ГЕОМЕТРИЯ

9 класс

24 часа до экзамена

Л.Д. Лаппо
М.А. Попов

ОТВЕТЫ НА ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ БИЛЕТЫ

+ ШПАРГАЛКА

ЭКЗАМЕН

Л.Д. Лаппо, М.А. Попов

ГЕОМЕТРИЯ

ОТВЕТЫ НА ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ БИЛЕТЫ

9 класс

ШПАРГАЛКИ К БИЛЕТАМ

Издательство
«ЭКЗАМЕН»

МОСКВА
2010

УДК 373:514
ББК 74.262.21
Л24

Лаппо, Л.Д.

Л24 Геометрия. Ответы на экзаменационные билеты. 9 класс: учебное пособие / Л.Д. Лаппо, М.А. Попов. — М.: Издательство «Экзамен», 2010. — 78, [2] с. (Серия «24 часа до экзамена»)

ISBN 978-5-377-03055-3

В данном пособии приводятся ответы на все вопросы экзаменационных билетов по геометрии, предлагаемых Министерством образования и науки РФ для проведения устной итоговой аттестации выпускников 9 классов общеобразовательных школ. В ответах на практические вопросы рассмотрены примеры решения типовых задач, знание которых необходимо для успешной сдачи экзаменов.

Предлагаемые ответы полностью удовлетворяют требованиям, предъявляемым на экзаменах в школах, и помогут школьникам быстро и эффективно подготовиться к экзаменам, систематизировать и укрепить свои знания.

В пособии содержатся шпаргалки к билетам.

Для простого и эффективного использования шпаргалки разрежьте каждую страницу на четыре части по пунктирной линии. Сложите полученные листы по порядку номеров — верхний левый, верхний правый, нижний левый, нижний правый. Для удобства использования можно скрепить получившуюся стопку степлером или скрепкой в верхнем левом углу.

Пособие предназначено для учащихся и преподавателей 9 классов общеобразовательных школ.

УДК 373:514
ББК 74.262.21

Формат 84x108/32. Гарнитура «Таймс». Бумага газетная.
Уч.-изд. л. 4,03. Усл. печ. л. 4,20.
Тираж 25 000 экз. Заказ № 10331.

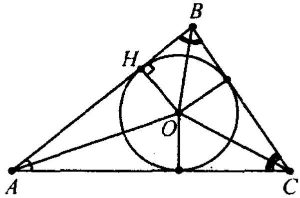
ISBN 978-5-377-03055-3

СОДЕРЖАНИЕ

БИЛЕТ № 1

1. Сформулируйте определение окружности, вписанной в треугольник. Сформулируйте теорему о центре вписанной окружности. Приведите пример применения теоремы о центре вписанной окружности

Окружность называется вписанной в треугольник, если она касается всех его сторон.



Теорема: Центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис.

В качестве примера применения теоремы о центре вписанной окружности можно привести задачу построения окружности, вписанной в данный треугольник ABC.

Для ее решения требуется выполнить следующие действия:

1) Построить биссектрисы треугольника ABC (точку их пересечения обозначим O);

2) Опустить из точки O на одну из сторон треугольника ABC (например AB) перпендикуляр OH;

3) Построить окружность с центром в точке O и радиусом, равным длине отрезка OH.

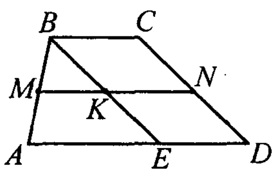
Полученная таким образом окружность и будет искомой.

2. Сформулируйте определение трапеции. Сформулируйте определение средней линии трапеции. Сформулируйте и докажите теорему о средней линии трапеции

Трапецией называется четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие не параллельны.

Стороны трапеции, которые параллельны, называются ее основаниями, а две другие стороны – боковыми сторонами.

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон.



Теорема: Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Доказательство:

Пусть $ABCD$ – трапеция с основаниями AD и BC. Проведем из вершины B прямую BE, параллельную боковой стороне CD (точка E – точка пересечения этой прямой с основанием AD).

Из точки N – середины стороны CD проведем прямую, параллельную основаниям трапеции. Пусть K – точка пересечения этой прямой с BE. Тогда по теореме Фалеса $BK = KE$. KM (где M – середина стороны AB) – средняя линия ΔABE, значит по теореме о средней линии треугольника $KM \parallel AE$ и $KM = \frac{1}{2}AE$.

$KN \parallel AD$ и $KM \parallel AD$, поэтому точки M, K и N лежат на одной прямой.

В итоге имеем, что MN – средняя линия трапеции $ABCD$ по построению, $MN \parallel AD$, $MN \parallel BC$ и $MN = MK + KN =$

$$= \frac{1}{2}AE + BC = \frac{1}{2}(AD - BC) + BC = \frac{AD + BC}{2}.$$

Теорема доказана.

Пример. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD проведена средняя линия MN. Найти AD, если $MN = 5$ см, $BC = 3$ см.

Решение: По теореме о средней линии трапеции имеем: $MN = \frac{1}{2}\left(BC + AD\right)$, откуда получаем, что $AD = 2 \cdot MN - BC = 7$ см.

3. Задача: Сторона правильного шестиугольника, описанного около окружности, равна 2 см. Найдите сторону правильного треугольника, вписанного в эту окружность

Обозначим радиус данной окружности x. Тогда по формулам для радиусов вписанных и описанных окружностей правильного шестиугольника и треугольника имеем:

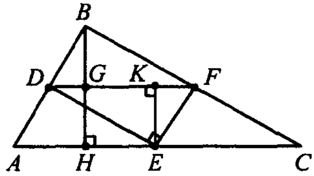
$$a_6 = \frac{2x}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{a_6\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ см}; \; a_3 = x\sqrt{3} = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3 \text{ см}.$$

Ответ: 3 см.

4. Задача: В треугольник ABC вписан равнобедренный прямоугольный треугольник DEF так, что его гипотенуза DF параллельна стороне AC, а вершина E лежит на стороне AC. Найдите высоту треугольника ABC, если AC = 16 см; DF = 8 см.

$\angle BDF = \angle BAC$ и $\angle BFD = \angle BCA$, как соответственные углы, образованные при пересечении параллельных прямых DF и AC

соответственно секущими AB и BC. $\Delta BDF \sim \Delta BAC$ (по первому признаку подобия – по двум углам). Отсюда имеем:



$$\frac{BD}{BA}=\frac{BF}{BC}=\frac{DF}{AC}=\frac{1}{2} \Rightarrow BD=\frac{1}{2}AB;$$

$$BF=\frac{1}{2}BC,$$

то есть DF – средняя линия треугольника ABC.

Пусть BH – высота треугольника ABC; EK – высота треугольника DEF. По теореме Фалеса $BG=GH$, а $GH=KE$, как параллельные отрезки, заключенные между параллельными прямыми.

Итак, $KE=BG=\frac{1}{2}BH$. $DE^2+EF^2=2DE^2=DF^2=64$, отсюда $DE=EF=4\sqrt{2}$ см. $S_{\Delta DEF}=\frac{1}{2}EK\cdot DF=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}BH\cdot 8=2BH$.

С другой стороны, $S_{\Delta DEF}=\frac{1}{2}DE\cdot EF=\frac{1}{2}\cdot\left(4\sqrt{2}\right)^2=16$ см^2.

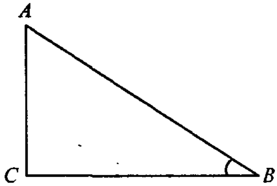
Имеем: $2BH=16 \Rightarrow BH=8$ см.

Ответ: 8 см.

БИЛЕТ № 2

1. Сформулируйте определение синуса острого угла прямоугольного треугольника. Приведите пример его применения при решении прямоугольных треугольников.

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего этому углу катета к гипотенузе.

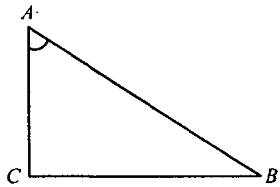


Пример 1: Пусть дана гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC и синус его острого угла B.

Тогда по определению синуса острого угла прямоугольного треугольника:

$$\sin B = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC = AB \sin B,$$

а по теореме Пифагора $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$.



Таким образом, по гипотенузе и синусу одного из острых углов прямоугольного треугольника можно найти катеты этого прямоугольного треугольника.

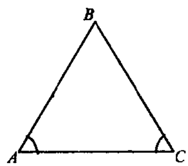
Пример 2: Пусть дан катет BC прямоугольного треугольника ABC и синус противолежащего ему угла A.

Тогда: $\sin A = \dfrac{BC}{AB} \Rightarrow AB = \dfrac{BC}{\sin A}$; $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2}$.

Таким образом, по катету и синусу противолежащего ему угла можно найти гипотенузу и катет прямоугольного треугольника.

2. Сформулируйте определение равнобедренного треугольника. Сформулируйте и докажите признак равнобедренного треугольника.

Треугольник называется равнобедренным, если две его стороны равны.



Теорема: (признак равнобедренного треугольника) Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.

Доказательство. Пусть ABC – треугольник, в котором $\angle A = \angle C$.

Докажем, что он равнобедренный.

Рассмотрим треугольники ACB и CAB, для которых $AC = CA$ (общая), $\angle C = \angle A$, и $\angle A = \angle C$ (по условию). По второму признаку равенства треугольников $\Delta ACB = \Delta CAB$. (Равенство треугольников видно на рисунке, так как они просто совпадают). В равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны, откуда $AB = AC$ (т.к. $\angle C = \angle A$), то есть ΔABC – равнобедренный.

Теорема доказана.

3. Задача: Стороны треугольника равны 3 см, 2 см и $\sqrt{3}$ см. Определите вид этого треугольника.

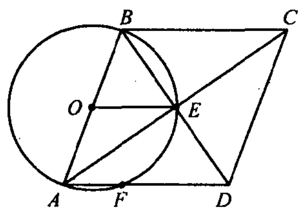
Против наибольшей стороны треугольника, равной 3 см, лежит наибольший угол α. По теореме косинусов имеем:

$$3^2 = 2^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos\alpha;$$

$$9 = 7 - 4\sqrt{3}\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{3}} < 0 \Rightarrow \alpha > 90°,$$

то есть данный треугольник тупоугольный.

4. Задача: На стороне AB параллелограмма ABCD как на диаметре построена окружность, проходящая через точку пересечения диагоналей и середину стороны AD. Найдите углы параллелограмма.



OE – средняя линия ΔABD, поэтому $OE \parallel AD$ и $OE = \frac{1}{2}AD = AF$.

OF – средняя линия ΔABD, поэтому $OF \parallel BD$ и $OF = \frac{1}{2}BD = BE$.

Отсюда $BE = OB = OE \Rightarrow \Delta BOE$ равносторонний и $\angle BOE = 60°$.

$\angle BAD = \angle BOE$ (т.к. $OE \parallel AD$), то есть $\angle BAD = 60°$.

$\angle ABC = 180° - \angle BAD = 120°$.

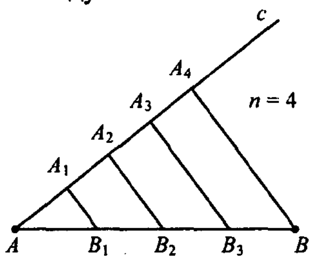
Ответ: 60° и 120°.

БИЛЕТ № 3

1. Сформулируйте теорему Фалеса. Приведите пример ее применения.

Теорема Фалеса.

Если на одной из двух параллельных прямых последовательно отложить несколько равных отрезков и провести через их концы параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой отрезки, равные между собой.



Примером применения теоремы Фалеса является задача деления данного отрезка AB на n равных частей.

Для решения этой задачи требуется:

1) Провести луч AC, не лежащий на прямой AB;

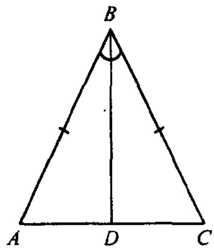
2) Отложить на луче AC от точки A последовательно n равных отрезков AA_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$;

3) Провести прямую A_nB;

4) Построить прямые, проходящие через точки A_1, A_2, .., A_{n-1} и параллельные прямой A_nB.

Точки пересечения B_1, B_2, ..., B_{n-1} этих прямых с отрезком AB по теореме Фалеса делят отрезок AB на n равных отрезков.

2. Сформулируйте определение равнобедренного треугольника. Сформулируйте и докажите свойство углов при основании равнобедренного треугольника.



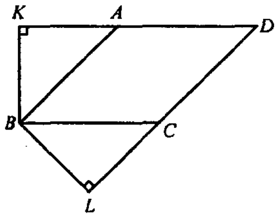
Треугольник называется равнобедренным, если две его стороны равны. Эти две стороны называются боковыми сторонами равнобедренного треугольника, а третья сторона – его основанием.

Теорема: В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Доказательство: Пусть ABC – равнобедренный треугольник с основанием AC. Проведем биссектрису BD треугольника ABC.

$\Delta ABD = \Delta BCD$ по первому признаку равенства треугольников (AB=BC по условию, BD – общая сторона, $\angle ABD = \angle DBC$, так как BD – биссектриса), поэтому $\angle A = \angle C$. Теорема доказана.

3. Задача: Угол между высотами BK и BL параллелограмма ABCD, проведенными из вершины его острого угла B, в четыре раза больше самого угла ABC. Найдите углы параллелограмма.



Пусть $\angle ABC = \alpha$. Тогда $\angle KAB = \alpha$, $\angle KBA = 90° - \alpha$. $\angle BCD = 180° - \alpha$;

$\angle BCL = 180° - \angle BCD = \alpha$;

$\angle CBL = 90° - \angle BCL = 90° - \alpha$.

$\angle KBL = \angle KBA + \angle ABC + \angle CBL =$
$= 90° - \alpha + \alpha + 90° - \alpha = 180° - \alpha$

С другой стороны: по условию $\angle KBL = 4\alpha$.

Итак, $180° - \alpha = 4\alpha \Rightarrow 5\alpha = 180°$; $\alpha = 36°$; $180° - \alpha = 144°$.

Ответ: 36° и 144°.

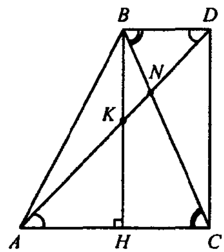
4. Задача: Через вершину B равнобедренного треугольника ABC параллельно основанию AC проведена прямая BD. Через точку K – середину высоты BH проведен луч AK, пересекающий прямую BD в точке D, а сторону BC в точке N. Определите, в каком отношении точка N делит сторону BC.

$\Delta AKH = \Delta BKD$ по второму признаку равенства треугольников ($BK = KH$ по условию, $\angle AHK = \angle KBD = 90°$ как накрест лежащие, $\angle BKD = \angle AKH$ как вертикальные углы).

Отсюда $BD = AH = \dfrac{1}{2} AC$.

$\Delta BND \sim \Delta ANC$ по двум углам.

Отсюда $\dfrac{BN}{NC} = \dfrac{BD}{AC} = \dfrac{1}{2}$.



То есть точка N делит сторону BC в отношении 1:2.

Ответ: в отношении 1:2.

БИЛЕТ № 4

1. Сформулируйте определение окружности. Приведите формулу длины окружности. Приведите формулу длины дуги окружности. Приведите примеры применения либо формулы длины окружности, либо формулы длины дуги окружности.

Окружность – это геометрическая фигура, которая состоит из всех точек, расположенных на заданном расстоянии от данной точки. Формула длины окружности: $C = 2\pi R$.

Формула длины дуги окружности с градусной мерой α: $l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$.

Пример 1: Пусть диаметр окружности $D = 4$ см.
Тогда $C = 2\pi R = \pi D = 4\pi \approx 12{,}56$ см.

Пример 2: Найдем длину дуги окружности радиуса 5 см с градусной мерой 60°. $l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha = \frac{5\pi}{180} \cdot 60 = \frac{5\pi}{3} \approx 5{,}23$ см.

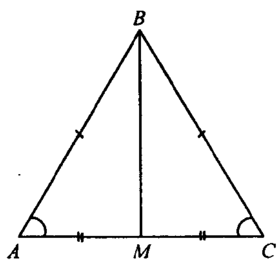
2. Сформулируйте определение медианы треугольника. Сформулируйте и докажите свойство медианы равнобедренного треугольника.

Медиана треугольника – это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Теорема: В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.

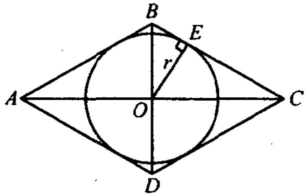
Доказательство: Рассмотрим равнобедренный ΔABC и его медиану BM.

$\Delta ABM = \Delta BMC$ по 1-му признаку равенства треугольников ($AB=BC$ по определению, $AM=MC$, т.к. BH – медиана; $\angle A = \angle C$ по свойству углов равнобедренного треугольника).



Поэтому $\angle ABM = \angle CBM$ и $\angle AMB = \angle CMB = 90°$, т.е. BH является и биссектрисой и высотой. Теорема доказана.

3. Задача: Сторона ромба равна 10, а один из его углов равен 30°. Найдите радиус окружности, вписанной в ромб.



$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos\angle C =$$

$$= 100 + 100 - 2 \cdot 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 100\left(2 - \sqrt{3}\right); \ BD = 10\sqrt{2 - \sqrt{3}}\ .$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle B =$$

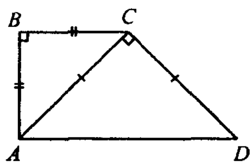
$$= 100 + 100 - 2 \cdot 100 \cdot \cos 150° = 10\sqrt{2 + \sqrt{3}}\ .$$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} BD \cdot AC = 50$. С другой стороны,

$S_{ABCD} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot r \cdot BC = 20r = 50 \Rightarrow r = 2{,}5$ см.

Ответ: 2,5 см.

4. Задача: Одна из диагоналей прямоугольной трапеции делит эту трапецию на два прямоугольных равнобедренных треугольника. Какова площадь этой трапеции, если ее меньшая боковая сторона равна 4?



$AB = BC = 4$;

$AC^2 = 4^2 + 4^2 = 32 \Rightarrow AC = CD = 4\sqrt{2}$

$AD^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 64 \Rightarrow AD = 8$

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot AB = \frac{8 + 4}{2} \cdot 4 = 24\,.$$

Ответ: 24.

БИЛЕТ № 5

1. Сформулируйте неравенство треугольника. Приведите пример его применения.

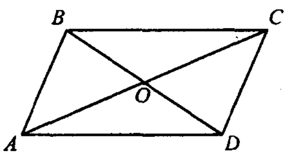
Неравенство треугольника.

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон. Неравенство треугольника применяется в основном для выяснения существования треугольника с заданными длинами сторон.

Например, треугольника со сторонами 1 см, 2 см и 4 см не существует в природе, так как для него неравенство треугольника 1+2>4 неверно.

2. Сформулируйте определение параллелограмма. Сформулируйте и докажите свойство диагоналей параллелограмма.

Параллелограмм – это четырехугольник, у которого противолежащие стороны попарно параллельны.

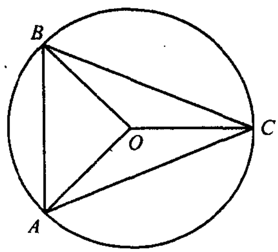


Свойство диагоналей параллелограмма: Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Доказательство:

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$, пусть O – точка пересечения его диагоналей AC и BD. $\Delta AOB = \Delta COD$ по стороне и двум прилежащим углам (AB=CD как противолежащие стороны параллельны, $\angle ABD = \angle CDO$ и $\angle BAO = \angle OCD$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущими BD и AC соответственно). Отсюда AO=CO, BO=DO. Теорема доказана.

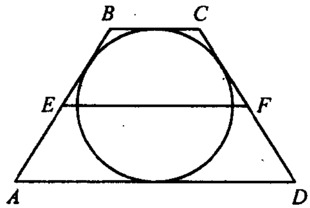
3. Задача: Найдите больший угол треугольника, если две его стороны видны из центра описанной окружности под углами 100° и 120°.



Рассмотрим треугольник ABC, вписанный в окружность с центром O. Пусть $\angle AOC = 120°$, $\angle AOB = 100°$. Тогда $\angle B = 60°$, $\angle C = 50°$, $\angle A = 180° - \angle B - \angle C = 70°$ – наибольший угол ΔABC.

Ответ: 70°.

4. Задача: Известно, что в равнобокую трапецию с боковой стороной, равной 5, можно вписать окружность. Найдите длину средней линии трапеции.



В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны. Поэтому $AD + BC = AB + CD = 5 + 5 = 10$.

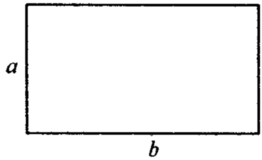
Средняя линия трапеции $EF = \dfrac{AD+BC}{2} = 5$.

Ответ: 5.

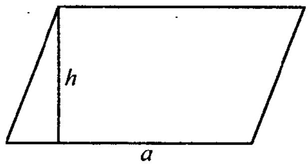
БИЛЕТ № 6

1. Приведите формулы площади прямоугольника и площади параллелограмма. Приведите примеры применения площади прямоугольника либо площади параллелограмма.

Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон: $S=ab$.



Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту: $S=ah$.

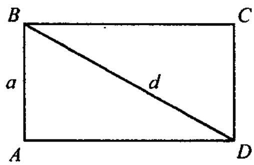


Пример: Найти площадь прямоугольника по его стороне a и диагонали d.

Решение: Рассмотрим прямоугольник $ABCD$, пусть $AB=a$; $BD=d$.

По теореме Пифагора $AD=\sqrt{d^2-a^2}$.

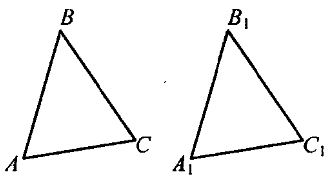
$S_{ABCD}=a\sqrt{d^2-a^2}$.



2. Сформулируйте определение равных треугольников. Сформулируйте признаки равенства треугольников и докажите один из них по выбору.

Два треугольника называются равными, если их можно совместить наложением.

На рисунке изображены равные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, так как каждый из этих треугольников можно наложить на другой так, что они полностью совместятся, то есть попарно совместятся их вершины и стороны. Таким образом, если два треугольника равны, то элементы (стороны и углы) одного треугольника соответственно равны элементам другого треугольника.



Существуют три основных признака равенства треугольника. Сформулируем третий признак.

Теорема: Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Например, если в треугольнике ABC: $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 7$ см, и в треугольнике DEF: $DE = 6$ см, $EF = 7$ см, $DF = 5$ см, то $\Delta ABC = \Delta DEF$ (по 3-му признаку равенства треугольников).

Первый признак равенства треугольников.

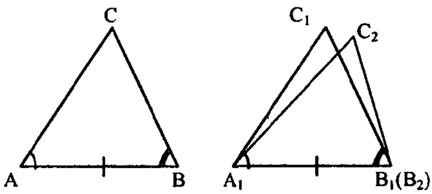
Теорема: Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство: Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. Докажем, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Так как $\angle A = \angle A_1$, то треугольник ABC можно наложить на треугольник $A_1B_1C_1$ так, что вершина A совместится с вершиной A_1, а стороны AB и AC наложатся соответственно на лучи A_1B_1 и A_1C_1. Поскольку $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, то сторона AB совместится со стороной A_1B_1, а сторона AC – со стороной A_1C_1; в частности, совместятся точки B и B_1, C и C_1. Следовательно, совместятся стороны BC и B_1C_1. Значит, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся, следовательно, они равны. Теорема доказана.

Второй признак равенства треугольников.

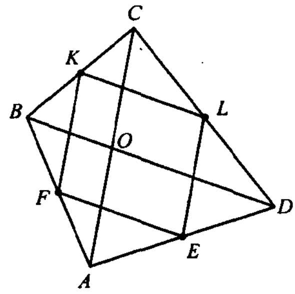
Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника соответственно равны стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство: Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ – два треугольника, у которых $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Пусть $A_1B_2C_2$ – треугольник, равный треугольнику ABC, с вершиной B_2 на луче A_1B_1 и вершиной C_2 в той же полуплоскости относительно прямой A_1B_2, где лежит вершина C_1. Так



как $A_1B_2 = A_1B_1$, то вершина B_2 совпадает с вершиной B_1. Так как $\angle B_1A_1C_2 = \angle B_1A_1C_1$ и $\angle A_1B_2C_2 = \angle A_1B_1C_1$, то луч A_1C_2 совпадает с лучом A_1C_1, а луч B_1C_2 – с лучом B_1C_1. Отсюда следует, что вершина C_2 совпадает с вершиной C_1. Значит, $\Delta A_1B_1C_1$ совпадает с $\Delta A_1B_2C_2$, и значит, равен ΔABC. Что и требовалось доказать.

3. Задача: Определите вид четырехугольника, вершины которого являются серединами сторон произвольного выпуклого четырехугольника.



Рассмотрим произвольный выпуклый четырехугольник $ABCD$, пусть $EFKL$ – четырехугольник, вершины которого являются серединами сторон четырехугольника $ABCD$.

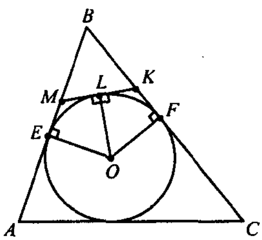
$$\left.\begin{array}{l} KF - \text{средняя линия} \\ \quad \Delta ABC \Rightarrow KF \parallel AC \\ LE - \text{средняя линия} \\ \quad \Delta ACD \Rightarrow LE \parallel AC \end{array}\right\} KF \parallel LE$$

$$\left.\begin{array}{l} KL - \text{средняя линия } \Delta BCD \Rightarrow KL \parallel BD \\ FE - \text{средняя линия } \Delta ABD \Rightarrow FE \parallel BD \end{array}\right\} KL \parallel FE$$

Итак, $KF \parallel LE$ и $KL \parallel FE$, значит $EFKL$ – параллелограмм.

Ответ: параллелограмм.

4. Задача: В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон AB и BC в точках E и F соответственно. Касательная MK к этой окружности пересекает стороны AB и BC соответственно в точках M и K. Найдите периметр треугольника BMK, если BE = 6 см.



$\Delta BEO = \Delta BFO$ (BO – общая сторона, $OE=OF$, как радиусы вписанной окружности). отсюда $BE = BF = 6$.

$\Delta MOE = \Delta MOL$; $\Delta KLO = \Delta KFO$ (у них общие гипотенузы и равные катеты).

Отсюда $ME=ML$, $KL=KF$.

$P_{\Delta BMK} = BM+MK+BK = BM+ML+LK+BK = $
$= BM+ME+BK+KF = BE+BF = 12$ см.

Ответ: 12 см.

БИЛЕТ № 7

1. Приведите формулы для радиусов вписанных и описанных окружностей правильных многоугольников. Приведите пример их применения для n-угольников для любого n ≤ 6 (n определяет учащийся).

Пусть a_n – сторона правильного n-угольника, r и R – радиусы соответственно вписанной и описанной окружности.

Тогда: $R = \dfrac{a_n}{2\sin\dfrac{180°}{n}}$;

$r = \dfrac{a_n \operatorname{ctg}\dfrac{180°}{n}}{2}$;

n=3: $R = \dfrac{a_3}{\sqrt{3}}$, $r = \dfrac{a_3}{2\sqrt{3}}$; n=4: $R = \dfrac{a_4}{\sqrt{2}}$, $r = \dfrac{a_4}{2}$;

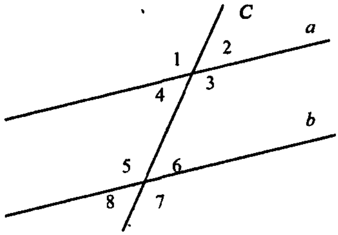
n=5: $R = \dfrac{a_5}{2\sin 36°}$, $r = \dfrac{a_5 \operatorname{ctg} 36°}{2}$; n=6: R=a_6, $r = \dfrac{a_6\sqrt{3}}{2}$.

2. Сформулируйте определение параллельных прямых. Сформулируйте аксиому параллельных прямых. Сформулируйте признаки параллельности прямых и докажите один из них по выбору.

Начнем с того, что две различные прямые либо имеют одну общую точку, то есть пересекаются, либо не имеют ни одной общей точки, т.е. не пересекаются.

Определение: Две прямые на плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

Параллельность прямых a и b обозначается: $a \parallel b$.



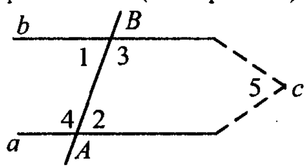
Прямая C называется секущей по отношению к прямым a и b, если она пересекает их в двух точках.

При пересечении прямых a и b секущей C образуется восемь углов, которые на рисунке обозначены цифрами. Некоторые из этих углов имеют специальные названия: углы 3 и 5, 4 и 6 – накрест лежащие; углы 4 и 5, 3 и 6 – односторонние; углы 1 и 5, 4 и 8, 2 и 6, 3 и 7 – соответственные.

С этими углами связаны три признака параллельности 2-х прямых.

Теорема: Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны (1-й признак).

Теорема: Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны (2-й признак).



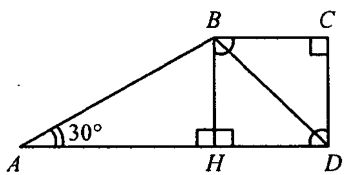
Теорема: Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны (3-й признак). Докажем 1-й признак параллельных прямых.

Пусть при пересечении прямых a и b секущей c накрест лежащие углы равны ($\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$). Предположим, что прямые a и b пересекаются в некоторой точке c. $\angle 1$ – внешний угол ΔABC, поэтому $\angle 1 = \angle 2 + \angle 5 > \angle 2$, но $\angle 1 =$ $= \angle 2$, то есть мы пришли к противоречию, значит прямые a и b не пересекаются, то есть параллельны.

Аксиома параллельных прямых:

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

3. Задача: В трапеции ABCD диагональ BD является биссектрисой прямого угла ADC. Найдите отношение диагонали BD к стороне AB трапеции, если $\angle$ BAD = 30°.



BD – биссектриса прямого угла $ADC \Rightarrow \angle BDC = \angle CBD = 45°$.

Пусть $BC=a$.

Тогда $CD=BH=a$.

$BD = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$;

$AB = \dfrac{BH}{\sin 30°} = 2a$;

$\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Задача: Треугольник ABC, стороны которого 13 см, 14 см и 15 см, разбит на три треугольника отрезками, соединяющими точку пересечения медиан M с вершинами треугольника. Найдите площадь треугольника BMC.

Три треугольника, на которые разбит треугольник ABC, равновелики, то есть равны по площади (их площади равны $\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}$).

$$p=\frac{13+14+15}{2}=21;\ S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\text{см}^2.$$

$$=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=84;\ S_{\Delta BMC}=\frac{84}{3}=28\,\text{см}^2$$

Ответ: 28 см^2.

БИЛЕТ № 8

1. Сформулируйте определения круга и сектора. Приведите формулы площади круга и площади сектора. Приведите пример применения одной из формул: либо площади круга, либо площади сектора по выбору учащегося.

Круг – это часть плоскости, ограниченная окружностью. Площадь S круга радиуса R вычисляется по формуле $S = \pi R^2$.

Сектор – это часть круга, которая ограничена дугой и двумя радиусами, соединяющими концы дуги с центром круга.

Площадь S кругового сектора радиуса R, ограниченного дугой с градусной мерой α, вычисляется по формуле

$$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha .$$

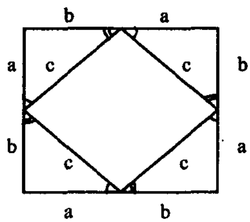
Пример: Найти площадь кругового сектора диаметра 6 см, ограниченного дугой с градусной мерой 30°.

Решение: $R = \dfrac{d}{2} = 3$ см.

$$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot 9}{360} \cdot 30 = \frac{3}{4}\pi \approx 2{,}4 \text{ см}^2.$$

2. Сформулируйте определение прямоугольного треугольника. Сформулируйте и докажите теорему Пифагора.

Теорема: В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.



По Атанасяну:

Доказательство: Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c.

Докажем: $a^2 + b^2 = c^2$

Достроим треугольник до квадрата со стороной $a+b$. Площадь S этого квадрата равна $(a+b)^2$. С другой стороны, этот квадрат составлен из четырех равных прямоугольных треугольников, площадь каждого из которых равна $\frac{1}{2}ab$, и квадрата со стороной c (сумма острых углов равна 90°). Поэтому

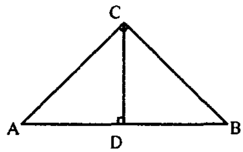
$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} ab + c^2 = 2ab + c^2$$

Таким образом, $(a+b)^2=2ab+c^2 \Leftrightarrow a^2+b^2=c^2$.

Теорема доказана.

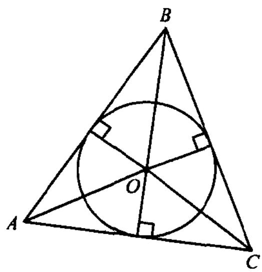
По Погорелову:

Доказательство: Пусть ABC – данный прямоугольный треугольник с прямым углом C. проведем высоту CD.



$\cos A = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AC}{AB}$. Отсюда $AB \cdot AD =$ $= AC^2$. $\cos B = \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{BC}{AB}$. Отсюда $AB \cdot BD = BC^2$. Складывая полученные равенства почленно и замечая, что $AD + DB = AB$, получим: $AC^2 + BC^2 = AB(AD + DB) = AB^2$. Теорема доказана.

3. Задача: Площадь треугольника, описанного около окружности, равна 84 см². Найдите периметр треугольника, если радиус окружности равен 7 см.



$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} r \cdot AB + \frac{1}{2} r \cdot BC + \frac{1}{2} r \cdot AC = \frac{1}{2} Pr;$$

$$P = \frac{2S_{\Delta ABC}}{r} = \frac{2 \cdot 84}{7} = 24 \text{ см}.$$

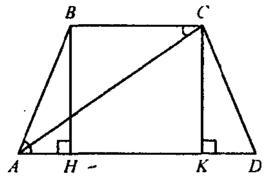
Ответ: 24 см.

4. Задача: В равнобокой трапеции одно из оснований в два раза больше другого. Диагональ трапеции является биссектрисой острого угла. Найдите меньшее основание трапеции, если ее площадь равна $27\sqrt{3}$ см².

Пусть меньшее основание трапеции $BC=a$. $\angle CAD = \angle BCA$, как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых BC и AD секущей AC.

$\angle BAC = \angle CAD$, т.к. AC – биссектриса $\angle BAD$.

Итак, $\angle BAC = \angle BCA$, то есть ΔABC – равнобедренный $\Rightarrow$
$\Rightarrow AB=BC=a$.



$\Delta ABH = \Delta CKD \Rightarrow$

$$AH = KD = \frac{AD - BC}{2} = \frac{a}{2}$$

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH = \frac{3a}{2} \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} =$$

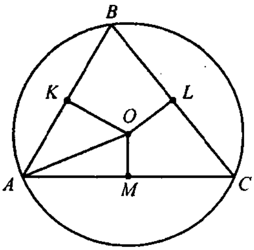
$= 27\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$ см.

Ответ: 6 см.

БИЛЕТ № 9

1. Сформулируйте определение окружности, описанной около треугольника. Сформулируйте теорему о центре описанной окружности. Приведите пример применения теоремы о центре описанной окружности

Если все вершины треугольника лежат на окружности, то окружность называется описанной около треугольника, а треугольник – вписанным в эту окружность.



Теорема: Центр окружности, описанной около треугольника, является точкой пересечения перпендикуляров к сторонам треугольника, проведенных через середины этих сторон.

В качестве примера применения теоремы о центре описанной окружности можно привести задачу построения окружности, описанной около данного треугольника ABC.

Для ее решения требуется выполнить следующие действия:

1) Найти середины K, L и M сторон AB, BC и AC.

2) Провести перпендикуляры к сторонам AB, BC и AC из точек K, L и M соответственно.

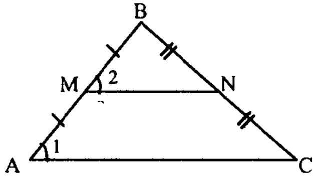
3) Найти O – точку пересечения проведенных перпендикуляров.

4) Провести окружность с центром в точке O и радиусом OA.

Полученная окружность и будет искомой.

2. Сформулируйте определение средней линии треугольника. Сформулируйте и докажите теорему о средней линии треугольника.

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.



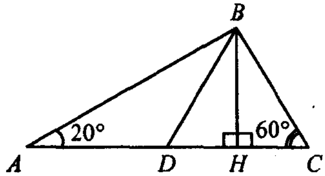
Теорема: Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

Доказательство: Пусть MN – средняя линия треугольника ABC.

Докажем, что $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$.

Треугольники BMN и BAC подобны по второму признаку подобия треугольников ($\angle B$ – общий, $\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}$), поэтому $\angle 1 = \angle 2$ и $\frac{MN}{AC} = \frac{1}{2}$. Из равенства $\angle 1 = \angle 2$ следует, что $MN \parallel AC$, а из второго равенства, что $MN = \frac{1}{2} AC$. Теорема доказана.

3. Задача: Из вершины В в треугольнике АВС проведены высота ВН и биссектриса BD. Найдите угол между высотой ВН и биссектрисой BD, если углы ВАС и ВСА равны 20° и 60° соответственно.



$\angle ABC = 180° - 20° - 60° = 100°$

$\angle DBC = \frac{100°}{2} = 50°$

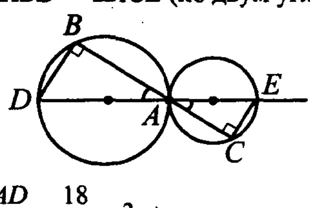
$\angle HBC = 90° - 60° = 30°$

$\angle DBH = \angle DBC - \angle HBC = 20°$

Ответ: 20°.

4. Задача: Две окружности, радиусы которых равны 9 см и 3 см, касаются внешним образом в точке А. Через точку А проходит их общая секущая ВС, причем точка В принадлежит большей окружности. Найдите длину отрезка АВ, если отрезок АС равен 5 см.

$\angle DBA = \angle ACE = 90°$ (так как эти углы опираются на диаметры окружностей). $\Delta ABD \sim \Delta ACE$ (по двум углам).



Отсюда $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{18}{6} = 3 \Rightarrow$

$AB = 3AC = 15$ см.

Ответ: 15 см.

БИЛЕТ № 10

1. Сформулируйте теорему о сумме углов треугольника. Приведите пример ее применения.

Теорема о сумме углов треугольника:

Сумма углов треугольника равна 180°.

Используя теорему о сумме углов треугольника, можно по известным двум углам треугольника найти его третий угол.

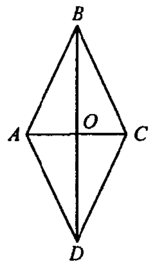
Пример: В ΔABC $\angle A = 80°$, $\angle B = 30°$. Найти $\angle C$.

Решение: $\angle A + \angle B + \angle C = 180° \Rightarrow \angle C = 180° - \angle A - \angle B = 70°$.

2. Сформулируйте определение ромба. Сформулируйте и докажите свойство диагоналей ромба.

Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

Т.к. ромб является параллелограммом, то он обладает всеми свойствами параллелограмма.



Рассмотрим особое свойство ромба.

Теорема: Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.

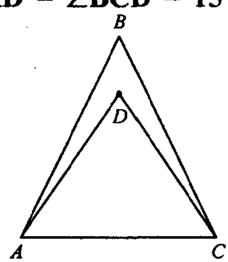
Рассмотрим ромб $ABCD$.

Докажем, что $AC \perp BD$ и $\angle BAC = \angle DAC$. По определению ромба $AB = AD$, поэтому ΔBAD – равнобедренный. Т.к. ромб – параллелограмм, то диагонали точкой пересечения делятся пополам $\Rightarrow$ AO – медиана равнобедренного $\Delta BAD \Rightarrow$ высота и биссектриса.

Значит, $AC \perp BD$ и $\angle BAC = \angle DAC$.

Теорема доказана.

3. Задача: Внутри равностороннего треугольника ABC отмечена точка D, такая, что ∠BAD = ∠BCD = 15°. Найдите угол ADC.



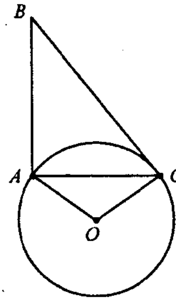
$\angle DAC = 60° - 15° = 45°$;

$\angle DCA = 60° - 15° = 45°$

$\angle ADC = 180° - \angle DAC - \angle DCA = 90°$

Ответ: 90°.

4. Задача: Окружность радиуса R касается гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника в вершине его острого угла и проходит через вершину прямого угла. Найдите длину дуги, заключенной внутри треугольника, если $R = \dfrac{8}{\sqrt{\pi}}$.



$AB = AC \Rightarrow \angle ABC = \angle ACB = 45°$

$\angle ACO = \angle BCO - \angle ACB = 45°$

$OA = OC = R \Rightarrow \angle ACO = \angle CAO = 45°$

$\angle AOC = 180° - 2 \cdot 45° = 90°$

$$l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot \frac{8}{\pi}}{180} \cdot 90 = 4$$

Ответ: 4.

БИЛЕТ № 11

1. Сформулируйте определение выпуклого многоугольника. Сформулируйте теорему о сумме углов выпуклого многоугольника. Приведите пример ее применения.

Многоугольник называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины.

Теорема: Сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n-2)\cdot 180^\circ$.

Доказательство: Рассмотрим выпуклый n-угольник. Углы $A_nA_1A_2$, $A_1A_2A_3$, …, $A_{n-1}A_nA_1$ называются углами этого многоугольника. Найдем их сумму. Для этого соединим диагоналями вершину A_1 с другими вершинами. В результате получим n - 2 треугольника, сумма углов которых равна сумме углов n-угольника. Сумма углов каждого треугольника равна 180°, поэтому сумма углов многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ равна $(n-2)\cdot 180^\circ$. Теорема доказана.

С помощью этой теоремы можно находить углы любого правильного n-угольника.

Например, сумма углов правильного 6-угольника равна $(6-2)\cdot$ $\cdot\,180^\circ = 720^\circ$. Поэтому все его углы равны $720^\circ : 6 = 120^\circ$. В общем случае углы правильного n-угольника равны $\dfrac{n-2}{n}\cdot 180^\circ$.

2. Сформулируйте определение прямоугольника. Сформулируйте и докажите свойство диагоналей прямоугольника.

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

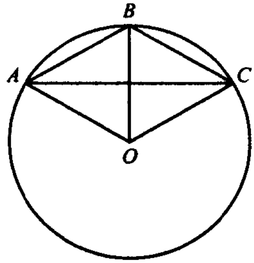
Т.к. прямоугольник является параллелограммом, то он обладает свойствами параллелограмма.

1) Диагонали прямоугольника равны. Действительно, пусть $ABCD$ – прямоугольник с диагоналями AC и BD. ΔACD равен ΔDBA по двум катетам $\Rightarrow AC = BD$. Что и требовалось доказать.

2) Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм – прямоугольник.

Пусть в параллелограмме $ABCD$ $AC = BD$. $\Delta ABD = \Delta DCA$ по трем сторонам. $\Rightarrow \angle A = \angle D$, но т.к. в параллелограмме противоположные углы равны, то отсюда следует, что $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$, но $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D = 360° \Rightarrow \angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$, т.е. это прямоугольник.

3. Задача: Через вершины А, В и С ромба АВСО проведена окружность, центром которой является вершина О. Найдите длину дуги АС, содержащей вершину В, если длина всей окружности равна 30 см.

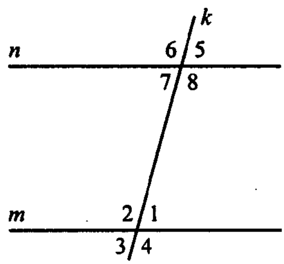


$OA = OB = OC = AB = BC \Rightarrow \Delta ABO$ и ΔBCO равносторонние.

$\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC = 60° + 60° = 120°$. $l_{AC} = l_{окр.} \cdot \dfrac{120}{360} = 10$ см.

Ответ: 10 см.

4. Задача: При пересечении двух прямых n и m секущей k образовалось восемь углов. Четыре из них равны 60°, а четыре другие – 120°. Определите взаимное расположение прямых n и m.



Пусть $\angle 1 = 60°$.

Тогда $\angle 3 = 60°$; $\angle 2 = \angle 4 = 120°$.

Два из углов 5, 6, 7, 8 равны 60°, а два оставшихся – 120°.

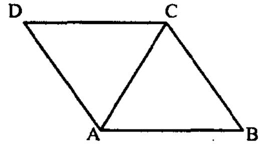
Если $\angle 7 = 60°$, то прямые n и m параллельны. Если $\angle 8 = 60°$, то прямые n и m пересекаются под углом 60°.

Ответ: параллельны или пересекаются под углом 60°.

БИЛЕТ № 12

1. Приведите формулы площади треугольника. Приведите примеры их применения.

(1) Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на проведенную к ней высоту.

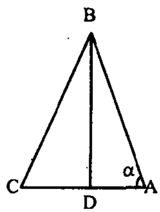


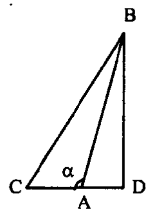
Доказательство: Пусть ABC – данный треугольник. Дополним этот треугольник до параллелограмма. Площадь параллелограмма равна сумме площадей треугольников ABC и CDA. Так как эти треугольники равны, то площадь параллелограмма равна удвоенной площади треугольника ABC. Высота параллелограмма, соответствующая стороне AB, равна высоте треугольника ABC, проведенной к стороне AB. Учитывая, что площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту, заключаем (1).

Также площадь треугольника равна половине произведения двух любых его сторон на синус угла между ними.

Доказательство: Пусть ABC – данный треугольник.

Докажем: $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$.





Проведем в треугольнике ABC высоту BD. Имеем: $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$.

Из прямоугольного треугольника ABD $BD = AB\sin\alpha$, если угол α острый, $BD = AB\sin(180^\circ - \alpha)$, если α – тупой. Но $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, поэтому в любом случае $BD = AB\sin\alpha$.

Следовательно, $S = \frac{1}{2} AC \cdot AB \sin A$. Что и требовалось доказать.

Пусть P – полупериметр треугольника, $P = \frac{a+b+c}{r}$; a, b, c – стороны, r – радиус вписанной, а R – описанной окружности.

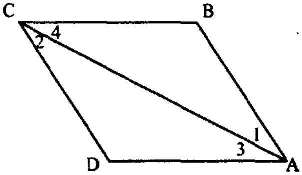
Тогда: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ – формула Герона.

$S = P \cdot r$; $S = \frac{abc}{4R}$.

2. Сформулируйте определение параллелограмма. Сформулируйте и докажите признак параллелограмма по выбору учащегося.

Параллелограмм – это четырехугольник, в котором противоположные стороны попарно параллельны.

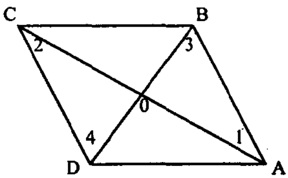
1) Если в четырехугольнике 2 стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник – параллелограмм.



Доказательство: Пусть в четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD параллельны и $AB = CD$. Проведем диагональ AC, разделяющую данный четырехугольник на 2 треугольника: ABC и CDA. Эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними (AC – общая сторона, $AB = CD$, $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей AC), поэтому $\angle 3 = \angle 4$. Но углы 3 и 4 накрест лежащие при пересечении прямых AD и BC секущей AC, значит, $AD \parallel BC$. Следовательно, $ABCD$ – параллелограмм.

2) Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то он – параллелограмм.

Доказательство: Проведем диагональ AC данного четырехугольника $ABCD$, разделяющую его на треугольники ABC и CDA.



Эти треугольники равны по трем сторонам (AC – общая сторона, $AB = CD$ и $BC = AD$ по условию), поэтому $\angle 1 = \angle 2$. Отсюда следует, что $AB \parallel CD$.

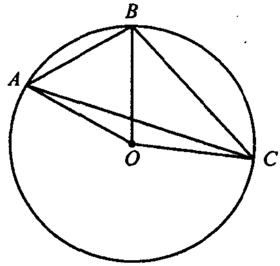
Так как $AB \parallel CD$ и $AB = CD$, то по признаку 1) $ABCD$ – параллелограмм.

3) Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм.

Доказательство: Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, в котором диагонали AC и BD пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам. Треугольники AOB и COD равны по первому признаку равенства треугольников ($AO = OC$, $BO = OD$ по условию, $\angle AOB = \angle COD$ как вертикальные углы), поэтому $AB = CD$ и $\angle 1 = \angle 2$.

Из равенства углов 1 и 2 следует, что $AB \parallel CD$. Итак, в четырехугольнике $ABCD$ AB и CD равны и параллельны, значит, по свойству 1) $ABCD$ – параллелограмм.

3. Задача: Точки A, B и C делят окружность на три части так, что ∪AB : ∪BC : ∪AC = 4 : 7 : 9. Определите наибольший угол треугольника ABC.



$\cup AB + \cup BC + \cup AC = 360°$.

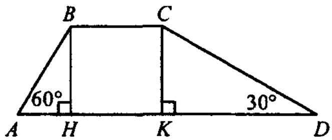
Отсюда $\cup AB = 72°$; $\cup BC = 126°$; $\cup AC = 162°$.

Больший угол треугольника ABC опирается на большую дугу, то есть это угол B, опирающийся на дугу AC.

$$\angle B = \frac{162°}{2} = 81°.$$

Ответ: 81°.

4. Задача: Углы при основании AD трапеции ABCD равны 60° и 30°, AD = 17 см, BC = 7 см. Найдите боковые стороны.



Опустим высоты $BH=CK=h$ на основание AD.

$HK=BC=7$; $AH+KD=AD-HK=10$;

$$AH = BH \cdot \operatorname{ctg} 60° = \frac{h}{\sqrt{3}};$$

$$KD = CK \cdot \operatorname{ctg} 30° = h\sqrt{3}; \quad \frac{h}{\sqrt{3}} + h\sqrt{3} = 10; \quad \frac{4h}{\sqrt{3}} = 10; \quad h = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

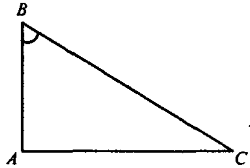
$$AB = \frac{BH}{\sin 60°} = 5; \quad CD = \frac{CK}{\sin 30°} = 5\sqrt{3}.$$

Ответ: 5 см и $5\sqrt{3}$ см.

БИЛЕТ № 13

1. Сформулируйте определение тангенса острого угла прямоугольного треугольника. Приведите пример его применения при решении прямоугольных треугольников.

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего этому острому углу катета к прилежащему.



Пример:

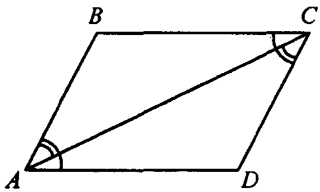
Пусть дан катет AB прямоугольного треугольника ABC и тангенс его острого угла B $\operatorname{tg} B$.

Имеем:

$$\operatorname{tg} B = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC = AB \operatorname{tg} B.$$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = AB\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 B}.$$

2. Сформулируйте определение параллелограмма. Сформулируйте и докажите свойства углов и сторон параллелограмма.



Параллелограмм – это четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Теорема:

В параллелограмме противоположные стороны и противоположные углы равны.

Доказательство:

$\Delta ABC = \Delta ACD$ по стороне и двум прилегающим углам (AC – общая сторона, $\angle CAD = \angle BCA$ и $\angle BAC = \angle ACD$, как накрест лежащие углы, образованные при пересечении секущей AC параллельных прямых AD и BC, AB и CD соответственно).

Отсюда

$AB=CD, AD=BC,$

$\angle B = \angle D.$

$\angle A = \angle BAC + \angle CAD = \angle ACD + \angle BCA = \angle C.$

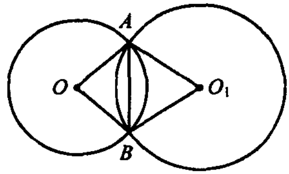
Теорема доказана.

3. Задача: Длины двух сторон равнобедренного треугольника равны соответственно 6 см и 2 см. Определите длину третьей стороны этого треугольника.

Третья сторона треугольника равна 6 см (если она равна 2 см, то не выполняется неравенство треугольника: 2+2<6 – противоречие).

Ответ: 6 см.

4. Задача: Два круга, радиусы которых равны 5 см, имеют общую хорду длины $5\sqrt{2}$ см. Найдите площадь общей части этих кругов.



$OA = O_1A = O_1B = OB \Rightarrow$ OAO_1B – ромб.

$AB^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2 = 5^2 + 5^2 =$

$= OA^2 + OB^2 = O_1A^2 + O_1B^2 \Rightarrow$

$\angle AOB = \angle AO_1B = 90°$, то есть OAO_1B – квадрат.

Площадь S общей части кругов вычисляется как удвоенная разница площади сектора AOB и треугольника AOB:

$$S = 2\cdot\left(\frac{\pi\cdot 25}{360}\cdot 90 - \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\right) = \frac{25(\pi-2)}{2}\text{ см}^2.$$

Ответ: $\dfrac{25(\pi-2)}{2}$ см^2.

БИЛЕТ № 14

1. Сформулируйте определение внешнего угла треугольника. Сформулируйте теорему о свойстве внешнего угла треугольника. Приведите пример ее применения.

Одной из важнейших теорем геометрии является теорема о сумме углов треугольника.

Теорема: Сумма углов треугольника равна 180°.

Из этой теоремы можно вывести несколько следствий.

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника.

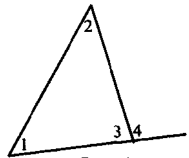


Рис. 4

Докажем, что внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним. На рисунке 4 угол 4 – внешний угол, смежный с углом треугольника.

Так как $\angle 4 + \angle 3 = 180°$, а по теореме о сумме углов треугольника $(\angle 1 + \angle 2) + \angle 3 = 180°$, то $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$, что и требовалось доказать.

Из теоремы о сумме углов треугольника следует, что если в треугольнике один из углов прямой или тупой, то сумма двух других не превышает 90°, а значит каждый из них острый. Таким образом, в любом треугольнике либо все 3 угла острые, либо 2 угла острые, а третий тупой или прямой.

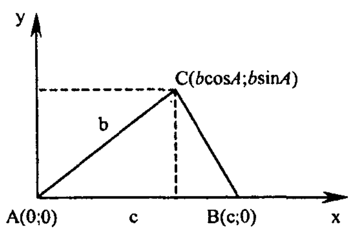
2. Сформулируйте и докажите теорему косинусов. Приведите пример ее применения для решения треугольников.

Теорема косинусов: Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

Доказательство: Пусть в треугольнике ABC: $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$.

Докажем, например, что
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\angle A$

Введем систему координат с началом в точке A так, как показано на рисунке.



Тогда точка B имеет координаты (c; 0), а точка C – координаты ($b\cos\angle A$; $b\sin\angle A$). По формуле расстояния между двумя точками получаем: $BC^2 = a^2 = (b\cos\angle A - c)^2 + b^2\sin^2\angle A = b^2\cos^2\angle A + b^2\sin^2\angle A - 2bc\cdot\cos\angle A + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\angle A$, что и требовалось доказать.

Теорема косинусов является обобщенной теоремой Пифагора, так как если в треугольнике ABC угол A- прямой, то $\cos\angle A = \cos 90^\circ = 0$ и по формуле получаем $a^2 = b^2 + c^2$ (что и есть теорема Пифагора). Теорема косинусов применяется при решении треугольника (т.е. нахождения всех его сторон и углов по заданным трем элементам). Например:

Дано:

ΔABC, BC, AC, $\angle C$.

Найти:

$\angle A$, $\angle B$, AB

Решение:

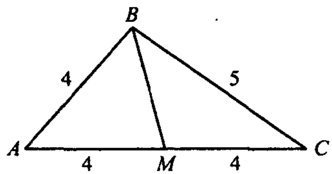
По теореме косинусов находим AB:

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2\cdot AC\cdot BC\cdot\cos\angle C}$. Пользуясь теоремой косинусов, получаем:

$\cos\angle A = \dfrac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2\cdot AC\cdot AB}$, и угол A находим по таблице или с помощью микрокалькулятора.

$\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C$. То есть мы решили треугольник, используя теорему косинусов (дважды).

3. Задача: Стороны треугольника равны 4 см, 5 см и 8 см. Найдите длину медианы, проведенной из вершины большего угла.



Больший угол опирается на большую сторону (см. рис.)

По теореме косинусов:

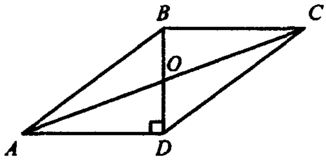
$5^2 = 4^2 + 8^2 - 2\cdot 4\cdot 8\cdot\cos A \Rightarrow$

$\cos A = \dfrac{55}{64}$

$BM^2 = 4^2 + 4^2 - 2\cdot 4\cdot 4\cdot\cos A = 32 - \dfrac{55}{2} = \dfrac{9}{2}$; $BM = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$ см.

Ответ: $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ см.

4. Задача: В параллелограмме ABCD диагональ BD перпендикулярна стороне AD. Найдите AC, если AD = 6 см, BD = 5 см.



$$OD = \frac{BD}{2} = \frac{5}{2};$$

$$AO^2 = AD^2 + OD^2 = 36 + \frac{25}{4} = \frac{169}{4}$$

$AO = \frac{13}{2}$; $AC=2AO=13$ см.

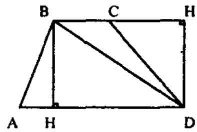
Ответ: 13 см.

БИЛЕТ № 15

1. Приведите формулу площади трапеции. Приведите пример ее применения.

Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.

Доказательство: Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC, высотой BH и площадью S.



Докажем: $S=\dfrac{AD+BC}{2}\cdot BH$

Диагональ BD разделяет трапецию на 2 треугольника ABD и BCD, поэтому $S=S_{ABD}+S_{BCD}$. OH_1 – высота. По формуле для площади треугольника имеем:

$$S_{ABD}=\frac{1}{2}AD\cdot BH\ ;\ S_{BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot DH_1=\frac{1}{2}BC\cdot BH\ .$$

Тогда: $S=\dfrac{1}{2}AD\cdot BH+\dfrac{1}{2}BC\cdot BH=\dfrac{AD+BC}{2}BH$.

Что и требовалось доказать.

Пример: Основания трапеции равны 3 см и 5 см, а ее площадь равна 16 см^2. Найти высоту h трапеции.

Решение: $S=\dfrac{a+b}{2}h=\dfrac{3+5}{2}h=4h=16\Rightarrow h=4$ см.

2. Сформулируйте определение равных треугольников. Сформулируйте признаки равенства прямоугольных треугольников и докажите один из них по выбору.

Два треугольника называется равными, если их можно совместить наложением.

Признаки равенства прямоугольных треугольников:

1) Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

2) Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

3) Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

Докажем например 3-й признак.

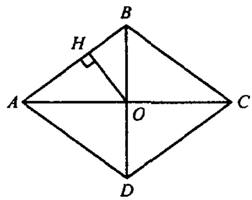
Пусть даны 2 прямоугольных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ с гипотенузами AC и A_1C_1 соответственно. Пусть $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. Докажем, что такие треугольники равны.

$BC = AC \cdot \sin A = A_1C_1 \cdot \sin A_1 = B_1C_1$.

$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{A_1C_1^2 - B_1C_1^2} = A_1B_1$.

$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по трем сторонам. Теорема доказана.

3. Задача: Большая диагональ ромба равна 12 см, а один из его углов равен 60°. Найдите длину вписанной в него окружности.



$AO = OC = 6$ см; $\angle BAO = \dfrac{60°}{2} = 30°$

$\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{AO}{AB} \Rightarrow AB = \dfrac{2AO}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$

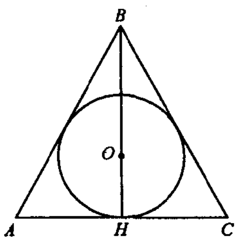
$BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{48 - 36} = 2\sqrt{3}$

$S_{\Delta ABO} = \dfrac{1}{2} AO \cdot BO = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ см^2

$S_{\Delta ABO} = \dfrac{1}{2} OH \cdot AB = \dfrac{1}{2} r \cdot 4\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \Rightarrow r = 3$ см. $l = 2\pi r = 6\pi$ см

Ответ: 6π см.

4. Задача: В равнобедренном треугольнике центр вписанной окружности делит высоту в отношении 17 : 15, а боковая сторона равна 34 см. Найдите основание треугольника.



Пусть $BO : OH = 17 : 15$.

Если $OH = 15x$, то $BO = 17x$.

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot BH \cdot AC = \dfrac{1}{2} \cdot 32x \cdot AC = 16x \cdot AC$.

С другой стороны,

$S_{\Delta ABC} = P \cdot r = \dfrac{34 + 34 + AC}{2} \cdot 15x = \dfrac{68 + AC}{2} \cdot 15x = 16x \cdot AC$

$32x \cdot AC = 15x(68 + AC)$; $32AC = 15AC + 15 \cdot 68$;

$17AC = 15 \cdot 68$; $AC = 60$ см.

Ответ: 60 см.

БИЛЕТ № 16

1. Сформулируйте теорему о зависимости между сторонами и углами треугольника. Приведите пример ее применения.

Теорема:

В треугольнике:

1) против большей стороны лежит больший угол;

2) обратно, против большего угла лежит большая сторона.

1) Пусть в ΔABC $AB>AC$.

Докажем, что $\angle C > \angle B$. Отложим на AB $AD = AC$.

Т.к. $AD<AB$, то D лежит между A и $B \Rightarrow \angle C > \angle 1$. $\angle 2$ – внешний угол $\Delta BCD \Rightarrow \angle 2 > \angle B \Rightarrow \angle C > \angle B$.

Что и требовалось доказать.

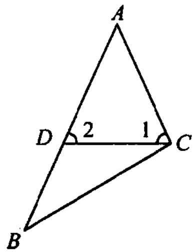
2) Пусть в ΔABC $\angle C > \angle B$. Докажем, что $AB>AC$.

Предположим, что это не так, т.е. либо $AB = AC$, либо $AB<AC$.

В первом случае ΔABC равнобедренный и $\angle B = \angle C$.

Во втором $\angle B < \angle C$ (против большей стороны лежит больший угол).

И то и другое противоречит условию. Теорема доказана.



Пример:

В ΔABC $\angle ABC = 24°$, $\angle BAC = 65°$. Какая сторона треугольника имеет наибольшую длину?

Решение:

$\angle BCA = 180° - \angle ABC - \angle BAC = 180° - 24° - 65° = 91°$.

$\angle BCA$ – наибольший, поэтому наибольшей стороной является противолежащая $\angle BCA$ – сторона AB.

2. Сформулируйте определение подобных треугольников. Сформулируйте признаки подобия треугольников и докажите один из них по выбору.

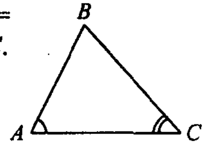
Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны, а стороны одного треугольника пропорциональны соответствующим сторонам другого треугольника.

Первый признак подобия треугольников.

Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.

Доказательство:

Пусть ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ такие, что $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Докажем, что $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.



По теореме о сумме углов треугольника $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$, $\angle C_1 = 180° - \angle A_1 - \angle B_1 \Rightarrow \angle C_1 = C$.

Докажем, что стороны треугольников пропорциональны. Так как $\angle A = \angle A_1$ и $\angle C = \angle C_1$, то

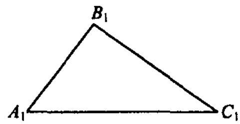
$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} \text{ и } \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{CA \cdot CB}{C_1A_1 \cdot C_1B_1} \Rightarrow \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

Аналогично, т.к. $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ можно получить, что $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$. Итак, стороны ΔABC пропорциональны сходственным сторонам $\Delta A_1B_1C_1$. Теорема доказана.

Второй признак подобия треугольников.

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Доказательство:



Рассмотрим два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$; $\angle A = \angle A_1$.

Покажем, что $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Для этого, учитывая 1-й признак подобия, достаточно доказать, что $\angle B = \angle B_1$.

Рассмотрим ΔABC_2, у которого $\angle 1 = \angle A$, $\angle 2 = \angle B$, $\Delta ABC_2 \sim \Delta A_1B_1C_1$ по первому признаку.

$\Rightarrow \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC_2}{A_1C_1}$. Но по условию $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \Rightarrow AC = AC_2 \Rightarrow \Delta ABC$ и ΔABC_2 – равны по двум сторонам и углу между ними.

$\Rightarrow \angle B = \angle 2$ но $\angle 2 = \angle B_1 \Rightarrow \angle B = \angle B_1$. Теорема доказана.

Третий признак подобия треугольников.

Если 3 стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны.

Доказательство: пусть стороны ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ пропорциональны $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$. Докажем, что $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Для этого, учитывая 2-й признак подобия, достаточно доказать, что $\angle A = \angle A_1$. Рассмотрим ΔABC_2, у которого $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$.

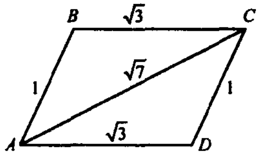
$\Delta ABC_2 \sim \Delta A_1B_1C_1$ по первому признаку $\Rightarrow \dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC_2}{B_1C_1} = \dfrac{C_2A}{C_1A_1}$

Сравнивая эти равенства, получим, что:

$BC = BC_2$, $CA = C_2A \Rightarrow \Delta ABC = \Delta ABC_2$ по трем сторонам.

$\Rightarrow \angle A = \angle 1$, а т.к. $\angle 1 = \angle A$, то $\angle A = \angle A_1$. Теорема доказана.

3. Задача: Найдите меньший угол параллелограмма, если его стороны равны 1 и $\sqrt{3}$, а одна из диагоналей равна $\sqrt{7}$.



По теореме косинусов:

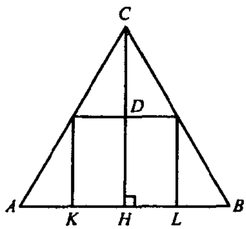
$$\left(\sqrt{7}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot\sqrt{3}\cdot\cos B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos B = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle B = 150^\circ = \angle D,$$

$\angle A = \angle C = 30^\circ$

Ответ: 30° и 150°.

4. Задача: В треугольник ABC вписан квадрат так, что две его вершины лежат на стороне AB и по одной вершине – на сторонах AC и BC. Найдите площадь квадрата, если AB = 40 см, а высота, проведенная из вершины C, имеет длину 24 см.



Обозначим сторону квадрата за a.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot 24\cdot 40 = 480 \text{ см}^2$$

С другой стороны,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot(24-a)\cdot a + a^2 + \frac{1}{2}\cdot a\cdot AK +$$

$$+\frac{1}{2}a\cdot BL = \frac{1}{2}a(24-a) + a^2 + \frac{1}{2}a(40-a) = 32a = 480 \Rightarrow a = 15 \text{ см}.$$

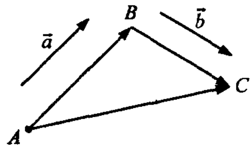
Площадь квадрата равна a^2=225 см^2.

Ответ: 225 см^2.

БИЛЕТ № 17

1. Сформулируйте определение вектора. Сформулируйте определение суммы векторов. Сформулируйте свойства сложения векторов. Приведите примеры сложения векторов.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два вектора. Отложим от произвольной точки A вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, а от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



Это правило сложения векторов называется правилом треугольника.

Свойства сложения векторов (для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$):

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

2) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

2. Сформулируйте и докажите теорему синусов. Приведите пример ее применения для решения треугольников.

Теорема: Стороны треугольников пропорциональны синусам противолежащих углов.

Доказательство:

Пусть в треугольнике ABC $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$. Докажем, что
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

По теореме о площади треугольника $S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C$, $S=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A$, $S=\frac{1}{2}ca\cdot\sin B$. Из первых двух равенств получаем $\frac{1}{2}ab\cdot\sin C=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A$, откуда $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$.

Точно так же из второго и третьего равенств следует $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$. Итак, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

Теорема доказана.

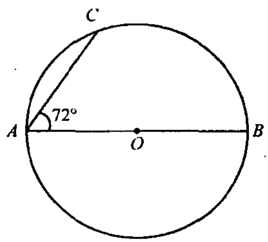
Пример.

В треугольнике ABC сторона $BC = a$, $\sin\angle BAC = \frac{1}{2}$, $\sin\angle ABC = \frac{2}{3}$. Найти сторону AC.

Решение:

По теореме синусов $\frac{AC}{\sin\angle ABC} = \frac{BC}{\sin\angle BAC}$, откуда получаем, что $AC = \frac{BC \cdot \sin\angle ABC}{\sin\angle BAC} = \frac{a\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = a\cdot\frac{2}{3}\cdot 2 = \frac{4}{3}a$.

3. **Задача: Вписанный угол, образованный хордой и диаметром окружности, равен 72°. Определите, что больше: хорда или радиус окружности.**



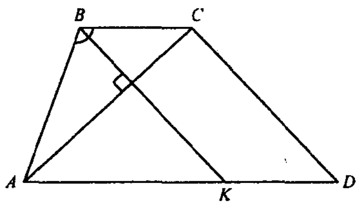
$\angle ACB = 90°$ (так как опирается на диаметр)

$\angle CBA = 90° - 72° = 18°$

$\angle CBA < \angle ACB \Rightarrow AC < AB$.

Ответ: хорда меньше.

4. **Задача: В трапеции ABCD стороны AB и CD равны, биссектриса тупого угла B перпендикулярна диагонали AC и отсекает от данной трапеции параллелограмм. Найдите величину угла BCD.**



Пусть $\angle ABC = \alpha$

Тогда $\angle ABK = \angle KBC = \frac{\alpha}{2}$.

$\angle CDK = \angle KBC = \frac{\alpha}{2}$;

$\angle BAD = \angle CDA = \frac{\alpha}{2}$; $\angle BAD + \angle ABC = \frac{\alpha}{2} + \alpha = 180°$; $\alpha = 120°$.

Ответ: 120°.

БИЛЕТ № 18

1. Сформулируйте определение вектора. Сформулируйте определение произведения вектора на число. Сформулируйте свойства произведения вектора на число. Приведите примеры произведения вектора на число.

Вектор – это отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая – концом.

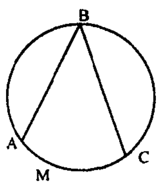
Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k|\cdot|\vec{a}|$, причем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены при $k \geq 0$ и противоположно направлены при $k<0$.

Свойства произведения вектора на число (для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и $\forall k, l \in \mathbb{R}$):

1) $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$;
2) $\forall k$ $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ коллинеарны;
3) $(kl)\vec{a}=k(l\vec{a})$;
4) $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$;
5) $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$.

2. Сформулируйте определения центрального угла окружности и угла, вписанного в окружность. Сформулируйте и докажите теорему об измерении вписанного угла.

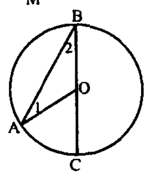
Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется вписанным углом.



На рисунке угол ABC вписанный, угол ABC опирается на дугу AMC.

Теорема: (о вписанном угле) Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

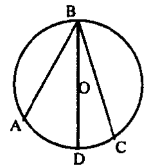
Доказательство. Пусть $\angle ABC$ – вписанный угол окружности с центром O, опирающийся на дугу AC.



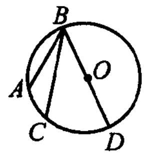
Докажем, что $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$. Рассмотрим три возможных случая расположения луча BO относительно угла ABC.

Луч BO совпадает с одной из сторон угла ABC, например, со стороной BC. В этом случае дуга AC меньше полуокружности, поэтому $\angle AOC = \cup AC$. Так как угол AOC – центральный, угол AOB – внешний угол равнобедренного треугольника ABO, а углы 1 и 2 при основании равнобедренного треугольника равны, поэтому $\angle AOC = = \angle 1 + \angle 2 = 2\angle 1$. Отсюда следует, что $2\angle 1 = \cup AC$ или $\angle 1 = \angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.

Луч BO делит угол ABC на два угла. В этом случае луч BO пересекает дугу AC в некоторой точке D. Точка D разделяет дугу AC на две дуги: $\cup AD$ и $\cup DC$.



По доказанному выше $\angle ABD = \frac{1}{2} \cup AD$ и $\angle DBC = \frac{1}{2} \cup DC$. Складывая эти равенства, получаем: $\angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2} \cup AD + \frac{1}{2} \cup DC$, или $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.



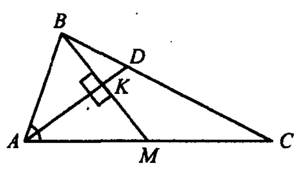
Луч BO не делит угол ABC на два угла и не совпадает со сторонами этого угла. Тогда луч BO пересекает окружность в точке D, и дуга AD состоит из двух дуг: AC и CD. По доказанному выше $\angle ABD = \frac{1}{2} \cup AD$, а $\angle CBD = \frac{1}{2} \cup CD$, вычитая почленно из первого равенства второе, получим:

$$\angle ABD - \angle CBD = \frac{1}{2} \cup AD - \frac{1}{2} \cup CD$$

или $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.

То есть теорема полностью доказана.

3. Задача: Медиана BM треугольника ABC перпендикулярна его биссектрисе AD. Найдите AB, если AC = 12 см.

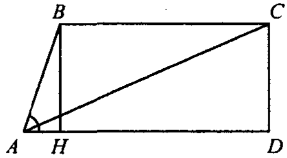


$\Delta ABK = \Delta AKM$ по стороне и двум прилегающим углам.

Отсюда $AB = AM = \frac{AC}{2} = 6$ см.

Ответ: 6 см.

4. Задача: В прямоугольной трапеции ABCD с основаниями 17 см и 25 см диагональ AC является биссектрисой острого угла A. Найдите меньшую боковую сторону трапеции.



$BC=HD=17$; $AH=AD-HD=8$.
Пусть $\angle BAD = \alpha$; $BH=CD=x$.

Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{8}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{x}{25}$.

Отсюда: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{25}{8}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{25}{8}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2};\ \frac{25}{16}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right) = 1;\ \frac{25}{16}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{9}{16};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5};\ x = 25\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 15.$$

Другой способ: $\angle ABH = \frac{\pi}{2} - \alpha$; $\angle ACD = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$;

$\angle BCA = \frac{\pi}{2} - \angle ACD = \frac{\alpha}{2}$. ΔABC равнобедренный, поэтому $AB=BC=17$; $BH^2 = AB^2 - BH^2 = 17^2 - 8^2 = 225$; $BH = 15$ см

Ответ: 15 см.

БИЛЕТ № 19

1. Сформулируйте определение скалярного произведения векторов и определение угла между векторами. Приведите пример применения скалярного произведения векторов для определения угла между векторами.

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$$

Свойства скалярного произведения: Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа k справедливы соотношения:

1° $\vec{a}^2\geq 0$, причем $\vec{a}^2>0$ при $\vec{a}\neq\vec{0}$

2° $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (переместительный закон)

3° $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ (распределительный закон)

4° $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$ (сочетательный закон)

Свойства 1° и 2° непосредственно следуют из определения скалярного произведения. Для доказательства свойств 3° и 4° необходимо ввести прямоугольную систему координат и воспользоваться формулой скалярного произведения в координатах.

Пример: Найти угол между векторами $\vec{a}\{1,1,1\}$ и $\vec{b}\{1,-1,1\}$.

Решение: $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1+1\cdot(-1)+1\cdot1=1$; $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$;

$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{1^2+(-1^2)+1^2}=\sqrt{3}$;

$$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{1}{3}\Rightarrow\angle(\vec{a},\vec{b})=\arccos\frac{1}{3}.$$

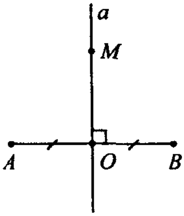
2. Сформулируйте определение серединного перпендикуляра к отрезку. Сформулируйте и докажите свойство серединного перпендикуляра к отрезку.

Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, проходящая через середину данного отрезка и перпендикулярная к нему.

Теорема: Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка.

Обратно: каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.

Доказательство:



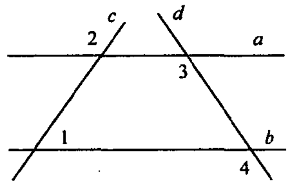
Пусть O – серединный перпендикуляр к AB, O – середина этого отрезка.

1) Рассмотрим $M \in a$, докажем, что $AM = MB$. Если M совпала с O – это верно.

Если нет, то $\Delta OAM = \Delta OBM$ по двум катетам($OA = OB$, OM – общий) $\Rightarrow AM = BM$.

2) Пусть теперь M – произвольная точка, равноудаленная от A и B, докажем, что $M \in a$. Если $M \in AB$, то M совпадает с O. Если нет, то ΔAMB – равнобедренный, т.к. $AM = MB$, MO – медиана $\Rightarrow$ и высота $\Rightarrow$ $MO \perp AB$, т.е. прямые MO и a совпадают. Теорема доказана.

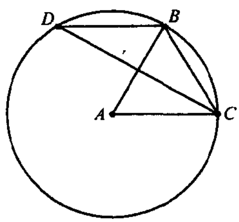
3. Задача: На рисунке: $\angle 1 = 55°$; $\angle 2 = 125°$; $\angle 3 = 123°$. Найдите $\angle 4$.



$\angle 4 = \angle 3 = 123°$

Ответ: 123°.

4. Задача: Треугольник ABC – равносторонний со стороной, равной a. На расстоянии a от вершины A взята точка D, отличная от точек B и C. Найдите угол BDC.



ГМТ, отстоящих от вершины A на расстояние a – это окружность с центром в точке A и радиусом a.

$$\angle BDC = \frac{\angle BAC}{2} = \frac{60°}{2} = 30°.$$

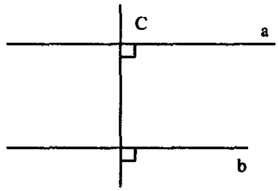
Ответ: 30°.

БИЛЕТ № 20

1. Сформулируйте свойство углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей. Приведите пример вычисления углов при пересечении параллельных прямых секущей.

Начнем с того, что две различные прямые либо имеют одну общую точку, то есть пересекаются, либо не имеют ни одной общей точки, т.е. не пересекаются.

Определение: Две прямые на плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.



Параллельность прямых a и b обозначается: $a \parallel b$. Например, на рисунке прямые a и b перпендикулярны прямой C. Значит, они не пересекаются, то есть параллельны.

Прямая C называется секущей по отношению к прямым a и b, если она пересекает их в двух точках.

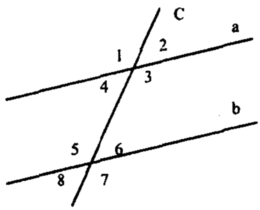


Рис.3

При пересечении прямых a и b секущей C образуется восемь углов, которые на рисунке 3 обозначены цифрами. Некоторые из этих углов имеют специальные названия:

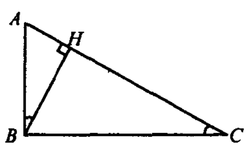
Углы 3 и 5, 4 и 6 – накрест лежащие;
Углы 4 и 5, 3 и 6 – односторонние;

Углы 1 и 5, 4 и 8, 2 и 6, 3 и 7 – соответственные.

Теорема: Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны, соответственные углы равны, а сумма односторонних углов равна 180°.

В качестве примера вычисления углов при пересечении параллельных прямых секущей можно привести решение задачи № 3 из билета № 19.

2. Сформулируйте теоремы о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике и докажите один из них по выбору.



Теорема: Квадрат высоты прямоугольного треугольника, опущенной на его гипотенузу, равен произведению отрезков, на которые эта высота разбивает гипотенузу.

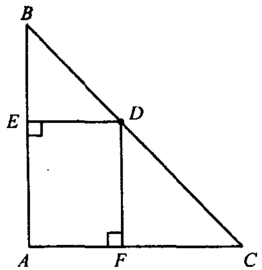
Доказательство:

$\angle ABH = 90° - \angle BAH = \angle HCB \Rightarrow \Delta AHB \sim \Delta HCB$ по двум углам. $\dfrac{AH}{BH} = \dfrac{BH}{HC} \Rightarrow BH^2 = AH \cdot HC$. Теорема доказана.

3. Задача: Из точки, лежащей на гипотенузе равнобедренного прямоугольного треугольника, на катеты треугольника опущены перпендикуляры. Найдите катет треугольника, если периметр полученного четырехугольника равен 12 см.

ΔBED и ΔDFC – равнобедренные.

$AE + DE + DF + AF = AE + BE + CF + AF = AB + AC = 2AB = 12 \Rightarrow AB = 6$ см.



Ответ: 6 см.

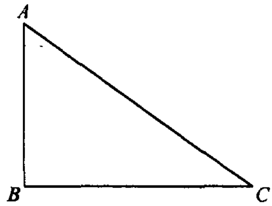
4. Задача: Около правильного шестиугольника со стороной 8,5 описана окружность. Около этой окружности описан правильный четырехугольник. Найдите сторону четырехугольника.

$a_6 = R = 8{,}5$ см; $a_4 = 2r = 2 \cdot 8{,}5 = 17$ см.

Ответ: 17 см.

БИЛЕТ № 21

1. Сформулируйте определение косинуса острого угла прямоугольного треугольника. Приведите пример его применения при решении прямоугольных треугольников.



Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего этому острому углу катета к гипотенузе.

Пример: Пусть дана гипотенуза AC прямоугольного треугольника ABC и косинус его острого угла A.

Имеем: $\cos A = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow AB = AC \cdot \cos A$;

$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2}$.

2. Сформулируйте определение биссектрисы угла. Сформулируйте и докажите свойство биссектрисы треугольника.

Луч, исходящий из вершины угла и делящий его на 2 равных угла, называется биссектрисой угла.

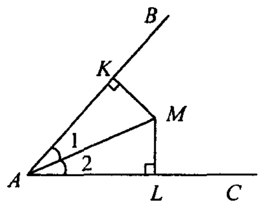
Каждая точка биссектрисы неразвернутого угла равноудалена от его сторон.

Обратно: каждая точка, лежащая внутри угла и равноудаленная от сторон угла, лежит на его биссектрисе.

1) Возьмем произвольную точку M на биссектрисе угла BAC, проведем $MK \perp AB$, $ML \perp AC$.

Докажем, что $MK = ML$.

Это действительно так, поскольку ΔAMK и ΔAMC равны по гипотенузе и острому углу.

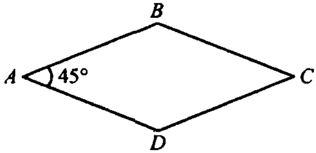


2) Пусть M лежит внутри угла BAC и равноудалена от его сторон AB и AC.

Докажем, что AM – биссектриса $\angle BAC$. Также проведем $MK \perp AB$ и $ML \perp AC$.

$\Delta AMK = \Delta AML$ по гипотенузе и катету $\Rightarrow \angle 1 = \angle 2 \Rightarrow$ луч AM – биссектриса.

3. Задача: Площадь ромба ABCD равна $242\sqrt{2}$. Вычислите сторону ромба, если один из его углов равен 135°.



Острый угол ромба равен 45°.

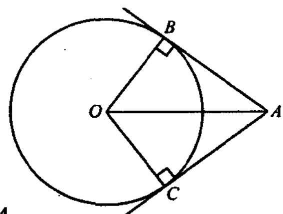
$S_{ABCD} = AB^2 \cdot \sin 45° =$

$= \dfrac{AB^2\sqrt{2}}{2} = 242\sqrt{2}$

$AB^2=484$; $AB=22$ см.

Ответ: 22 см.

4. Задача: К окружности, радиус которой равен 3, из точки, удаленной от центра окружности на расстояние 5, проведены две касательные. Вычислите расстояние между точками касания.



Обозначим $\angle BAO = \alpha$.

$AB = AC = \sqrt{OA^2 - OB^2} = 4$

$\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$; $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \dfrac{7}{25}$

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\alpha =$

$= 16 + 16 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \dfrac{7}{25} = 16 \cdot \dfrac{36}{25}$; $BC = \dfrac{24}{5} = 4{,}8$ см

Ответ: 4,8 см.

СОДЕРЖАНИЕ

3. Задача: Площадь треугольника, описанного около окружности, равна 84 см^2. Найдите периметр треугольника, если радиус окружности равен 7 см.
4. Задача: В равнобокой трапеции одно из оснований в два раза больше другого. Диагональ трапеции является биссектрисой острого угла. Найдите меньшее основание трапеции, если ее площадь равна $27\sqrt{3}$ см^2.

Билет № 9 ____________ 16-17
1. Сформулируйте определение окружности, описанной около треугольника. Сформулируйте теорему о центре описанной окружности. Приведите пример применения теоремы о центре описанной окружности.
2. Сформулируйте определение средней линии треугольника. Сформулируйте и докажите теорему о средней линии треугольника.
3. Задача: Из вершины B в треугольнике ABC *проведены высота BH и биссектриса BD. Найдите* угол между высотой BH и биссектрисой BD, если углы BAC и BCA равны 20° и 60° соответственно.
4. Задача: Две окружности, радиусы которых равны 9 см и 3 см, касаются внешним образом в точке A. Через точку A проходит их общая секущая BC, причем точка B принадлежит большей окружности. Найдите длину отрезка AB, если отрезок AC равен 5 см.

Билет № 10 ____________ 18
1. Сформулируйте теорему о сумме углов треугольника. Приведите пример ее применения.
2. Сформулируйте определение ромба. Сформулируйте и докажите свойство диагоналей ромба.
3. Задача: Внутри равностороннего треугольника ABC отмечена точка D, такая, что $\angle BAD = \angle BCD = 15°$. Найдите угол ADC.
4. Задача: Окружность радиуса R касается *гипотенузы равнобедренного прямоугольного* треугольника в вершине его острого угла и проходит через вершину прямого угла. Найдите длину дуги, заключенной внутри треугольника, если $R = \frac{8}{\sqrt{\pi}}$.

3. Задача: Угол между высотами BK и BL параллелограмма ABCD, проведенными из вершины *его острого угла B, в четыре раза больше самого угла* ABC. Найдите углы параллелограмма.
4. Задача: Через вершину B равнобедренного треугольника ABC параллельно основанию AC проведена прямая BD. Через точку K – середину высоты BH проведен луч AK, пересекающий прямую BD в точке D, а сторону BC в точке N. Определите, в каком отношении точка N делит сторону BC.

Билет № 4 ____________ 7-8
1. Сформулируйте определение окружности. Приведите формулу длины окружности. Приведите формулу длины дуги окружности. Приведите примеры применения либо формулы длины окружности, либо формулы длины дуги окружности.
2. Сформулируйте определение медианы треугольника. Сформулируйте и докажите свойство медианы равнобедренного треугольника.
3. Задача: Сторона ромба равна 10, а один из его углов равен 30°. Найдите радиус окружности, вписанной в ромб.
4. Задача: Одна из диагоналей прямоугольной трапеции делит эту трапецию на два прямоугольных равнобедренных треугольника. Какова площадь этой трапеции, если ее меньшая боковая сторона равна 4?

Билет № 5 ____________ 9
1. Сформулируйте неравенство треугольника. *Приведите пример его применения.*
2. Сформулируйте определение параллелограмма. Сформулируйте и докажите свойство диагоналей параллелограмма.
3. Задача: Найдите больший угол треугольника, если две его стороны видны из центра описанной окружности под углами 100° и 120°.
4. Задача: Известно, что в равнобокую трапецию с боковой стороной, равной 5, можно вписать окружность. Найдите длину средней линии трапеции.

Билет № 6 ____________ 10-11
1. Приведите формулы площади прямоугольника и площади параллелограмма. Приведите примеры применения площади прямоугольника либо площади параллелограмма.

Билет № 19 ____________ 33-34
1. Сформулируйте определение скалярного произведения векторов и определение угла между векторами. Приведите пример применения скалярного произведения векторов для определения угла между векторами.
2. Сформулируйте определение серединного перпендикуляра к отрезку. Сформулируйте и докажите свойство серединного перпендикуляра к отрезку.
4. Задача: Треугольник ABC – равносторонний со стороной, равной a. На расстоянии a от вершины A взята точка D, отличная от точек B и C. Найдите угол BDC.

Билет № 20 ____________ 35
1. Сформулируйте свойство углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей. Приведите пример вычисления углов при пересечении параллельных прямых секущей.
2. Сформулируйте теоремы о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике и докажите один из них по выбору.
3. Задача: Из точки, лежащей на гипотенузе равнобедренного прямоугольного треугольника, на катеты треугольника опущены перпендикуляры. Найдите катет треугольника, если периметр полученного четырехугольника равен 12 см.
4. Задача: Около правильного шестиугольника со стороной 8,5 описана окружность. Около этой окружности описан правильный четырехугольник. Найдите сторону четырехугольника.

Билет № 21 ____________ 36
1. Сформулируйте определение косинуса острого угла прямоугольного треугольника. Приведите пример его применения при решении прямоугольных треугольников.
2. Сформулируйте определение биссектрисы угла. Сформулируйте и докажите свойство биссектрисы треугольника.
3. Задача: Площадь ромба ABCD равна $242\sqrt{2}$. Вычислите сторону ромба, если один из его углов равен 135°.
4. Задача: К окружности, радиус которой равен 3, из точки, удаленной от центра окружности на расстояние 5, проведены две касательные. Вычислите расстояние между точками касания.

4. Задача: Два круга, радиусы которых равны 5 см, имеют общую хорду длины $5\sqrt{2}$ см. Найдите площадь общей части этих кругов.

Билет № 14 ____________ 23-24
1. Сформулируйте определение внешнего угла треугольника. Сформулируйте теорему о свойстве внешнего угла треугольника. Приведите пример ее применения.
2. Сформулируйте и докажите теорему косинусов. Приведите пример ее применения для решения треугольников.
3. Задача: Стороны треугольника равны 4 см, 5 см и 8 см. Найдите длину медианы, проведенной из вершины большего угла.
4. Задача: В параллелограмме ABCD диагональ BD перпендикулярна стороне AD. Найдите AC, если AD = 6 см, BD = 5 см.

Билет № 15 ____________ 25-26
1. Приведите формулу площади трапеции. Приведите пример ее применения.
2. Сформулируйте определение равных треугольников. Сформулируйте признаки равенства прямоугольных треугольников и докажите один из них по выбору.
3. Задача: Большая диагональ ромба равна 12 см, а один из его углов равен 60°. Найдите длину вписанной в него окружности.
4. Задача: В равнобедренном треугольнике центр вписанной окружности делит высоту в отношении 17 : 15, а боковая сторона равна 34 см. Найдите основание треугольника.

Билет № 16 ____________ 27-28
1. Сформулируйте теорему о зависимости между сторонами и углами треугольника. Приведите пример ее применения.
2. Сформулируйте определение подобных треугольников. Сформулируйте признаки подобия треугольников и докажите один из них по выбору.

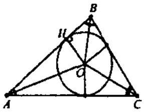
Билет № 1

1

1. Сформулируйте определение окружности, вписанной в треугольник. Сформулируйте теорему о центре вписанной окружности. Приведите пример применения теоремы о центре вписанной окружности.

Окружность называется вписанной в треугольник, если она касается всех его сторон.

Теорема: Центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис.



В качестве примера применения теоремы о центре вписанной окружности можно привести задачу построения окружности, вписанной в данный треугольник *ABC*. Для ее решения требуется выполнить следующие действия:

1) Построить биссектрисы треугольника *ABC* (точку их пересечения обозначим *O*);

2) Опустить из точки *O* на одну из сторон треугольника *ABC* (например *AB*) перпендикуляр *OH*;

3) Построить окружность с центром в точке *O* и радиусом, равным длине отрезка *OH*.

Полученная таким образом окружность и будет искомой.

2. Сформулируйте определение трапеции. Сформулируйте определение средней линии трапеции. Сформулируйте и докажите теорему о средней линии трапеции.

Трапецией называется четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие не параллельны.

2

3. Задача: Сторона правильного шестиугольника, описанного около окружности, равна 2 см. Найдите сторону правильного треугольника, вписанного в эту окружность.

Обозначим радиус данной окружности *x*. Тогда по формулам для радиусов вписанных и описанных окружностей правильного шестиугольника и треугольника имеем.

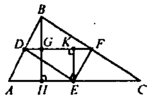
$$a_6 = \frac{2x}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{a_6\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\text{ см};$$

$$a_3 = x\sqrt{3} = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3\text{ см}.$$

Ответ: 3 см.

4. Задача: В треугольник ABC вписан равнобедренный прямоугольный треугольник DEF так, что его гипотенуза DF параллельна стороне AC, а вершина E лежит на стороне AC. Найдите высоту треугольника ABC, если AC = 16 см; DF = 8 см.

$\angle BDF = \angle BAC$ и $\angle BFD = \angle BCA$, как соответственные углы, образованные при пересечении параллельных прямых *DF* и *AC* соответственно секущими *AB* и *BC*. $\Delta BDF \sim \Delta BAC$ (по первому признаку подобия – по двум углам). Отсюда имеем:



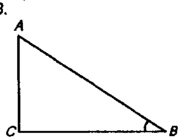
Билет № 2

3

1. Сформулируйте определение синуса острого угла прямоугольного треугольника. Приведите пример его применения при решении прямоугольных треугольников.

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего этому углу катета к гипотенузе.

Пример 1: Пусть дана гипотенуза *AB* прямоугольного треугольника *ABC* и синус его острого угла *B*.



Тогда по определению синуса острого угла прямоугольного треугольника:

$$\sin B = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC = AB\sin B,$$

а по теореме Пифагора $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$.

Таким образом, по гипотенузе и синусу одного из острых углов прямоугольного треугольника можно найти катеты этого прямоугольного треугольника.

Пример 2: Пусть дан катет *BC* прямоугольного треугольника *ABC* и синус противолежащего ему угла *A*.

4

$\angle A = \angle C$ (по условию). По второму признаку равенства треугольников $\Delta ACB = \Delta CAB$. (Равенство треугольников видно на рисунке, так как они просто совпадают). В равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны, откуда $AB = AC$ (т.к. $\angle C = \angle A$), то есть ΔABC – равнобедренный. Теорема доказана.

3. Задача: Стороны треугольника равны 3 см, 2 см и $\sqrt{3}$ см. Определите вид этого треугольника.

Против наибольшей стороны треугольника, равной 3 см, лежит наибольший угол α. По теореме косинусов имеем:

$$3^2 = 2^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\cdot 2\cdot\sqrt{3}\cdot\cos\alpha;$$

$$9 = 7 - 4\sqrt{3}\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{3}} < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha > 90°$, то есть данный треугольник тупоугольный.

4. Задача: На стороне AB параллелограмма ABCD как на диаметре построена окружность, проходящая через точку пересечения диагоналей и середину стороны AD. Найдите углы параллелограмма.

OE – средняя линия ΔABD, поэтому $OE \parallel AD$ и $OE = \frac{1}{2}AD = AF$.

$\frac{BD}{BA}=\frac{BF}{BC}=\frac{DF}{AC}=\frac{1}{2}\Rightarrow BD=\frac{1}{2}AB$; $BF=\frac{1}{2}BC$,

то есть DF – средняя линия треугольника ABC.
Пусть BH – высота треугольника ABC; EK – высота треугольника DEF. По теореме Фалеса $BG=GH$, а $GH=KE$, как параллельные отрезки, заключенные между параллельными прямыми.

Итак, $KE=BG=\frac{1}{2}BH$.

$DE^2+EF^2=2DE^2=DF^2=64$, отсюда

$DE=EF=4\sqrt{2}$ см.

$S_{\Delta DEF}=\frac{1}{2}EK\cdot DF=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}BH\cdot 8=2BH$.

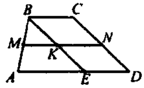
С другой стороны,

$S_{\Delta DEF}=\frac{1}{2}DE\cdot EF=\frac{1}{2}\cdot\left(4\sqrt{2}\right)^2=16$ см^2.

Имеем: $2BH=16\Rightarrow BH=8$ см.

Ответ: 8 см.

Стороны трапеции, которые параллельны, называются ее основаниями, а две другие стороны – боковыми сторонами.
Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон.
Теорема: Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.
Доказательство:

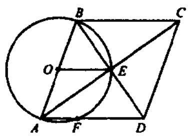


Пусть $ABCD$ – трапеция с основаниями AD и BC. Проведем из вершины B прямую BE, параллельную боковой стороне CD (точка E – точка пересечения этой прямой с основанием AD).
Из точки N – середины стороны CD проведем прямую, параллельную основаниям трапеции. Пусть K – точка пересечения этой прямой с BE. Тогда по теореме Фалеса $BK=KE$. KM (где M – середина стороны AB) – средняя линия ΔABE, значит по теореме о средней линии треугольника $KM \parallel AE$ и $KM=\frac{1}{2}AE$.

$KN \parallel AD$ и $KM \parallel AD$, поэтому точки M, K и N лежат на одной прямой.
В итоге имеем, что MN – средняя линия трапеции $ABCD$ по построению, $MN \parallel AD$, $MN \parallel BC$ и $MN=MK+$

$+KN=\frac{1}{2}AE+BC=\frac{1}{2}(AD-BC)+BC=\frac{AD+BC}{2}$.

Теорема доказана.
Пример. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD проведена средняя линия MN. Найти AD, если $MN=5$ см, $BC=3$ см.
Решение: По теореме о средней линии трапеции имеем: $MN=\frac{1}{2}(BC+AD)$, откуда получаем, что $AD=2\cdot MN-BC=7$ см.



OF – средняя линия ΔABD, поэтому

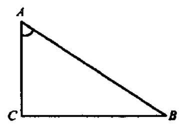
$OF \parallel BD$ и $OF=\frac{1}{2}BD=BE$.

Отсюда $BE=OB=OE\Rightarrow\Delta BOE$ равносторонний и $\angle BOE=60°$.

$\angle BAD=\angle BOE$ (т.к. $OE \parallel AD$), то есть $\angle BAD=60°$.

$\angle ABC=180°-\angle BAD=120°$.

Ответ: 60° и 120°.

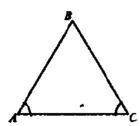


Тогда: $\sin A=\frac{BC}{AB}\Rightarrow AB=\frac{BC}{\sin A}$;

$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}$.

Таким образом, по катету и синусу противолежащего ему угла можно найти гипотенузу и катет прямоугольного треугольника.

2. Сформулируйте определение равнобедренного треугольника. Сформулируйте и докажите признак равнобедренного треугольника.



Треугольник называется равнобедренным, если две его стороны равны.
Теорема: (признак равнобедренного треугольника) Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.
Доказательство. Пусть ABC – треугольник, в котором $\angle A=\angle C$.
Докажем, что он равнобедренный. Рассмотрим треугольники ACB и CAB, для которых $AC=CA$ (общая), $\angle C=\angle A$, и

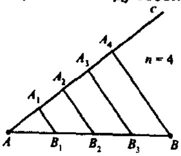
Билет № 3

5

1. Сформулируйте теорему Фалеса. Приведите пример ее применения.

Теорема Фалеса.

Если на одной из двух параллельных прямых последовательно отложить несколько равных отрезков и провести через их концы параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой отрезки, равные между собой.



Примером применения теоремы Фалеса является задача деления данного отрезка AB на n равных частей.

Для решения этой задачи требуется:

1) Провести луч AC, не лежащий на прямой AB;
2) Отложить на луче AC от точки A последовательно n равных отрезков $AA_1, A_1A_2, ..., A_{n-1}A_n$;
3) Провести прямую A_nB;
4) Построить прямые, проходящие через точки $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ и параллельные прямой A_nB.

Точки пересечения $B_1, B_2, ..., B_{n-1}$ этих прямых с отрезком AB по теореме Фалеса делят отрезок AB на n равных отрезков.

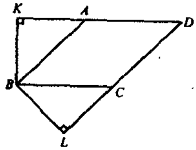
6

3. Задача: Угол между высотами BK и BL параллелограмма ABCD, проведенными из вершины его острого угла B, в четыре раза больше самого угла ABC. Найдите углы параллелограмма.

Пусть $\angle ABC = \alpha$.

Тогда $\angle KAB = \alpha$,

$\angle KBA = 90° - \alpha$.



$\angle BCD = 180° - \alpha$;

$\angle BCL = 180° - \angle BCD = \alpha$;

$\angle CBL = 90° - \angle BCL = 90° - \alpha$.

$\angle KBL = \angle KBA + \angle ABC + \angle CBL =$

$= 90° - \alpha + \alpha + 90° - \alpha = 180° - \alpha$

С другой стороны: по условию

$\angle KBL = 4\alpha$.

Итак, $180° - \alpha = 4\alpha \Rightarrow 5\alpha = 180°$;

$\alpha = 36°$; $180° - \alpha = 144°$.

Ответ: 36° и 144°.

Билет № 4

7

1. Сформулируйте определение окружности. Приведите формулу длины окружности. Приведите формулу длины дуги окружности. Приведите примеры применения либо формулы длины окружности, либо формулы длины дуги окружности.

Окружность – это геометрическая фигура, которая состоит из всех точек, расположенных на заданном расстоянии от данной точки.

Формула длины окружности:

$C = 2\pi R$.

Формула длины дуги окружности с градусной мерой α: $l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$.

Пример 1:

Пусть диаметр окружности $D = 4$ см.

Тогда $C = 2\pi R = \pi D = 4\pi \approx 12{,}56$ см.

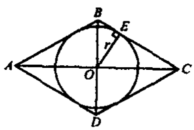
Пример 2:

Найдем длину дуги окружности радиуса 5 см с градусной мерой 60°.

$l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha = \frac{5\pi}{180} \cdot 60 = \frac{5\pi}{3} \approx 5{,}23$ см.

8

3. Задача: Сторона ромба равна 10, а один из его углов равен 30°. Найдите радиус окружности, вписанной в ромб.



$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos\angle C =$

$= 100 + 100 - 2 \cdot 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 100(2 - \sqrt{3})$;

$BD = 10\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle B =$

$= 100 + 100 - 2 \cdot 100 \cdot \cos 150° = 10\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

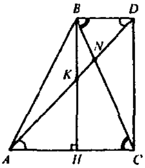
$S_{ABCD} = \frac{1}{2} BD \cdot AC = 50$. С другой стороны,

$S_{ABCD} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot r \cdot BC = 20r = 50 \Rightarrow r = 2{,}5$ см.

Ответ: 2,5 см.

4. Задача: Через вершину B равнобедренного треугольника ABC параллельно основанию AC проведена прямая BD. Через точку K – середину высоты BH проведен луч AK, пересекающий прямую BD в точке D, а сторону BC в точке N. Определите, в каком отношении точка N делит сторону BC.

$\Delta AKH = \Delta BKD$ по второму признаку равенства треугольников ($BK=KH$ по условию, $\angle AHK = \angle KBD = 90°$ как накрест лежащие, $\angle BKD = \angle AKH$ как вертикальные углы).



Отсюда $BD = AH = \frac{1}{2}AC$.

$\Delta BND \sim \Delta ANC$ по двум углам.

Отсюда $\frac{BN}{NC} = \frac{BD}{AC} = \frac{1}{2}$.

То есть точка N делит сторону BC в отношении 1:2.

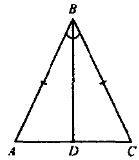
Ответ: в отношении 1:2.

2. Сформулируйте определение равнобедренного треугольника. Сформулируйте и докажите свойство углов при основании равнобедренного треугольника.

Треугольник называется равнобедренным, если две его стороны равны. Эти две стороны называются боковыми сторонами равнобедренного треугольника, а третья сторона – его основанием.

Теорема: В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

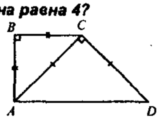
Доказательство: Пусть ABC – равнобедренный треугольник с основанием AC. Проведем биссектрису BD треугольника ABC.



$\Delta ABD = \Delta BCD$ по первому признаку равенства треугольников ($AB=BC$ по условию, BD – общая сторона, $\angle ABD = \angle DBC$, так как BD – биссектриса), поэтому $\angle A = \angle C$.

Теорема доказана.

4. Задача: Одна из диагоналей прямоугольной трапеции делит эту трапецию на два прямоугольных равнобедренных треугольника. Какова площадь этой трапеции, если ее меньшая боковая сторона равна 4?



$AB=BC=4$;

$AC^2 = 4^2 + 4^2 = 32 \Rightarrow AC = CD = 4\sqrt{2}$

$AD^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 64 \Rightarrow AD = 8$

$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot AB = \frac{8 + 4}{2} \cdot 4 = 24$.

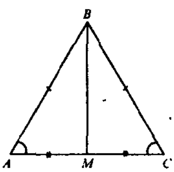
Ответ: 24.

2. Сформулируйте определение медианы треугольника. Сформулируйте и докажите свойство медианы равнобедренного треугольника.

Медиана треугольника – это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Теорема: В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.

Доказательство: Рассмотрим равнобедренный ΔABC и его медиану BM.



$\Delta ABM = \Delta BMC$ по 1-му признаку равенства треугольников ($AB=BC$ по определению, $AM=MC$, т.к. BH – медиана; $\angle A = \angle C$ по свойству углов равнобедренного треугольника).

Поэтому $\angle ABM = \angle CBM$ и

$\angle AMB = \angle CMB = 90°$, т.е. BH является и биссектрисой и высотой. Теорема доказана.

Билет № 5

9

1. Сформулируйте неравенство треугольника. Приведите пример его применения.

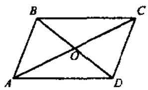
Неравенство треугольника.

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.

Неравенство треугольника применяется в основном для выяснения существования треугольника с заданными длинами сторон.

Например, треугольника со сторонами 1 см, 2 см и 4 см не существует в природе, так как для него неравенство треугольника 1+2>4 неверно.

2. Сформулируйте определение параллелограмма. Сформулируйте и докажите свойство диагоналей параллелограмма.



Параллелограмм – это четырехугольник, у которого противолежащие стороны попарно параллельны.

Свойство диагоналей параллелограмма:

Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Доказательство:

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$, пусть O – точка пересечения его диагоналей AC и BD. $\triangle AOB = \triangle COD$ по стороне и двум прилежащим углам ($AB=CD$ как противолежащие стороны параллельны, $\angle ABD = \angle CDO$ и $\angle BAO = \angle OCD$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущими BD и AC соответственно). Отсюда $AO=CO$, $BO=DO$. Теорема доказана.

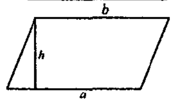
Билет № 6

10

1. Приведите формулы площади прямоугольника и площади параллелограмма. Приведите примеры применения площади прямоугольника либо площади параллелограмма.

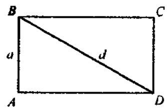
Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон: $S=ab$.

Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту: $S=ah$.



Пример: Найти площадь прямоугольника по его стороне a и диагонали d.

Решение: Рассмотрим прямоугольник $ABCD$, пусть $AB=a$; $BD=d$.



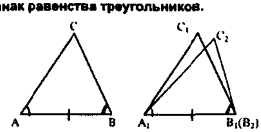
По теореме Пифагора $AD = \sqrt{d^2 - a^2}$.

$S_{ABCD} = a\sqrt{d^2 - a^2}$.

11

совместится со стороной A_1B_1, а сторона AC – со стороной A_1C_1; в частности, совместятся точки B и B_1, C и C_1. Следовательно, совместятся стороны BC и B_1C_1. Значит, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся, следовательно, они равны. Теорема доказана.

Второй признак равенства треугольников.



Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника соответственно равны стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство: Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ – два треугольника, у которых $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Пусть $A_1B_2C_2$ – треугольник, равный треугольнику ABC, с вершиной B_2 на луче A_1B_1 и вершиной C_2 в той же полуплоскости относительно прямой A_1B_2, где лежит вершина C_1. Так как $A_1B_2 = A_1B_1$, то вершина B_2 совпадает с вершиной B_1. Так как $\angle B_1A_1C_2 = \angle B_1A_1C_1$ и $\angle A_1B_2C_2 = \angle A_1B_1C_1$, то луч A_1C_2 совпадает с лучом A_1C_1, а луч B_1C_2 – с лучом B_1C_1. Отсюда следует, что вершина C_2 совпадает с вершиной C_1. Значит, $\triangle A_1B_1C_1$ совпадает с $\triangle A_1B_2C_2$, и значит, равен $\triangle ABC$. Что и требовалось доказать.

3. Задача: Определите вид четырехугольника, вершины которого являются серединами сторон произвольного выпуклого четырехугольника.

Рассмотрим произвольный выпуклый четырехугольник $ABCD$, пусть $EFKL$ – четырехугольник, вершины которого являются серединами сторон четырехугольника $ABCD$.

Билет № 7

12

1. Приведите формулы для радиусов вписанных и описанных окружностей правильных многоугольников. Приведите пример их применения для n-угольников для любого $n \le 6$ (n определяет учащийся).

Пусть a_n – сторона правильного n-угольника, r и R – радиусы соответственно вписанной и описанной окружности.

Тогда: $R = \dfrac{a_n}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$;

$r = \dfrac{a_n \operatorname{ctg}\dfrac{180^\circ}{n}}{2}$;

$n=3$: $R = \dfrac{a_3}{\sqrt{3}}$, $r = \dfrac{a_3}{2\sqrt{3}}$;

$n=4$: $R = \dfrac{a_4}{\sqrt{2}}$, $r = \dfrac{a_4}{2}$;

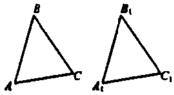
$n=5$: $R = \dfrac{a_5}{2\sin 36^\circ}$, $r = \dfrac{a_5 \operatorname{ctg} 36^\circ}{2}$;

$n=6$: $R=a_6$, $r = \dfrac{a_6\sqrt{3}}{2}$.

2. Сформулируйте определение равных треугольников. Сформулируйте признаки равенства треугольников и докажите один из них по выбору.

Два треугольника называются равными, если их можно совместить наложением.

На рисунке изображены равные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, так как каждый из этих треугольников можно наложить на другой так, что они полностью совместятся, то есть попарно совместятся их вершины и стороны.



Таким образом, если два треугольника равны, то элементы (стороны и углы) одного треугольника соответственно равны элементам другого треугольника.

Существуют три основных признака равенства треугольника. Сформулируем третий признак.

Теорема: Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

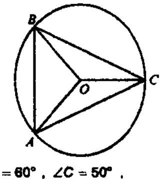
Например, если в треугольнике *ABC*: $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 7$ см, и в треугольнике *DEF*: $DE = 6$ см, $EF = 7$ см, $DF = 5$ см, то $\Delta ABC = \Delta DEF$ (по 3-му признаку равенства треугольников).

Первый признак равенства треугольников.

Теорема: Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство: Рассмотрим треугольники *ABC* и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. Докажем, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Так как $\angle A = \angle A_1$, то треугольник *ABC* можно наложить на треугольник $A_1B_1C_1$ так, что вершина *A* совместится с вершиной A_1, а стороны *AB* и *AC* наложатся соответственно на лучи A_1B_1 и A_1C_1. Поскольку $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, то сторона *AB*

3. Задача: Найдите больший угол треугольника, если две его стороны видны из центра описанной окружности под углами 100° и 120°.



Рассмотрим треугольник *ABC*, вписанный в окружность с центром O. Пусть

$\angle AOC = 120°$,

$\angle AOB = 100°$. Тогда $\angle B = 60°$, $\angle C = 50°$.

$\angle A = 180° - \angle B - \angle C = 70°$ – наибольший угол ΔABC.

Ответ: 70°.

4. Задача: Известно, что в равнобокую трапецию с боковой стороной, равной 5, можно вписать окружность. Найдите длину средней линии трапеции.

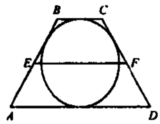
В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.

Поэтому

$AD+BC=AB+CD=$
$=5+5=10$.

Средняя линия трапеции

$EF = \dfrac{AD + BC}{2} = 5$.



Ответ: 5.

2. Сформулируйте определение параллельных прямых. Сформулируйте аксиому параллельных прямых. Сформулируйте признаки параллельности прямых и докажите один из них по выбору.

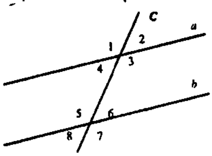
Начнем с того, что две различные прямые либо имеют одну общую точку, то есть пересекаются, либо не имеют ни одной общей точки, т.е. не пересекаются.

Определение: Две прямые на плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

Параллельность прямых *a* и *b* обозначается: $a \parallel b$.

Прямая *C* называется секущей по отношению к прямым *a* и *b*, если она пересекает их в двух точках.

При пересечении прямых *a* и *b* секущей *C* образуется восемь углов, которые на рисунке обозначены цифрами.



Некоторые из этих углов имеют специальные названия:

Углы 3 и 5, 4 и 6 – накрест лежащие;

Углы 4 и 5, 3 и 6 – односторонние;

Углы 1 и 5, 4 и 8, 2 и 6, 3 и 7 – соответственные.

С этими углами связаны три признака параллельности 2-х прямых.

KF – средняя линия $\Delta ABC \Rightarrow KF \parallel AC$

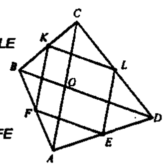
LE – средняя линия $\Delta ACD \Rightarrow LE \parallel AC$

$\Rightarrow KF \parallel LE$

KL – средняя линия $\Delta BCD \Rightarrow KL \parallel BD$

FE – средняя линия $\Delta ABD \Rightarrow FE \parallel BD$

$\Rightarrow KL \parallel FE$



Итак, $KF \parallel LE$ и $KL \parallel FE$, значит *EFKL* – параллелограмм.

Ответ: параллелограмм.

4. Задача: В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон AB и BC в точках E и F соответственно. Касательная MK к этой окружности пересекает стороны AB и BC соответственно в точках M и K. Найдите периметр треугольника BMK, если BE = 6 см.

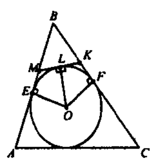
$\Delta BEO = \Delta BFO$ (*BO* – общая сторона, *OE*=*OF*, как радиусы вписанной окружности). отсюда $BE = BF = 6$.

$\Delta MOE = \Delta MOL$;

$\Delta KLO = \Delta KFO$

(у них общие гипотенузы и равные катеты).

Отсюда *ME*=*ML*, *KL*=*KF*.



$P_{\Delta BMK} = BM+MK+BK=BM+ML+LK+BK=$
$=BM+ME+BK+KF=BE+BF=12$ см.

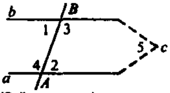
Ответ: 12 см.

13

Теорема: Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны (1-й признак).

Теорема: Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны (2-й признак).

Теорема: Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны (3-й признак).



Докажем 1-й признак параллельных прямых. Пусть при пересечении прямых a и b секущей c накрест лежащие углы равны ($\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$). Предположим, что прямые a и b пересекаются в некоторой точке c. $\angle 1$ – внешний угол ΔABC, поэтому $\angle 1 = \angle 2 + \angle 5 > \angle 2$, но $\angle 1 = \angle 2$, то есть мы пришли к противоречию, значит прямые a и b не пересекаются, то есть параллельны.

Аксиома параллельных прямых: Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

3. Задача: В трапеции ABCD диагональ BD является биссектрисой прямого угла ADC. Найдите отношение диагонали BD к стороне AB трапеции, если $\angle BAD = 30°$.

BD – биссектриса прямого угла $ADC \Rightarrow \angle BDC = \angle CBD = 45°$.

Билет № 8

14

1. Сформулируйте определения круга и сектора. Приведите формулы площади круга и площади сектора. Приведите пример применения одной из формул: либо площади круга, либо площади сектора по выбору учащегося.

Круг – это часть плоскости, ограниченная окружностью. Площадь S круга радиуса R вычисляется по формуле $S = \pi R^2$.

Сектор – это часть круга, которая ограничена дугой и двумя радиусами, соединяющими концы дуги с центром круга.

Площадь S кругового сектора радиуса R, ограниченного дугой с градусной мерой α , вычисляется по формуле

$$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha ;$$

Пример:

Найти площадь кругового сектора диаметра 6 см, ограниченного дугой с градусной мерой 30°.

Решение:

$$R = \frac{d}{2} = 3 \text{ см}.$$

$$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot 9}{360} \cdot 30 = \frac{3}{4}\pi \approx 2{,}4 \text{ см}^2.$$

15

По Погорелову:

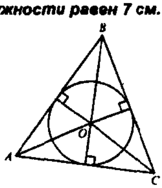
Доказательство: Пусть ABC – данный прямоугольный треугольник с прямым углом C. проведем высоту CD.

$\cos A = \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$. Отсюда $AB \cdot AD = AC^2$.

$\cos B = \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}$. Отсюда $AB \cdot BD = BC^2$.

Складывая полученные равенства почленно и замечая, что $AD + DB = AB$, получим: $AC^2 + BC^2 = AB(AD + DB) = AB^2$. Теорема доказана.

3. Задача: Площадь треугольника, описанного около окружности, равна 84 см². Найдите периметр треугольника, если радиус окружности равен 7 см.



$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}r \cdot AB + \frac{1}{2}r \cdot BC + \frac{1}{2}r \cdot AC = \frac{1}{2}Pr ;$$

$$P = \frac{2S_{\Delta ABC}}{r} = \frac{2 \cdot 84}{7} = 24 \text{ см}.$$

Ответ: 24 см.

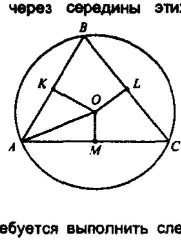
Билет № 9

16

1. Сформулируйте определение окружности, описанной около треугольника. Сформулируйте теорему о центре описанной окружности. Приведите пример применения теоремы о центре описанной окружности.

Если все вершины треугольника лежат на окружности, то окружность называется описанной около треугольника, а треугольник – вписанным в эту окружность.

Теорема: Центр окружности, описанной около треугольника, является точкой пересечения перпендикуляров к сторонам треугольника, проведенных через середины этих сторон.



В качестве примера применения теоремы о центре описанной окружности можно привести задачу построения окружности, описанной около данного треугольника ABC.

Для ее решения требуется выполнить следующие действия:

1) Найти середины K, L и M сторон AB, BC и AC.

2) Провести перпендикуляры к сторонам AB, BC и AC из точек K, L и M соответственно.

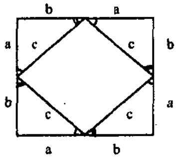
2. Сформулируйте определение прямоугольного треугольника. Сформулируйте и докажите теорему Пифагора.

Теорема: В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

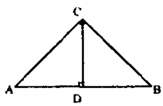
По Атанасяну:

Доказательство: Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами *a*, *b* и гипотенузой *c*.

Докажем: $a^2 + b^2 = c^2$



Достроим треугольник до квадрата со стороной $a+b$. Площадь *S* этого квадрата равна $(a+b)^2$. С другой стороны, этот квадрат составлен из четырех равных прямоугольных треугольников, площадь каждого из которых

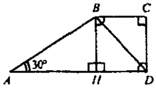


равна $\frac{1}{2}ab$, и квадрата со стороной *c* (сумма острых углов равна 90°). Поэтому $S = 4\cdot\frac{1}{2}ab + c^2 = 2ab + c^2$

Таким образом,

$(a+b)^2 = 2ab + c^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2$.

Теорема доказана.



Пусть $BC=a$.

Тогда $CD=BH=a$.

$BD = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$;

$AB = \frac{BH}{\sin 30^\circ} = 2a$;

$\frac{BD}{AB} = \frac{a\sqrt{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Задача: Треугольник ABC, стороны которого 13 см, 14 см и 15 см, разбит на три треугольника отрезками, соединяющими точку пересечения медиан M с вершинами треугольника. Найдите площадь треугольника BMC.

Три треугольника, на которые разбит треугольник *ABC*, равновелики, то есть равны по площади (их площади равны $\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}$).

$p = \frac{13+14+15}{2} = 21$;

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$

$= \sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = 84$ см^2.

$S_{\Delta BMC} = \frac{84}{3} = 28$ см^2

Ответ: 28 см^2.

3) Найти *O* – точку пересечения проведенных перпендикуляров.

4) Провести окружность с центром в точке *O* и радиусом *OA*.

Полученная окружность и будет искомой.

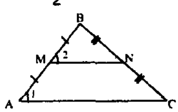
2. Сформулируйте определение средней линии треугольника. Сформулируйте и докажите теорему о средней линии треугольника.

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Теорема: Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

Доказательство: Пусть *MN* – средняя линия треугольника *ABC*. Докажем, что

$MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$.



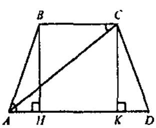
Треугольники *BMN* и *BAC* подобны по второму признаку подобия треугольников ($\angle B$ – общий, $\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}$); поэтому $\angle 1 = \angle 2$ и

$\frac{MN}{AC} = \frac{1}{2}$. Из равенства $\angle 1 = \angle 2$ следует,

4. Задача: В равнобокой трапеции одно из оснований в два раза больше другого. Диагональ трапеции является биссектрисой острого угла. Найдите меньшее основание трапеции, если ее площадь равна 27 $\sqrt{3}$ см^2.

Пусть меньшее основание трапеции $BC=a$.

$\angle CAD = \angle BCA$, как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых *BC* и *AD* секущей *AC*.



$\angle BAC = \angle CAD$, т.к. *AC* – биссектриса $\angle BAD$.

Итак,

$\angle BAC = \angle BCA$, то есть ΔABC – равнобедренный $\Longrightarrow$ $AB=BC=a$.

$\Delta ABH = \Delta CKD \Rightarrow AH = KD = \frac{AD - BC}{2} = \frac{a}{2}$

$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2}\cdot BH = \frac{3a}{2}\cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} =$

$= 27\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$ см.

Ответ: 6 см.

что $MN \parallel AC$, а из второго равенства, **17**

что $MN = \frac{1}{2}AC$. Теорема доказана.

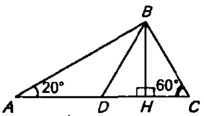
3. Задача: Из вершины B в треугольнике ABC проведены высота BH и биссектриса BD. Найдите угол между высотой BH и биссектрисой BD, если углы BAC и BCA равны 20° и 60° соответственно.

$\angle ABC = 180° - 20° - 60° = 100°$

$\angle DBC = \frac{100°}{2} = 50°$

$\angle HBC = 90° - 60° = 30°$

$\angle DBH = \angle DBC - \angle HBC = 20°$



Ответ: 20°.

4. Задача: Две окружности, радиусы которых равны 9 см и 3 см, касаются внешним образом в точке A. Через точку A проходит их общая секущая BC, причем точка B принадлежит большей окружности. Найдите длину отрезка AB, если отрезок AC равен 5 см.

$\angle DBA = \angle ACE = 90°$ (так как эти углы опираются на диаметры окружностей).

Билет № 10 **18**

1. Сформулируйте теорему о сумме углов треугольника. Приведите пример ее применения.

Теорема о сумме углов треугольника:

Сумма углов треугольника равна 180°.

Используя теорему о сумме углов треугольника, можно по известным двум углам треугольника найти его третий угол.

Пример: В $\triangle ABC$ $\angle A = 80°$, $\angle B = 30°$ Найти $\angle C$.

Решение:

$\angle A + \angle B + \angle C = 180° \to \angle C = 180° - \angle A - \angle B = 70°$.

2. Сформулируйте определение ромба. Сформулируйте и докажите свойство диагоналей ромба.

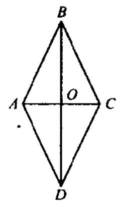
Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

Т.к. ромб является параллелограммом, то он обладает всеми свойствами параллелограмма.

Рассмотрим особое свойство ромба.

Теорема: Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.

Рассмотрим ромб $ABCD$.



Докажем, что $AC \perp BD$ и $\angle BAC = \angle DAC$. По определению ромба $AB = AD$, поэтому $\triangle BAD$ – равнобедренный. Т.к. ромб – параллелограмм, то диагонали точкой пересечения делятся пополам $\Rightarrow AO$ – медиана равнобедренного $\triangle BAD$ $\Rightarrow$ высота и биссектриса.

Значит, $AC \perp BD$ и $\angle BAC = \angle DAC$.

Теорема доказана.

Билет № 11 **19**

1. Сформулируйте определение выпуклого многоугольника. Сформулируйте теорему о сумме углов выпуклого многоугольника. Приведите пример ее применения.

Многоугольник называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины.

Теорема: Сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n-2)\cdot 180°$.

Доказательство: Рассмотрим выпуклый n-угольник. Углы $A_nA_1A_2$, $A_1A_2A_3$, ..., $A_{n-1}A_nA_1$ называются углами этого многоугольника. Найдем их сумму. Для этого соединим диагоналями вершину A_1 с другими вершинами. В результате получим $n - 2$ треугольника, сумма углов которых равна сумме углов n-угольника. Сумма углов каждого треугольника равна 180°, поэтому сумма углов многоугольника $A_1A_2...A_n$ равна $(n-2)\cdot 180°$. Теорема доказана.

С помощью этой теоремы можно находить углы любого правильного n-угольника.

Например, сумма углов правильного 6-угольника равна $(6-2)\cdot 180° = 720°$. Поэтому все его углы равны $720° : 6 = 120°$. В общем случае углы правильного n-угольника равны $\frac{n-2}{n}\cdot 180°$.

2. Сформулируйте определение прямоугольника. Сформулируйте и докажите свойство диагоналей прямоугольника.

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

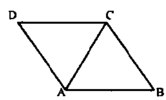
Т.к. прямоугольник является параллелограммом, то он обладает свойствами параллелограмма.

1) Диагонали прямоугольника равны. Действительно, пусть $ABCD$ – прямоугольник с диагоналями AC и BD. $\triangle ACD$ равен $\triangle DBA$ по двум катетам $\Rightarrow AC = BD$. Что и требовалось доказать.

Билет № 12 **20**

1. Приведите формулы площади треугольника. Приведите примеры их применения.

(1) Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на проведенную к ней высоту.



Доказательство:

Пусть ABC – данный треугольник. Дополним этот треугольник до параллелограмма. Площадь параллелограмма равна сумме площадей треугольников ABC и CDA. Так как эти треугольники равны, то площадь параллелограмма равна удвоенной площади треугольника ABC. Высота параллелограмма, соответствующая стороне AB, равна высоте треугольника ABC, проведенной к стороне AB. Учитывая, что площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту, заключаем (1).

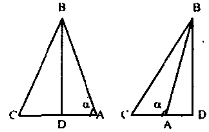
Также площадь треугольника равна половине произведения двух любых его сторон на синус угла между ними.

Доказательство: Пусть ABC – данный треугольник.

Докажем: $S = \frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot \sin A$.

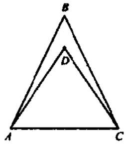
Проведем в треугольнике ABC высоту BD. Имеем.

$S = \frac{1}{2}AC\cdot BD$.



Из прямоугольного треугольника ABD $BD = AB\sin\alpha$, если угол α острый,

3. Задача: Внутри равностороннего треугольника ABC отмечена точка D, такая, что $\angle BAD = \angle BCD = 15°$. Найдите угол ADC.



$\angle DAC = 60° - 15° = 45°$;

$\angle DCA = 60° - 15° = 45°$

$\angle ADC = 180°$
$- \angle DAC - \angle DCA = 90°$

Ответ: 90°.

4. Задача: Окружность радиуса R касается гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника в вершине его острого угла и проходит через вершину прямого угла. Найдите длину дуги, заключенной внутри треугольника, если $R = \frac{8}{\sqrt{\pi}}$.

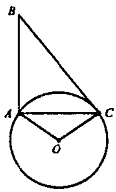
$AB = AC \to \angle ABC = \angle ACB = 45°$

$\angle ACO = \angle BCO - \angle ACB = 45°$

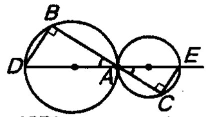
$OA = OC = R \Rightarrow \angle ACO =$
$= \angle CAO = 45°$

$\angle AOC = 180° - 2 \cdot 45° = 90°$

$l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot \frac{8}{\pi}}{180} \cdot 90 = 4$



Ответ: 4.



$\Delta ABD \sim \Delta ACE$ (по двум углам).

Отсюда $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{18}{6} = 3 \Rightarrow AB = 3AC =$
$= 15$ см.

Ответ: 15 см.

$BD = AB\sin(180° - \alpha)$, если α – тупой.
Но $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, поэтому в любом случае
$BD = AB\sin\alpha$. Следовательно, $S = \frac{1}{2} AC \cdot AB \sin A$.

Что и требовалось доказать.
Пусть P – полупериметр треугольника,

$P = \frac{a+b+c}{r}$; a, b, c – стороны, r – радиус вписанной, а R – описанной окружности. Тогда:
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ – формула Герона.

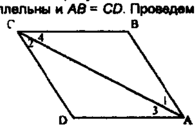
$S = P \cdot r$, $S = \frac{abc}{4R}$.

2. Сформулируйте определение параллелограмма. Сформулируйте и докажите признак параллелограмма по выбору учащегося.

Параллелограмм – это четырехугольник, в котором противоположные стороны попарно параллельны.

1) Если в четырехугольнике 2 стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник – параллелограмм.

Доказательство: Пусть в четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD параллельны и $AB = CD$. Проведем диагональ AC, разделяющую данный четырехугольник на 2 треугольника: ABC и CDA. Эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними



(AC – общая сторона, $AB = CD$, $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей AC),

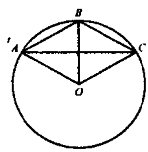
2) Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм – прямоугольник. Пусть в параллелограмме $ABCD$ $AC = BD$. $\Delta ABD = \Delta DCA$ по трем сторонам. $\Rightarrow \angle A = \angle D$, но т.к. в параллелограмме противоположные углы равны, то отсюда следует, что $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$, но $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360° \Rightarrow \angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$, т.е. это прямоугольник.

3. Задача: Через вершины A, B и C ромба ABCO проведена окружность, центром которой является вершина O. Найдите длину дуги AC, содержащей вершину B, если длина всей окружности равна 30 см.

$OA = OB = OC = AB = BC \to$
ΔABO и ΔBCO равносторонние.

$\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC =$
$= 60° + 60° = 120°$

$l_{AC} = l_{окр} \cdot \frac{120}{360} = 10$ см.



Ответ: 10 см.

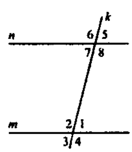
4. Задача: При пересечении двух прямых n и m секущей k образовалось восемь углов. Четыре из них равны 60°, а четыре другие – 120°. Определите взаимное расположение прямых n и m.

Пусть $\angle 1 = 60°$. Тогда $\angle 3 = 60°$; $\angle 2 = \angle 4 = 120°$.

Два из углов 5, 6, 7, 8 равны 60°, а два оставшихся – 120°.

Если $\angle 7 = 60°$, то прямые n и m параллельны.

Если $\angle 8 = 60°$, то прямые n и m пересекаются под углом 60°.



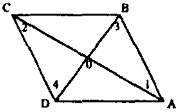
Ответ: параллельны или пересекаются под углом 60°.

21

поэтому $\angle 3 = \angle 4$. Но углы 3 и 4 накрест лежащие при пересечении прямых AD и BC секущей AC, значит, $AD \parallel BC$. Следовательно, $ABCD$ – параллелограмм.

2) Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то он – параллелограмм.

Доказательство: Проведем диагональ AC данного четырехугольника $ABCD$, разделяющую его на треугольники ABC и CDA. Эти треугольники равны по трем сторонам (AC – общая сторона, $AB = CD$ и $BC = AD$ по условию), поэтому $\angle 1 = \angle 2$. Отсюда следует, что $AB \parallel CD$. Так как $AB \parallel CD$ и $AB = CD$, то по признаку 1) $ABCD$ – параллелограмм.



3) Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм.

Доказательство: Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, в котором диагонали AC и BD пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам. Треугольники AOB и COD равны по первому признаку равенства треугольников ($AO = OC$, $BO = OD$ по условию, $\angle AOB = \angle COD$ как вертикальные углы), поэтому $AB = CD$ и $\angle 1 = \angle 2$. Из равенства углов 1 и 2 следует, что $AB \parallel CD$. Итак, в четырехугольнике $ABCD$ AB и CD равны и параллельны, значит, по свойству 1) $ABCD$ – параллелограмм.

3. Задача: Точки A, B и C делят окружность на три части так, что $\cup AB : \cup BC : \cup AC = 4 : 7 : 9$. Определите наибольший угол треугольника ABC.

$\cup AB + \cup BC + \cup AC = 360^\circ$.

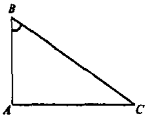
Отсюда $\cup AB = 72^\circ$;

Билет № 13

22

1. Сформулируйте определение тангенса острого угла прямоугольного треугольника. Приведите пример его применения при решении прямоугольных треугольников.

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего этому острому углу катета к прилежащему.



Пример: Пусть дан катет AB прямоугольного треугольника ABC и тангенс его острого угла B $\operatorname{tg} B$.

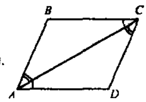
Имеем:

$$\operatorname{tg} B = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC = AB \operatorname{tg} B.$$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = AB\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 B}.$$

2. Сформулируйте определение параллелограмма. Сформулируйте и докажите свойства углов и сторон параллелограмма.

Параллелограмм – это четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.



Теорема: В параллелограмме противоположные стороны и противоположные углы равны.

Доказательство: $\triangle ABC = \triangle ACD$ по стороне и двум прилегающим углам (AC – общая сторона, $\angle CAD = \angle BCA$ и $\angle BAC = \angle ACD$, как накрест лежащие углы, образованные при пересечении секущей

Билет № 14

23

1. Сформулируйте определение внешнего угла треугольника. Сформулируйте теорему о свойстве внешнего угла треугольника. Приведите пример ее применения.

Одной из важнейших теорем геометрии является теорема о сумме углов треугольника.

Теорема: Сумма углов треугольника равна 180°.

Из этой теоремы можно вывести несколько следствий.

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника.

Докажем, что внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним. На рисунке 4 угол 4 - внешний угол, смежный с углом треугольника.

Так как $\angle 4 + \angle 3 = 180^\circ$, а по теореме о сумме углов треугольника $(\angle 1 + \angle 2) + \angle 3 = 180^\circ$, то $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$, что и требовалось доказать.

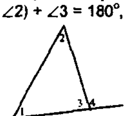


Рис. 4

Из теоремы о сумме углов треугольника следует, что если в треугольнике один из углов прямой или тупой, то сумма двух других не превышает 90°, а значит каждый из них острый. Таким образом, в любом треугольнике либо все 3 угла острые, либо 2 угла острые, а третий тупой или прямой.

24

$\cos\angle A = \cos 90^\circ = 0$ и по формуле получаем $a^2 = b^2 + c^2$ (что и есть теорема Пифагора). Теорема косинусов применяется при решении треугольника (т.е. нахождения всех его сторон и углов по заданным трем элементам). Например:

Дано: ΔABC, BC, AC, $\angle C$.

Найти: $\angle A$, $\angle B$, AB

Решение: По теореме косинусов находим AB: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos\angle C}$.

Пользуясь теоремой косинусов, получаем:

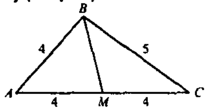
$\cos\angle A = \dfrac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2 \cdot AC \cdot AB}$, и угол A находим по таблице или с помощью микрокалькулятора.

$\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C$.

То есть мы решили треугольник, используя теорему косинусов (дважды).

3. Задача: Стороны треугольника равны 4 см, 5 см и 8 см. Найдите длину медианы, проведенной из вершины большего угла.

Больший угол опирается на большую сторону (см. рис.)



AC параллельных прямых *AD* и *BC*, *AB* и *CD* соответственно).

Отсюда $AB=CD$, $AD=BC$, $\angle B=\angle D$.

$\angle A=\angle BAC+\angle CAD=\angle ACD+\angle BCA=\angle C$.

Теорема доказана.

3. Задача: Длины двух сторон равнобедренного треугольника равны соответственно 6 см и 2 см. Определите длину третьей стороны этого треугольника.

Третья сторона треугольника равна 6 см (если она равна 2 см, то не выполняется неравенство треугольника: 2+2<6 – противоречие).

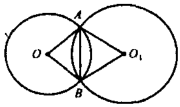
Ответ: 6 см.

4. Задача: Два круга, радиусы которых равны 5 см, имеют общую хорду длины $5\sqrt{2}$ см. Найдите площадь общей части этих кругов.

$OA=O_1A=O_1B=OB \Rightarrow OAO_1B$ – ромб.

$AB^2=\left(5\sqrt{2}\right)^2=5^2+5^2=OA^2+OB^2=O_1A^2+O_1B^2 \Rightarrow$

$\angle AOB=\angle AO_1B=90^\circ$,



то есть OAO_1B – квадрат.

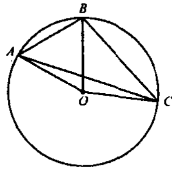
Площадь *S* общей части кругов вычисляется как удвоенная разница площади сектора *AOB* и треугольника *AOB*:

$$S=2\cdot\left(\frac{\pi\cdot 25}{360}\cdot 90-\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\right)=\frac{25(\pi-2)}{2}\text{ см}^2.$$

Ответ: $\frac{25(\pi-2)}{2}$ см^2.

$\cup BC=126^\circ$;

$\cup AC=162^\circ$.



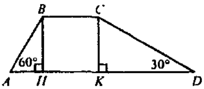
Больший угол треугольника *ABC* опирается на большую дугу, то есть это угол *B*, опирающийся на дугу *AC*.

$\angle B=\frac{162^\circ}{2}=81^\circ$.

Ответ: 81°

4. Задача: Углы при основании AD трапеции ABCD равны 60° и 30°, AD = 17 см, BC = 7 см. Найдите боковые стороны.

Опустим высоты $BH=CK=h$ на основание *AD*.



$HK=BC=7$; $AH+KD=AD-HK=10$;

$AH=BH\cdot\operatorname{ctg}60^\circ=\frac{h}{\sqrt{3}}$;

$KD=CK\cdot\operatorname{ctg}30^\circ=h\sqrt{3}$; $\frac{h}{\sqrt{3}}+h\sqrt{3}=10$; $\frac{4h}{\sqrt{3}}=10$;

$h=\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

$AB=\frac{BH}{\sin 60^\circ}=5$; $CD=\frac{CK}{\sin 30^\circ}=5\sqrt{3}$.

Ответ: 5 см и $5\sqrt{3}$ см.

По теореме косинусов:

$$5^2=4^2+8^2-2\cdot 4\cdot 8\cdot\cos A \Rightarrow \cos A=\frac{55}{64}$$

$$BM^2=4^2+4^2-2\cdot 4\cdot 4\cdot\cos A=32-\frac{55}{2}=\frac{9}{2};$$

$$BM=\frac{3}{\sqrt{2}}\text{ см.}$$

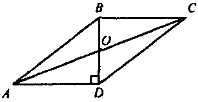
Ответ: $\frac{3}{\sqrt{2}}$ см.

4. Задача: В параллелограмме ABCD диагональ BD перпендикулярна стороне AD. Найдите AC, если AD = 6 см, BD = 5 см.

$$OD=\frac{BD}{2}=\frac{5}{2};$$

$$AO^2=AD^2+OD^2=36+\frac{25}{4}=\frac{169}{4}$$

$AO=\frac{13}{2}$; $AC=2AO=13$ см.



Ответ: 13 см.

2. Сформулируйте и докажите теорему косинусов. Приведите пример ее применения для решения треугольников.

Теорема косинусов: Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

Доказательство: Пусть в треугольнике *ABC*: $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$.

Докажем, например, что

$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\angle A$

Введем систему координат с началом в точке *A* так, как показано на рисунке.

Тогда точка *B* имеет координаты (*c*; *0*), а точка *C* – координаты ($b\cos\angle A$; $b\sin\angle A$). По формуле расстояния между двумя точками получаем:

$BC^2=a^2=(b\cos\angle A-c)^2+b^2\sin^2\angle A=b^2\cos^2\angle A+$
$+b^2\sin^2\angle A-2bc\cdot\cos\angle A+c^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\angle A$,

что и требовалось доказать.

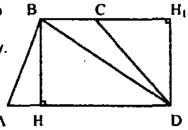
Теорема косинусов является обобщенной теоремой Пифагора, так как если в треугольнике *ABC* угол *A*- прямой, то

Билет № 15

25

1. Приведите формулу площади трапеции. Приведите пример ее применения.

Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.



Доказательство: Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC, высотой BH и площадью S.

Докажем: $S = \dfrac{AD+BC}{2} \cdot BH$

Диагональ BD разделяет трапецию на 2 треугольника ABD и BCD, поэтому $S=S_{ABD}+S_{BCD}$. OH_1 – высота. По формуле для площади треугольника имеем: $S_{ABD} = \dfrac{1}{2}AD \cdot BH$;

$$S_{BCD} = \frac{1}{2}BC \cdot DH_1 = \frac{1}{2}BC \cdot BH \ .$$

Тогда:

$$S = \frac{1}{2}AD \cdot BH + \frac{1}{2}BC \cdot BH = \frac{AD+BC}{2}BH \ .$$

Что и требовалось доказать.

Пример: Основания трапеции равны 3 см и 5 см, а ее площадь равна 16 см^2. Найти высоту h трапеции.

26

$BC = AC \cdot \sin A = A_1C_1 \cdot \sin A_1 = B_1C_1$.

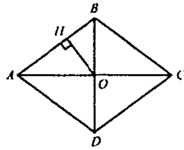
$$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{A_1C_1^2 - B_1C_1^2} = A_1B_1.$$

$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по трем сторонам.

Теорема доказана.

3. Задача: Большая диагональ ромба равна 12 см, а один из его углов равен 60°. Найдите длину вписанной в него окружности.

$AO=OC = 6$ см; $\angle BAO = \dfrac{60°}{2} = 30°$



$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AO}{AB} \Rightarrow AB = \frac{2AO}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

$$BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{48-36} = 2\sqrt{3}$$

$$S_{\Delta ABO} = \frac{1}{2}AO \cdot BO = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \text{ см}^2$$

$$S_{\Delta ABO} = \frac{1}{2}OH \cdot AB = \frac{1}{2}r \cdot 4\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \Rightarrow r = 3\text{см}.$$

$l = 2\pi r = 6\pi$ см

Ответ: 6π см.

Билет № 16

27

1. Сформулируйте теорему о зависимости между сторонами и углами треугольника. Приведите пример ее применения.

Теорема: В треугольнике:

1) против большей стороны лежит больший угол;

2) обратно, против большего угла лежит большая сторона.

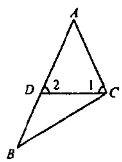
1) Пусть в ΔABC $AB>AC$. Докажем, что $\angle C > \angle B$. Отложим на AB $AD = AC$.

Т.к. $AD<AB$, то D лежит между A и $B \Rightarrow \angle C > \angle 1$.

$\angle 2$ – внешний угол $\Delta BCD \Rightarrow \angle 2 > \angle B \Rightarrow \angle C > \angle B$.

Что и требовалось доказать.

2) Пусть в ΔABC $\angle C > \angle B$. Докажем, что $AB>AC$.



Предположим, что это не так, т.е. либо $AB = AC$, либо $AB<AC$.

В первом случае ΔABC равнобедренный и $\angle B = \angle C$.

Во втором $\angle B < \angle C$ (против большей стороны лежит больший угол).

И то и другое противоречит условию. Теорема доказана.

Пример: В ΔABC $\angle ABC = 24°$, $\angle BAC = 65°$ Какая сторона треугольника имеет наибольшую длину?

Решение: $\angle BCA = 180° - \angle ABC - \angle BAC = 180° - 24° - 65° = 91°$.

$\angle BCA$ – наибольший, поэтому наибольшей стороной является противолежащая $\angle BCA$ – сторона AB.

2. Сформулируйте определение подобных треугольников. Сформулируйте признаки подобия треугольников и докажите один из них по выбору.

Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны, а стороны одного тре-

28

у которых $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$; $\angle A = \angle A_1$.

Покажем, что $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Для этого, учитывая 1-й признак подобия, достаточно доказать, что $\angle B = \angle B_1$.

Рассмотрим ΔABC_2, у которого $\angle 1 = \angle A$, $\angle 2 = \angle B$, $\Delta ABC_2 \sim \Delta A_1B_1C_1$ по первому признаку.

$\Rightarrow \dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC_2}{A_1C_1}$. Но по условию $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} \Rightarrow AC =$

$=AC_2 \Rightarrow \Delta ABC$ и ΔABC_2 – равны по двум сторонам и углу между ними.

$\Rightarrow \angle B = \angle 2$ но $\angle 2 = \angle B_1 \Rightarrow \angle B = \angle B_1$.

Теорема доказана.

Третий признак подобия треугольников.

Если 3 стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны.

Доказательство: пусть стороны ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ пропорциональны $\dfrac{AB}{A_1B_1}$ $\dfrac{BC}{B_1C_1}$ $\dfrac{CA}{C_1A_1}$.

Докажем, что $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Для этого, учитывая 2-й признак подобия, достаточно доказать, что $\angle A = \angle A_1$.

Рассмотрим ΔABC_2, у которого $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$ $\Delta ABC_2 \sim \Delta A_1B_1C_1$ по первому признаку $\Rightarrow$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC_2}{B_1C_1} \quad \frac{C_2A}{C_1A_1}$$

Сравнивая эти равенства, получим, что: $BC = BC_2$, $CA = C_2A \Rightarrow \Delta ABC = \Delta ABC_2$ по трем сторонам.

$\Rightarrow \angle A = \angle 1$, а т.к. $\angle 1 = \angle A$, то $\angle A = \angle A_1$.

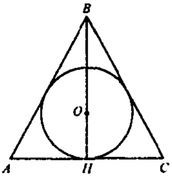
Теорема доказана.

4. Задача: В равнобедренном треугольнике центр вписанной окружности делит высоту в отношении 17 : 15, а боковая сторона равна 34 см. Найдите основание треугольника.

Пусть $BO : OH = 17 : 15$.

Если $OH = 15x$, то $BO = 17x$.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 32x \cdot AC = 16x \cdot AC.$$



С другой стороны,

$$S_{\Delta ABC} = P \cdot r = \frac{34 + 34 + AC}{2} \cdot 15x =$$

$$= \frac{68 + AC}{2} \cdot 15x = 16x \cdot AC$$

$$32x \cdot AC = 15x(68 + AC)$$

$$32AC = 15AC + 15 \cdot 68$$

$$17AC = 15 \cdot 68$$

$$AC = 60 \text{ см}$$

Ответ: 60 см.

Решение:

$$S = \frac{a+b}{2}h = \frac{3+5}{2}h = 4h = 16 \Rightarrow h = 4 \text{ см}.$$

2. Сформулируйте определение равных треугольников. Сформулируйте признаки равенства прямоугольных треугольников и докажите один из них по выбору.

Два треугольника называется равными, если их можно совместить наложением.

Признаки равенства прямоугольных треугольников:

1) Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

2) Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

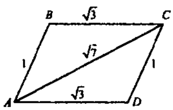
3) Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

Докажем например 3-й признак.

Пусть даны 2 прямоугольных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ с гипотенузами AC и A_1C_1 соответственно.

Пусть $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. Докажем, что такие треугольники равны.

3. Задача: Найдите меньший угол параллелограмма, если его стороны равны 1 и $\sqrt{3}$, а одна из диагоналей равна $\sqrt{7}$.



По теореме косинусов:

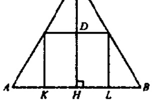
$$\left(\sqrt{7}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos B = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle B = 150^\circ = \angle D, \ \angle A = \angle C = 30^\circ$$

Ответ: 30° и 150°.

4. Задача: В треугольник ABC вписан квадрат так, что две его вершины лежат на стороне AB и по одной вершине – на сторонах AC и BC. Найдите площадь квадрата, если AB = 40 см, а высота, проведенная из вершины C, имеет длину 24 см.

Обозначим сторону квадрата за а.



$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 40 = 480 \text{ см}^2$$

С другой стороны,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot (24 - a) \cdot a + a^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot a \cdot AK + \frac{1}{2} a \cdot BL$$

$$= \frac{1}{2} a(24 - a) + a^2 + \frac{1}{2} a(40 - a) = 32a = 480 \Rightarrow a = 15 \text{см}$$

Площадь квадрата равна $a^2 = 225$ см².

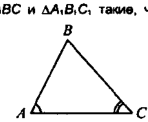
Ответ: 225 см².

угольника пропорциональны соответствующим сторонам другого треугольника.

Первый признак подобия треугольников.

Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.

Доказательство: Пусть ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ такие, что $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Докажем, что $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.



По теореме о сумме углов треугольника $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$, $\angle C_1 = 180° - \angle A_1 - \angle B_1 \Rightarrow \angle C_1 = C$.

Докажем, что стороны треугольников пропорциональны.

Так как $\angle A = \angle A_1$ и $\angle C = \angle C_1$, то

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} \text{ и } \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{CA \cdot CB}{C_1A_1 \cdot C_1B_1} \Rightarrow$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

Аналогично, т.к. $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ можно получить, что $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$.

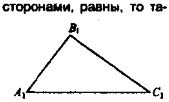
Итак, стороны ΔABC пропорциональны сходственным сторонам $\Delta A_1B_1C_1$. Теорема доказана.

Второй признак подобия треугольников.

Если две стороны одного треугольника пропорционально двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Доказательство:

Рассмотрим два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$,

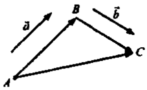


Билет № 17

29

1. Сформулируйте определение вектора. Сформулируйте определение суммы векторов. Сформулируйте свойства сложения векторов. Приведите примеры сложения векторов.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два вектора. Отложим от произвольной точки A вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, а от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



Это правило сложения векторов называется правилом треугольника.

Свойства сложения векторов (для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$):

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

2) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$.

2. Сформулируйте и докажите теорему синусов. Приведите пример ее применения для решения треугольников.

Теорема: Стороны треугольников пропорциональны синусам противолежащих углов.

30

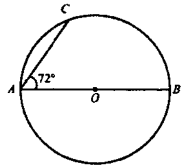
3. Задача: Вписанный угол, образованный хордой и диаметром окружности, равен 72°. Определите, что больше: хорда или радиус окружности.

$\angle ACB = 90°$ (так как опирается на диаметр)

$\angle CBA = 90° - 72° = 18°$

$\angle CBA < \angle ACB \Rightarrow AC < AB$.

Ответ: хорда меньше.



4. Задача: В трапеции ABCD стороны AB и CD равны, биссектриса тупого угла B перпендикулярна диагонали AC и отсекает от данной трапеции параллелограмм. Найдите величину угла BCD.

Пусть $\angle ABC = \alpha$

Тогда $\angle ABK = \angle KBC = \dfrac{\alpha}{2}$.

$\angle CDK = \angle KBC = \dfrac{\alpha}{2}$;

$\angle BAD = \angle CDA = \dfrac{\alpha}{2}$;

Билет № 18

31

1. Сформулируйте определение вектора. Сформулируйте определение произведения вектора на число. Сформулируйте свойства произведения вектора на число. Приведите примеры произведения вектора на число.

Вектор – это отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая – концом. Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k|\cdot|\vec{a}|$, причем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены при $k \geq 0$ и противоположно направлены при $k<0$.

Свойства произведения вектора на число (для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и $\forall k$, $l \in \mathbb{R}$):

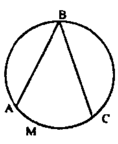
1) $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$; 2) $\forall k$ $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ коллинеарны;

3) $(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$; 4) $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$;

5) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.

2. Сформулируйте определения центрального угла окружности и угла, вписанного в окружность. Сформулируйте и докажите теорему об измерении вписанного угла.

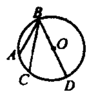
Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется вписанным углом. На рисунке угол *ABC* вписанный, угол *ABC* опирается на дугу *AMC*.



32

или $\angle ABC = \dfrac{1}{2} \cup AC$.

Луч *BO* не делит угол *ABC* на два угла и не совпадает со сторонами этого угла. Тогда луч *BO* пересекает окружность в точке *D*, и дуга *AD* состоит из двух дуг: *AC* и *CD*.



По доказанному выше $\angle ABD = \dfrac{1}{2} \cup AD$, а $\angle CBD = \dfrac{1}{2} \cup CD$, вычитая почленно из первого равенства второе, получим:

$\angle ABD - \angle CBD = \dfrac{1}{2} \cup AD - \dfrac{1}{2} \cup CD$ или

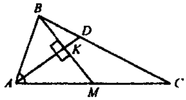
$\angle ABC = \dfrac{1}{2} \cup AC$.

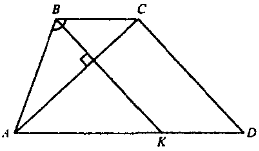
То есть теорема полностью доказана.

3. Задача: Медиана BM треугольника ABC перпендикулярна его биссектрисе AD. Найдите AB, если AC = 12 см.

$\Delta ABK = \Delta AKM$ по стороне и двум прилегающим углам.

Отсюда $AB = AM = \dfrac{AC}{2} = 6$ см.





$\angle BAD + \angle ABC = \frac{\alpha}{2} + \alpha = 180°$;

$\alpha = 120°$.

Ответ: 120°.

Доказательство: Пусть в треугольнике ABC $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$. Докажем, что $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

По теореме о площади треугольника

$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C$, $S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A$,

$S = \frac{1}{2}ca \cdot \sin B$. Из первых двух равенств получаем $\frac{1}{2}ab \cdot \sin C = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A$, откуда

$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$. Точно так же из второго и третьего равенств следует

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$. Итак, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

Теорема доказана.

Пример. В треугольнике ABC сторона $BC = a$, $\sin\angle BAC = \frac{1}{2}$, $\sin\angle ABC = \frac{2}{3}$.

Найти сторону AC.

Решение: По теореме синусов

$\frac{AC}{\sin\angle ABC} = \frac{BC}{\sin\angle BAC}$, откуда получаем, что

$$AC = \frac{BC \cdot \sin\angle ABC}{\sin\angle BAC} = \frac{a \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = a \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}a .$$

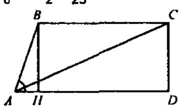
4. Задача: В прямоугольной трапеции ABCD с основаниями 17 см и 25 см диагональ AC является биссектрисой острого угла A. Найдите меньшую боковую сторону трапеции.

$BC=HD=17$;

$AH=AD-HD=8$.

Пусть $\angle BAD = \alpha$; $BH=CD=x$.

Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{8}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{x}{25}$.



Отсюда: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{25}{8}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{25}{8}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} ; \quad \frac{25}{16}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right) = 1$$

$$\frac{25}{16}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{9}{16} ; \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5} ; \quad x = 25 \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 15 .$$

Другой способ: $\angle ABH = \frac{\pi}{2} - \alpha$;

$\angle ACD = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$;

$\angle BCA = \frac{\pi}{2} - \angle ACD = \frac{\alpha}{2}$.

ΔABC равнобедренный, поэтому $AB=BC=17$;

$BH^2 = AB^2 - BH^2 = 17^2 - 8^2 = 225$; $BH = 15$ см

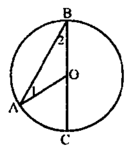
Ответ: 15 см.

Теорема: (о вписанном угле) Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

Доказательство. Пусть $\angle ABC$ – вписанный угол окружности с центром O, опирающийся на дугу AC (рис. 8).

Докажем, что $\angle ABC = \frac{1}{2}\cup AC$. Рассмотрим три возможных случая расположения луча BO относительно угла ABC.

Луч BO совпадает с одной из сторон угла ABC, например, со стороной BC. В этом случае дуга AC меньше полуокружности, поэтому $\angle AOC = \cup AC$. Так как угол AOC – центральный, угол AOB – внешний угол равнобедренного треугольника ABO, а углы 1 и 2 при основании равнобедренного треугольника равны, поэтому $\angle AOC = \angle 1 + \angle 2 = 2\angle 1$. Отсюда следует, что $2\angle 1 = \cup AC$ или



$\angle 1 = \angle ABC = \frac{1}{2}\cup AC$.

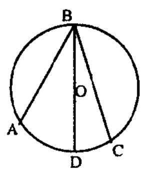
Луч BO делит угол ABC на два угла. В этом случае луч BO пересекает дугу AC в некоторой точке D. Точка D разделяет дугу AC на две дуги: $\cup AD$ и $\cup DC$. По доказанному выше

$\angle ABD = \frac{1}{2}\cup AD$ и

$\angle DBC = \frac{1}{2}\cup DC$. Складывая эти равенства, получаем:

$\angle ABD + \angle DBC =$

$= \frac{1}{2}\cup AD + \frac{1}{2}\cup DC$,



Билет № 19

33

1. Сформулируйте определение скалярного произведения векторов и определение угла между векторами. Приведите пример применения скалярного произведения векторов для определения угла между векторами.

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$$

Свойства скалярного произведения: Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа k справедливы соотношения:

1° $\vec{a}^2\geq 0$, причем $\vec{a}^2>0$ при $\vec{a}\neq\vec{0}$

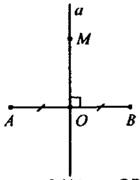
2° $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (переместительный закон)

3° $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ (распределительный закон)

4° $\left(k\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=k\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$ (сочетательный закон)

Свойства 1° и 2° непосредственно следуют из определения скалярного произведения. Для доказательства свойств 3° и 4° необходимо ввести прямоугольную систему координат и воспользоваться формулой скалярного произведения в координатах.

34



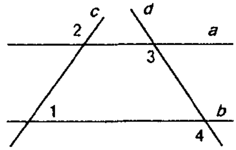
Если нет, то $\Delta OAM=\Delta OBM$ по двум катетам($OA=OB$, OM – общий) $\Rightarrow AM=BM$.

2) Пусть теперь M – произвольная точка, равноудаленная от A и B, докажем, что $M\in a$.

Если $M\in AB$, то M совпадает с O.

Если нет, то ΔAMB – равнобедренный, т.к. $AM=MB$, MO – медиана $\Rightarrow$ и высота $\Rightarrow$ $MO\perp AB$, т.е. прямые MO и a совпадают. Теорема доказана.

3. Задача: На рисунке: $\angle 1$ = 55°; $\angle 2$ = 125°; $\angle 3$ = 123°. Найдите $\angle 4$.



$\angle 4=\angle 3=123°$

Ответ: 123°.

Билет № 20

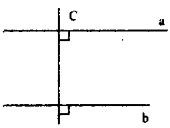
35

1. Сформулируйте свойство углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей. Приведите пример вычисления углов при пересечении параллельных прямых секущей.

Начнем с того, что две различные прямые либо имеют одну общую точку, то есть пересекаются, либо не имеют ни одной общей точки, т.е. не пересекаются.

Определение: Две прямые на плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

Параллельность прямых a и b обозначается: $a \parallel b$. Например, на рисунке прямые a и b перпендикулярны прямой C. Значит, они не пересекаются, то есть параллельны.



Прямая C называется секущей по отношению к прямым a и b, если она пересекает их в двух точках.

При пересечении прямых a и b секущей C образуется восемь углов, которые на рисунке 3 обозначены цифрами. Некоторые из этих углов имеют специальные названия: Углы 3 и 5, 4 и 6 – накрест лежащие; углы 4 и 5, 3 и 6 – односторонние; углы 1 и 5, 4 и 8, 2 и 6, 3 и 7 – соответственные.

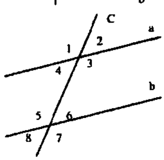


Рис 3

Теорема: Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны, соответственные углы равны, а сумма односторонних углов равна 180°.

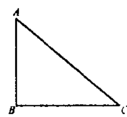
В качестве примера вычисления углов при пересечении параллельных прямых секущей можно привести решение задачи № 3 из билета № 19.

Билет № 21

36

1. Сформулируйте определение косинуса острого угла прямоугольного треугольника. Приведите пример его применения при решении прямоугольных треугольников.

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего этому острому углу катета к гипотенузе.



Пример: Пусть дана гипотенуза AC прямоугольного треугольника ABC и косинус его острого угла A. *Имеем*:

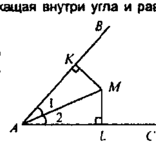
$$\cos A=\frac{AB}{AC}\Rightarrow AB=AC\cdot\cos A\ ;\ BC=\sqrt{AC^2-AB^2}\ .$$

2. Сформулируйте определение биссектрисы угла. Сформулируйте и докажите свойство биссектрисы треугольника.

Луч, исходящий из вершины угла и делящий его на 2 равных угла, называется биссектрисой угла.

Каждая точка биссектрисы неразвернутого угла равноудалена от его сторон.

Обратно: каждая точка, лежащая внутри угла и равноудаленная от сторон угла, лежит на его биссектрисе



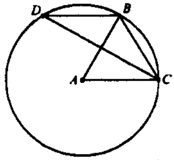
1) Возьмем произвольную точку M на биссектрисе угла BAC, проведем $MK\perp AB$, $ML\perp AC$.

Докажем, что $MK=ML$.

Это действительно так, поскольку ΔAMK и ΔAMC равны по гипотенузе и острому углу.

2) Пусть M лежит внутри угла BAC и равноудалена от его сторон AB и AC

4. Задача: Треугольник ABC – равносторонний со стороной, равной а. На расстоянии а от вершины A взята точка D, отличная от точек B и C. Найдите угол BDC.



ГМТ, отстоящих от вершины A на расстояние a – это окружность с центром в точке A и радиусом a.

$$\angle BDC = \frac{\angle BAC}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ .$$

Ответ: 30°.

Пример: Найти угол между векторами $\vec{a}\{1,1,1\}$ и $\vec{b}\{1,-1,1\}$.

Решение: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot1 + 1\cdot(-1) + 1\cdot1 = 1;$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3};$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2+(-1^2)+1^2} = \sqrt{3};$$

$$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{1}{3} \Rightarrow \angle(\vec{a},\vec{b}) = \arccos\frac{1}{3}.$$

2. Сформулируйте определение серединного перпендикуляра к отрезку. Сформулируйте и докажите свойство серединного перпендикуляра к отрезку.

Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, проходящая через середину данного отрезка и перпендикулярная к нему.

Теорема: Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка.

Обратно: каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.

Доказательство:

Пусть O – серединный перпендикуляр к AB, O – середина этого отрезка.

1) Рассмотрим $M \in a$, докажем, что $AM = MB$. Если M совпала с O – это верно.

Докажем, что AM – биссектриса $\angle BAC$. Также проведем $MK \perp AB$ и $ML \perp AC$.

$\Delta AMK = \Delta AML$ по гипотенузе и катету $\Rightarrow \angle 1 = \angle 2 \Rightarrow$ луч AM – биссектриса.

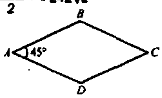
3. Задача: Площадь ромба ABCD равна $242\sqrt{2}$. Вычислите сторону ромба, если один из его углов равен 135°.

Острый угол ромба равен 45°.

$$S_{ABCD} = AB^2 \sin 45^\circ = \frac{AB^2\sqrt{2}}{2} = 242\sqrt{2}$$

$AB^2=484$

$AB=22$ см.



Ответ: 22 см.

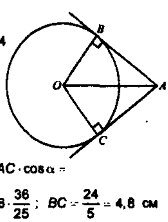
4. Задача: К окружности, радиус которой равен 3, из точки, удаленной от центра окружности на расстояние 5, проведены две касательные. Вычислите расстояние между точками касания.

Обозначим $\angle BAO = \alpha$.

$$AB = AC = \sqrt{OA^2 - OB^2} = 4$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{7}{25}$$



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cdot\cos\alpha =$$

$$= 16 + 16 - 2\cdot4\cdot4\cdot\frac{7}{25} = 16\cdot\frac{36}{25};\ BC = \frac{24}{5} = 4{,}8 \text{ см}$$

Ответ: 4,8 см.

2. Сформулируйте теоремы о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике и докажите один из них по выбору.

Теорема: Квадрат высоты прямоугольного треугольника, опущенной на его гипотенузу, равен произведению отрезков, на которые эта высота разбивает гипотенузу.

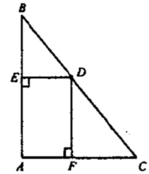
Доказательство:

$\angle ABH = 90^\circ - \angle BAH = \angle HCB \Rightarrow \Delta AHB \sim \Delta HCB$ по двум углам.

$$\frac{AH}{BH} = \frac{BH}{HC} \Rightarrow BH^2 = AH\cdot HC.$$

Теорема доказана.

3. Задача: Из точки, лежащей на гипотенузе равнобедренного прямоугольного треугольника, на катеты треугольника опущены перпендикуляры. Найдите катет треугольника, если периметр полученного четырехугольника равен 12 см.



ΔBED и ΔDFC – равнобедренные.

$AE+DE+DF+AF =$
$=AE+BE+CF+AF=AB+AC=$
$=2AB=12 \Rightarrow AB=6$ см.

Ответ: 6 см.

4. Задача: Около правильного шестиугольника со стороной 8,5 описана окружность. Около этой окружности описан правильный четырехугольник. Найдите сторону четырехугольника.

$a_6=R=8{,}5$ см

$a_4=2r=2\cdot8{,}5=17$ см.

Ответ: 17 см.

Учебное издание

Лаппо Лев Дмитриевич
Попов Максим Александрович

ГЕОМЕТРИЯ

Ответы на экзаменационные билеты
9 класс

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ 77.99.60.953.Д.000454.01.09 от 27.01.2009 г.

Редактор *И.М. Бокова*
Корректор *И.В. Русанова*
Дизайн обложки *И.Р. Захаркина*
Компьютерная верстка *И.Ю. Иванова, Т.Н. Меньшова*

105066, Москва, ул. Нижняя Красносельская, д. 35, стр. 1.
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры,
литература учебная

Текст отпечатан с диапозитивов
в ОАО «Владимирская книжная типография»
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д.7

Качество печати соответствует
качеству предоставленных диапозитивов