^2 \cdot \sin^2 t^2}{1+t^8}.$$

6.25. Найти производную y_x' функции $x(t) = \arcsin t$, $y = 3^{\cos t}$.

Решение.
$$y'_x(x) = \frac{(3^{\cos t})'_t}{(\arcsin t)'_t} = \frac{3^{\cos t} \cdot \ln 3 \cdot (-\sin t)}{\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}} = -3^{\cos t} \cdot \ln 3 \cdot \sin t \cdot \sqrt{1-t^2}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ И НОРМАЛИ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ

6.26. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = f(x) = 2x^3 - x - 4$ в точке $x_0 = 1$.

Решение. Найдем производную и вычислим ее значение и значение функции в заданной точке: $f'(x) = 6x^2 - 1$, $f(1) = -3$, $f'(1) = 5$.

Уравнение касательной $y = -3 + 5 \cdot (x - 1) = 5x - 8$. Уравнение нормали $y = -3 - (1/5)(x - 1) = -0{,}2x - 2{,}8$.

6.27. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = (x^5 - 1)/5$ в точке его пересечения с осью абсцисс.

Решение. Найдем координаты точки пересечения кривой с осью абсцисс: $f(x) = (x^5 - 1)/5 = 0$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$. В этой точке производная $f'_x(x) = x^4$ равна $f'_x(1) = 1$. Уравнение касательной имеет вид $y = x - 1$.

6.28. Определить, под каким углом график кривой $f(x) = e^x - x$ пересекает ось ординат.

Решение. $f'_x(x) = e^x - 1$, $f'_x(0) = e^0 - 1 = 0$, отсюда угол пересечения равен $\alpha = 0°$.

6.29. Найти углы, под которыми пересекаются кривые $f(x) = -x^2 + 4x + 4$ и $f(x) = x^2 - 2x + 4$.

Решение. Найдем абсциссу точки пересечения кривых: $-x^2 + 4x + 4 = x^2 - 2x + 4$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Тангенс угла между касательными в каждой точке определяется угловыми коэффициентами касательных:

$$\operatorname{tg}\alpha_i = \frac{f_1'(x_i) - f_2'(x_i)}{1 + f_1'(x_i)\cdot f_2'(x_i)} = \frac{(2x_i - 2) - (-2x_i + 4)}{1 + (2x_i - 2)(-2x_i + 4)} =$$

$$= \frac{4x_i - 6}{1 + (2x_i - 2)(-2x_i + 4)} \quad (i = 1, 2).$$

Имеем $\operatorname{tg}\alpha_1 = 6/7$, $\alpha_1 = \operatorname{arctg}(6/7)$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = -6/7$, $\alpha_2 = -\operatorname{arctg} 6/7$.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРВОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА

6.30. Найти первый дифференциал для функции

$$d\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)\right).$$

Решение.

$$d\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)^2}\cdot d\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)=$$

$$=\frac{1}{1+\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)^2}\cdot\frac{v(x)du(x)-u(x)dv(x)}{v^2(x)}=\frac{v(x)du(x)-u(x)dv(x)}{v^2(x)+u^2(x)}.$$

6.31. Найти первый дифференциал функции $y(x) = e^{3x}\ln(1+x^2)$ и вычислить его значение при $x = 0$, $dx = \Delta x = 0{,}1$.

Решение. Первый способ, основанный на непосредственном применении формулы $dy(x) = y'(x)dx$.

Имеем

$$y'(x)=3e^{3x}\cdot\ln(1+x^2)+\frac{e^{3x}\cdot 2x}{1+x^2},$$

отсюда

$$dy(x)=\left(3e^{3x}\cdot\ln(1+x^2)+\frac{e^{3x}\cdot 2x}{1+x^2}\right)\cdot dx.$$

Второй способ основан на применении правил нахождения дифференциала произведения:

$$dy(x)=d(e^{3x})\ln(1+x^2)+e^{3x}d(\ln(1+x^2))=$$

$$=3e^{3x}\ln(1+x^2)dx+\frac{e^{3x}2x}{1+x^2}dx,$$

$$dy(0)=\left(3e^{3\cdot 0}\ln(1+0^2)+\frac{e^{3\cdot 0}2\cdot 0}{1+0^2}\right)\cdot 0{,}1=0.$$

6.32. Найти первый дифференциал функции $y(x) = \operatorname{arctg}(1/x)$ и вычислить его значение при $x = 1$, $dx = \Delta x = -0{,}1$.

Решение.

$$dy(x)=\frac{1}{1+1/x^2}\cdot(-1/x^2)dx=-\frac{1}{x^2+1}dx,$$

$$dy(1)=-\frac{1}{1^2+1}\cdot(-0{,}1)=0{,}05.$$

6.33. Получить приближенную формулу

$$\sqrt[n]{x_0^n+\Delta x}\approx x_0+\frac{\Delta x}{nx_0^{n-1}}$$

при условии $x_0 > 0$, $|\Delta x| \ll x_0{}^n$.

Решение. $dy(x) \approx \Delta y(x) = y(x + \Delta x) - y(x)$, отсюда

$$y(x+\Delta x)\approx y(x)+y'(x)\Delta x.$$

В случае $y(x)=\sqrt[n]{x}$, получаем

$$\sqrt[n]{x+\Delta x}\approx\sqrt[n]{x}+\frac{1}{n}\cdot x^{\frac{1}{n}-1}\cdot\Delta x.$$

Если $x = x_0{}^n$, то

$$\sqrt[n]{x_0^n+\Delta x}=x_0\sqrt[n]{1+\frac{\Delta x}{x_0^n}}\approx x_0(\sqrt[n]{1}+\frac{1}{n}\cdot\Delta x/x_0^n)=x_0+\frac{\Delta x}{nx_0^{n-1}}.$$

6.34. С помощью первого дифференциала вычислить $\sqrt{25{,}2}$.

Решение.

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\cdot\Delta x=\sqrt{25}+\frac{1}{2\sqrt{25}}\cdot 0{,}2=5{,}02.$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

6.35. Найти вторую производную от функции $y(x) = x^2\ln(1 + \sin x)$.

Решение.

$$y'(x)=2x\ln(1+\sin x)+x^2\cdot\frac{\cos x}{1+\sin x},$$

$$y''(x)=2\ln(1+\sin x)+\frac{2x\cdot\cos x}{1+\sin x}+\frac{2x\cos x}{1+\sin x}+$$

$$+x^2\cdot\frac{-\sin x(1+\sin x)-\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}=2\ln(1+\sin x)+$$

$$+\frac{4x\cdot\cos x}{1+\sin x}-x^2\frac{(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}=2\ln(1+\sin x)+\frac{4x\cdot\cos x-x^2}{1+\sin x}.$$

6.36. Найти $y''(x) = f(e^{2x})$.

Решение.

$$y'(x)=f'(e^{2x})\cdot(e^{2x})'=f'(e^{2x})\cdot e^{2x}\cdot 2,$$
$$y''(x)=f''(e^{2x})\cdot e^{4x}\cdot 4+f'(e^{2x})\cdot e^{2x}\cdot 4.$$

6.37. Найти вторую производную $y''(x)$ от функции $\operatorname{arctg}(2y(x)) + y(x) - x = 0$, заданной неявно.

Решение.

$$(\operatorname{arctg}(2y(x)) + y(x) - x)'_x = (0)'_x,$$

$$\frac{2}{1+y^2(x)} \cdot y'(x) + y'(x) - 1 = 0,$$

$$y'(x) = \frac{1}{\dfrac{2}{1+y^2(x)}+1} = \frac{1+y^2(x)}{3+y^2(x)} = \frac{3+y^2(x)-2}{3+y^2(x)} = 1 - \frac{2}{3+y^2(x)}.$$

$$y''(x) = (1)' - \left(\frac{2}{3+y^2}\right)' = 2 \cdot 2y'(3+y^2)^{-2} = \frac{4 \cdot \dfrac{1+y^2}{3+y^2}}{(3+y^2)^2} = \frac{4 \cdot (1+y^2)}{(3+y^2)^3}.$$

6.38. Найти вторую производную от функции, заданной параметрически $x(t) = \ln t$, $y(t) = t^3 + 2t - 3 + 7$.

Решение.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(t^3+2t-3)'_t}{(\ln t)'_t} = \frac{3t^2+2}{\dfrac{1}{t}} = 3t^3 + 2t,$$

$$y''_x = \frac{(y'_t)'_t}{x'_t} = \frac{(3t^3+2t)'_t}{(\ln t)'_t} = \frac{9t^2+2}{\dfrac{1}{t}} = 9t^3 + 2t.$$

6.39. Найти первые три дифференциала функции $y = x^2 - 2x + 3$.

Решение.

$$dy = (x^2 - 2x + 3)'dx = (2x - 2)dx,$$
$$d^2y = (2x - 2)'(dx)^2 = 2(dx)^2,$$
$$d^3y = (2)'(dx)^3 = 0 \cdot (dx)^3 = 0.$$

6.40. Найти четвертый дифференциал функции $y = x^3 \ln x$.

Решение.

$$dy = (x^3 \ln x)'dx = \left(3x^2 \cdot \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x}\right)dx = (3x^2 \cdot \ln x + x^2) \cdot dx,$$

$$d^2y = ((3\ln x + 1)x^2)' \cdot (dx)^2 = \left(\frac{3}{x} \cdot x^2 + (3\ln x + 1)2x\right) \cdot (dx)^2 =$$

$$= (6x \cdot \ln x + 5x) \cdot (dx)^2,$$

$$d^3y = (6x\ln x + 5x)' \cdot (dx)^3 = \left(6\ln x + 6x \cdot \frac{1}{x} + 5\right) \cdot (dx)^3 =$$
$$= (6\ln x + 11) \cdot (dx)^3,$$
$$d^4y = (6\ln x + 11)' \cdot (dx)^4 = \frac{6}{x} \cdot (dx)^4.$$

6.41. Найти n-й дифференциал функции $y = e^{5x}$.

Решение.

$dy = (e^{5x})' \cdot dx = 5e^{5x}dx$,

$d^{(2)}y = 5^2e^{5x}(dx)^2, \ldots, d^{(n)}y = 5^n e^{5x}(dx)^n$.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМ РОЛЛЯ, ЛАГРАНЖА, КОШИ

6.42. Удовлетворяет ли функция $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ на отрезке $x \in [-1; 1]$ теореме Ролля?

Решение. Функция непрерывна на отрезке $x \in [-1; 1]$, так как она элементарная и определена во всех точках этого отрезка. На концах отрезка $f(-1) = f(1) = 0$. Существует производная

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

на интервале $x \in (-1; 1)$, кроме внутренней точки $x = 0$. Необходимые условия теоремы Ролля не выполнены.

6.43. Доказать, что для функции $f(x) = x^2 + 3$ выполняются все условия теоремы Лагранжа на отрезке $x \in [-1; 2]$. Найти точку c, в которой справедливо равенство

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)}.$$

Решение. Функция непрерывна как элементарная, определенная во всех точках отрезка. Производная $f'(x) = 2x$ существует и конечна во всех точках интервала $x \in (-1; 2)$, все условия теоремы Лагранжа выполнены. Имеем $f(2) - f(-1) = 2c(2 - (-1))$, или $(2^2 + 3) - ((-1)^2 + 3) = 2c(2 - (-1))$, отсюда $c = 1/2$.

6.44. С помощью теоремы Лагранжа доказать справедливость неравенства $|\mathrm{arctg}\, a - \mathrm{arctg}\, b| \leqslant |b - a|$ при любых a и b.

Решение. Функция $f(x) = \mathrm{arctg}\, x$ непрерывна на любом отрезке $x \in [a; b]$ и дифференцируема внутри него, значит, все условия теоремы Лагранжа выполняются для этой функции, поэтому существует такая точка $c \in [a; b]$, в которой справедливо равенство $|(\operatorname{arctg} c)'| = |(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a)/(b - a)|$, или $|1/(1 + c^2)| = |(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a)/(b - a)|$. Поскольку $|1/(1 + c^2)| \leqslant 1$ при любых действительных c, то

$$|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \leqslant |b - a|.$$

6.45. С помощью теоремы Лагранжа доказать следующее утверждение. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы при любых значениях $x > a$ и пусть выполняются соотношения $f(a) = g(a)$, $f'(x) > g'(x)$ при $x > a$, тогда справедливо неравенство $f(x) > g(x)$ при $x > a$.

Решение. Составим функцию $h(x) = f(x) - g(x)$. На произвольном отрезке $[a; x]$ справедлива теорема Лагранжа и существует некоторая точка c, в которой выполняется равенство $h(x) - h(a) = h'(c)(x - a)$.

Поскольку $h(a) = f(a) - g(a) = 0$, $h'(c) = f'(c) - g'(c) > 0$, $x - a > 0$, то $h(x) > 0$ при $x > a$ и $f(x) > g(x)$ при $x > a$.

6.46. Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ n-кратно дифференцируемы;

2 $\alpha^{(m)}(x_0) = \beta^{(m)}(x_0)$, где $m = 0, 1, \ldots, n - 1$;

3) $\alpha^{(n)}(x) > \beta^{(n)}(x)$ при $x > x_0$.

Тогда справедливо неравенство $\alpha(x) > \beta(x)$ при $x > x_0$.

Решение. Рассмотрим функцию $f^{(n-1)}(x) = \alpha^{(n-1)}(x) - \beta^{(n-1)}(x)$ и применим к ней теорему Лагранжа на отрезке $[x_0; x]$: $f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) = f^{(n)}(c)(x - x_0)$, в силу условий 2) и 3) получаем $f^{(n-1)}(x) > 0$ при $x > x_0$. Аналогично можно доказать, что $f(x) > 0$, или $\alpha(x) > \beta(x)$, при $x > x_0$.

6.47. С помощью теоремы Лагранжа доказать неравенство $e^x > x + 1$ при $x > 0$.

Решение. Составим функцию $f(x) = e^x - x - 1$, эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Лагранжа на любом отрезке $[0; x]$, где $0 < x$. Существует точка c $(0 < c < x)$, где справедливо равенство $(e^x - x - 1) - (e^0 - 0 - 1) = (e^c - 1)(x - 0)$, отсюда $e^x - x - 1 > 0$ при $x > 0$.

6.48. Используя постоянство производной функции $\arcsin x + \arccos x$ на отрезке $x \in [-1; 1]$, доказать справедливость равенства $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$.

Решение. Имеем для

$$f(x)=\arcsin x+\arccos x \quad f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$$

при $x \in (-1;\ 1)$, отсюда при $x \in (-1;\ 1)$ функция $f(x) = \arcsin x + \arccos x = \text{const}$ и в силу прерывности этой функции на отрезке $x \in [-1;\ 1]$ заключаем, что $f(x) = \arcsin x + \arccos x = \text{const}$ всюду при $x \in [-1;\ 1]$.

В точке $x = 1$ получаем $f(1) = \arcsin 1 + \arccos 1 = \text{const} = \pi/2$.

6.49. Доказать, что для функций $f(x) = \sin x$ и $g(x) = \cos x$ выполняются все условия теоремы Коши на отрезке $x \in [0;\ \pi/2]$. Найти точку c, в которой справедливо равенство

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(\pi/2)-f(0)}{g(\pi/2)-g(0)}.$$

Решение. Функции $f(x) = \sin x$ и $g(x) = \cos x$ дифференцируемы всюду на R, следовательно, они дифференцируемы и непрерывны при $x \in [0;\ \pi/2]$ и $g(\pi/2) \neq g(0)$. В соответствии с формулой теоремы Коши составим уравнение

$$\left.\frac{(\sin x)'}{(\cos x)'}\right|_{x=c}=\frac{\sin(\pi/2)-\sin 0}{\cos(\pi/2)-\cos 0}, \quad -\operatorname{ctg} c=-1, \quad c=\frac{\pi}{4}.$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ С ПОМОЩЬЮ ПРАВИЛА ЛОПИТАЛЯ. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ВИДА «0/0»

6.50. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{\ln x}$.

Решение. Проверим условия применимости правила Лопиталя: 1) имеется неопределенность

$$\left.\frac{x^4-1}{\ln x}\right|_{x=1}=\frac{0}{0};$$

2) функции $x^4 - 1$ и $\ln x$ дифференцируемы в окрестности точки $x = 1$; 3) $(\ln x)'_{x=1} \neq 0$; 4) существует предел

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^4-1)'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{4x^3}{1/x}=\lim_{x\to 1}4x^4=4.$$

Отсюда $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^4-1)'}{(\ln x)'}=4.$

6.51. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 3\pi x}{\sin 2\pi x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin 3\pi x}{\sin 2\pi x}=(0/0)=\lim_{x\to 1}\frac{(\sin 3\pi x)'}{(\sin 2\pi x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{3\pi\cdot\cos 3\pi x}{2\pi\cdot\cos 2\pi x}=-\frac{3}{2}.$$

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ВИДА «∞/∞»

6.52. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=(\infty/\infty)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

6.53. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=(\infty/\infty)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0.$$

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ВИДА «0 · ∞»

6.54. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(x-\pi/2)\cdot\operatorname{tg}x$.

Решение.

$$\lim_{x\to\pi/2}(x-\pi/2)\cdot\operatorname{tg}x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to\pi/2}\frac{x-\pi/2}{\operatorname{ctg}x}=$$

$$=(0/0)=\lim_{x\to\pi/2}\frac{(x-\pi/2)'}{(\operatorname{ctg}x)'}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{1}{-\dfrac{1}{\sin^2 x}}=-1.$$

6.55. $\lim\limits_{x\to 1+0}(\ln x\cdot\ln(x-1))$.

Решение.

$$\lim_{x\to 1+0}(\ln x\cdot\ln(x-1))=(0\cdot(-\infty))=\lim_{x\to 1+0}\frac{\ln(x-1)}{\dfrac{1}{\ln x}}=(-\infty/-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to 1+0}\frac{(\ln(x-1))'}{\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)'}=\lim_{x\to 1+0}\frac{\dfrac{1}{x-1}}{-\dfrac{1}{x\ln^2 x}}=\lim_{x\to 1+0}\frac{x\ln^2 x}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1+0}\frac{\ln^2 x}{1-\dfrac{1}{x}}=(0/0)=\lim_{x\to 1+0}\frac{\dfrac{2\ln x}{x}}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 1+0}2x\ln x=0.$$

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ВИДА «$\infty - \infty$»

6.56. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x(e^x-1)}=(0/0).$$

Дважды применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-x-1)'}{(x(e^x-1))'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=(0/0)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(e^x-1+xe^x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(x+2)}=\frac{1}{2}.$$

6.57. $\lim\limits_{x\to +\infty}(e^x-\sqrt{x})$.

Решение.

$$\lim_{x\to +\infty}(e^x-\sqrt{x})=(\infty-\infty)=\lim_{x\to +\infty}e^x\left(1-\frac{\sqrt{x}}{e^x}\right).$$

Поскольку

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^x}=(\infty/\infty)=\lim_{x\to +\infty}\frac{(\sqrt{x})'}{(e^x)'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}e^x}=0,$$

то

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1-\frac{\sqrt{x}}{e^x}\right)=1$$

и

$$\lim_{x\to +\infty}e^x\left(1-\frac{\sqrt{x}}{e^x}\right)=\lim_{x\to +\infty}e^x\cdot\lim_{x\to +\infty}\left(1-\frac{\sqrt{x}}{e^x}\right)=\lim_{x\to +\infty}e^x\cdot 1=+\infty.$$

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ВИДА «0^0»

6.58. $\lim\limits_{x\to +0}x^x$.

Решение.

$$\lim_{x\to +0}x^x=e^{\lim\limits_{x\to +0}x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to +0}\frac{(\ln x)'}{(1/x)'}}=e^{\lim\limits_{x\to +0}\frac{1/x}{-1/x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to +0}(-x)}=e^0=1.$$

6.59. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^x$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)^x=(0^0)=e^{\lim\limits_{x\to 0} x\ln(1-\cos x)}.$$

Найдем отдельно

$$\lim_{x\to 0}x\cdot\ln(1-\cos x)=(0\cdot(-\infty))=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(1-\cos x))'}{(1/x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{1-\cos x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}=-\lim_{x\to 0}2x\cdot\lim_{x/2\to 0}\frac{x/2}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\cos\frac{x}{2}=0.$$

Здесь использовался первый замечательный предел

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha}=1.$$

Отсюда $e^{\lim\limits_{x\to 0} x\ln(1-\cos x)}=e^0=1.$

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ВИДА «1^∞»

6.60. $\lim\limits_{x\to +0}(\cos x)^{1/x^2}.$

Решение.

$$\lim_{x\to +0}(\cos x)^{1/x^2}=(1^\infty)=e^{\lim\limits_{x\to +0}\frac{\ln\cos x}{x^2}},$$

$$\lim_{x\to +0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\lim_{x\to +0}\frac{(\ln\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to +0}\frac{-\dfrac{\sin x}{\cos x}}{2x}=-\frac{1}{2};$$

$$\lim_{x\to +0}(\cos x)^{1/x^2}=e^{-1/2}.$$

6.61. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^4}.$

Решение.

$$\lim_{x\to +0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^4}=(1^\infty)=e^{\lim\limits_{x\to +0}\frac{\ln(\sin x/x)}{x^4}}.$$

Найдем отдельно

$$\lim_{x\to+0}\frac{(\ln\sin x-\ln x)'}{(x^4)'}=\lim_{x\to+0}\frac{\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{x}}{4x^3}=\lim_{x\to+0}\frac{(x\operatorname{ctg}x-1)'}{(4x^4)'}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\operatorname{ctg}x-\dfrac{x}{\sin^2 x}}{16x^3}=\lim_{x\to+0}\frac{(\cos x\sin x-x)'}{(16x^3\sin^2 x)'}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{(1/2\sin 2x-x)'}{(16x^3\sin^2 x)'}=\lim_{x\to+0}\frac{\cos 2x-1}{48x^2\sin^2 x+32x^3\sin x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{2\sin^2 x}{48x^2\sin^2 x+32x^3\sin x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{(\sin x)'}{(24x^2\sin x+16x^3\cos x)'}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\cos x}{48x\sin x+24x^2\sin x+48x^2\cos x-16x^3\sin x}=\infty.$$

Отсюда $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^4}=\infty.$

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ВИДА «∞^0»

6.62. $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}.$

Решение.

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=e^{\lim\limits_{x\to+0}(-\sin x\cdot\ln x)}=e^{-\lim\limits_{x\to+0}\sin x/x\cdot\lim\limits_{x\to+0}x\cdot\ln x}=e^{-1\cdot 0}=e^0=1.$$

6.63. $\lim\limits_{x\to+0}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}.$

Решение.

$$\lim_{x\to+0}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}=(0^\infty)=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{e^x-1}{xe^x}}=(e^{0/0})=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{e^x}{(x+1)e^x}}=e.$$

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФОРМУЛ МАКЛОРЕНА И ТЕЙЛОРА

6.64. Разложить функцию $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ по формуле Тейлора по степеням $(x + 1)$, т. е. с центром разложения в точке $x_0 = -1$.

Решение.

$f(-1) = -12$, $f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$, $f'(-1) = 16$, $f''(x) = 6x - 8$, $f''(-1) = -14$, $f'''(x) = 6$, $f'''(-1) = 6$, $f^{(n)}(x) = 0$, если $n > 3$.

Имеем

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = f(-1) + \frac{f'(-1)}{1!}(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \\ + \frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3 + \ldots = -12 + \frac{16}{1}(x+1) + \frac{-14}{2}(x+1)^2 + \\ + \frac{6}{6}(x+1)^3 + 0 = -12 + 16(x+1) - 7(x+1)^2 + (x+1)^3.$$

6.65. Разложить функцию $f(x) = e^{3x}$ по формуле Маклорена.

Решение. Воспользуемся таблицей разложения, положив $u = 3x$:

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \ldots + \frac{u^n}{n!} + \ldots = 1 + \frac{3x}{1} + \frac{9x^2}{2} + \ldots + \frac{3^n x^n}{n!} + \ldots$$

6.66. Разложить функцию

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

по формуле Маклорена.

Решение.

Преобразуем функцию

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = \\ = -\frac{1}{2}\frac{1}{(1 - x/2)} + \frac{1}{1-x},$$

воспользуемся формулой суммы для бесконечно убывающей геометрической прогрессии $1/(1 - u) = 1 + u + u^2 + \ldots + u^n + \ldots$ и запишем

$$f(x)=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\ldots+\frac{x^n}{2^n}+\ldots\right)+(1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots)=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x+\frac{7}{8}x^2+\ldots+\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n+\ldots$$

6.67. По формуле Маклорена вычислить $\cos 0{,}1$, используя только первые два члена разложения, и оценить погрешность вычисления.

Решение.

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+R=\cos 0{,}1\approx 1-\frac{0{,}1^2}{2}+R=0{,}995+R.$$

Здесь погрешность вычисления определяется оценкой остаточного члена в форме Лагранжа

$$|R|=\left|\frac{\cos(0{,}1\cdot\theta)}{24}\right|\leqslant\frac{1}{24}\approx 0{,}042.$$

Здесь θ некоторое число, удовлетворяющее неравенству $0<\theta<1$. Итак, $\cos 0{,}1\approx 0{,}995\pm 0{,}042$.

6.68. С помощью формул Тейлора и Маклорена вычислить пределы

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x+x^2/2}{x^3}$.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x-x^3/6+o(x^4))-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{6}+\frac{o(x^4)}{x^3}\right)=\frac{1}{6}$;

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x+x^2/2}{x^3}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x-x^2/2+x^3/3+o(x^3))-x+x^2/2}{x^3}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)=\frac{1}{3}.$$

НАХОЖДЕНИЕ ИНТЕРВАЛОВ МОНОТОННОСТИ И ЭКСТРЕМУМОВ ФУНКЦИИ $f(x)$

6.69. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$.

Решение. Найдем $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$. $f'(x) = 0$ при $x = -1$ и при $x = 2$. Имеем при $x \in (-\infty; -1) \cup \cup (2; +\infty)$ $f'(x) > 0$, и на этих интервалах функция возрастает, при $x \in (-1; 2)$ $f'(x) < 0$, и здесь функция убывает. Так как при переходе через критическую точку первого рода $x = -1$ первая производная меняет свой знак с «+» на «−», то в этой точке локальный максимум $f_{\max}(-1) = 6$. При переходе через другую критическую точку первого рода $x = 2$ первая производная меняет свой знак с «−» на «+», следовательно, в этой точке имеется локальный минимум $f_{\min}(2) = -29$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ $f(x) = a$ ПРИ ЛЮБОМ ЗНАЧЕНИИ ПАРАМЕТРА a С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРИНЦИПА МОНОТОННОСТИ

6.70. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 100x - 8 = a$.

Решение. Найдем $f'(x) = 3x^2 - 4x + 100$. Поскольку дискриминант квадратного трехчлена отрицателен, а при x^2 положительный коэффициент, то производная $f'(x) > 0$, значит, всюду на ОДЗ функция $f(x)$ строго монотонна (возрастает), следовательно, каждое свое значение она принимает только один раз, поэтому при любом $a \in (-\infty; +\infty)$ уравнение $f(x) = a$ имеет только один корень.

НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ $f(x)$ НА ОТРЕЗКЕ $x \in [a, b]$

6.71. $f(x) = \dfrac{x}{8} + \dfrac{2}{x}$; $x \in [1; 6]$.

Решение.
$$f'(x) = \frac{1}{8} - \frac{2}{x^2} = 0,$$

только один корень этого уравнения $x = 4 \in [1; 6]$. Вычисляем $f(4) = 1$, $f(1) = 2\frac{1}{8}$, $f(6) = 1\frac{1}{12}$.

$$f_{\text{наиб}}(x_{\text{наиб}} = 1) = 2\frac{1}{8}, \quad f_{\text{наим}}(x_{\text{наим}} = 4) = 1.$$

НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ $f(x)$ НА ИНТЕРВАЛЕ $X \in (a, b)$

6.72. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$; $x \in (-1; 1)$.

Решение. $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x \cdot (x-2) = 0$ при $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Интервалу $x \in (-1;\ 1)$ принадлежит только $x_1 = 0$. Имеем при $x \in (-1; 0)$ $f'(x) > 0$, и функция возрастает, при $x \in (0;\ 1)$ $f'(x) < 0$, и функция убывает, на интервале $x \in (-1; 1)$ имеется только глобальный максимум $f_{\max}(x_{\max} = 0) = 1$, наименьшего значения не существует.

6.73. Среди всех прямоугольников, периметр которых равен P, найти тот, площадь которого наибольшая. Вычислить эту площадь.

Решение. Выпишем формулу для площади прямоугольника, введя длины сторон x и

$$a = \frac{1}{2}(P - 2x) = \frac{1}{2}P - x.$$

Площадь в этом случае есть функция вида

$$S(x) = x\left(\frac{1}{2}P - x\right) = \frac{1}{2}Px - x^2,$$

где

$$0 < x < \frac{1}{2}P.$$

Найдем производную и определим значение x, при котором выполняется необходимое условие существования экстремума.

$$S'(x) = \frac{1}{2}P - 2x,\ x = \frac{P}{4},\ S\left(\frac{P}{4}\right) = \frac{p^2}{16}.$$

Так как при

$$0 < x < \frac{P}{4}\ \ S'(x) > 0,$$

а при

$$\frac{P}{4} < x < \frac{P}{2}\ \ S'(x) < 0,$$

то в точке $x = \dfrac{P}{4}$ имеется глобальный максимум функции $S(x)$ на интервале $0 < x < \dfrac{P}{4}$ и наибольшее значение площади достигается при $x = \dfrac{P}{4}$ и равно $S\left(\dfrac{P}{4}\right) = \dfrac{p^2}{16}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВА НАХОЖДЕНИЕМ ГЛОБАЛЬНЫХ ЭКСТРЕМУМОВ ИЛИ НАИБОЛЬШИХ И НАИМЕНЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ НА ЗАДАННЫХ ОТРЕЗКАХ

6.74. Доказать неравенство $x > \ln x$ при $x \in (0; +\infty)$.

Решение. Составим функцию $f(x) = x - \ln x$. Найдем ее производную $f'(x) = 1 - 1/x$. Воспользуемся необходимым условием экстремума и определим критические точки первого рода, т. е. такие, в которых либо существует $f'(x) = 0$, либо $f'(x)$ не существует, но $f(x)$ в этих точках непрерывна. Имеем $f'(x) = 0$ при $x = 1$.

Воспользуемся достаточным условием экстремума по первой производной и определим интервалы знакопостоянства $f'(x)$ на ОДЗ. Имеем: при $0 < x < 1$ $f'(x) < 0$, а при $1 < x < +\infty$ $f'(x) > 0$. Вывод: при $x = 1$ функция имеет глобальный минимум $f(1) = 1$. Значит, всюду на ОДЗ $f(x) = x - \ln x \geqslant 1 > 0$.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ $f(x) = 0$ НАХОЖДЕНИЕМ ГЛОБАЛЬНЫХ ЭКСТРЕМУМОВ ФУНКЦИИ $f(x)$

6.75. $xe^{-x} - 1/e = 0$.

Решение. Составим функцию $f(x) = xe^{-x}$, найдем корень уравнения $f'(x) = e^{-x}(1 - x) = 0 \Rightarrow x = 1$. Поскольку при $x \in (-\infty; 1)$ $f'(x) > 0$, а при $x \in (1; +\infty)$ $f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ имеет глобальный максимум $f_{\max}(1) = 1/e$. Ответ: $x = 1$.

НАХОЖДЕНИЕ ИНТЕРВАЛОВ ВЫПУКЛОСТИ, ВОГНУТОСТИ И ТОЧЕК ПЕРЕГИБА ДЛЯ ФУНКЦИИ $y = f(x)$

6.76. $f(x) = x^4 + x^3 - 18x^2 + 24x - 5$.

Решение. Найдем первую и вторую производные

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 36x + 24,\quad f''(x) = 12x^2 + 6x - 36.$$

Определим критические точки второго рода $f''(x) = 0$ при $x_1 = -2$, $x_2 = 1{,}5$. Составим таблицу:

Интервалы и точки				
$-\infty < x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 1{,}5$	$x = 1{,}5$	$1{,}5 < x < +\infty$
Знак и значения $f''(x)$				
$f''(x) > 0$	$f''(x) = 0$	$f''(x) < 0$	$f''(x) = 0$	$f''(x) > 0$

Указание на выпуклость, вогнутость или точки перегиба, значения функции в этих точках				
Вогнута	Точка перегиба, $f(-2)=-117$	Выпукла	Точка перегиба, $f(1{,}5)=-1\frac{1}{16}$	Вогнута

6.77. $f(x)=|x^2-3x+2|$.

Решение.

$$f''(x)=\begin{cases}2, & \text{при } -\infty<x<1;\\ \text{не существует при } x=1;\\ -2, & \text{при } x\in(1,2);\\ \text{не существует при } x=2;\\ 2, & \text{при } 2<x<\infty.\end{cases}$$

Составим таблицу:

Интервалы и точки				
$-\infty<x<1$	$x=1$	$1<x<2$	$x=2$	$2<x<+\infty$
Знак и значения $f''(x)$				
$f''(x)>0$	Не существует	$f''(x)<0$	Не существует	$f''(x)>0$
Указание на выпуклость, вогнутость или точки перегиба, значения функции в этих точках				
Вогнута	Точка перегиба $f(1)=0$	Выпукла	Точка перегиба $f(2)=0$	Вогнута

НАХОЖДЕНИЕ АСИМПТОТ ФУНКЦИИ $y=f(x)$

6.78. $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^3}$.

Решение. Вертикальные асимптоты ищем на краях области допустимых значений аргумента и в точках разрыва второго рода. Имеем

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{(x-1)^3}=\frac{1}{((1-0)-1)^3}=-\infty,$$

значит, при приближении к $x=1$ слева график функции устремляется к $-\infty$. Аналогично

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{(x-1)^3}=\frac{1}{((1+0)-1)^3}=+\infty,$$

при приближении к $x = 1$ справа график функции устремляется к $+\infty$. Вывод: $x = 1$ — вертикальная асимптота при приближении к $x = 1$ и слева и справа. Найдем наклонные асимптоты:

$$k_1 = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x(x-1)^3} = 0;$$

$$b_1 = \lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx] = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(x-1)^3} = 0,$$

$y = 0$ есть горизонтальная асимптота при $x \to -\infty$. Аналогично

$$k_2 = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x(x-1)^3} = 0;$$

$$b_2 = \lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx] = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(x-1)^3} = 0,$$

$y = 0$ есть горизонтальная асимптота при $x \to +\infty$.

6.79. $f(x) = \dfrac{x^2+4x+1}{x+2}$.

Решение. Вертикальные асимптоты ищем в точке $x = -2$:

$$\lim_{x\to-2-0}\frac{x^2+4x+1}{x+2} = \frac{(-2-0)^2+4(-2-0)+1}{(-2-0)+2} = \frac{-3}{-0} = +\infty,$$

при приближении к точке $x = -2$ слева график функции устремляется к $+\infty$, $x = -2$ есть вертикальная асимптота при $x \to -2$ слева,

$$\lim_{x\to-2+0}\frac{x^2+4x+1}{x+2} = \frac{(-2+0)^2+4(-2+0)+1}{(-2+0)+2} = \frac{-3}{+0} = -\infty,$$

при приближении к точке $x = -2$ справа график функции устремляется к $-\infty$, $x = -2$ есть вертикальная асимптота при $x \to -2$ справа. Найдем наклонную асимптоту при $x \to -\infty$:

$$k_1 = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4x+1}{x(x+2)} = 1,$$

$$b_1 = \lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx] = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+4x+1}{x+2} - x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{x+2} = 2,$$

$y = x + 2$ есть наклонная асимптота при $x \to -\infty$. Аналогично найдем

$$k_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4x+1}{x(x+2)} = 1,$$
$$b_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x+2} = 2$$

и $y = x + 2$ есть наклонная асимптота при $x \to +\infty$.

6.80. Найти наклонную асимптоту функции и доказать справедливость неравенства

$$f(x) = 2x - \frac{3x}{2}\ln\left(e - \frac{1}{3x}\right) > 0 \text{ при } x \in \left(\frac{1}{3e}; +\infty\right).$$

Решение. Найдем наклонную асимптоту функции

$$F(x) = \frac{3x}{2}\ln\left(e - \frac{1}{3x}\right) \text{ при } x \to +\infty:$$
$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{2x}\ln\left(e - \frac{1}{3x}\right) = \frac{3}{2},$$
$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{2}\ln\left(e - \frac{1}{3x}\right) - \frac{3}{2}x\right) = -\frac{1}{2e},$$

и $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2e}$ есть наклонная асимптота при $x \to +\infty$ и кривая расположена под асимптотой. Поскольку $y = 2x$ проходит выше асимптоты $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2e}$ на участке $x \in \left(\frac{1}{3e}; +\infty\right)$, то

$$f(x) = 2x - \frac{3x}{2}\ln\left(e - \frac{1}{3x}\right) > 0.$$

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ФУНКЦИИ $y = f(x)$ И ПОСТРОЕНИЕ ЕЕ ГРАФИКА

6.81. Провести исследование свойств функции

$$y = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$$

и построить ее график.

Решение. Имеем:

1) область допустимых значений аргумента: $x \in (-\infty; +\infty)$;
2) область изменения функции $y \in (-\infty; +\infty)$;
3) функция общего вида, так как $y(-2) = 2\sqrt[3]{2} \neq y(2) = 0$;

4) функция непериодическая, так как не существует бесконечного множества ее нулевых значений, повторяющихся через период, нулевых значений всего два: при $x = 0$ и $x = 2$;

5) данная функция элементарная, она определена во всех точках числовой оси, значит, она всюду непрерывна при $x \in (-\infty; +\infty)$;

6) вертикальных асимптот нет, так как нет точек разрыва второго рода и краев ОДЗ;

7) наклонная асимптота $y = -x + 2/3$ при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$, так как

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - x^3}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{2/x - 1} = -1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (\sqrt[3]{2x^2 - x^3} - (-1)x) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2 - x^3 + x^3}{\sqrt[3]{(2x^2 - x^3)^2} - x\sqrt[3]{2x^2 - x^3} + x^2} = \frac{2}{3};$$

8) два экстремума: $x_{\min} = 0$, $y_{\min} = 0$ и $x_{\max} = 4/3$,

$$y_{\max} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{4}.$$

В самом деле,

$$y'(x) = \frac{4x - 3x^2}{3\sqrt[3]{(2x^2 - x^3)^2}} = \frac{4 - 3x}{3\sqrt[3]{x(2-x)^2}}.$$

$y'(4/3) = 0$, $y'(0)$ — не существует, а функция в точке $x = 0$ непрерывна, значит, в этих точках выполняется необходимое условие экстремума. При переходе слева направо через точку $x = 0$ $y'(x)$ меняет свой знак с «−» на «+», а при переходе через точку $x = 4/3$ с «+» на «−»;

9) поскольку при $x \in (-\infty; 0)$ и $x \in (4/3; +\infty)$ $y'(x) < 0$, то на этих интервалах функция убывает. Функция возрастает при $x \in (0; 4/3)$, так как на этом интервале $y'(x) > 0$;

10) найдем вторую производную

$$y''(x) = \frac{-3\sqrt[3]{(2x^2 - x^3)^2} - (4 - 3x)\dfrac{4(2x^2 - x^3)(4x - 3x^2)}{3\sqrt[3]{2x^2 - x^3}}}{3\sqrt[3]{x(2-x)^4}} =$$

$$= -\frac{8}{9x^{4/3}(2-x)^{5/3}},$$

$y''(x) \neq 0$ при $\forall x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$. При $x = 0$ и при $x = 2$ вторая производная не существует, но функция в этих точках непрерывна, значит, в этих точках выполняется необходимое условие существования точки перегиба. Исследуем знаки $y''(x)$ вблизи указанных точек. При $\forall x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ 2)$ $y''(x) < 0$ и значит, на этих интервалах кривая выпукла, а точка $x = 0$ не является точкой перегиба. При $\forall x \in (2;\ +\infty)$ $y''(x) > 0$, значит, на этом интервале кривая вогнута, а точка $x = 2$, $y = 0$ является точкой перегиба. График функции представлен на рисунке 6.1.

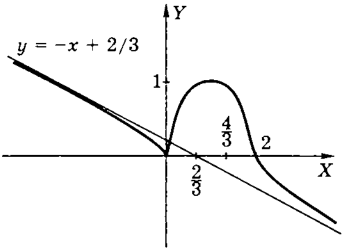


Рис. 6.1

6.82. Провести исследование свойств функции

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$$

и построить ее график.

Решение. Имеем:

1) область допустимых значений аргумента: $x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$;

2) область изменения функции $y \in (-\infty;\ +\infty)$;

3) функция общего вида, так как

$$y(-x) = \frac{(-x)^2 + 2(-x) - 1}{(-x)} = -\frac{x^2 - 2x - 1}{x} \neq \begin{cases} -y(x) = -\dfrac{x^2 + 2x - 1}{x} \\ y(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x} \end{cases};$$

4) функция непериодическая, так как не существует бесконечного множества значений $x = 0$, повторяющихся через период, при которых функция не существует;

5) данная функция элементарная, она определена при $x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$, значит, в этих интервалах она всюду непрерывна;

6) разрыв второго рода, так как

$$\lim_{x \to \pm 0} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = \pm\infty.$$

Из этого также следует, что $x = 0$ есть вертикальная асимптота при $x \to \pm 0$;

7) наклонная асимптота $y = x + 2$ при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$, так как

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2x-1}{x^2} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x} = 2;$$

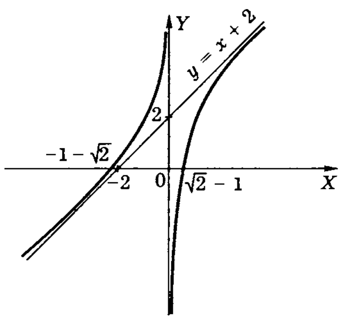


Рис. 6.2

8) экстремумов нет. В самом деле, $y'(x) = 1 + 1/x^2 > 0$ при всех $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ и функция строго возрастает на всей ОДЗ;

9) найдем вторую производную. $y''(x) = -2/x^3$. $y''(x)$ не существует при $x = 0$. На интервалах $\forall x \in (-\infty; 0)$ и $\forall x \in \in (0; +\infty)$ $y''(x)$ имеет соответственно знаки «+» и «−». На интервале $\forall x \in (-\infty; 0)$ график кривой вогнутый, на интервале $\forall x \in (0; +\infty)$ — выпуклый. Точек перегиба нет. График функции представлен на рисунке 6.2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИВИЗНЫ, РАДИУСА КРИВИЗНЫ И КООРДИНАТЫ ЦЕНТРА КРИВОЙ В ДАННОЙ ТОЧКЕ

6.83. Найти кривизну, радиус кривизны и координаты центра кривой $y = 4/x$ в точке $x = 2$.

Решение.

$$K = \frac{\left|\dfrac{d^2 f}{dx^2}\right|}{\left(1+\left(\dfrac{df}{dx}\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{|8/x^3|}{(1+16/x^4)^{3/2}} = \frac{8x^3}{(x^4+16)^{3/2}},$$

$$K(2) = \sqrt{2}/4, \quad R(x) = \frac{1}{K(x)} = \frac{(x^4+16)^{3/2}}{8x^3}, \quad R(2) = 2\sqrt{2},$$

$$X = x - \frac{\dfrac{df}{dx}\left(1+\left(\dfrac{df}{dx}\right)^2\right)}{\dfrac{d^2f}{dx^2}} = x - \frac{-\dfrac{4}{x^2}\cdot(1+16/x^4)}{8/x^3} = x + \frac{x^4+16}{2x^3},$$

$$Y = y + \frac{1+\left(\dfrac{df}{dx}\right)^2}{\dfrac{d^2f}{dx^2}} = y + \frac{1+16/x^4}{8/x^3} = y + \frac{x^4+16}{8x}.$$

$$X = 4, \quad Y = 4.$$

6.84. Найти кривизну, радиус кривизны и координаты центра кривой $x = \alpha(t) = t - \sin t$, $y = \beta(t) = 1 - \cos t$ в точке $t = \pi/2$.

Решение.

$$K = \frac{\left|\dfrac{d^2\beta}{dt^2}\cdot\dfrac{d\alpha}{dt} - \dfrac{d\beta}{dt}\cdot\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}\right|}{\left(\left(\dfrac{d\alpha}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{d\beta}{dt}\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{|\cos t(1-\cos t)-\sin^2 t|}{((1-\cos t)^2+\sin^2 t)^{3/2}},$$

$$K\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$$R(t) = \frac{\left(\left(\dfrac{d\alpha}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{d\beta}{dt}\right)^2\right)^{3/2}}{\left|\dfrac{d^2\beta}{dt^2}\cdot\dfrac{d\alpha}{dt} - \dfrac{d\beta}{dt}\cdot\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}\right|} = \frac{((1-\cos t)^2+\sin^2 t)^{3/2}}{|\cos t(1-\cos t)-\sin^2 t|},$$

$$R\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{2}.$$

$$X = x - \frac{((1+\cos t)^2+\sin^2 t)\sin t}{\cos t(1-\cos t)-\sin^2 t},$$

$$Y = y + \frac{((1-\cos t)^2+\sin^2 t)(1-\cos t)}{\cos t(1-\cos t)-\sin^2 t},$$

$$X\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}+1, \quad Y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

6.85. Найти кривизну, радиус кривизны и координаты центра кривой $\rho = 1 - \cos\varphi$ в точке $\varphi = \pi/2$.

Решение.

$$K=\frac{\left|(\rho(\varphi))^2+2\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2-\rho(\varphi)\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}\right|}{\left((\rho(\varphi))^2+\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2\right)^{3/2}}=\frac{(1-\cos\varphi)^2+2\sin^2\varphi-(1-\cos\varphi)\cos\varphi}{((1-\cos\varphi)^2+\sin^2(\varphi))^{3/2}}=$$

$$=\frac{1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi+2\sin^2\varphi-\cos\varphi+\cos^2\varphi}{(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)^{3/2}}=\frac{3-3\cos\varphi+2\sin^2\varphi}{(2+2\cos\varphi)^{3/2}}.$$

$K(0)=0.$

$$R(\varphi)=\frac{\left((\rho(\varphi))^2+\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2\right)^{3/2}}{\left|(\rho(\varphi))^2+2\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2-\rho(\varphi)\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}\right|}=\frac{(2+2\cos\varphi)^{3/2}}{3-3\cos\varphi+2\sin^2\varphi}.$$

$R(0)=+\infty.$

$$\begin{cases} X=(1-\cos\varphi)\cos\varphi-\dfrac{((1-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi)((1-\cos\varphi)\cos\varphi+\sin\varphi\sin\varphi)}{(1-\cos\varphi)^2+2\sin^2\varphi-(1-\cos\varphi)\cos\varphi}, \\ Y=(1-\cos\varphi)\sin\varphi+\dfrac{((1-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi)((1-\cos\varphi)\sin\varphi+\sin\varphi\cos\varphi)}{(1-\cos\varphi)^2+2\sin^2\varphi-(1-\cos\varphi)\cos\varphi}. \end{cases}$$

$X(0)=0,\ \ Y(0)=0.$

6.18. ЗАДАЧИ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

6.86. Найти приращение функции $\Delta f(x_0, \Delta x)$, если

а) $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=0$, $\Delta x=0{,}01$; б) $f(x)=\lg x$, $x_0=100$, $\Delta x=-90$; в) $f(x)=1/(x^2+x-6)$, $x_0=1$, $\Delta x=0{,}2$; г) $f(x)=x^3$, $x_0=1$, $\Delta x=0{,}1$.

6.87. Исходя из определения производной, доказать, что в случае существования производной $f'(x_0)$ справедливо равенство

$$\lim_{x\to x_0}\frac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=f(x_0)-x_0f'(x_0).$$

6.88. Пользуясь определениями левой и правой производных функции $f(x)$ в точке x_0, найти их для $f(x)=|x-1|+|x+1|$ и $x_0=\pm1$.

6.89. Пользуясь определениями левой и правой производных функции $f(x)$ в точке x_0, найти их для

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{если } x \leqslant 1; \\ -x^2+2x, & \text{если } x>1 \end{cases} \quad \text{и} \quad x_0=1.$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ С ПОМОЩЬЮ ТАБЛИЦЫ ПРОИЗВОДНЫХ И ПРОСТЕЙШИХ ПРАВИЛ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

6.90. $f(x)=3x^2-4x^{-0,5}+7\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{8}{\sqrt[5]{x^4}}$.

6.91. $f(x)=4\sqrt[3]{x}+\dfrac{5}{x^2}$.

6.92. $f(x)=x^4\cos x$.

6.93. $f(x)=\operatorname{arctg} x/\log_2 x$.

6.94. $f(x)=5x^4-7/x^8-3\sqrt[5]{x^3}+9$.

6.95. $f(x)=3x^2-4x^{-0,5}+x^3\sin x$.

6.96. $f(x)=2\cos x-7\sin x$.

6.97. $f(x)=\sin x\cdot\operatorname{arctg} x$.

6.98. $f(x)=\ln x/x^3$.

6.99. $f(x)=e^x(5^x/\arcsin x)$.

6.100. $f(x)=\log_3 x\cdot\sqrt{x}\cdot\operatorname{tg} x$.

6.101. $f(x)=\operatorname{ctg} x/x^9$.

Вычислить значение производной функции $f(x)$ в заданной точке $x=a$.

6.102. $f(x)=x^2-4x+2$, $a=2$.

6.103. $f(x)=4\sqrt{x}-3x^2+2$, $a=0$.

6.104. $f(x)=|x-4|$, $a_1=1$, $a_2=4$.

6.105. $f(x)=|x^2-3x+2|$, $a_1=1$, $a_2=3$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ В ЗАДАННОЙ ТОЧКЕ x_0

6.106. $f(x)=\begin{cases} x-2, & \text{если } x\leqslant 2, \\ x^2-2x, & \text{если } x>2. \end{cases} \quad x_0=2.$

6.107. $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x\leqslant 0, \\ x^4\ln x, & \text{если } x>0. \end{cases} \quad x_0=0.$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ

6.108. $f(x)=\arcsin\sqrt{x}$.

6.109. $f(x)=\operatorname{ctg}(3^x\sqrt{x})$.

6.110. $f(x)=\operatorname{arctg}\left(\frac{\log_3 x}{x^5}\right)$.

6.111. $f(x)=\cos(\sqrt{x})$.

6.112. $f(x)=x^7\cdot e^{3x}$.

6.113. $f(x)=\operatorname{tg}\left(\frac{x^2-8x}{\sqrt[5]{x^4+1}}\right)$.

6.114. $f(x)=\sqrt[3]{1+x+x^2}\operatorname{ctg}(\log_7(\arccos(4^{2x})))$.

6.115. $f(x)=2^x\cdot\operatorname{ctg}(-4x)$.

6.116. $f(x)=\log(x^2+2x+9)$.

6.117. $f(x)=\operatorname{arctg}(4x^3)\cdot\ln(1+10x)$.

6.118. $f(x)=\frac{\arcsin(2x)}{x^2+4}$.

6.119. $f(x)=\operatorname{sh}x^3\cdot\arccos\sqrt{x}$.

6.120. $f(x)=\operatorname{ch}\frac{\operatorname{arcctg}(3x+1)}{\ln^2 x}$.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ОПЕРАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Показать, что при $n\to\infty$ значения двух функций $f(x)$ и $g(x)$ в заданной точке $x=a$ становятся сколь угодно близкими друг другу, в то время как модуль разности их производных в данной точке стремится к бесконечности.

6.121. $f(x)=\frac{1}{n}\frac{\sqrt{2}}{2}$, $g(x)=\frac{1}{n}\cos(\pi/4+2n^2x)$, $a=\pi$.

6.122. $f(x)=\frac{2\sqrt{1+x}}{n}$, $g(x)=\frac{1}{n}\operatorname{arctg}(1+n^3x)$, $a=0$.

6.123. $f(x)=\frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{n}$, $g(x)=\frac{1}{n}\ln(e+n^5x)$, $a=0$.

6.124. $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{n},\ g(x)=\dfrac{1}{n}2^{1+n\sqrt{n}x},\ a=0.$

6.125. $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} x}{n},\ g(x)=\dfrac{\sqrt[3]{1+n^2x}}{n},\ a=0.$

6.126. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\arcsin(x-1)}}{n},\ g(x)=\dfrac{1}{n}3^{1+\sin(n\sqrt{n}(x-1))},\ a=1.$

6.127. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\log_2(2+\operatorname{arctg}(n(x-2))),$

$g(x)=\arcsin\dfrac{(x-2)^3}{n},\ a=2.$

6.128. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt[3]{1+(x-3)^4}}{\sqrt{n}},\ g(x)=\dfrac{1}{n}e^{\sqrt{1+n^5\operatorname{ctg}x(x-3)^4}},\ a=3.$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ $y'_x(x)$ ФУНКЦИЙ $f(x, y(x))=0$, ЗАДАННЫХ НЕЯВНО

6.129. $f(x,y(x))=y^3(x)+\sin x^2-1=0.$
6.130. $f(x,y(x))=\ln y(x)-y\cos x-x=0.$
6.131. $f(x,y(x))=\operatorname{ctg} y-y^2\sin x-5y=0.$
6.132. $f(x,y(x))=\operatorname{arctg} y^3-y/(1+x^2)-\ln y=0.$
6.133. $f(x,y(x))=7^y\arcsin y-9x=0.$
6.134. $f(x,y(x))=x\sqrt{1-y}+\operatorname{sh} y^2-8x=0.$
6.135. $f(x,y(x))=x^y-y^x-6=0.$
6.136. $f(x,y(x))=2^{x/y}-(x/y)^2=0.$
6.137. $f(x,y(x))=3^x+3^y-3^{x+y}=0.$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ С ПОМОЩЬЮ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

6.138. $f(x)=\dfrac{x^4(1+x)^5}{\sqrt{(x+8)(x-2)}}.$

6.139. $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}3x\cdot x^{3/2}\cdot\operatorname{arctg}(\sqrt{x})}{\ln^2 x\cdot 2^{5x}}.$

6.140. $f(x)=\dfrac{\arcsin 6x\cdot\operatorname{ctg} x^2}{\operatorname{sh}2x\cdot\cos(\ln x)}.$

6.141. $f(x)=\dfrac{\log_2(x^2+1)\cdot\arccos 7x\cdot(x^3+2)\cdot e^{-2x}}{\sqrt{x^2+2x+5}}$.

6.142. $f(x)=x^{\ln x}$.

6.143. $f(x)=x^{\sqrt{x}}$.

6.144. $f(x)=\operatorname{ctg} x^{\arcsin\sqrt{x}}$.

6.145. $f(x)=(\cos(x^3-2x-5))^{2^x}$.

6.146. $f(x)=(\sqrt[3]{x^2+x+7})^{\sin 5x}$.

6.147. $f(x)=(\ln x)^{\frac{x^2+1}{\operatorname{tg} 9x}}$.

6.148. $f(x)=(\arcsin(e^{2x}))^{x^3}$.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРВЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

6.149. $x=\sin^3 t,\ y=\cos^3 t$.

6.150. $x=\ln t,\ y=\operatorname{ctg} t$.

6.151. $x=\arccos(\ln t),\ y=e^{t^2}$.

6.152. $x=\dfrac{t+1}{t^2+2},\ y=\operatorname{arctg} t^2$.

6.153. $x=\log_2(t^2+1),\ y=\sqrt{t^2+1}$.

6.154. $x=t\sin 2t,\ y=t\cos 2t$.

6.155. $x=e^t\sin t,\ y=e^t\cos t$.

6.156. $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ И НОРМАЛИ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ

6.157. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y=4x^3+x-4$ в заданной точке $x_0=1$.

6.158. Составить уравнение нормали к кривой $y=x^2-x+1$ в точке пересечения этой кривой с прямой $y=2x-1$.

6.159. На линии $x=\ln t$, $y=t^2-8t$ найти точки, в которых касательная параллельна прямой $y=-6x$.

6.160. Под каким углом график функции $y=e^{x/2}$ пересекает прямую $x=2$?

6.161. Найти угол наклона к оси абсцисс касательной к функции $y = -1/(2x^2)$ в точке $x = 1$.

6.162. Найти угол, под которым пересекаются кривые $y = (x - \pi/2)^3 + 1$ и $y = \sin x$ при $x \in [9\pi/10; 11\pi/10]$.

6.163. Под какими углами пересекаются нормаль к кривой $y = x^2 - 2x + 1$ и касательная к кривой $y = -x^2 + 2x$, в точке пересечения $x = 1$?

НАХОЖДЕНИЕ ПЕРВОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА И ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЕГО В ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

6.164. Найти: а) $d(\arcsin (u/v^3))$; б) $d(\operatorname{arctg} (u\ln v))$; в) $d(2^u \operatorname{tg}(v^2))$; г) $d\left(\dfrac{\operatorname{ctg} u}{\sqrt[3]{1+v}}\right)$.

6.165. Найти первый дифференциал: а) $y = x^3 - 3x - 1$; б) $y = x^4 \cos x^2$; в) $y = \dfrac{\operatorname{ctg} 5x}{\sqrt{x}}$.

6.166. Найти дифференциал функции $y(x)$ и вычислить его значение при заданных значениях x $dx = \Delta x$: а) $y(x) = e^{2x}/\ln(e + 3x^2)$, $x = 0$, $dx = \Delta x = 0{,}1$; б) $y(x) = \cos x + x\sin x$, $x = \pi/2$, $dx = \Delta x = -0{,}1$; в) $y(x) = \ln\sqrt{1+x^2} - x\operatorname{arctg} x$, $x = 1$, $dx = \Delta x = 0{,}01$.

6.167. С помощью дифференциала вычислить:
а) $\sqrt{36{,}012}$; б) $\sqrt{48{,}014}$; в) $\cos 31°$; г) $\arcsin 0{,}51$.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ, ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

6.168. $f(x) = x^4 \sin 2x$.

6.169. $f(x) = x/\ln x$.

6.170. $f(x) = 2^{3x}$.

6.171. $f(x) = \operatorname{arctg} 5x$.

6.172. Найти первые три дифференциала функции: а) $y = x^3 + 2x - 8$; б) $y = \cos x^3 + 9x$.

6.173. Найти 5-й дифференциал функции $y = x^5 - 4x^4 + 8x^3 - 2x + 5$.

6.174. Найти n-й дифференциал функции $y = e^{2x}$.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМ РОЛЛЯ, ЛАГРАНЖА, КОШИ

6.175. Доказать, что для функции $f(x) = x - x^3$ выполняются все условия теоремы Ролля на отрезках $x \in [-1; 0]$ и $x \in [0; 1]$. Для каждого отрезка найти точку c, в которой справедливо равенство $f'(c) = 0$.

6.176. Функция $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2}$ принимает на концах отрезка $x \in [0; 4]$ значения, равные $\sqrt[3]{4}$. Справедлива ли теорема Ролля для данной функции на этом отрезке?

6.177. Доказать, что для функции $f(x)=\sqrt[3]{x^4}$ выполняются все условия теоремы Лагранжа на отрезке $x \in [-1; 1]$. Найти точку c, в которой справедливо равенство

$$f'(c)=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}.$$

6.178. На отрезке $x \in [1; 3]$ найти точку, в которой касательная к параболе $f(x) = x^2$ параллельна хорде, проведенной через точки с абсциссами $x = 1$ и $x = 3$.

6.179. С помощью теоремы Лагранжа доказать справедливость неравенств: а) $|\sin b - \sin a| \leqslant |b - a|$ при любых a и b; б) $|\cos b - \cos a| \leqslant |b - a|$ при любых a и b; в) $x^\alpha - 1 > \alpha(x - 1)$ при $\alpha \geqslant 2$, $x > 1$; г) $\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{x-a}$ при $n>1$, $0<a<x$; д) $1 + 2\ln x \leqslant x^2$ при $x > 0$; е) $x - x^2/2 < \ln(1 + x)$ при $x > 0$; ж) $\operatorname{tg} x > x + x^3/2$ при $0 < x < \pi/2$.

6.180. Пользуясь тем, что в заданном промежутке производная функции равна нулю, доказать справедливость равенств:

а) $2\operatorname{arctg} x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=\pi$ при $x\geqslant 1$;

б) $\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}-2\operatorname{arctg} x=0$ при $x\geqslant 0$;

в) $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$.

6.181. Доказать, что для функций $f(x) = x^2 + 2$ и $g(x) = x^3 - 1$ выполняются все условия теоремы Коши на отрезке $x \in [1; 2]$. Найти точку c, в которой справедливо равенство

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)}.$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ С ПОМОЩЬЮ ПРАВИЛА ЛОПИТАЛЯ

6.182. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 14x}{\operatorname{tg} 7x}$.

6.183. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 10\pi x}{e^{2x}-1}$.

6.184. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{\operatorname{tg} x - x}$.

6.185. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x^2-3)}{x^2-3x+2}$.

6.186. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\ln(\pi/2-\operatorname{arctg} x)}$.

6.187. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3}{2^x}$.

6.188. $\lim\limits_{x\to +\pi/2-0}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$.

6.189. $\lim\limits_{x\to +\pi/2-0}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

6.190. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{1/x}$.

6.191. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^{\operatorname{cth} x}$.

6.192. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x/x)^{1/x^2}$.

6.193. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{arctg} x/x)^{1/x^2}$.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФОРМУЛ МАКЛОРЕНА И ТЕЙЛОРА

6.194. Разложить функцию $f(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 8x + 4$ по формуле Тейлора по степеням $(x - 2)$.

6.195. Разложить функцию $f(x) = (x^2 - 2x + 3)^3$ по формуле Тейлора по степеням x.

6.196. Пользуясь разложением по формуле Маклорена функции $(1 + x)^\alpha$, разложить функцию

$$f(x)=\sqrt{1+x^2}$$

по степеням x до члена, содержащего x^4.

6.197. Пользуясь разложениями по формуле Маклорена функций $\ln(1 + x)$ и $\sin x$, разложить функцию

$$f(x)=\sqrt{2+x}$$

по степеням x до члена, содержащего x^6.

6.198. Разложить функцию $f(x) = 1/(x^2 - 4x + 3)$ по формуле Маклорена.

6.199. С помощью формулы Тейлора приближенно вычислить: а) $\operatorname{arctg} 0{,}8$ с точностью $3{,}2\cdot 10^{-5}$; б) $\cos \pi/20$ с точностью 10^{-5}; в) $\sqrt{5}$ с точностью 10^{-4}.

6.200. Оценить погрешность приближенного вычисления по формуле Маклорена $\ln 1{,}5$, если используются только первые четыре члена разложения.

6.201. Пользуясь формулами Тейлора и Маклорена, вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{1+x^2}}{\operatorname{tg}^4 x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2/2}-\cos x}{x^4}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2-\sin x e^x}{x^3}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}$;

ж) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$.

НАХОЖДЕНИЕ ИНТЕРВАЛОВ МОНОТОННОСТИ И ЭКСТРЕМУМОВ ФУНКЦИИ $f(x)$

6.202. $f(x)=xe^{-3x}$.
6.203. $f(x)=(2x-1)/(x-1)^2$.
6.204. $f(x)=x^3-6x^2+9x-3$.
6.205. $f(x)=\sqrt{2x^2-x+2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ $f(x)=a$ ПРИ ЛЮБОМ ЗНАЧЕНИИ ПАРАМЕТРА a С ПОМОЩЬЮ ПРИНЦИПА МОНОТОННОСТИ

6.206. $f(x)=x^7+x^4+500x=a$.
6.207. $f(x)=x^{2005}+x^{205}+500x^{25}=a$.
6.208. $f(x)=\operatorname{arctg}^3 x+x^5+2x=a$.

НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ $f(x)$ НА ОТРЕЗКЕ $x\in[a, b]$

6.209. $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+2;\ x\in[-2;4]$.

6.210. $f(x)=\operatorname{arctg}x-\dfrac{1}{8}\ln x,\ x\in\left[1/\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$.

6.211. $f(x)=|3x^4-16x^3+24x^2-43|,\ x\in[2;3]$.

6.212. Среди всех равнобедренных треугольников с длиной боковой стороны a найти тот, площадь которого наибольшая. Вычислить эту площадь.

6.213. Разность арифметической прогрессии равна наименьшему значению функции $f(x) = 6x^2 - x^3$ на отрезке $x \in [1; 3]$, второй член прогрессии равен наибольшему значению данной функции на указанном отрезке. Найти сумму первых десяти членов прогрессии.

6.214. Из круга вырезан сектор с центральным углом α. Из сектора свернута коническая поверхность. При каком значении угла α объем полученного конуса будет наибольшим?

6.215. Периметр равнобедренного треугольника равен $2P$. Каковы должны быть его стороны, чтобы объем конуса, образованного вращением этого треугольника вокруг своей высоты, проведенной к основанию, был наибольшим?

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВА НАХОЖДЕНИЕМ ГЛОБАЛЬНЫХ ЭКСТРЕМУМОВ ИЛИ НАИБОЛЬШИХ И НАИМЕНЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ НА ЗАДАННЫХ ОТРЕЗКАХ

6.216. Доказать справедливость неравенства $\ln x/x \leqslant 1/e$ на интервале $x \in (0; +\infty)$.

6.217. Доказать справедливость неравенства

$$\frac{|1+x|^{3/2}}{\sqrt{x}} \geqslant \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

на интервале $x \in (0; +\infty)$.

6.218. Доказать справедливость неравенства $\cos x \geqslant 1 - x^2/2$.

6.219. Доказать, что при $x \in [-2; 1]$ справедливо неравенство $0 \leqslant 3x^4 + 4x^3 + 1 \leqslant 17$.

6.220. Доказать, что при $x \in [-2; 1]$ справедливо неравенство $-3 \leqslant x^3 - 3x^2 + 1 \leqslant 17$.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ $f(x) = 0$ ПУТЕМ НАХОЖДЕНИЯ ГЛОБАЛЬНЫХ ЭКСТРЕМУМОВ ФУНКЦИИ $f(x)$

6.221. $\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}} = -\sqrt{5}$.

6.222. $x^{2/3} - (x^2 - 1)^{1/3} = \sqrt[3]{4}$.

6.223. $(x+1)^{2/3} - (x-1)^{2/3} = -\sqrt[3]{4}$.

6.224. $x^4/4 - x^3/3 - x^2 + 8/3 = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕРВАЛОВ ВЫПУКЛОСТИ, ВОГНУТОСТИ И ТОЧЕК ПЕРЕГИБА ФУНКЦИИ $F(X)$

6.225. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$. **6.226.** $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

6.227. $f(x) = \ln(1 + x^2)$. **6.228.** $f(x) = 1/(1 + x^2)$.

6.229. $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 12$.

6.230. $f(x) = e^{-x^2}$.

6.231. Найти точки перегиба графика функции:

а) $f(x) = \dfrac{3}{8}x^4 - x^2 + 2$; б) $f(x) = (x - 5)^{5/3} + 1$.

6.232. Найти все значения параметра a, при которых графики функций вогнуты на всей числовой оси:

а) $f(x) = x^4 - ax^3 + 6x^2 - x - 1$;

б) $f(x) = x^4 + ax^3 + \dfrac{3}{2}x^2 + 3$.

6.233. Пользуясь определением вогнутой функции, доказать справедливость неравенства:

а) $(\pi/2)x - \arcsin x > 0$ при $x \in (0; 1)$; б) $x - \ln(1 + x^2) > 0$ при $x \in (0; 1)$.

НАХОЖДЕНИЕ АСИМПТОТ ДЛЯ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = f(x)$

6.234. $f(x) = xe^{1/x}$.

6.235. $f(x) = (3x^2 + 3x)/(x + 1)$.

6.236. $f(x) = x \operatorname{arctg} x$. **6.237.** $f(x) = \ln x/x^2$.

6.238. $f(x) = 2^{1/(x-1)}$. **6.239.** $f(x) = \sin x/x$.

6.240. $f(x) = \arcsin(4x/(1 + x^4))$.

6.241. $f(x) = x + 2\operatorname{arctg} x$.

6.242. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$. **6.243.** $f(x) = x + \cos x/x$.

6.244. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$. **6.245.** $f(x) = (x^3 + 3)/x^2$.

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ФУНКЦИИ $y = f(x)$ И ПОСТРОЕНИЕ ЕЕ ГРАФИКА

6.246. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

6.247. $f(x) = (x + 1)^3/(x - 1)^2$.

6.248. $f(x) = 3\ln x/\sqrt{x}$.

6.249. $f(x) = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 5$.

6.250. $f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$.

6.251. $f(x) = (x - 5)x^{2/3}$.

6.252. $f(x) = \dfrac{1}{1 - \sqrt{x - 1}}$.

6.253. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$.

6.254. $f(x) = x/(1 + x^2)$.

6.255. $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$.

6.256. $f(x) = (1 - x^3)/x^2$.

6.257. $f(x) = e^x/(x + 1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИВИЗНЫ, РАДИУСА КРИВИЗНЫ И КООРДИНАТ ЦЕНТРА КРИВОЙ В ДАННОЙ ТОЧКЕ

6.258. Кривая задана уравнением в декартовой системе координат $y = f(x)$, абсцисса точки $x = x_0$:

а) $f(x) = x^3 + x^2 - 4$, $x_0 = 0$; б) $f(x) = \ln(1/x)$, $x_0 = 1$; в) $f(x) = \sin x$, $x_0 = -\pi/2$; г) $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$.

6.259. Кривая задана параметрически:

а) $x = t^2$, $y = 2t^3$ в точке $t = 1$; б) $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ в точке $t = 0$; в) $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ в точке $t = 0$; г) $x = \sqrt{2}\cos^3 t$, $y = \sqrt{2}\sin^3 t$ в точке $t = \pi/4$.

6.260. Кривая задана в полярной системе координат:

а) $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ в точке $\varphi = 0$;

б) $\rho = a\varphi$ в точке $\varphi = \pi/2$;

в) $\rho = ae^{\varphi}$ в точке $\varphi = \ln 2$.

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

ЗАДАЧА 1

Даны две матрицы A и B (табл. Р.1). Найти неизвестную матрицу X, удовлетворяющую данному матричному уравнению.

Таблица Р.1

№	Уравнение	Матрица A	Матрица B
1	$2X - 3A = (X + 3B)A$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
2	$2X + AB = AX - B$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
3	$ABX - 4X = 2A$	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
4	$2BX = A(X + 5B)$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$
5	$2X + A = B(X - 2A)$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$
6	$ABX - A = B + BAX$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
7	$XA + 6X = 40B$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
8	$X - \frac{1}{2}XB = A$	$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Продолжение табл. Р.1

№	Уравнение	Матрица A	Матрица B
9	$XA = \frac{1}{2}B + X$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -16 & 12 & 0 \\ 8 & 20 & 4 \end{pmatrix}$
10	$\frac{1}{3}AX + 3X = B$	$\begin{pmatrix} -12 & 15 & 12 \\ 0 & -3 & 15 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
11	$(X + A)B = 2X$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$
12	$(X - B)A = 2A + X$	$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
13	$XAB = \frac{1}{2}A - 3X$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$
14	$8B - X = BAX$	$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
15	$\frac{1}{3}AX = B + X$	$\begin{pmatrix} -3 & 8 & -3 \\ 1 & 6 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$
16	$AX = B - \frac{1}{3}X$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & -1 \\ 2 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 6 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$
17	$ABX = 5A - X$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
18	$BX - 2A = \frac{5}{2}X$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -5 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$
19	$4X - 15A = ABX$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Продолжение табл. Р.1

№	Уравнение	Матрица A	Матрица B
20	$X-12B=\frac{1}{2}XA$	$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
21	$A(X-6B)=\frac{1}{4}X$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -3 & 4 \\ 6 & \frac{1}{4} & 2 \\ 10 & 3 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 16 & 0 & -12 \\ 0 & 12 & 0 \end{pmatrix}$
22	$3X+B=XA$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ -7 & 9 & 9 \end{pmatrix}$
23	$AX+2A=2BX$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
24	$\frac{1}{2}XB=A+3X$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & -2 & -6 \\ 2 & 6 & 4 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$
25	$AX-B=3X$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$
26	$2X-A=BX$	$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$
27	$XB-B=5X-XA$	$\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$
28	$AX=B+3X$	$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$
29	$AX-B=2A+X$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 17 \end{pmatrix}$
30	$AX=B$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 1

Решим следующее матричное уравнение: $3X + A = B(X + 4A)$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Прежде всего, раскроем скобки в правой части уравнения, не меняя при этом порядка сомножителей.

$$3X + A = BX + 4BA.$$

Пусть
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— единичная матрица, тогда уравнение можно записать в следующем виде: $A - 4BA = (B - 3E)X$.

Определим матрицу $B - 3E$:

$$B - 3E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Находим определитель матрицы $B - 3E$:

$$|B - 3E| = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \end{vmatrix} = (-4)\cdot(-3)\cdot(-5) + 2\cdot 1\cdot 4 - 4\cdot(-3)\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot(-5) -$$

$$-3\cdot 1\cdot(-4) = -60 + 8 + 18 + 36 + 20 + 12 = 34.$$

Так как определитель матрицы $B - 3E$ отличен от нуля, эта матрица имеет обратную. Найдем матрицу $(B - 3E)^{-1}$. Для этого найдем, прежде всего союзную матрицу:

$$(B - 3E)^* = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 12 & 19 & 11 \\ 14 & 8 & 10 \\ 18 & 20 & 8 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, обратная матрица будет равна

$$(B - 3E)^{-1} = -\frac{1}{24}\cdot\begin{pmatrix} 12 & 19 & 11 \\ 14 & 8 & 10 \\ 18 & 20 & 8 \end{pmatrix}.$$

Теперь определим матрицу $A - 4AB$:

$$E-4B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4&8&12\\8&0&4\\16&12&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-8&-12\\-8&1&-4\\-16&-12&-7\end{pmatrix},$$

$$A-4AB=(E-4B)A=\begin{pmatrix}5&-8&-12\\-8&1&-4\\-16&-12&-7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-63\\-16\\-85\end{pmatrix}.$$

В итоге получено простейшее матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix}-63\\-16\\-85\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&2&3\\2&-3&1\\4&3&-5\end{pmatrix}X.$$

Искомая матрица X равна

$$X=\frac{1}{34}\cdot\begin{pmatrix}12&19&11\\14&8&10\\18&20&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-63\\-16\\-85\end{pmatrix}=-\frac{1}{34}\begin{pmatrix}1467\\1380\\2134\end{pmatrix}.$$

ЗАДАЧА 2

Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса (табл. Р.2).

Таблица Р.2

№	Система уравнений	№	Система уравнений
1	$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=-4,\\2x_1+3x_2+4x_3=1,\\3x_1+4x_2+5x_3=6,\\3x_1+5x_2+7x_3=-3\end{cases}$	2	$\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=3,\\x_1+3x_2-2x_3=-3,\\-x_1+x_2-5x_3=2,\\3x_1-x_2+4x_3=1\end{cases}$
3	$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4=4,\\x_1-x_2+3x_3+3x_4=3,\\5x_1+2x_2-x_4=1,\\x_1+3x_2-5x_3=7\end{cases}$	4	$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3-x_4=-3,\\3x_1-2x_2+x_4=4,\\x_1+4x_2-4x_3+3x_4=1,\\5x_1-3x_2+x_3-4x_4=5\end{cases}$
5	$\begin{cases}2x_1+3x_2+4x_3+3x_4=0,\\4x_1+6x_2+9x_3+8x_4=-3,\\6x_1+9x_2+9x_3+4x_4=8.\end{cases}$	6	$\begin{cases}3x_1+x_2+3x_3+2x_4=5,\\5x_1+2x_3+x_4=11,\\-x_1+2x_2-2x_3+3x_4=-8,\\2x_1-4x_2+x_4=14\end{cases}$

Продолжение табл. Р.2

№	Система уравнений	№	Система уравнений
7	$\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=13, \\ 5x_1+2x_2-x_3=10, \\ 3x_1+4x_2+5x_3=6, \\ x_1-x_2+2x_3=7, \\ -4x_1+x_2-3x_3=-17 \end{cases}$	8	$\begin{cases} 5x_1+4x_2-x_3+3x_4=-5, \\ 2x_1+x_2+x_3+4x_4=2, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4=-3, \\ x_1-3x_2-2x_3+2x_4=-4 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 2x_1+4x_2+6x_3-x_4=0, \\ x_1+2x_2+3x_3+x_4=4, \\ -3x_1-6x_2-9x_3+3x_4=-1, \\ 4x_1+x_2-x_4=-2 \end{cases}$	10	$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=2, \\ x_1+3x_2+x_3=5, \\ x_1+x_2-5x_3=-7, \\ 2x_1+3x_2-3x_3=14 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3=-1, \\ 2x_1+x_2=4, \\ -x_1+5x_2+3x_3=0, \\ 7x_1+3x_2+x_3=5, \\ 2x_1+7x_2+6x_3=-2 \end{cases}$	12	$\begin{cases} x_1+3x_2+3x_3+5x_4=-1, \\ 2x_1+6x_2+5x_3+6x_4=1, \\ 3x_1+7x_2+4x_3+8x_4=2, \\ 3x_1+5x_2+x_3+9x_4=1 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=1, \\ 2x_1-x_2-3x_4=2, \\ 3x_1-x_3+x_4=-3, \\ 2x_1+2x_2-2x_3+5x_4=-6 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 5x_1+x_2-3x_3=-6, \\ 4x_1+2x_2-4x_3=-7, \\ 2x_1-5x_2+7x_3=9, \\ 5x_1-2x_2+2x_3=1 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 9x_1-3x_2+5x_3+6x_4=4, \\ 6x_1-2x_2+3x_3+4x_4=5, \\ 3x_1-x_2+3x_3+14x_4=-8 \end{cases}$	16	$\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=1, \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=2, \\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5=1, \\ 2x_1+2x_2-3x_4+9x_5=2 \end{cases}$
17	$\begin{cases} 3x_1-2x_2+5x_3+x_4=20, \\ 2x_1-3x_2+x_3+5x_4=14, \\ x_1+2x_2-4x_4=-8, \\ x_1-x_2-4x_3+x_4=-9 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+2x_4+3x_5=2, \\ 6x_1-3x_2+2x_3+4x_4+5x_5=3, \\ 6x_1-3x_2+4x_3+8x_4+13x_5=9, \\ 4x_1-2x_2+x_3+x_4+2x_5=1 \end{cases}$
19	$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+5x_4=1, \\ x_1+3x_2-13x_3+22x_4=1, \\ 3x_1+5x_2+x_3-2x_4=5, \\ 2x_1+3x_2+4x_3-7x_4=4 \end{cases}$	20	$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4=1, \\ 3x_1+5x_2-x_3+x_4+2x_5=0, \\ 9x_1+4x_2-2x_3+x_4+x_5=3 \end{cases}$
21	$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3-x_4=0, \\ x_1+3x_2-5x_3+3x_4=3, \\ 2x_1+4x_2-7x_3+8x_4=5 \end{cases}$	22	$\begin{cases} x_1+4x_2-2x_3-3x_5=2, \\ 2x_1+9x_2-x_3-4x_4=5, \\ x_1+5x_2+x_3-4x_4-3x_5=3 \end{cases}$
23	$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-4x_4=1, \\ 4x_1+5x_2-2x_3-x_4=3, \\ 3x_1+4x_2+x_3+3x_4=2 \end{cases}$	24	$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3+4x_4=1, \\ 4x_1-7x_2+2x_3+x_4=3, \\ 3x_1-5x_2-x_3-3x_4=2 \end{cases}$

Продолжение табл. Р.2

№	Система уравнений	№	Система уравнений
25	$\begin{cases} x_1-3x_2+x_3+2x_4=4, \\ 2x_1-5x_2+4x_3+3x_5=7, \\ x_1-2x_2+3x_3-2x_4+3x_5=3 \end{cases}$	26	$\begin{cases} x_1-x_2+3x_3+4x_4=0, \\ 4x_1-3x_2+x_3+2x_4=1, \\ 3x_1-2x_2-2x_3-2x_4=1 \end{cases}$
27	$\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3+3x_4=2, \\ 3x_1-8x_2+x_3+2x_4=5, \\ 2x_1-5x_2-3x_3-x_4=3 \end{cases}$	28	$\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3+3x_5=0, \\ 3x_1-5x_2+x_3+4x_4=1, \\ 2x_1-3x_2-3x_3+4x_4-3x_5=1 \end{cases}$
29	$\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3+3x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+x_3+4x_5=1, \\ 3x_1-5x_2+3x_3+3x_4+4x_5=1 \end{cases}$	30	$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3-4x_4=0, \\ 3x_1+7x_2-2x_3+x_5=1, \\ 2x_1+5x_2+x_3+4x_4+x_5=3, \\ x_1+x_2+x_4=6 \end{cases}$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 2

Методом Гаусса найдем общее решение следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=-1, \\ x_1-x_2-x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+4x_3=2, \\ 3x_1-x_2-2x_3=-3. \end{cases}$$

Прежде всего, составим расширенную матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Согласно алгоритму Гаусса будем приводить эту матрицу к треугольному виду (все проводимые преобразования указаны между матрицами).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \overset{\substack{(2)-(1), \\ (3)-2(1),}}{\underset{(4)-3(1)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 6 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{-1/2(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -5 & 6 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{(3)+5(2),}{\underset{(4)+4(2)}{\sim}}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 6 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{1/6(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{(4)-(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} \end{pmatrix},$$

где число в скобках — номер строки.

Однако уравнение, отвечающее последней строке полученной матрицы, является противоречивым. Следовательно, рассматриваемая система несовместна, т. е. не имеет решений.

ЗАДАЧА 3

Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Найти длину вектора $\bar{a}$ (табл. Р.3).

Таблица Р.3

№	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\lvert\bar{p}\rvert$	$\lvert\bar{q}\rvert$	$(\widehat{\bar{p},\bar{q}})$
1	$\bar{p}+2\bar{q}$	$3\bar{p}-\bar{q}$	1	2	$\pi/6$
2	$3\bar{p}+\bar{q}$	$\bar{p}-2\bar{q}$	4	1	$\pi/4$
3	$\bar{p}-3\bar{q}$	$\bar{p}+2\bar{q}$	1/5	1	$\pi/2$
4	$3\bar{p}-2\bar{q}$	$\bar{p}+5\bar{q}$	4	1/2	$5\pi/6$
5	$\bar{p}-2\bar{q}$	$2\bar{p}+\bar{q}$	2	3	$3\pi/4$
6	$\bar{p}+3\bar{q}$	$\bar{p}-2\bar{q}$	2	3	$\pi/3$
7	$2\bar{p}-\bar{q}$	$\bar{p}+3\bar{q}$	3	2	$\pi/2$
8	$4\bar{p}+\bar{q}$	$\bar{p}-\bar{q}$	7	2	$\pi/4$
9	$\bar{p}-4\bar{q}$	$3\bar{p}+\bar{q}$	1	2	$\pi/6$
10	$\bar{p}+4\bar{q}$	$2\bar{p}-\bar{q}$	7	3	$\pi/3$
11	$3\bar{p}+2\bar{q}$	$\bar{p}-\bar{q}$	10	1	$\pi/2$
12	$4\bar{p}-\bar{q}$	$\bar{p}+2\bar{q}$	5	4	$\pi/4$
13	$2\bar{p}+3\bar{q}$	$\bar{p}-2\bar{q}$	6	7	$\pi/3$
14	$3\bar{p}-\bar{q}$	$\bar{p}+2\bar{q}$	3	4	$\pi/3$
15	$2\bar{p}+3\bar{q}$	$\bar{p}-2\bar{q}$	2	3	$\pi/4$
16	$2\bar{p}-3\bar{q}$	$3\bar{p}+\bar{q}$	4	1	$\pi/6$
17	$5\bar{p}+\bar{q}$	$\bar{p}-3\bar{q}$	1	2	$\pi/3$
18	$7\bar{p}-2\bar{q}$	$\bar{p}+3\bar{q}$	1/2	2	$\pi/2$
19	$6\bar{p}-\bar{q}$	$\bar{p}+\bar{q}$	3	4	$\pi/4$
20	$10\bar{p}+\bar{q}$	$3\bar{p}-2\bar{q}$	4	1	$\pi/6$
21	$6\bar{p}-\bar{q}$	$\bar{p}+2\bar{q}$	8	1/2	$\pi/3$
22	$3\bar{p}+4\bar{q}$	$\bar{q}-\bar{p}$	5/2	2	$\pi/2$

Продолжение табл. Р.3

№	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\lvert\bar{p}\rvert$	$\lvert\bar{q}\rvert$	$(\widehat{\bar{p},\bar{q}})$
23	$7\bar{p}+\bar{q}$	$\bar{p}-3\bar{q}$	3	1	$3\pi/4$
24	$\bar{p}+3\bar{q}$	$3\bar{p}-\bar{q}$	3	5	$2\pi/3$
25	$3\bar{p}+\bar{q}$	$\bar{p}-3\bar{q}$	7	2	$\pi/4$
26	$5\bar{p}-\bar{q}$	$\bar{p}+\bar{q}$	5	3	$5\pi/6$
27	$3\bar{p}-4\bar{q}$	$\bar{p}+3\bar{q}$	2	3	$\pi/4$
28	$6\bar{p}-\bar{q}$	$\bar{p}+5\bar{q}$	1/2	4	$5\pi/6$
29	$2\bar{p}+3\bar{q}$	$\bar{p}-2\bar{q}$	2	1	$\pi/3$
30	$2\bar{p}-3\bar{q}$	$5\bar{p}+\bar{q}$	2	3	$\pi/2$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 3

Пусть $\bar{a}=3\bar{p}+2\bar{q}, \bar{b}=2\bar{p}-\bar{q}$, значения модулей $|\bar{p}|=4, |\bar{q}|=3$, а угол между векторами $(\widehat{\bar{p},\bar{q}})=3\pi/4$.

Определим площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$S=|\bar{a}\times\bar{b}|=|(3\bar{p}+2\bar{q})\times(2\bar{p}-\bar{q})|=|6\bar{p}\times\bar{p}+4\bar{q}\times\bar{p}-3\bar{p}\times\bar{q}-2\bar{q}\times\bar{q}|=$$

$$=|7\bar{q}\times\bar{p}|=7\cdot|\bar{q}|\cdot|\bar{p}|\cdot\sin(\widehat{\bar{p},\bar{q}})=7\cdot3\cdot4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=42\sqrt{2}.$$

Найдем длину вектора $\bar{a}$:

$$|\bar{a}|=\sqrt{\bar{a}\cdot\bar{a}}=\sqrt{(3\bar{p}+2\bar{q})^2}=\sqrt{9\bar{p}^2+12\bar{p}\cdot\bar{q}+4\bar{q}^2}=$$

$$=\sqrt{9|\bar{p}|^2+12|\bar{p}|\cdot|\bar{q}|\cdot\cos(\widehat{\bar{p},\bar{q}})+4|\bar{q}|^2}=$$

$$=\sqrt{144-144\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+36}=\sqrt{180-72\sqrt{2}}.$$

ЗАДАЧА 4

Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$ (табл. Р.4). Найти объем пирамиды, площадь грани ABC и угол между ребрами AB и AD.

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 4

Пусть координаты вершин A, B, C и D: $A(1, -1, 2)$; $B(2, 1, 2)$; $C(1, 1, 4)$; $D(6, -3, 8)$.

Введем в рассмотрение следующие векторы:

$$\overline{AB}(1,2,0),\ \overline{AC}(0,2,2),\ \overline{AD}(5,-2,6).$$

Таблица Р.4

№	*A*	*B*	*C*	*D*
1	(1, 3, 6)	(2, 2, 1)	(−1, 0, 1)	(−4, 6, −3)
2	(−4, 2, 6)	(2, −3, 0)	(−10, 5, 8)	(−5, 2, −4)
3	(7, 2, 4)	(7, −1, −2)	(3, 3, 1)	(−4, 2, 1)
4	(2, 1, 4)	(−1, 5, −2)	(−7, −3, 2)	(−6, −3, 6)
5	(−1, −5, 2)	(−6, 0, −3)	(3, 6, −3)	(−10, 6, 7)
6	(0, −1, −1)	(−2, 3, 5)	(1, −5, −9)	(−1, −6, 3)
7	(5, 2, 0)	(2, 5, 0)	(1, 2, 4)	(−1, 1, 1)
8	(2, −1, −2)	(1, 2, 1)	(5, 0, −6)	(−10, 9, −7)
9	(−2, 0, −4)	(−1, 7, 1)	(4, −8, −4)	(1, −4, 6)
10	(14, 4, 5)	(−5, −3, 2)	(−2, −6, −3)	(−2, 2, −1)
11	(1, 2, 0)	(3, 0, −3)	(5, 2, 6)	(8, 4, −9)
12	(2, −1, 2)	(1, 2, −1)	(3, 2, 1)	(−4, 2, 5)
13	(1, 1, 2)	(−1, 1, 3)	(2, −2, 4)	(−1, 0, −2)
14	(2, 3, 1)	(4, 1, −2)	(6, 3, 7)	(7, 5, −3)
15	(1, 1, −1)	(2, 3, 1)	(3, 2, 1)	(5, 9, −8)
16	(1, 5, −7)	(−3, 6, 3)	(−2, 7, 3)	(−4, 8, −12)
17	(−3, 4, −7)	(1, 5, −4)	(−5, −2, 0)	(2, 5, 4)
18	(−1, 2, −3)	(4, −1, 0)	(2, 1, −2)	(3, 5, 4)
19	(4, −1, 3)	(−2, 1, 0)	(0, −5, 1)	(3, 2, −6)
20	(1, −1, 1)	(−2, 0, 3)	(2, 1, −1)	(2, −2, −4)
21	(1, 2, 0)	(1, −1, 2)	(0, 1, −1)	(4, 4, −2)
22	(1, 0, 2)	(1, 2, −1)	(2, −2, 1)	(−3, 0, 1)
23	(1, 2, −3)	(1, 0, 1)	(−2, −1, 6)	(2, 1, 0)
24	(3, 10, −1)	(−2, 3, −5)	(−6, 0, −3)	(1, −1, 2)
25	(−1, 2, 4)	(−1, −2, −4)	(3, 0, −1)	(7, −3, 1)
26	(0, −3, 1)	(−4, 1, 2)	(2, −1, 5)	(3, 1, −4)
27	(1, 3, 0)	(4, −1, 2)	(3, 0, 1)	(−4, 3, 5)
28	(−2, −1, −1)	(0, 3, 2)	(3, 1, −4)	(−4, 7, 3)
29	(−3, −5, 6)	(2, 1, −4)	(0, −3, −1)	(−5, 2, −8)
30	(2, −4, −3)	(5, −6, 0)	(−1, 3, −3)	(−10, −8, 7)

Объем пирамиды вычисляем по формуле

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}|=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 5 & -2 & 6\end{vmatrix}=\frac{1}{6}(12+20+0-0-0+4)=6.$$

Далее определим векторное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix}\overline{i}-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}\overline{j}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix}\overline{k}=4\overline{i}-2\overline{j}+2\overline{k}.$$

Тогда площадь грани ABC определяем по формуле:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{16+4+4}=\sqrt{6}.$$

Найдем угол между ребрами AB и AD:

$$\cos\varphi=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AD}|}=\frac{5-4+0}{\sqrt{1+4+0}\cdot\sqrt{25+4+36}}=\frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{65}}=\frac{1}{5\sqrt{13}},$$

т. е. $\varphi=\arccos\left(\frac{1}{5\sqrt{13}}\right)$.

ЗАДАЧА 5

Заданы векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ и $\overline{p}$ своими координатами в некотором базисе (табл. Р.5). Показать, что векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{p}$ в базисе $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$.

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 5

Пусть векторы имеют следующие координаты:

$$\overline{a}(1,1,1),\ \overline{b}(2,2,1),\ \overline{c}(1,2,3),\ \overline{p}(-1,4,7).$$

Покажем, что векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ образуют базис. Как известно, в пространстве любые три некомпланарных вектора образуют базис. Для того чтобы векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ были некомпланарными достаточно, чтобы их смешанное произведение не равнялось нулю.

$$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=1.$$

Найдем координаты вектора $\overline{p}$ в базисе $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$. Представим вектор $\overline{p}$ в виде

$$\overline{p}=x\overline{a}+y\overline{b}+z\overline{c}.$$

Таблица Р.5

№	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{c}$	$\bar{p}$
1	(0, 1, 2)	(1, 0, 1)	(−1, 2, 4)	(−2, 4, 7)
2	(1, 3, 0)	(2, −1, 1)	(0, −1, 2)	(6, 12, −1)
3	(2, 1, −1)	(0, 3, 2)	(1, −1, 1)	(1, −4, 4)
4	(4, 1, 1)	(2, 0, −3)	(−1, 2, 1)	(−9, 5, 5)
5	(−2, 0, 1)	(1, 3, −1)	(0, 4, 1)	(−5, −5, 5)
6	(5, 1, 0)	(2, −1, 3)	(1, 0, −1)	(13, 2, 7)
7	(0, 1, 1)	(−2, 0, 1)	(3, 1, 0)	(−19, −1, 7)
8	(1, 0, 2)	(0, 1, 1)	(2, −1, 4)	(3, −3, 4)
9	(3, 1, 0)	(−1, 2, 1)	(−1, 0, 2)	(3, 3, −1)
10	(−1, 2, 1)	(2, 0, 3)	(1, 1, −1)	(−1, 7, −4)
11	(1, 1, 4)	(0, −3, 2)	(2, 1, −1)	(6, 5, −14)
12	(1, −2, 0)	(−1, 1, 3)	(1, 0, 4)	(6, −1, 7)
13	(1, 0, 5)	(−1, 3, 2)	(0, −1, 1)	(5, 15, 0)
14	(1, 1, 0)	(0, 1, −2)	(1, 0, 3)	(2, −1, 11)
15	(1, 0, 2)	(−1, 0, 1)	(2, 5, −3)	(11, 5, −3)
16	(2, 0, 1)	(1, 1, 0)	(4, 1, 2)	(8, 0, 5)
17	(0, 1, 3)	(1, 2, −1)	(2, 0, −1)	(3, 1, 8)
18	(1, 2, −1)	(3, 0, 2)	(−1, 1, 1)	(8, 1, 12)
19	(1, 4, 1)	(−3, 2, 0)	(1, −1, 2)	(−9, −8, −3)
20	(0, 1, −2)	(3, −1, 1)	(4, 1, 0)	(−5, 9, −13)
21	(0, 5, 1)	(3, 2, −1)	(−1, 1, 0)	(−15, 5, 6)
22	(1, 0, 1)	(0, −2, 1)	(1, 3, 0)	(8, 9, 4)
23	(2, 1, 0)	(1, −1, 0)	(−3, 2, 5)	(23, −14, −30)
24	(2, 1, 0)	(1, 0, 1)	(4, 2, 1)	(3, 1, 3)
25	(0, 3, 1)	(1, −1, 2)	(2, −1, 0)	(−1, 7, 0)
26	(1, −1, 2)	(3, 2, 0)	(−1, 1, 1)	(11, −1, 4)
27	(1, 1, 4)	(−3, 0, 2)	(1, 2, −1)	(−13, 2, 18)
28	(0, −2, 1)	(3, 1, −1)	(4, 0, 1)	(0, −8, 9)
29	(0, 1, 5)	(3, −1, 2)	(−1, 0, 1)	(8, −7, −13)
30	(1, 0, 1)	(1, −2, 0)	(0, 3, 1)	(2, 7, 5)

Получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x+2y+z=-1, \\ x+2y+2z=4, \\ x+y+3z=7. \end{cases}$$

Решим эту систему по правилу Крамера:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & 6 \\ 0 & 15 & 10 \end{vmatrix}=-10,\quad y=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & 2 \end{vmatrix}=2,$$

$$z=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 8 \end{vmatrix}=5.$$

ЗАДАЧА 6

Найти основание перпендикуляра, опущенного из точки A на плоскость, проходящую через точки A_1, A_2, A_3, заданные своими координатами (табл. Р.6).

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 6

Пусть координаты точек $A(1, -1, 2)$, $A_1(1, 5, -7)$, $A_2(-3, 6, 3)$, $A_3(-2, 7, 3)$.

Найдем уравнение плоскости, проходящей через точки A_1, A_2, A_3. Если $M(x, y, z)$ — произвольная точка этой плоскости, то векторы $\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}$ и $\overline{A_1M}$ должны быть компланарными, а значит, их смешанное произведение должно быть равно нулю.

$$\overline{A_1M}\cdot\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}=\begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z+7 \\ -4 & 1 & 10 \\ -3 & 2 & 10 \end{vmatrix}=(x-1)(-10)-(y-5)(-10)+$$

$$+(z+7)(-5)=-10x+10y-5z-75.$$

Итак, уравнение искомой плоскости:

$$2x-2y+z+15=0.$$

Далее найдем уравнение прямой, проходящей через точку A перпендикулярно найденной плоскости. Нормальный вектор плоскости $\bar{n}(2,-2,1)$ будет направляющим вектором для

Таблица Р.6

№	A	A_1	A_2	A_3
1	(−12, 7, −1)	(−3, 4, −7)	(1, 5, −4)	(−5, −2, 0)
2	(1, −6, −5)	(−1, 2, −3)	(4, −1, 0)	(2, 1, −2)
3	(−7, 0, −1)	(−3, −1, 1)	(−9, 1, −2)	(3, −5, 4)
4	(−2, 4, 2)	(1, −1, 1)	(−2, 0, 3)	(2, 1, −1)
5	(2, −1, 4)	(1, 2, 0)	(1, −1, 2)	(0, 1, −1)
6	(−5, −9, 1)	(1, 0, 2)	(1, 2, −1)	(2, −2, 1)
7	(3, −2, −9)	(1, 2, −3)	(1, 0, 1)	(−2, −1, 6)
8	(−6, 7, −10)	(3, 10, −1)	(−2, 3, −5)	(−6, 0, −3)
9	(−2, 3, 5)	(−1, 2, 4)	(−1, −2, −4)	(3, 0, −1)
10	(−3, 4, −5)	(0, −3, 1)	(−4, 1, 2)	(2, −1, 5)
11	(4, 3, 0)	(1, 3, 0)	(4, −1, 2)	(3, 0, 1)
12	(−21, 20, −16)	(−2, −1, −1)	(0, 3, 2)	(3, 1, −4)
13	(3, 6, 68)	(−3, −5, 6)	(2, 1, −4)	(0, −3, −1)
14	(2, −10, 8)	(2, −4, −3)	(5, −6, 0)	(−1, 3, −3)
15	(−3, 2, 7)	(1, −1, 2)	(2, 1, 2)	(1, 1, 4)
16	(5, −4, 5)	(1, 3, 6)	(2, 2, 1)	(−1, 0, 1)
17	(−12, 1, 8)	(−4, 2, 6)	(2, −3, 0)	(−10, 5, 8)
18	(10, 1, 8)	(7, 2, 4)	(7, −1, −2)	(−5, −2, −1)
19	(−3, 1, 8)	(2, 1, 4)	(3, 5, −2)	(−7, −3, 2)
20	(10, −8, −7)	(−1, −5, 2)	(−6, 0, −3)	(3, 6, −3)
21	(−4, −13, 6)	(0, −1, −1)	(−2, 3, 5)	(1, −5, −9)
22	(−3, −6, −8)	(5, 2, 0)	(2, 5, 0)	(1, 2, 4)
23	(14, −3, 7)	(2, −1, −2)	(1, 2, 1)	(5, 0, −6)
24	(−6, 5, 5)	(−2, 0, −4)	(−1, 7, 1)	(4, −8, −4)
25	(−1, −8, 7)	(14, 4, 5)	(−5, −3, 2)	(−2, −6, −3)
26	(−13, −8, 16)	(1, 2, 0)	(3, 0, −3)	(5, 2, 6)
27	(−5, 3, 7)	(2, −1, 2)	(1, 2, −1)	(3, 2, 1)
28	(2, 3, 8)	(1, 1, 2)	(−1, 1, 3)	(2, −2, 4)
29	(−5, −4, 8)	(2, 3, 1)	(4, 1, −2)	(6, 3, 7)
30	(−3, −7, 6)	(1, 1, −1)	(2, 3, 1)	(3, 2, 1)

искомой прямой. Следовательно, каноническое уравнение прямой имеет вид

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{1}.$$

Для дальнейших вычислений удобно перейти к параметрической форме:

$$\begin{cases} x=1+2t, \\ y=-1-2t, \\ z=2+t. \end{cases}$$

Для того чтобы найти основание перпендикуляра, определим координаты точки пересечения найденных прямой и плоскости.

$$2(1+2t)-2(-1-2t)+(2+t)+15=0,$$
$$9t+21=0,\quad t=-7/3,$$
$$x=1+2(-7/3)=-11/3,$$
$$y=-1-2(-7/3)=11/3,\quad z=2-7/3=-1/3.$$

ЗАДАЧА 7

Вычислить пределы числовых последовательностей (табл. Р.7).

Таблица Р.7

№	Задание	№	Задание
1	$\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$	2	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3}\right)^{1-2n}$
3	$\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt[3]{n^3-5})n\sqrt{n}$	4	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{10n-3}{10n-1}\right)^{5n}$
5	$\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2-3})$	6	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^3}$
7	$\lim\limits_{n\to\infty}((n^2+1)(n^2-4)-\sqrt{n^4-9})$	8	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n-1}\right)^{-n+1}$
9	$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-3n+2}-n)$	10	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^n}}$
11	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$	12	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+7^n}{2^n-7^{n-1}}$

Продолжение табл. Р.7

№	Задание	№	Задание
13	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4+7+\ldots+(3n-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}}$	14	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n-1}\right)^{-n^2}$
15	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$	16	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^{-n^2}$
17	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$	18	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}-9n^2}{3n-\sqrt[4]{9n^8+1}}$
19	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+5}-\sqrt{3n^4+2}}{1++3-5\ldots-(2n-1)}$	20	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt{n^3+2n+2}}$
21	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5}{6}+\dfrac{13}{36}+\ldots+\dfrac{3^n+2^n}{6^n}\right)$	22	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3}\right)^{n^3}$
23	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$	24	$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{(n+2)^2}-\sqrt[3]{(n-3)^2})$
25	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-5^{n+1}}{2^{n+1}+5^{n-2}}$	26	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2+4+\ldots+2n}{n+3}-n\right)$
27	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{n-7}\right)^{n\quad 6+1}$	28	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7}{10}+\dfrac{29}{100}+\ldots+\dfrac{2^n+5^n}{10^n}\right)$
29	$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+2}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-4})$	30	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+n+1}{n^3+2}\right)^{2n^2}$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 7

Вычислим предел последовательности

$$a_n=\frac{1+3+\ldots+2n-1}{n^2+3}.$$

Используя известную формулу для первых n членов арифметической прогрессии, найдем, что

$$1+3+\ldots+2n-1=\frac{1+2n-1}{2}\cdot n=n^2.$$

Наша задача сводится к вычислению предела

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+3/n^2}=1.$$

ЗАДАЧА 8

Вычислить предел функции (табл. Р.8).

Таблица Р.8

№	Задание	№	Задание
1	$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$	2	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cos(\pi x/2)}{1-\sqrt{x}}$
3	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-7x^2+15x-9}{x^3-4x^2+21x-18}$	4	$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos3x-\cos x}{\operatorname{tg}^2 2x}$
5	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$	6	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{\sin^2 x}$
7	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$	8	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x\sin x-\cos2x}{\sin^2 x}$
9	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$	10	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{\log_2 x}$
11	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$	12	$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{3x-1}{3x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}$
13	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos10x}{e^{x^3}-1}$	14	$\lim\limits_{x\to0}(\cos\sqrt{x})^{1/x}$
15	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{\ln x}$	16	$\lim\limits_{x\to0}\left(5-\dfrac{4}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$
17	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{\ln x}$	18	$\lim\limits_{x\to0}(1-\ln\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}$
19	$\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{1-\sin2x}{(\pi-4x)^2}$	20	$\lim\limits_{x\to0}\left(6-\dfrac{5}{\cos x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$
21	$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos5x-\cos3x}{\sin^2 x}$	22	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$
23	$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{\sqrt[3]{x^3+8}}$	24	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^{x+1}-2}{\ln(1+4x)}$
25	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin2x}{\sin3(x+\pi)}$	26	$\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\ln2x-\ln\pi}{\sin(5x/2)^{\cos x}}$
27	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{\sin\pi x}$	28	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^{3x}-3^{2x}}{x+\arcsin x^3}$
29	$\lim\limits_{x\to0}\left(\operatorname{tg}(\pi/4-x)\right)^{\operatorname{ctg}x}$	30	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{3\operatorname{arctg}x}$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 8

Найдем следующий предел:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{1+3x}-2}{\sqrt{x}-1}.$$

Для вычисления предела проведем алгебраические преобразования:

$$\frac{\sqrt{1+3x}-2}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{1+3x}-2)\cdot(\sqrt{1+3x}+2)\cdot(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{1+3x}+2)\cdot(\sqrt{x}-1)\cdot(\sqrt{x}+1)} =$$

$$= \frac{(3x-3)\cdot(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{1+3x}+2)\cdot(x-1)} = 3\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{1+3x}+2}, \quad (x \neq 1).$$

Точка $x_0 = 1$ является точкой устранимого разрыва для функции

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+3x}-2}{\sqrt{x}-1}.$$

После проведенных преобразований предел вычисляется подстановкой $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{1+3x}-2}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \to 1} \frac{3(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{1+3x}+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

ЗАДАЧА 9

Вычислить производную от заданной функции (табл. Р.9).

Таблица Р.9

№	Задание	№	Задание
1	$y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$	2	$y = (\sin x)^{\arcsin x}$
3	$y = x^{3/2} \cdot \sqrt{x^5 + a}$	4	$y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$
5	$y = \sqrt{1+\sin 4x} - \sqrt{1-\sin 4x}$	6	$y = \sin(\sin(\sin x))$
7	$y = e^{x/3} \cdot \cos^2(x/3)$	8	$y = (1/x)^{1/x}$
9	$y = \ln\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$	10	$y = \frac{x^2}{1-x} \cdot \sqrt{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$
11	$y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$	12	$y = \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}^2 x)$
13	$y = \mathrm{arctg}(x - \sqrt{1+x^2})$	14	$y = \mathrm{arctg}(\cos\sqrt{x})$

Продолжение табл. Р.9

№	Задание	№	Задание
15	$y = \ln \operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}$	16	$y = (\sin x)^{\cos x}$
17	$y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$	18	$y = (\sqrt{x})^{\sin^2 x}$
19	$y = (\ln x)^{1/x}$	20	$y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^2 x})$
21	$y = x^{x^2} + x^{2x}$	22	$y = \ln(x^2 - 1) - \dfrac{1}{x^2-1}$
23	$y = \dfrac{2}{3}\sqrt{(\operatorname{arctg} e^x)^3}$	24	$y = \ln \arccos\sqrt{1 - e^{4x}}$
25	$y = \dfrac{\sin^2 19x}{19\cos 38x}$	26	$y = x^{\arcsin x}$
27	$y = \dfrac{\operatorname{ctg} x + x}{1 - x\operatorname{ctg} x}$	28	$y = \dfrac{e^{x^2}}{1+x^2}$
29	$y = \ln\sqrt[4]{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$	30	$y = (1 + x^2)e^{\operatorname{arctg} x}$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 9

Вычислим производную от функции

$$f(x) = \sqrt{\frac{3-x^2}{3+x^2}}.$$

Для этого используем формулы производной от сложной функции и производной от частного:

$$F'_x(u) = F'_u(u)\cdot u'_x, \quad (u/v)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

В нашем случае получаем:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3-x^2}{3+x^2}\right)^{-1/2}\cdot\frac{(3-x^2)'\cdot(3+x^2) - (3+x^2)'\cdot(3-x^2)}{(3+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3+x^2}{3-x^2}}\cdot\frac{-12x}{(3+x^2)^2} = -\frac{6x}{\sqrt{(3-x^2)\cdot(3+x^2)^3}} = -\frac{6x}{(3+x^2)\cdot\sqrt{9-x^4}}.$$

ЗАДАЧА 10

Найти производную от функции, заданной параметрически (табл. Р.10).

Таблица Р.10

№	Задание	№	Задание
1	$\begin{cases} x = a\sin^3 t, \\ y = a\cos^3 t \end{cases}$	2	$\begin{cases} x = (1+t)/t^2, \\ y = 3/(2t^2) - 2/t \end{cases}$
3	$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$	4	$\begin{cases} x = a(t\sin t + \cos t), \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$
5	$\begin{cases} x = (2t + t^2)/(1+t^3), \\ y = (2t - t^3)/(1+t^3) \end{cases}$	6	$\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3 \end{cases}$
7	$\begin{cases} x = t(t\cos t - 2\sin t), \\ y = t(t\sin t + 2\cos t) \end{cases}$	8	$\begin{cases} x = t(1 - \sin t), \\ y = t\cos t \end{cases}$
9	$\begin{cases} x = 2\ln \operatorname{ctg} t + 1, \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t \end{cases}$	10	$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin t \end{cases}$
11	$\begin{cases} x = at\cos t, \\ y = at\sin t \end{cases}$	12	$\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2 - t + 1 \end{cases}$
13	$\begin{cases} x = \arcsin(t/\sqrt{1+t^2}), \\ y = \arccos(1/\sqrt{1+t^2}) \end{cases}$	14	$\begin{cases} x = 2\operatorname{tg} t, \\ y = 2\sin^2 t + \sin 2t \end{cases}$
15	$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = a^t \end{cases}$	16	$\begin{cases} x = \ln(1 - t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t \end{cases}$
17	$\begin{cases} x = 2e^t, \\ y = e^{-t} \end{cases}$	18	$\begin{cases} x = (1 - t^3)/(t^2 - 1), \\ y = t/(t^2 - 1) \end{cases}$
19	$\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$	20	$\begin{cases} x = t - t^4, \\ y = t^2 - t^3 \end{cases}$
21	$\begin{cases} x = 3at/(1+t^2), \\ y = 3at^2/(1+t^2) \end{cases}$	22	$\begin{cases} x = t^3 - 1, \\ y = t^2 \end{cases}$
23	$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}t^2 - \dfrac{1}{4}t^4, \\ y = \dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{1}{3}t^3 \end{cases}$	24	$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 2t \end{cases}$
25	$\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \cos^2 t \end{cases}$	26	$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \ln\cos t \end{cases}$
27	$\begin{cases} x = (1+\ln t)/t^2, \\ y = (3 + 2\ln t)/t \end{cases}$	28	$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = t^2/2 \end{cases}$
29	$\begin{cases} x = (t+1)/t, \\ y = (t-1)/t \end{cases}$	30	$\begin{cases} x = \cos t + \sin t, \\ y = \sin 2t \end{cases}$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 10

Рассмотрим параметрически заданную функцию:

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$$

В данном случае легко исключить параметр t, в самом деле

$$x^2/4 = \cos^2 t,\ \ y^2 = \sin^2 t \Rightarrow x^2/4 + y^2 = 1.$$

Получено уравнение эллипса. Нетрудно получить явную функцию, которая будет двузначной:

$$y = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}.$$

На практике очень часто не удается исключить параметр t, поэтому при вычислении производной y'_x нужно воспользоваться известной формулой:

$$y'_x = \psi'_t/\varphi'_t,$$

где $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$.

В нашем случае

$$y'_x = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} = \frac{\cos t}{-2\sin t} = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg} t.$$

ЗАДАЧА 11

Применяя правило Лопиталя, найти пределы следующих функций (табл. Р.11).

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 11

Найти предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right).$$

Для того чтобы воспользоваться правилом Лопиталя, перейдем от неопределенности «$\infty - \infty$» к неопределенности «0/0»:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x\cdot\sin x}.$$

К последнему пределу уже можно применить правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x} = 0.$$

Таблица Р.11

№	Задание	№	Задание
1	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 x}$	2	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$
3	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\operatorname{tg}7x)}{\ln(\operatorname{tg}2x)}$	4	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin x - x}$
5	$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+2x-1}{e^{x}}$	6	$\lim\limits_{x\to 0}(1-e^{x})\operatorname{ctg} x$
7	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{2/x^2}$	8	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{3x^2-x}$
9	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{tg} x}{0{,}5-\sin^2 x}$	10	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^{x}-1}\right)$
11	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}$	12	$\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}+x)^{1/x}$
13	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{1/x^2}$	14	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\ln(\operatorname{tg} x)}$
15	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$	16	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{2x}}{x+\arcsin x^3}$
17	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$	18	$\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{1-\sin^3 x}{\cos^2 x}$
19	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2}$	20	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(e^{x}-e^{-x})}{e^{x^3+1}-e}$
21	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\sin x}\right)$	22	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos\sqrt{x})^{1/x}$
23	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{1+\cos(x-3\pi)}$	24	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(2x-\pi)^2}$
25	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{x^2-a^2}-1}{\operatorname{tg}\ln(x/a)}$	26	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 2x}$
27	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x(1-\cos 2x)}$	28	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\right)^{1/\cos x}$
29	$\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)^{1/(x-\pi/2)}$	30	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{x^4}$

ЗАДАЧА 12

Найти производную n-го порядка (табл. Р.12).

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 12

Вычислим производную n-го порядка от функции $y=\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$.

$$y'=(\ln|x-1|-\ln|x+1|)'=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1},$$

$$y''=(-1)\cdot\frac{1}{(x-1)^2}-(-1)\cdot\frac{1}{(x+1)^2},$$

$$y'''=(-1)\cdot(-2)\cdot\frac{1}{(x-1)^3}-(-1)\cdot(-2)\cdot\frac{1}{(x+1)^3},$$

.......,

$$y^{(n)}=(-1)\cdot(-2)\cdot\ldots(-(n-1))\cdot\frac{1}{(x-1)^n}-(-1)\cdot(-2)\ldots(-(n-1))\cdot\frac{1}{(x+1)^n}=$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)!\cdot\left(\frac{1}{(x-1)^n}-\frac{1}{(x+1)^n}\right)=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\cdot\frac{(x+1)^n-(x-1)^n}{(x^2-1)^n}.$$

Таблица Р.12

№	Задание	№	Задание
1	$y=x\cdot e^{ax}$	2	$y=a^{2x+3}$
3	$y=\sqrt[5]{e^{7x-1}}$	4	$y=\sqrt{e^{3x-1}}$
5	$y=\sin 2x+\cos(x+1)$	6	$y=\lg(2x+7)$
7	$y=\dfrac{4x+7}{2x+3}$	8	$y=\dfrac{x}{x+1}$
9	$y=\lg(5x+2)$	10	$y=\dfrac{1-x}{1-x}$
11	$y=\dfrac{x}{2(3x+2)}$	12	$y=3^{2x+5}$
13	$y=\sqrt{x}$	14	$y=a^{3x}$
15	$y=2^{3x+5}$	16	$y=\lg(x+4)$
17	$y=\sqrt[3]{e^{2x+1}}$	18	$y=\dfrac{2x-5}{13(3x+1)}$
19	$y=\lg(3x+1)$	20	$y=\sin(x+1)+\cos 2x$
21	$y=\dfrac{x}{9(4x+9)}$	22	$y=\dfrac{4+15x}{5x+1}$

Продолжение табл. Р.12

№	Задание	№	Задание
23	$y = 4/x$	24	$y = 7^{5x}$
25	$y = \lg(1 + x)$	26	$y = \dfrac{11+12x}{6x+5}$
27	$y = \dfrac{5x+1}{13(2x+3)}$	28	$y = \log_3(x + 5)$
29	$y = \sin(3x + 1) + \cos 5x$	30	$y = 2^{kx}$

ЗАДАЧА 13

Составить уравнения касательной и нормали к данной кривой в точке x_0 (табл. Р.13).

Таблица Р.13

№	Задание	№	Задание
1	$y = \dfrac{4x-x^2}{4}$ $x_0 = 2$	2	$y = 3(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x})$ $x_0 = 1$
3	$y = x - x^3$ $x_0 = -1$	4	$y = \dfrac{x}{x^2+1}$ $x_0 = -2$
5	$y = 2x^2 + 3x - 1$ $x_0 = -2$	6	$y = \dfrac{2x}{x^2+1}$ $x_0 = 1$
7	$y = x^2 + 8\sqrt{x} - 32$ $x_0 = 4$	8	$y = \dfrac{1+3x^2}{3+x^2}$ $x_0 = 1$
9	$y = x + \sqrt[3]{x}$ $x_0 = 1$	10	$y = 3\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}$ $x_0 = 1$
11	$y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ $x_0 = 4$	12	$y = \dfrac{x^2}{10} + 3$ $x_0 = 2$
13	$y = 2x^2 - 3x + 1$ $x_0 = 1$	14	$y = 6\sqrt[3]{x} - \dfrac{16}{3}\sqrt[4]{x}$ $x_0 = 1$
15	$y = \sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}$ $x_0 = 64$	16	$y = \sqrt[3]{x^2} - 20$ $x_0 = -8$

Продолжение табл. Р.13

№	Задание	№	Задание
17	$y = 2x^2 + 3$ $x_0 = -1$	18	$y = 8\sqrt[4]{x} - 70$ $x_0 = 16$
19	$y = 2x + \frac{1}{x}$ $x_0 = 1$	20	$y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2}$ $x_0 = 3$
21	$y = \frac{x^5 + 1}{x^4 + 1}$ $x_0 = 1$	22	$y = \frac{x^3 + 2}{x^3 - 2}$ $x_0 = 2$
23	$y = \frac{x^{29} + 6}{x^4}$ $x_0 = 1$	24	$y = \frac{x^2 - 3x + 3}{3}$ $x_0 = 3$
25	$y = -\frac{2(x^8 + 2)}{3(x^4 + 1)}$ $x_0 = 1$	26	$y = -2(\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x})$ $x_0 = 1$
27	$y = \frac{x^{16} + 9}{1 - 5x^2}$ $x_0 = 1$	28	$y = 14\sqrt{x} - 15\sqrt[3]{x} + 2$ $x_0 = 1$
29	$y = \frac{1}{3x + 2}$ $x_0 = 1$	30	$y = \frac{3x - 2x^3}{3}$ $x_0 = 1$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 13

Построим касательную и нормаль к графику функции

$$y = \frac{x^2}{2} - 2\sqrt{x} + 3$$

в точке

$$x_0 = 1: y'(x) = x - 1/\sqrt{x},\ y'(1) = 0.$$

Уравнения касательной и нормали имеют вид

$$y = y(x_0) + y'(x_0) \cdot (x - x_0),\ \ y = y(x_0) - 1/(y'(x_0)) \cdot (x - x_0),\ \ (y'(x_0) \neq 0).$$

В нашем случае уравнение касательной

$$y = y(x_0) = 3/2,\ \text{т. е. }\ y - 3/2 = 0.$$

Формула для нормали непосредственно неприменима, поэтому запишем уравнение нормали иначе:

$$y'(x_0)(y - y(x_0)) + (x - x_0) = 0.$$

Теперь ясно, что уравнение нормали $x - 1 = 0$.

ЗАДАЧА 14

Найти наибольшее и наименьшее значения функций на заданных отрезках (табл. P.14).

Таблица P.14

№	Задание	№	Задание
1	$y = x^2 + 16/x - 16$; $[1; 2]$	2	$y = 2\sqrt{x+1} - x + 2$; $[1; 5]$
3	$y = \sqrt[3]{2(x-2)^2 \cdot (8-x)} - 1$; $[0; 6]$	4	$y = -x^2/2 + 2x + 8/(x-2) + 5$; $[2; 1]$
5	$y = 2\sqrt{x} - x$; $[0; 4]$	6	$y = \sqrt[3]{2(x+2)^2(x-4)} + 3$; $[-4; 2]$
7	$y = x - 4\sqrt{x} + 5$; $[1; 9]$	8	$y = 4/x^2 - 8x - 15$; $[-2; -1/2]$
9	$y = \sqrt[3]{2(x+1)^2 \cdot (5-x)} - 2$; $[-3; 3]$	10	$y = (10x + 10)/(x^2 + 2x + 2)$ $[-1; 2]$
11	$y = 3 - x - 4/(x+2)^2$; $[-1; 2]$	12	$y = 4 - x - 4/x^2$; $[1; 4]$
13	$y = 2(-x^2 + 7x - 7)/(x^2 - 2x + 2)$; $[1; 4]$	14	$y = 2(x^2 + 3)/(x^2 - 2x + 5)$; $[-3; 3]$
15	$y = \sqrt[3]{2(x-2)^2 \cdot (5-x)}$; $[1; 5]$	16	$y = 1 + \sqrt[3]{2(x-1)^2 \cdot (x-7)}$; $[-1; 5]$
17	$y = -x^2/2 + 8/x + 8$; $[-4; -1]$	18	$y = 10x/(1 + x^2)$; $[0; 3]$
19	$y = -2x(2x+3)/(x^2 + 4x + 5)$; $[-2; 1]$	20	$y = 2x^2 + 108/x - 59$; $[2; 4]$
21	$y = \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-4)}$; $[0; 4]$	22	$y = \sqrt[3]{2x^2(x-3)}$; $[-1; 6]$
23	$y = x - 4\sqrt{x+2} + 8$; $[-1; 7]$	24	$y = x^2 - 2x + 16/(x-1) - 13$; $[2; 5]$
25	$y = 4x/(4 + x^2)$; $[-4; 2]$	26	$y = \sqrt[3]{2(x+2)^2(1-x)}$; $[-3; 4]$
27	$y = \sqrt[3]{2x^2(x-6)}$; $[-2; 4]$	28	$y = 8x + 4/x^2 - 15$; $[1/2; 2]$
29	$y = 2(x^2 + 3)/(x^2 + 2x + 5)$; $[-5; 1]$	30	$y = x^2 + 4x + 16/(x+2) - 9$; $[-1; 2]$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 14

Исследуем на экстремум функцию $y = x + 1/x$ на отрезке $[1/2; 2]$. Находим производную от изучаемой функции:

$$y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x^2}.$$

При $1/2 \leqslant x < 1$ $y'(x) < 0$ и функция убывает, а при $1 < x \leqslant 2$ $y'(x) > 0$ — функция возрастает. Следовательно, точка $x = 1$ является точкой локального минимума — $y(1) = 2$.

Определяем значения функции на концах отрезка $[1/2; 2]$:

$$y(1/2) = 5/2, \quad y(2) = 5/2.$$

Наименьшее значение функции на отрезке $[1/2; 2]$:

$$y_{\min} = \min\{y(1/2); y(1); y(2)\} = y(1) = 2.$$

Наибольшее значение функции:

$$y_{\max} = \max\{y(1/2); y(1); y(2)\} = y(1/2) = y(2) = 5/2.$$

ЗАДАЧА 15

Провести полное исследование функций и построить их график (табл. Р.15).

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 15

Провести полное исследование функции и построить график:

$$y = x^2/(x-1)^2.$$

1. Область определения:

$$D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty).$$

Таблица Р.15

№	Задание	№	Задание
1	$y = (x^3 + 4)/x^2$	2	$y = (x^2 - x + 1)/(x - 1)$
3	$y = 2/(x^2 + 2x)$	4	$y = 4x^2/(3 + x^2)$
5	$y = 12x/(9 + x^2)$	6	$y = (x^2 - 3x + 3)/(x - 4)$
7	$y = (4 - x^3)/x^2$	8	$y = (x^2 - 3x + 3)/(x - 4)$
9	$y = (2x^3 + 1)/x^2$	10	$y = (x - 1)^2/x^2$
11	$y = (1 + 1/x)^2$	12	$y = (12 - 3x^2)/(x^2 + 12)$
13	$y = (9 + 6x - 3x^2)/(x^2 - 2x + 13)$	14	$y = -8x/(x^2 + 4)$
15	$y = ((x - 1)/(x + 1))^2$	16	$y = (3x^4 + 1)/x^3$
17	$y = 4x/(x + 1)^2$	18	$y = 8(x - 1)/(x + 1)^2$
19	$y = (1 - 2x^3)/x^2$	20	$y = 4/(x^2 + 2x - 3)$
21	$y = 4/(3 + 2x - x^2)$	22	$y = (x^2 + 2x - 7)/(x^2 + 2x - 3)$
23	$y = 1/(x^4 - 1)$	24	$y = -(x/(x + 2))^2$
25	$y = (x^3 - 32)/x^2$	26	$y = 4(x + 1)^2/(x^2 + 2x + 12)$
27	$y = (3x - 2)/x^3$	28	$y = (x^2 - 6x + 9)/(x - 1)^2$
29	$y = (x^3 - 27x + 54)/x^3$	30	$y = (x^3 - 4)/x^2$

2. Функция ни четна, ни нечетна, т. к. $y(-x) = x^2/(x+1)^2 \neq \pm y(x)$.
3. Функция не является периодической.
4. Интервалы возрастания и убывания.

$$y' = \frac{2x(x-1)^2 - x^2 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2(x^2 - x - x^2)}{(x-1)^3} = -\frac{2x}{(x-1)^3},$$

$y' = 0$ при $x = 0$; y' не существует при $x = 1$.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	$-$	0	$+$	не сущ.	$-$
y	$\downarrow$	0	$\uparrow$	не сущ.	$\downarrow$

Функция убывает при $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
Функция возрастает при $x \in (0; 1)$.
$(0; 0)$ — точка минимума.
5. Выпуклость и вогнутость кривой.

$$y'' = \frac{-2((x-1)^3 - x \cdot 3(x-1)^2)}{(x-1)^6} = \frac{-2(x-1-3x)}{(x-1)^4} = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}.$$

$y'' = 0$ при $x = -0{,}5$; y'' не существует при $x = 1$.
$x \in (-\infty; -0{,}5)$: $y'' < 0$ — кривая выпукла.
$x \in (1; +\infty)$: $y'' > 0$ — кривая вогнута.
$(-0{,}5; 1/9)$ — точка перегиба.
6. Асимптоты:
а) вертикальные: $x = 1$;
б) наклонные: $y = kx + b$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k,$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = b.$$
$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{(x-1)^2} = 0; \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = 1.$$

$y = 1$ — горизонтальная асимптота.
7. График (рис. Р.1).

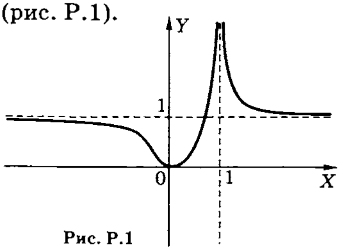


Рис. Р.1

ОТВЕТЫ

ГЛАВА 1

1.35. $\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$.

1.36. $\begin{pmatrix} 21 & -23 & 3 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{pmatrix}$.

1.37. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.38. $\begin{pmatrix} a & 2b \\ 3b & a+3b \end{pmatrix}$, $a, b \in R$.

1.39. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, $a, b, c \in R : a^2 + bc = 0$.

1.40. $\pm E$; $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, $a, b, c \in R : a^2 + bc = 1$.

1.41. $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.42. $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1.43. $\Delta = (b-c-d)\cdot(b+c+d)\cdot(b-c+d)\cdot(b+c-d)$.

1.44. $\Delta = 9$.

1.45. $\mathrm{rang}A = 3$.

1.46. $\mathrm{rang}A = 3$.

1.47. $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$.

1.48. $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = -1$.

1.49. $x_1 = c$, $x_2 = -13 + 3c$, $x_3 = -7$, $x_4 = 0$, где $c \in R$.

1.50. $a = -1$, $x_1 = -5/3c$, $x_2 = 1/3c$, $x_3 = c$, где $c \in R$.

1.51. $x_1 = 5/2 - 3/2c_1$, $x_2 = c_1$, $x_3 = x_4 = 0$, $x_5 = 11/5 - 6/5c_2$, $x_6 = c_2$, $c_1, c_2 \in R$.

1.52. $\lambda = 2$, $x^{(\lambda)} = c\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $c \in R$, $c \neq 0$.

1.53. $e_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $e_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A^* = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$.

1.54. Положительно определенная.
1.55. Отрицательно определенная.
1.56. Общего вида.
1.57. Отрицательно определенная.
1.58. Положительно определенная.
1.59. Общего вида.
1.60. Положительно определенная.

1.61. Эллипс: $\dfrac{\tilde{x}^2}{2}+\tilde{y}^2=1$. **1.62.** Парабола: $\tilde{y}^2=4\sqrt{2}\tilde{x}$.

1.63. Гипербола: $\dfrac{\tilde{x}^2}{4}-\dfrac{\tilde{y}^2}{9}=1$. **1.64.** Эллипс: $\dfrac{\tilde{x}^2}{35/6}+\dfrac{\tilde{y}^2}{35/36}=1$.

ГЛАВА 2

2.15. (3; 1).
2.16. Координаты середин сторон AB, BC, AC есть соответственно: (3; –4,5), (0; 1), (–1; 1,5).
2.17. $D(-4; 2)$.
2.18. 13.
2.19. $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 8yx^2 - 8y^3 - 16x^2 = 0$.
2.20. $(x^2 + y^2 - 3x)^2 = 9(x^2 + y^2)$.
2.21. $(x^2 + y^2 + 4x)^2 = 16(x^2 + y^2)$.
2.22. $\rho = 2\sin^3\varphi$. **2.23.** $\rho = 1 + \cos 2\varphi$.
2.24. $\rho = 3\cos^2 2\varphi$. **2.25.** 90°.
2.26. {1; 0,5; –0,5}. **2.27.** –5. **2.28.** $\vec{a}+6\vec{b}$.
2.29. $\vec{d}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{c}=-2\vec{a}+3\vec{b}+\vec{d}$,
$\vec{b}=(2/3)\vec{a}+(1/3)\vec{c}-(1/3)\vec{d}$,
$\vec{a}=(3/2)\vec{b}-(1/2)\vec{c}+(1/2)\vec{d}$.

2.30. $\arccos(-4/9)$. **2.31.** $S=7\sqrt{5}$, $|\overline{BD}|=2\sqrt{21}/3$.
2.32. 150 кв. ед. **2.33.** –9.
2.34. $\sqrt{2/29}$. **2.36.** $\vec{c}=(5/6)\vec{a}+(1/3)\vec{b}$.
2.39. –42. **2.42.** $4|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}|$.
2.43. 43 куб. ед. **2.44.** 0 куб. ед.
2.45. 30, $\cos\alpha = 1/15$, $\cos\gamma = 11/30$.
2.46. $5\sqrt{6}$, $\cos\alpha=-1/\sqrt{6}$, $\cos\beta=-2/\sqrt{6}$, $\cos\gamma=1/\sqrt{6}$.
2.47. 2.
2.48. –46.
2.49. $\vec{x}=\dfrac{\alpha(\vec{b}\times\vec{c})+\beta(\vec{c}\times\vec{a})+\gamma(\vec{a}\times\vec{b})}{\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}}$.
2.50. 0.

ГЛАВА 3

3.25. $-2x + 5y - 11 = 0$.

3.26. $(x - 1)/3 = (y + 2)/0$.

3.27. $(x - 1)/1 = (y - 2)/4$.

3.28. 1) $y = (-3/2z)x + 4$; 2) $x/(8/3) + y/4 = 1$; 3) $x/2 = (y - 1)/3$; 4) $(-3/\sqrt{11})x + (-2/\sqrt{11})y + 8/\sqrt{11} = 0$; 5) $x = t + 1$, $y = 4t + 2$; 6) $\rho = (8/\sqrt{11})/\cos(\varphi + \arcsin(2/\sqrt{11}))$.

3.29. 1) $5x - 6y - 16 = 0$; 2) $(x - 1)/5 = (y + 3)/(-6)$.

3.30. $(x + 1)/6 = (y - 2)/5$.

3.31. $(x - 0{,}5)/0{,}5 = (y - 2)/0$; $(x - 1)/6 = (y - 2)/7$.

3.32. $(x - 6)/5 = (y - 26/3)/(-20/3)$.

3.33. $A(-2{,}5; 35)$.

3.34. $A(-2; 0)$, $B(-6; -2)$, $C(-4; -2)$, $D(0; 4)$, $M(-3; 1)$.

3.35. 3 ед. площади.

3.36. $7x - y - 2 = 0$.

3.37. $7x + y - 10 = 0$, $x + 7y - 6 = 0$, $x - y - 6 = 0$.

3.38. $x - y + 2 = 0$, $2x + 7y + 22 = 0$, $7x + 2y - 13 = 0$.

3.39. $3x - y - 1 = 0$, $3x - y - 21 = 0$.

3.40. Нет; $2x + 3y - 6 \leqslant 0$, $2x - 3y + 6 \geqslant 0$, $y - 8 \leqslant 0$.

3.41. $L_{\max} = 88$.

3.42. $L_{\max} = 430$; $x_{\max} = 9$, $y_{\max} = 8$.

3.44. $\sqrt{2}$.

3.45. $x_1^2/4 + y_1^2/9 = 1$, где $x_1 = x - 2$, $y_1 = y + 1$.

3.46. $y_1 = x_1^2$, где $x_1 = x + 2$, $y_1 = y - 1$.

3.47. $x_1^2/9 - y_1^2/4 = 1$, где $x_1 = x + 1$, $y_1 = y + 2$.

3.48. $x_1^2 + y_1^2 = (\sqrt{0{,}5})^2$, где $x_1 = x - 0{,}5$, $y_1 = y - 0{,}5$.

3.49. $x^2/16 + y^2/9 = 1$.

3.50. $x^2/4 + (y + 1)^2/4 = 1$.

3.51. $x^2/144 - y^2/25 = 1$.

3.52. $(y - 4)^2 = 8x$.

3.53. $x^2/4 + y^2/3 = 1$.

3.54. $x^2/25 + y^2/16 = 1$.

3.55. $x^2 + (y - 9)^2 = 36$.

3.56. $x^2/12 - y^2/4 = -1$.

3.57. 3 ед. площади.

3.58. $30/\sqrt{20}$.

3.59. $\rho^2 = b^2/(e^2\cos\varphi - 1)$.

3.60. Окружность радиуса $(2/3)|AB|$.

3.61. В системе координат с началом в данной точке и заданной прямой $x = -1$ геометрическое место точек есть парабола $y = x^2$ без вершины.

3.62. Нет.

ГЛАВА 4

4.24. $3x - 8y + 4z + 21 = 0$.

4.25. $4x - y - 14z = 0$.

4.26. $19x - 8y + 14z - 73 = 0$.

4.27. $(x - 1)/1 = (y - 2)/4 = (z + 3)/(-5)$.

4.28. $(x-1)/2=(y-2)/4=(z-3)/(-5)$.

4.29. $d=3/\sqrt{117}$.

4.30. 8.

4.31. 1) $2x+15y+7z+7=0$; 2) $3x-9y-7=0$.

4.32. $x/2=(y+2)/7=z/4$; $x=2t$, $y=7t-2$, $z=4t$.

4.33. $A'(1{,}4;-7)$.

4.34. $A(1{,}96;2{,}72;1{,}2)$.

4.35. $x+y=0$, $5x-11y+4z+5=0$.

4.36. $(x+4)/7=(y+1)/6=(z-2)/(-18)$; $(x-3)/1=$ $=(y-5)/(-10)=(z+16)/14$; $(x+4)/8=$ $=(y+1)/(-4)=(z-2)/(-4)$.

4.37. 32.

4.38. 5.

4.39. $2x+3y+6z-12\leqslant 0$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

4.40. $L_{\max}=71$ при $x=0$, $y=3$, $z=9$.

4.41. $z=e^{x^2+y^2}$.

4.42. $z=5(x^2+y^2)$.

4.43. $x^2+z^2=y^2$.

4.44. 1) $(x^2+y^2)/9-z^2/4=1$ — однополостный гиперболоид; 2) $x^2/9-(y^2+z^2)/4=1$ — двухполостный гиперболоид.

4.45. $x^2+y^2=12z$.

4.46. $x^2+y^2-z^2=-50$ — двухполостный гиперболоид.

4.47. $(x-1)^2+(y+3)^2+(z/2)^2=4^2$, $R=4$, $O'(1;-3;2)$.

4.48. $z_{\max}=3$.

ГЛАВА 5

5.28. 2/3.	**5.29.** ∞.	**5.30.** 65/97.	**5.31.** 1.	**5.32.** 1/2.
5.33. −2.	**5.34.** 0.	**5.35.** 1/2.	**5.36.** 9/8.	**5.37.** 1/2.
5.38. −4.	**5.39.** 1.	**5.40.** 1/2.	**5.41.** 1.	**5.42.** 2/3.
5.43. 0.	**5.44.** −1/8.	**5.45.** 4.	**5.46.** 5.	**5.47.** ∞.
5.48. 0.	**5.49.** −2/7.	**5.50.** 9/4.	**5.51.** 2/3.	**5.52.** −1/2.
5.53. 0.	**5.54.** n/m.	**5.55.** 2.	**5.56.** ∞.	**5.57.** 0.
5.58. 2.	**5.59.** 1.	**5.60.** 1/4.	**5.61.** 10.	**5.62.** 1/2.
5.63. −1.	**5.64.** 0.	**5.65.** 1/6.	**5.66.** 12.	**5.67.** 2.
5.68. 2/3.	**5.69.** m/n.	**5.70.** −1/4.	**5.71.** −1/4.	**5.72.** 0.

5.73. 1, если $x\to+\infty$; ∞, если $x\to-\infty$.

5.74. 3/2, если $x\to+\infty$; ∞, если $x\to-\infty$.

5.75. −1, если $x\to+\infty$; 1, если $x\to-\infty$.

5.76. 3.	**5.77.** 4.	**5.78.** α/β.	**5.79.** α/β.	**5.80.** 4.
5.81. 1.	**5.82.** 1/2.	**5.83.** 3.	**5.84.** 1/6.	**5.85.** 0.
5.86. −1/2.	**5.87.** 5/3.	**5.88.** 1.	**5.89.** $-1/\sqrt{2}$.	**5.90.** −1.
5.91. $(\beta^2-\alpha^2)/2$.		**5.92.** $\sin(4y)/4y$.		**5.93.** 1/8.

ГЛАВА 6

6.86. а) $\Delta f(x_0, \Delta x) = 0{,}1$; б) $\Delta f(x_0, \Delta x) = -1$;
в) $\Delta f(x_0, \Delta x) = -1/21$; г) $\Delta f(x_0, \Delta x) = 0{,}331$.

6.88. $f'_-(-1) = -2,\ \ f'_+(-1) = 0,\ \ f'_-(1) = 0,\ \ f'_+(1) = 2.$

6.89. $f'_-(1) = 1,\ \ f'_+(1) = 0.$

6.90. $f'(x) = 15x^2 + 1{,}2x^{-1{,}3} + 3x^{-2/3} + 5x^{-12/7}.$

6.91. $f'(x) = \dfrac{4}{3\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{10}{x^3}.$ **6.92.** $f'(x) = 4x^3\cos x - x^4\sin x.$

6.93. $f'(x) = \dfrac{\dfrac{\log_2 x}{1+x^2} - \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x\ln 2}}{\log_2^2 x}.$ **6.94.** $f'(x) = 20x^3 + \dfrac{56}{x^9} - \dfrac{9}{5\sqrt[5]{x^2}}.$

6.95. $f'(x) = 6x + \dfrac{2}{\sqrt{x^3}} + 3x^2\sin x + x^3\cos x.$

6.96. $f'(x) = -2\sin x - 7\cos x.$ **6.97.** $f'(x) = \cos x \cdot \operatorname{arctg} x + \dfrac{\sin x}{1+x^2}.$

6.98. $f'(x) = \dfrac{x^2 - 3x^3 \cdot \ln x}{x^6}.$

6.99. $f'(x) = e^x \dfrac{5^x}{\arcsin x} + e^x \dfrac{5^x \cdot \ln 5 \cdot \arcsin x - 5^x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin^2 x}.$

6.100. $f'(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\ln 3 \cdot \sqrt{x}} + \dfrac{\log_3 x \cdot \operatorname{tg} x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\log_3 x \cdot \sqrt{x}}{\cos^2 x}.$

6.101. $f'(x) = \dfrac{-\dfrac{x^9}{\sin^2 x} - 9x^8 \cdot \operatorname{ctg} x}{x^{18}}.$

6.102. $f'(x) = 2x - 4,\ \ f'(2) = 0.$

6.103. $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - 6x,\ \ f'(0)$ не существует.

6.104. $f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{при } -\infty < x < 4; \\ 0, & \text{не существует при } x = 4; \\ 1, & \text{при } 4 < x < +\infty. \end{cases}$

$f'(1) = -1;\ \ f'(4)$ не существует.

$$6.105.\ f'(x)=\begin{cases} 2x-3, & \text{при } -\infty<x<1; \\ \text{не существует при } x=1; \\ 3-2x, & \text{при } -\infty<x<1; \\ \text{не существует при } x=2; \\ 2x-3, & \text{при } 2<x<\infty. \end{cases}$$

$f(1)$ не существует, $f(3)=3$.

6.106. $f'_{\pm}(x_0)=0$.

6.107. $f'_{\pm}(x_0)=0$.

6.108. $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$.

6.109. $f'(x)=-\dfrac{1}{\sin^2(3^x\sqrt[3]{x^2})}\left(3^x\ln 3\sqrt[3]{x^2}+3^x\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right)$.

6.110. $f'(x)=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{\log_3 x}{x^5}\right)^2}\dfrac{\dfrac{1}{x\ln 3}x^5-\log_3 x(5x^4)}{x^{10}}$.

6.111. $f'(x)=-\dfrac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.

6.112. $f'(x)=7x^6e^{3x}+3x^7e^{3x}$.

6.113. $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{x^2-8x}{\sqrt[5]{x^4+1}}\right)}\dfrac{(2x-8)\sqrt[5]{x^4+1}-(x^2-8x)\dfrac{4x^3}{5\sqrt[5]{(x^4+1)^4}}}{\sqrt[5]{(x^4+1)^2}}$.

6.114. $f'(x)=\dfrac{(1+2x)\operatorname{ctg}(\log_7(\arccos(4^{2x})))}{\sqrt[3]{1+x+x^2}}+$

$+2\cdot\dfrac{(1+x+x^2)^{\frac{1}{3}}}{\sin^2(\log_7(\arccos(4^{2x})))}\times$

$\times\dfrac{1}{\arccos(4^{2x})\ln 7}\dfrac{1}{\sqrt{1-(4^{2x})^2}}4^{2x}(\ln 4)$.

6.115. $f'(x)=2^x\ln 2\cdot\operatorname{ctg}(-4x)+2^x\dfrac{1}{\sin^2(-4x)}(-4)$.

6.116. $f'(x)=\dfrac{1}{(x^2+2x+9)\ln 2}(2x+2).$

6.117. $f'(x)=\dfrac{1}{1+16x^6}(12x^2)\dfrac{1}{1+10x}10.$

6.118. $f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}2(x^2+4)-2x\arcsin(2x)}{(x^2+4)^2}.$

6.119. $f'(x)=3x^3\operatorname{ch}x^3\arccos\sqrt{x}-\dfrac{\operatorname{sh}x^3}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}}.$

6.120. $f'(x)=\operatorname{sh}\dfrac{\operatorname{arcctg}(3x+1)}{\ln^2 x}\dfrac{-\dfrac{3\ln^2 x}{1+(3x+1)^2}-\dfrac{\operatorname{arcctg}(3x+1)2\ln x}{x}}{\ln^4 x}.$

6.129. $y'_x(x)=-\dfrac{2x\cos x^2}{3(y(x))^2}.$

6.130. $y'_x(x)=\dfrac{y(1-y\sin x)}{1-y\cos x}.$

6.131. $y'_x(x)=\dfrac{y^2\cos x}{\dfrac{1}{\sin^2 y}+2y\sin x-5}.$

6.132. $y'_x(x)=\dfrac{\dfrac{2xy}{(1+x^2)^2}}{\dfrac{3y^2}{1+y^6}-\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{y}}.$

6.133. $y'_x(x)=\dfrac{9}{7^y\ln y\arcsin y+\dfrac{7^y}{\sqrt{1-y^2}}}.$

6.134. $y'_x(x)=\dfrac{8-\sqrt{1-y}}{\dfrac{x}{2\sqrt{1-y}}+2\operatorname{ch}y}.$

6.135. $y'_x(x)=\dfrac{y}{x}\dfrac{x\ln y-y}{y\ln x-x}.$

6.136. $y'_x(x)=y/x.$

6.137. $y'_x(x)=\dfrac{3^x(3^y-1)}{3^y(1-3^x)}.$

6.138. $f'(x)=\left(\dfrac{x^4(1+x)^5}{\sqrt{(x+8)(x-2)}}\left(\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{1+x}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x+8}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x-2}\right)\right).$

6.139. $$f'(x)=\frac{\operatorname{tg}3x\cdot x^{\frac{3}{2}}\cdot\operatorname{arctg}(\sqrt{x})}{\ln^2 x\cdot 2^{5x}}\times$$
$$\times\left(\frac{3}{\operatorname{tg}3x\cdot\cos^2 3x}+\frac{3}{2x}+\frac{1}{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-2\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}-5\ln 2\right).$$

6.140. $$f'(x)=\frac{\arcsin 6x\cdot\operatorname{ctg}x^2}{\operatorname{sh}2x\cdot\cos(\ln x)}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{\arcsin 6x}\cdot\frac{6}{\sqrt{1-36x^2}}-\frac{1}{\operatorname{ctg}x^2}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{2x}{\sin^2 x^2}-\frac{2\operatorname{ch}2x}{\operatorname{sh}2x}+\frac{\sin(\ln x)}{\cos(\ln x)}\cdot\frac{1}{x}\right).$$

6.141. $$f'(x)=\frac{\log_2(x^2+1)\cdot\arccos 7x\cdot(x^3+2)\cdot e^{-2x}}{\sqrt{x^2+2x+5}}\times$$
$$\times\left(\frac{2x}{(x^2+1)\ln 2}-\frac{7}{\arccos 7x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-49x^2}}+\frac{24x^2}{x^3+2}-2\right).$$

6.142. $f'(x)=x^{\ln x}\cdot\dfrac{2\ln x}{x}$. **6.143.** $f'(x)=x^{\sqrt{x}}\cdot\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

6.144. $$f'(x)=\operatorname{ctg}x^{\arcsin\sqrt{x}}\left(\frac{\ln\operatorname{ctg}x}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}}-\frac{\arcsin x}{\operatorname{ctg}x\cdot\sin^2 x}\right).$$

6.145. $$f'(x)=(\sqrt[3]{x^2+x+7})^{\sin 5x}\times$$
$$\times\left(\frac{5}{3}\cdot\cos 5x\cdot\ln(x^2+x+7)+\frac{1}{3}\cdot\sin 5x\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+7}\right).$$

6.146. $$f'(x)=(\sqrt[3]{x^2+x+7})^{\sin 5x}\times$$
$$\times\left(\frac{5}{3}\cdot\cos 5x\cdot\ln(x^2+x+7)+\frac{1}{3}\cdot\sin 5x\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+7}\right).$$

6.147. $$f'(x)=(\ln x)^{\frac{x^2+1}{\operatorname{tg}9x}}\cdot\left(\frac{2x\cdot\operatorname{tg}9x-\dfrac{9(x^2+1)}{\cos^2 9x}}{\operatorname{tg}^2 9x}\cdot\ln(\ln x)+\frac{x^2+1}{\operatorname{tg}9x}\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\right).$$

6.148. $f'(x)=(\arcsin(e^{2x}))^{x^3}\times$
$$\times\left(3x^2\cdot\ln\arcsin(e^{2x})+x^3\cdot\frac{1}{\arcsin(e^{2x})}\cdot\frac{2e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}}\right).$$

6.149. $y'_x=-\operatorname{ctg} t.$ 6.150. $y'_x=-t/\sin^2 t.$

6.151. $y'_x=-2t^2\cdot\sqrt{1-\ln^2 t}\cdot e^{t^2}.$

6.152. $y'_x=\dfrac{2t(t^2+2)^2}{(1+t^4)(2-t^2-2t)}.$ 6.153. $y'_x=\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{2\ln 2}.$

6.154. $y'_x=\dfrac{\cos 2t-2t\sin 2t}{\sin 2t+2t\cos 2t}.$ 6.155. $y'_x=\dfrac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}.$

6.156. $y'_x=\sin t/(1-\cos t).$

6.157. Уравнение касательной $y=13x-12$. Уравнение нормали $y=-\dfrac{1}{13}x+\dfrac{14}{13}.$

6.158. $y=2-x.$

6.159. $(0;-7)$, $(\ln 3; 15)$.

6.160. $\operatorname{arctg}(2/e)$.

6.161. $\alpha=45°$.

6.162. $\alpha=0°$.

6.163. $\alpha=90°$.

6.164. а) $dy=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2/v^6}}\cdot\dfrac{v^3du-u3v^2dv}{v^6};$

б) $dy=\dfrac{1}{1+u^2\ln^2 v}\cdot\left(\ln v\,du+\dfrac{u}{v}dv\right);$

в) $d(2^u\operatorname{tg}(v^2))=2^u\ln 2\operatorname{tg}(v^2)du+2^u\cdot\dfrac{2v}{\cos^2(v^2)}\cdot dv;$

г) $$d\left(\frac{\operatorname{ctg}u}{\sqrt[3]{1+v}}\right)=\frac{-\dfrac{\sqrt[3]{1+v}}{\sin^2 u}du-\dfrac{\operatorname{ctg}u}{3\sqrt[3]{(1+v)^2}}\cdot dv}{\sqrt[3]{(1+v)^2}}.$$

6.165. а) $dy=(3x-3)dx$; б) $dy=(4x^3\cos x^2-2x^5\sin x^2)dx$;

в) $$dy=\frac{-\dfrac{5\sqrt{x}}{\sin^2 5x}-\dfrac{\operatorname{ctg}5x}{2\sqrt{x}}}{x}dx.$$

6.166. а) $$dy(x)=\frac{e^{2x}\ln(e+3x^2)-e^{2x}\dfrac{6x}{e+3x^2}}{\ln^2(e+3x^2)}dx,\quad dy(0)=0{,}1;$$

б) $dy(x)=x\cos x\,dx$, $dy(x)=0$; в) $dy=-\dfrac{0{,}01\pi}{2}.$

6.167. а) 6,01; б) 6,99; в) $\sqrt{3}/2-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{180^\circ}\approx 0{,}851$;
г) $\pi/6+0{,}001\approx 0{,}513$.

6.168. $f''(x)=12x^2\sin 2x+16x^3\cos 2x-4x^4\sin 2x$.

6.169. $f''(x)=-\frac{1}{x\ln^2 x}+\frac{2}{x\ln^3 x}$.

6.170. $f''(x)=9\cdot 2^{3x}(\ln^2 2)$.

6.171. $f''(x)=-\frac{250x}{(1+25x^2)}$.

6.172. а) $dy=(3x^2+2)dx$, $d^2y=6x(dx)^2$, $d^3y=6(dx)^3$;
б) $dy=((-3/2)x^2\sin(2x^3)+9)dx$;
$d^2y=-3(\sin(2x^3)+3x^4\cos(2x^3))(dx)^2$;
$d^3y=-18x^2(\cos(2x^3)+2x\cos(2x^3)-3x^4\sin(2x^3))(dx)^3$.

6.173. $d^5y=120(dx)^5$.

6.174. $d^{(n)}y=2^ne^{2x}(dx)^n$.

6.175. $c_1=-\frac{\sqrt{3}}{3}\in[-1;0]$, $c_2=\frac{\sqrt{3}}{3}\in[0;1]$.

6.176. Нет, так как не существует $f'(2)$.

6.177. $c=0$. 6.178. $x=2$. 6.181. $c=14/9$. 6.182. 2.
6.183. 5. 6.184. −2. 6.185. 4. 6.186. −2.
6.187. 0. 6.188. 1. 6.189. 1. 6.190. 1.
6.191. $e^{1/2}$. 6.192. $e^{-1/6}$. 6.193. $e^{-1/3}$.

6.194. $f(x)=2(x-2)^4+11(x-2)^3+15(x-2)^2$.

6.195. $f(x)=x^6-6x^5+21x^4-44x^3+63x^2-54x+9$.

6.196. $f(x)=1+x^2/2-x^4/8+o(x^6)$.

6.197. $f(x)=-x^2/2-x^4/12-x^6/45+o(x^7)$.

6.198. $f(x)=\frac{2}{3}+\frac{8}{9}x+\frac{26}{27}x^2+\ldots+\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)x^n+\ldots$

6.199. а) $\operatorname{arctg} 0{,}8\approx 0{,}67474$;
б) $\cos(\pi/20)\approx 0{,}98769$; $\sqrt{5}\approx 2{,}236022$.

6.200. $0{,}401<\ln 1{,}5<0{,}408$.

6.201. а) 1; б) 1/4; в) 0,5; г) 1/12; д) −1/3;
е) −1/12; ж) 1/3; з) 0,5.

6.202. $f_{\min}(3)=3e^{-9}$, убывает при $x\in(-\infty;\ 3)$, возрастает при $x\in(3;\ +\infty)$.

6.203. $f_{\min}(3)=5/4$, убывает на интервале $x\in(1;\ 3)$, возрастает на интервалах $x\in(-\infty;\ 1)$ и $x\in(3;\ +\infty)$.

6.204. Возрастает на интервалах $x\in(-\infty;\ 1)$ и $x\in(3;\ +\infty)$, убывает на интервале $x\in(1;3)$, $f_{\max}(1)=1$, $f_{\max}(3)=-3$.

6.205. $f_{\min}(1/4)=\sqrt{15/8}$, убывает при $x\in(-\infty;\ 1/4)$, возрастает при $x\in(1/4;\ +\infty)$.

6.209. $f_{\text{наиб}}(x_{\text{наиб}} = -2) = 5\frac{1}{3}$; $f_{\text{наим}}(x_{\text{наим}} = 3) = -9\frac{1}{4}$.

6.210. Наибольшее значение равно $f_{\text{наиб}} = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{4}\ln 3$ и достигается при $x_{\text{наиб}} = 1$; наименьшее значение равно $f_{\text{наим}} = 1$ и достигается при $x_{\text{наим}} = 1/\sqrt{3}$.

6.211. $f_{\text{наиб}} = f(-20) = 229$, $f_{\text{наим}} = f(-1) = 0$.

6.212. Наибольшее значение площади равно $S = \frac{1}{2}a^2$ и достигается при $x = \pi/2$.

6.213. 445.

6.214. $\alpha = \pi\sqrt{8/3}$.

6.215. $0{,}8p$; $0{,}6p$; $0{,}6p$.

6.221. $x = -1/2$.

6.222. $x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

6.223. $x = -1$.

6.224. $x = 2$.

6.225. На интервалах $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ график функции вогнут, на интервале $(-1; 1)$ график функции выпуклый. Значения функции в точках перегиба $f(-1) = 0$, $f(1) = 0$.

6.226. На интервале $(-\infty; 0)$ график функции вогнут, на интервале $(0; +\infty)$ график функции выпуклый. Значение функции в точке перегиба $f(0) = 0$.

6.227. На интервале $(-1; 1)$ график функции вогнут, на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(1; \infty)$ график функции выпуклый. Значение функции в точках перегиба $f(\pm 1) = \ln 2$.

6.228. На интервале $(-\sqrt{3}/3; \sqrt{3}/3)$ график функции выпуклый, на интервалах $(-\infty; -\sqrt{3}/3)$ и $(\sqrt{3}/3; +\infty)$ график функции вогнутый. Значение функции в точках перегиба $f(\pm\sqrt{3}/3) = 0{,}75$.

6.229. На интервале $(1/3; 1)$ график функции выпуклый, на интервалах $(-\infty; 1/3)$ и $(1/3; +\infty)$ график функции вогнутый. Значение абсцисс точек $x_1 = 1/3$, $x_2 = 1$.

6.230. На интервале $(-\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2)$ график функции выпуклый, на интервалах $(-\infty; -\sqrt{2}/2)$ и $(\sqrt{2}/2; +\infty)$ график функции вогнутый. Значение абсцисс точек $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}/2, x_2 = 1$.

6.231. Значение функции в точках перегиба:
а) $f(\pm 2/3) = 44/27$; б) $f(5) = 1$.

6.232. а) $a \in (-4; 4)$; б) $a \in (-2; 2)$.

6.234. Наклонная асимптота $y = x + 1$ при $x \to \pm\infty$, вертикальная асимптота $x = 0$ при $x \to +0$.

6.235. Наклонная асимптота $y = 3x$ при $x \to \pm\infty$, вертикальная асимптота $x = -1$ при $x \to \pm 0$.

6.236. Наклонные асимптоты: $y = (\pi/2)x - 1$ при $x \to +\infty$ и $y = (\pi/2)x - 1$ при $x \to -\infty$.

6.237. Вертикальная асимптота $x = 0$ при $x \to +0$, горизонтальная асимптота $y = 0$ при $x \to +\infty$.

6.238. Вертикальная асимптота $x = 1$ при $x \to +0$, горизонтальная асимптота $y = 0$ при $x \to \pm\infty$.

6.239. Горизонтальная асимптота $y = 0$ при $x \to \pm\infty$.

6.240. Горизонтальная асимптота $y = 0$ при $x \to \pm\infty$.

6.241. Наклонные асимптоты: $y = x + \pi$ при $x \to +\infty$ и $y = x - \pi$ при $x \to -\infty$.

6.242. Вертикальная асимптота $x = 2$ при $x \to 2 + 0$, наклонные асимптоты: $y = x + 1$ при $x \to +\infty$ и $y = -x - 1$ при $x \to -\infty$.

6.243. Вертикальная асимптота $x = 0$ при $x \to \pm 0$, наклонная асимптота: $y = x$ при $x \to \pm\infty$.

6.244. Наклонная асимптота $y = x - 3$ при $x \to \pm\infty$.

6.245. Вертикальная асимптота $x = 0$ при $x \to \pm 0$, наклонная асимптота: $y = x$ при $x \to \pm\infty$.

6.246. ОДЗ $x \in (-\infty;\ +\infty)$; область изменения функции $y \in (-\infty; +\infty)$; функция общего вида, непериодическая, непрерывная всюду при $x \in (-\infty; +\infty)$; асимптот нет; $f_{\max} = 3$, $x_{\max} = 1$; интервалы возрастания $x \in (-\infty; 1)$ и $x \in (3; +\infty)$; $f_{\min} = -1$, $x_{\min} = 3$; интервал выпуклости $x \in (0; 2)$, интервал вогнутости $x \in (2; +\infty)$, точка перегиба $(2; -2)$.

6.247. ОДЗ $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; область изменения функции $x \in (-\infty; +\infty)$; функция общего вида; непериодическая; непрерывная всюду за исключением точки $x = 1$, в которой имеется разрыв второго рода; асимптоты $x = 1$ и $y = x + 5$; в интервалах $x \in (-\infty;\ 1)$ и $x \in (5;\ +\infty)$ — возрастает, в интервале $x \in (1;\ 5)$ — убывает; $f_{\min} = 13{,}5$, $x_{\max} = 5$; в интервале $x \in (-\infty; 1)$ выпукла, на интервалах $x \in (-1; 1)$ и $x \in (1; +\infty)$ — вогнута, точка перегиба — $(-1; 0)$; точки пересечения с осями координат $(0; 1)$ и $(-1; 0)$.

6.248. ОДЗ $x \in (0; +\infty)$; функция общего вида; непериодическая; непрерывная всюду на ОДЗ; асимптоты $x = 0$ и $y = 0$; в интервалах $x \in (0; e^2)$ — возрастает, в интервале $x \in (e^2; +\infty)$ — убывает; $f_{\max} = 6/e$, $x_{\max} = e^2$; в интервале $x \in (-\infty; e^{8/3})$ вогнута, на интервале $x \in (\sqrt{5}/5; 1)$ — выпукла, точка перегиба — $(e^{8/3};\ 8/e^{4/3})$; точка пересечения с осью абсцисс $(1; 0)$.

6.249. ОДЗ $x \in (-\infty; +\infty)$; функция четная; непериодическая; непрерывная всюду на ОДЗ; асимптоты нет;
в интервале $x \in (-\infty; 0)$ — убывает,
в интервале $x \in (0; +\infty)$ — возрастает; $f_{\min} = -5$, $x_{\min} = 0$;

в интервалах $x \in (-\infty; -1)$, $x \in (-\sqrt{5}/5; \sqrt{5}/5)$ и $x \in (1; +\infty)$ — вогнута, на интервале $x \in (-1; \sqrt{5}/5), x \in (\sqrt{5}/5; 1)$ — выпукла, абсциссы точек перегиба — $x = \pm\sqrt{5}/5$.

6.250. ОДЗ $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; функция общего вида; непериодическая; непрерывная всюду на ОДЗ; асимптоты $x = \pm 1$; в интервале $x \in (-1-\sqrt{2}; 0)$ — убывает, в интервалах $x \in (-\infty; -1-\sqrt{2})$ и $x \in (1; +\infty)$ — возрастает; $f_{\max} = -1-\sqrt{2} + \ln(2+2\sqrt{2})$, $x_{\max} = -1-\sqrt{2}$ при $x \in (-\infty; -1)$ и $x \in (1; +\infty)$ — выпукла, точек перегиба нет.

6.251. ОДЗ $x \in (-\infty; +\infty)$; функция общего вида; непериодическая; непрерывная всюду на ОДЗ; асимптот нет; в интервалах $x \in (-\infty; 0)$ и $x \in (2; +\infty)$ — возрастает, в интервале $x \in (0; 2)$ — убывает; $f_{\max} = 0$, $x_{\max} = 0$, $f_{\min} = -3\sqrt[3]{4}$, $x_{\min} = 2$; при $x \in (-1; 0)$ и $x \in (0; +\infty)$ — вогнута, точек перегиба нет.

6.252. ОДЗ $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1]$; функция общего вида; непериодическая; непрерывная всюду кроме точки $x = 0$, в точке $x = 0$ разрыв второго рода; горизонтальная асимптота $y = 0$, вертикальная асимптота $x = 0$; на интервалах $x \in (-\infty; 0)$ и $x \in (0; 1)$ — убывает; экстремумов нет; на интервале $x \in (-\infty; 0)$ — выпукла, на интервале $x \in (0; 1)$ — вогнута; точек перегиба нет.

6.253. ОДЗ $x \in (-\infty; +\infty)$; функция четная; непериодическая; непрерывная всюду на ОДЗ; асимптот нет;

в интервалах $x \in (-\infty; -1)$ и $x \in (1; +\infty)$ — убывает, в интервале $x \in (-1; 1)$ — возрастает; $f_{\max} = 3$, $x_{\max} = 0$, $f_{\min} = 2$, $x_{\min} = \pm 1$; при $x \in (-\infty; -\sqrt{3}/3)$ и $x \in (\sqrt{3}; +\infty)$ — вогнута, при $x \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$ — выпукла; точки перегиба: $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3}/4), (\sqrt{3}; \sqrt{3}/4)$.

6.254. ОДЗ $x \in (-\infty; +\infty)$; функция нечетная; непериодическая; непрерывная всюду на ОДЗ; горизонтальная асимптота $y = 0$; в интервалах $x \in (-\infty; -1)$ и $x \in (1; +\infty)$ — убывает, в интервале $x \in (-1; 1)$ — возрастает; $f_{\max} = 1$, $x_{\max} = 0{,}5$, $f_{\min} = -1$, $x_{\min} = -0{,}5$; при $x \in (-\infty; -\sqrt{3})$ и $x \in (\sqrt{3}/3; +\infty)$ — вогнута, при $x \in (-\sqrt{3}/3; \sqrt{3}/3)$ — выпукла; точки перегиба: $x \in (-\sqrt{3}/3; 22/9), x \in (\sqrt{3}/3; 22/9)$.

6.255. ОДЗ $x \in (-\infty; +\infty)$; функция общего вида; непериодическая; непрерывная всюду на ОДЗ; наклонная асимптота $y = x + 2/3$; в интервалах $x \in (-\infty; 0)$ и $x \in (4/3; +\infty)$ — убывает, в интервале $x \in (0; 4/3)$ — возрастает; $f_{\max} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$, $x_{\max} = 4/3$, $f_{\min} = 0$,

$x_{\min} = 0$; при $x \in (-\infty; 0)$ и $x \in (2; +\infty)$ — вогнута, при $x \in (0; 2)$ — выпукла; точки перегиба: (0; 0), (2; 0).

6.256. ОДЗ $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; функция общего вида; непериодическая; непрерывная всюду на ОДЗ; наклонная асимптота $y = x + 2/3$; в интервалах $x \in (-\infty; 0)$ и $x \in (4/3; +\infty)$ — убывает, в интервале $x \in (0; 4/3)$ — возрастает; $f_{\max} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$, $x_{\max} = 4/3$, $f_{\min} = 0$, $x_{\min} = 0$; при $x \in (-\infty; 0)$ и $x \in (2; +\infty)$ — вогнута, при $x \in (0; 2)$ — выпукла; точки перегиба: (0; 0), (2; 0).

6.257. ОДЗ $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; функция общего вида; непериодическая; непрерывная всюду на ОДЗ, кроме точки $x = -1$, где имеется разрыв второго рода; вертикальная асимптота $x = -1$, горизонтальная асимптота $y = 0$ при $x \to -\infty$; в интервалах $x \in (-\infty; -1)$ и $x \in (-1; 0)$ — убывает, в интервале $x \in (0; +\infty)$ — возрастает; $f_{\min} = 0$, $x_{\min} = 0$; при $x \in (-\infty; -1)$ и $x \in (-1; +\infty)$ — вогнута.

6.258. а) $K = 2, R = 1/2, X = 0, Y = -3{,}5$;

б) $K = \sqrt{2}/4, R = 2\sqrt{2}, X = 3, Y = 2$;

в) $K = 1, R = 1, X = -\pi/2, Y = 0$;

г) $K = 0{,}06\sqrt{10}, R = 5\sqrt{10}/3, X = -4, Y = 1{,}6$.

6.259. а) $K = 3\sqrt{40}/800, R = 20\sqrt{40}/3, X = -19, Y = 26/3$;

б) $K = a/b^2, R = b^2/a, X = 1 - b^2/a, Y = 0$;

в) $K = \sqrt{2}, R = \sqrt{2}/2, X = 0{,}5, Y = 0{,}5$;

г) $K = \sqrt{6}, R = \sqrt{6}/6, X = 2, Y = 2$.

6.260. а) $K = 3/(4a), R = 4a/3, X = 2a/3, Y = 0$;

б) $K = \dfrac{\pi^2/4+2}{a(\pi^2/4+1)^{3/2}}, R = \dfrac{a(\pi^2/4+1)^{3/2}}{\pi^2/4+2}$,

$X = -\dfrac{a(\pi^2+4)}{\pi^2+8}, Y = \dfrac{a(\pi^2+6)}{\pi^2+8}$;

в) $K = \sqrt{2}/4a, R = 2a\sqrt{2}, X = -2a\sin(\ln 2)$,
$Y = 4a\sin(\ln 2) - a\cos(\ln 2)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Аналитическая геометрия. М.: Физматлит, 2006.
2. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Линейная алгебра. М.: Физматлит, 2006.
3. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа: В 2 т. М.: Физматлит, 2005.
4. *Кудрявцев Л.Д.* Математический анализ: В 2 т. М.: Физматлит, 2006.
5. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Высшая математика: В 3 т. М.: Физматлит, 2005.
6. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. М.: Физматлит, 2006.
7. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление: В 2 т. М.: Интеграл-Пресс. 2006.
8. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Физматлит, 2005.
9. *Ефимов А.В., Демидович Б.П.* Сборник задач по высшей математике для втузов: В 4 ч. М.: Физматлит. 2004.
10. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 т. М.: ОНИКС, 2006.
11. *Кузнецов Л.А.* Сборник заданий по высшей математике. М.: Высшая школа, 1983.
12. *Кручкович Г.И.* Сборник задач по курсу высшей математики. М.: Высшая школа, 1973.
13. *Иванова И.Е.* Дифференцирование функций одного переменного: Учебник для втузов. М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 1998.
14. *Минорский В.П.* Сборник задач по высшей математике для втузов. М.: Наука, 1987.
15. *Каплан И.А.* Практические занятия по высшей математике. Харьков: Изд-во Харьковского Гос. ун-та, 1972.
16. *Гусак А.А.* Задачи и упражнения по высшей математике. Минск: Высшая школа, 1973.
17. *Лихолетов И.И., Мацкевич И.П.* Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятности и математической статистике. Минск: Высшая школа, 1969.
18. *Виноградова И.А., Олехник С.П., Садовничий В.А.* Задачи и упражнения по математическому анализу. М.: Изд-во МГУ, 1988.
19. *Запорожец Г.И.* Руководство к решению задач по математическому анализу. М.: Высшая школа. 1964.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Игорь Алексеевич СОЛОВЬЕВ, Валентин Владимирович ШЕВЕЛЕВ,
Александр Викторович ЧЕРВЯКОВ, Андрей Юрьевич РЕПИН

ПРАКТИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО
К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ
ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Линейная алгебра, векторная алгебра,
аналитическая геометрия, введение
в математический анализ, производная и
ее приложения

Учебное пособие

Генеральный директор *А. Л. Кноп*
Директор издательства *О. В. Смирнова*
Художественный редактор *С. Ю. Малахов*
Редактор *И. Л. Яновская*
Корректоры *А. К. Райхчин, И. А. Короткова*
Подготовка иллюстраций *В. В. Воскресенская*
Выпускающие *Н. К. Белякова, О. В. Шилкова*

ЛР № 065466 от 21.10.97

Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.004173.04.07
от 26.04.2007 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lpbl.spb.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.
Тел./факс: (812)567-29-35, 567-05-97, 567-92-72;
print@lpbl.spb.ru

Сдано в набор 07.02.07. Подписано в печать 20.10.07.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108 1/32.
Печать офсетная. Усл. п. л. 16,80. Тираж 2000 экз.

Заказ № 164.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО «Первая типография».
195237, г. Санкт-Петербург, ул. Руставели, д. 13.