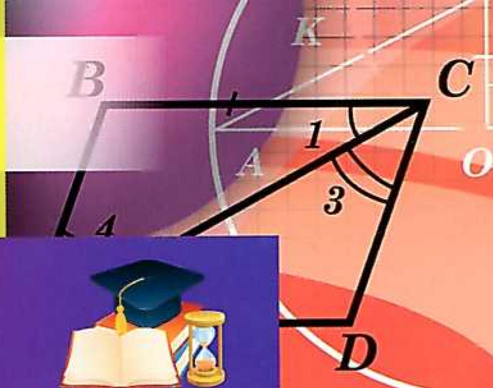
ГИА-9



Под редакцией Ф.Ф. Лысенко,
С.Ю. Кулабухова

ГИА-9

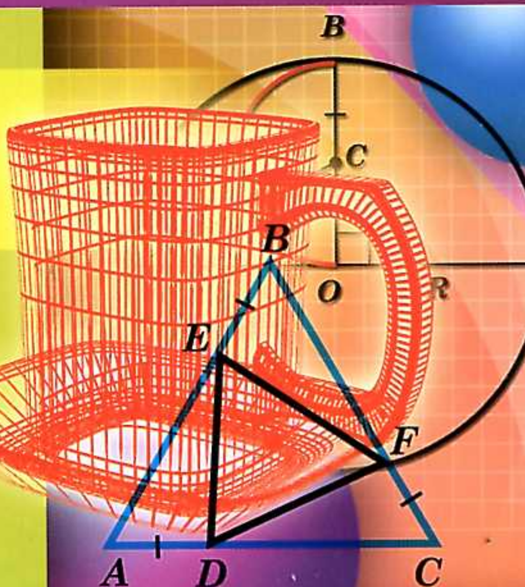
МАТЕМАТИКА

ПОСОБИЕ ДЛЯ «ЧАЙНИКОВ»

МОДУЛЬ 2: ГЕОМЕТРИЯ

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ ГИА-2014

9 класс



УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
«МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ГИА»

ЛЕГИОН

Учебные пособия издательства «Легион» допущены к использованию в образовательном процессе приказом Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009

Учебно-методический комплекс
«Математика. Подготовка к ГИА-9»

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ ГИА-2014. ПОСОБИЕ ДЛЯ «ЧАЙНИКОВ». Модуль 2: Геометрия

ЛЕГИОН
Ростов-на-Дону
2013

ББК 22.1
М 34

Рецензенты:
Евич Л. Н. — кандидат физико-математических наук, доцент
Ольховая Л. С. — учитель высшей категории

Авторский коллектив:
Иванов С. О., Войта Е. А., Резникова Н. М., Ханин Д. И., Коннова Е.Г.

М 34 **Математика. Базовый уровень ГИА-2014. Пособие для «чайников». Модуль 2: Геометрия** / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2013. — 112 с. — (ГИА-9)

ISBN 978-5-9966-0439-5

Материал, представленный в этой книге, предназначен для **формирования устойчивых навыков при решении задач базового уровня** на ГИА-9 по геометрии. Воспользовавшись пособием, можно научиться безошибочно решать задания первой части предстоящего экзамена и сэкономить время для решения более сложных задач.

Пособие состоит из 4 глав, каждая из которых включает в себя краткую теоретическую информацию, разбор решений типовых задач, а также варианты для самостоятельного решения. Кроме того, в пособии приведено **10 обобщающих тренировочных тестов**, включающих задания по всем темам экзамена, рассмотренным в книге.

Предлагаемое издание адресовано учащимся 9-х классов общеобразовательных учреждений и учителям математики.

Книга является частью учебно-методического комплекса **«Математика. Подготовка к ГИА-9»**, состоящего из шести пособий («Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2014», «Математика. Базовый уровень ГИА-2014. Пособие для „чайников". Модуль 1: Алгебра», «Математика. 9 класс. Тематические тесты для подготовки к ГИА-2014» и др.)

Продиагностировать уровень знаний и в соответствии с полученными результатами оптимально подобрать пособия, которые понадобятся в процессе подготовки, поможет брошюра «Готовимся к ГИА по математике. С чего начать?», содержащая всю информацию об учебно-методическом комплексе «Математика. Подготовка к ГИА» издательства «Легион».

ББК 22.1

ISBN 978-5-9966-0439-5

Оглавление

2. Зак. № 202

От авторов

Книга «Математика. Базовый уровень ГИА-2014. Пособие для „чайников“. Модуль 2: Геометрия» входит в учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ГИА», выпускаемый издательством «Легион». Пособие предназначено для подготовки девятиклассников к ГИА (государственной итоговой аттестации) и будет полезно в течение всего учебного года. Оно адресовано учащимся 9-х классов общеобразовательных учреждений и учителям математики.

Материал, представленный в этой книге, служит для формирования **устойчивых навыков при решении задач базового уровня по геометрии**. Воспользовавшись этой книгой, школьник научится безошибочно выполнять наиболее простые задания экзамена по геометрии и таким образом сможет сэкономить время для решения более сложных задач.

Пособие состоит из 4 глав, каждая из которых включает в себя

- краткий теоретический минимум;
- разбор решений типовых задач, подобные которым учащимся предстоит выполнять на экзамене;
- варианты для самостоятельного решения.

Каждый вариант для самостоятельного решения в главах 1 – 3 рассчитан на выполнение в течение 20 минут, в главе 4 — в течение 15 минут.

Книгу завершают **10 обобщающих тренировочных тестов**, включающих задания по всем главам книги. Каждый тест рекомендуем выполнять в течение 40 – 50 минут, затем проверить правильность решения с помощью ответов, приведённых в конце пособия. Если ответы не совпадут, следует ещё раз решить задачу, а при необходимости найти подобную среди разобранных примеров.

Настоящее пособие составлено в соответствии со спецификацией и демонстрационным вариантом[1] ГИА 2013 года. Согласно спецификации, на рассмотренные в данной книге темы приходится 10 заданий первой части экзаменационной работы. Отметим, что для удовлетворительной сдачи экзамена необходимо правильно решить любые 8 заданий.

Темы, не вошедшие в данное пособие, представлены в книгах «Математика. Базовый уровень ГИА-2014. Пособие для „чайников". Модуль 1: Алгебра», «Математика. Базовый уровень ГИА-2014. Пособие для „чайников". Модуль 3: Реальная математика.»

Обсудить пособия издательства «Легион», оставить свои замечания и предложения можно на официальном форуме издательства `http://forum.legionr.ru`

Комплекс «Математика. Подготовка к ГИА»

Перечислим книги, входящие в комплекс «Математика. Подготовка к ГИА», выпускаемый издательством «Легион»:

- Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2014.

  Основная книга для подготовки к ГИА-9, включающая необходимый теоретический минимум, сборник авторских тестов, составленных по последней спецификации ГИА, а также сборник задач.

---

[1]Находятся на сайте Федерального института педагогических измерений `http://www.fipi.ru`

- Математика. Решебник. 9 класс. Подготовка к ГИА-2014.
  Книга содержит решения всех тестовых заданий повышенного уровня сложности и всех задач из раздела «Задачник» пособия «Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2014»

- Математика. 9 класс. Тематические тесты для подготовки к ГИА-2014. Алгебра, геометрия, теория вероятностей и статистика.
  Сборник тестов, каждый из которых предназначен для проверки уровня усвоения определённого раздела программы по математике. Сборник охватывает все темы, отражённые в спецификации ГИА.

- Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2014. Учебно-тренировочные тесты.
  Сборник авторских тестов, составленных по последней спецификации ГИА. Дополняет книгу «Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2014».

- Математика. Базовый уровень ГИА-2014. Пособие для «чайников». Модуль 1: Алгебра.

- Математика. Базовый уровень ГИА-2014. Пособие для «чайников». Модуль 2: Геометрия.

- Математика. Базовый уровень ГИА-2014. Пособие для «чайников». Модуль 3: Реальная математика.

Желаем успехов на экзамене!

Глава 1. Базовые понятия и треугольник

Углы

① *Немного полезной информации*

Фигура, образованная двумя лучами с общим началом, называется **углом**. Также углом называют и часть плоскости, ограниченную этими лучами.

Общее начало лучей называется **вершиной угла**, а сами лучи — **сторонами угла** (см. рис. 1).

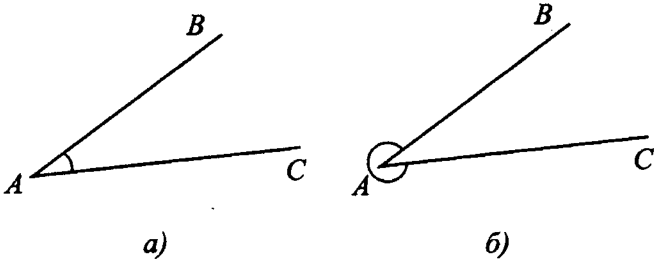


Рис. 1.

Изображённые на рисунке 1 углы обозначаются $\angle BAC$ (или $\angle CAB$, или просто $\angle A$). Но обычно в геометрии рассматриваются «меньшие» углы (см. рис. 1 а), мы будем тоже следовать этому обозначению.

Угол называется **развёрнутым**, если его стороны вместе образуют прямую (см. рис. 2). Величина развёрнутого угла равна 180°.

Рис. 2.

Два угла называются **смежными**, если одна сторона у них общая, а две другие составляют вместе прямую. Например, на рисунке 3 $\angle AOB$ и $\angle BOC$ смежные. Сумма смежных углов равна 180° ($\angle COB + \angle BOA = 180°$).

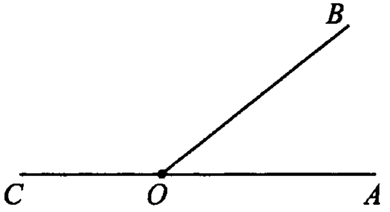


Рис. 3.

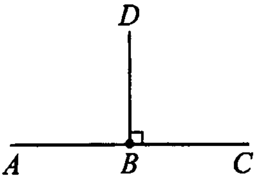


Рис. 4.

Угол, равный своему смежному, называется **прямым**. Например, на рисунке 4 $\angle ABD$ и $\angle DBC$ прямые. Прямой угол равен 90°. DB — перпендикуляр к прямой AC.

Если мы из одной точки опустим перпендикуляр и наклонную к заданной прямой, то длина перпендикуляра будет меньше.

Биссектриса — это луч, исходящий из вершины угла и делящий его пополам. На рисунке 5 BD — биссектриса угла ABC $\left(\angle ABD = \angle DBC = \frac{1}{2}\angle ABC\right)$.

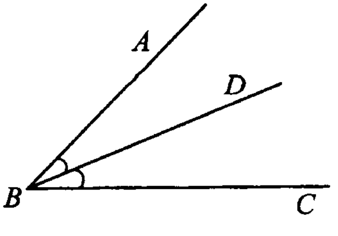


Рис. 5.

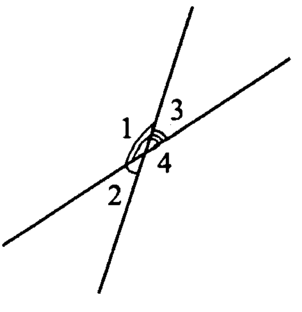


Рис. 6.

Если угол меньше 90°, он называется **острым**, если больше 90°, но меньше 180° — **тупым**.

Две прямые при пересечении образуют 4 угла (см. рис. 6).

Прямые, пересекающиеся под прямым углом, называются **перпендикулярными** (если прямые a и b перпендикулярны, пишут $a \perp b$).

Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого. Вертикальные углы равны. Например, на рисунке 7 $\angle AOB = \angle COD$, $\angle AOC = \angle BOD$.

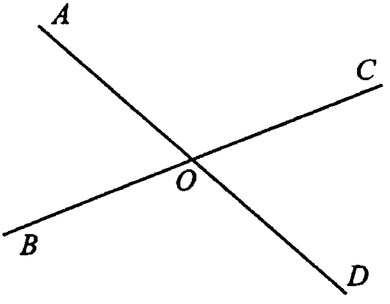


Рис. 7.

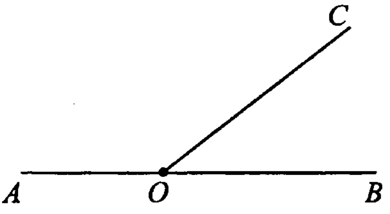


Рис. 8.

В качестве угла между прямыми берётся тот угол, который не является тупым.

Задачи с решениями

1. Найдите градусную меру угла $\angle COB$, если $\angle AOC = 150°$ (см. рис. 8).

Решение.

$\angle AOC$ и $\angle COB$ смежные, значит,

$\angle AOC + \angle COB = 180°$, $\angle COB = 180° - 150° = 30°$.

Ответ: 30.

① *Немного полезной информации*

Прямые, которые не пересекаются, называются **параллельными.**

Две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны. На рисунке 9 имеем $a \perp c$ и $b \perp c$, а значит, $a \parallel b$.

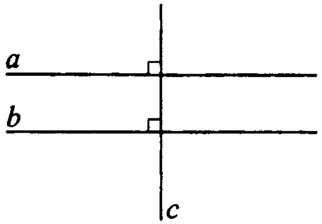


Рис. 9.

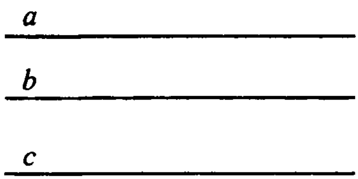


Рис. 10.

Две прямые, параллельные третьей, также параллельны. Например, если $a \parallel b$ и $b \parallel c$, то $a \parallel c$ (см. рис. 10).

Если точка A не лежит на прямой a, то можно провести ровно одну прямую b, проходящую через точку A и параллельную прямой a.

Рассмотрим две прямые, пересечённые третьей, которая называется секущей (см. рис. 11).

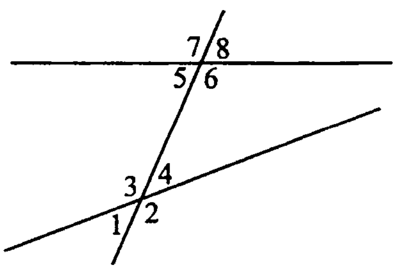


Рис. 11.

$\angle 4$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 6$ накрест лежащие; $\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 7$ соответственные; $\angle 4$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 5$ односторонние.

- Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные накрест лежащие углы, то прямые параллельны.
- Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные соответственные углы, то прямые параллельны.
- Если при пересечении двух прямых третьей сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

Верно и обратное. При пересечении параллельных прямых секущей (см. рис. 12) накрест лежащие углы равны ($\angle 4 = \angle 5$, $\angle 3 = \angle 6$), соответственные углы равны ($\angle 2 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 7$, $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 4 = \angle 8$), а сумма односторонних углов равна 180° ($\angle 4 + \angle 6 = 180°$, $\angle 3 + \angle 5 = 180°$).

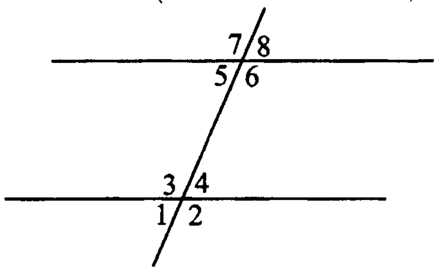


Рис. 12.

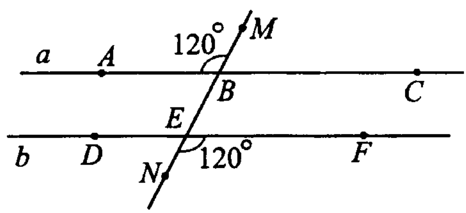


Рис. 13.

Расстоянием между двумя параллельными прямыми называется длина перпендикуляра, соединяющего две точки этих прямых.

Задачи с решениями

2. Докажите, что прямые a и b параллельны (см. рис. 13).

Решение.

$\angle DEB = \angle FEN = 120°$ (как вертикальные углы) и, следовательно, $\angle DEB = \angle ABM$.

Так как соответственные углы DEB и ABM равны, то прямые a и b параллельны.

Немного полезной информации

Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, перпендикулярная отрезку и проходящая через его середину. Все точки, лежащие на серединном перпендикуляре к отрезку, равноудалены от его концов (например, на рисунке 14 прямая a — серединный перпендикуляр к отрезку AB, а значит, $CA = CB$).

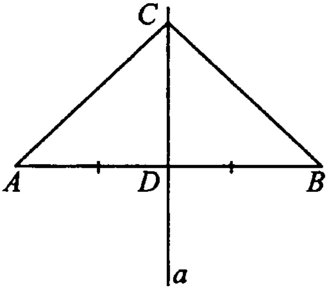


Рис. 14.

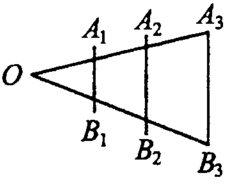


Рис. 15.

Теорема Фалеса. Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

Рассмотрим пример (см. рис. 15). Если
$OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$ и $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, то
$OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$.

Треугольник

Рассмотрим три точки, не лежащие на одной прямой. Это вершины треугольника. Соединим их отрезками — это будут стороны треугольника.

Треугольником называется многоугольник с тремя углами. Например, на рисунке 16 изображён $\triangle ABC$ (так обозначается треугольник с заданными вершинами).

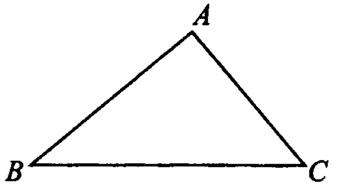


Рис. 16.

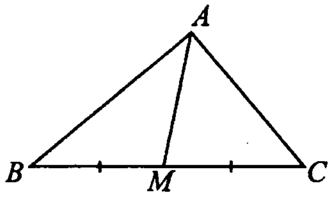


Рис. 17.

Периметром треугольника называется сумма длин его сторон. Например, периметр $\triangle ABC$ (см. рис. 16) равен $AB + BC + CA$.

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны. Например, AM — медиана $\triangle ABC$ (см. рис. 17).

Биссектриса треугольника — отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой противоположной стороны. Проще говоря, отрезок AK (см. рис. 18) — биссектриса треугольника ABC, если $\angle BAK = \angle CAK$.

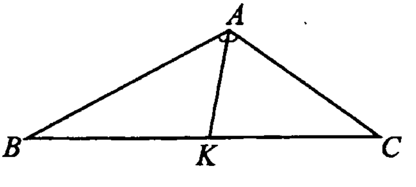


Рис. 18.

Высотой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны (или её продолжения) и перпендикулярный этой стороне. Например, AH — высота $\triangle ABC$ (см. рис. 19).

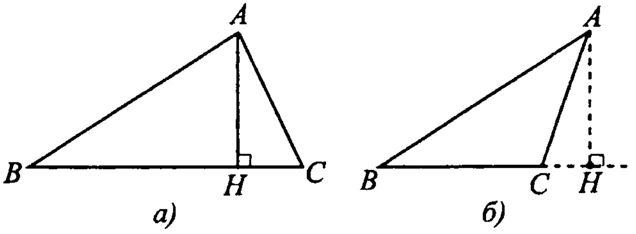


Рис. 19.

Задачи с решениями

3. Укажите номера верных утверждений:

1) Сумма смежных углов равна 90°.

2) При пересечении параллельных прямых секущей накрест лежащие углы равны.

3) Вертикальные углы равны.

4) Если точки A_1, A_2 лежат на одной стороне угла $\angle B_2OA_2$, а точки B_1, B_2 — на другой, $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ и $OA_1 = A_1A_2$, то $B_1B_2 = 2OB_1$ (см. рис. 20).

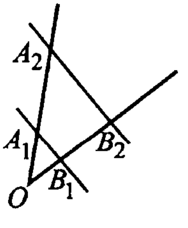


Рис. 20.

5) Развёрнутым называется угол, меньший 90°.

Решение.

Утверждение 1) неверно, так как сумма смежных углов равна 180°.

Утверждение 2) верно, так как оно является свойством параллельных прямых.

Утверждение 3) верно по свойству вертикальных углов.

Утверждение 4) неверно, так как $B_1B_2 = OB_1$ по теореме Фалеса (см. рис. 20).

Утверждение 5) неверно, так как развёрнутый угол равен 180°.

Ответ: 23.

ⓘ *Немного полезной информации*

Сумма углов треугольника равна 180°.

Сумма двух сторон треугольника больше третьей.

Против бóльшей стороны треугольника лежит бóльший угол.

Против бóльшего угла треугольника лежит его бóльшая сторона.

Треугольник, у которого один угол тупой, называется тупоугольным.

Внешние углы треугольника

Угол, смежный с каким-нибудь углом треугольника, называется **внешним углом** треугольника. Например, $\angle CBK$ (см. рис. 21) — внешний угол $\triangle ABC$.

Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов треугольника, не смежных с ним ($\angle CBK = \angle BCA + \angle BAC$, см. рис. 21).

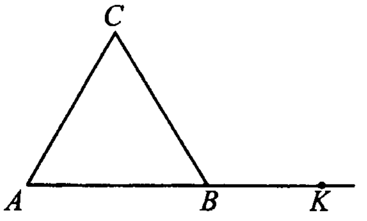


Рис. 21.

Равенство треугольников

Равные треугольники — это такие треугольники, которые можно совместить друг с другом, наложив друг на друга так, чтобы они совпали.

Признаки равенства треугольников.

1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

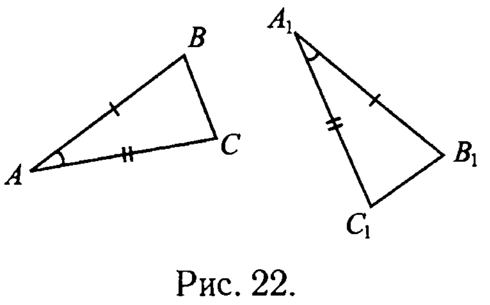


Рис. 22.

Например, если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ (см. рис. 22), то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

2. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

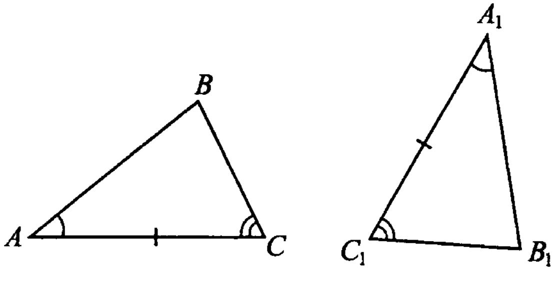


Рис. 23.

Например, если $AC = A_1C_1$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ и $\angle BCA = \angle B_1C_1A_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (см. рис. 23).

3. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

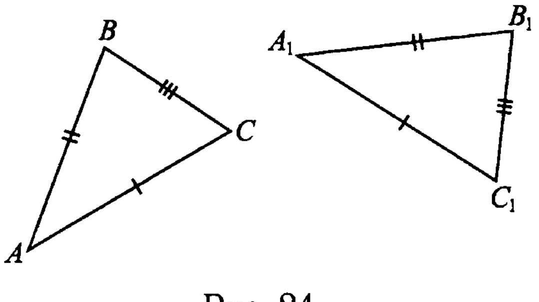


Рис. 24.

Например, если $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (см. рис. 24).

Подобие фигур

Часто встречаются фигуры, которые имеют разные размеры, но одинаковую форму, например, все круги или все квадраты. Такие фигуры называют подобными.

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ **подобны друг другу** ($\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$), если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$,

$\angle C = \angle C_1$ и $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = k$, где k называют **коэффициентом подобия** (см. рис. 25).

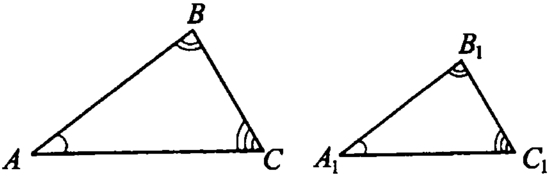


Рис. 25.

В подобных треугольниках медианы, биссектрисы, высоты и периметры пропорциональны с тем же коэффициентом. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия. $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \left(\dfrac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = k^2$.

Признаки подобия треугольников

1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.

Например, если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (см. рис. 26).

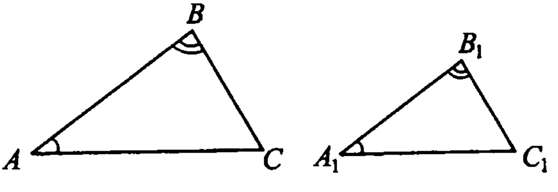


Рис. 26.

2. Если две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, заключённые между этими двумя сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

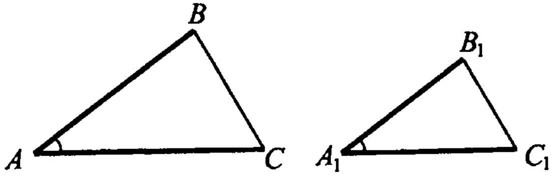


Рис. 27.

Например, если $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}$ и $\angle A = \angle A_1$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (см. рис. 27).

3. Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трём сторонам другого, то такие треугольники подобны.

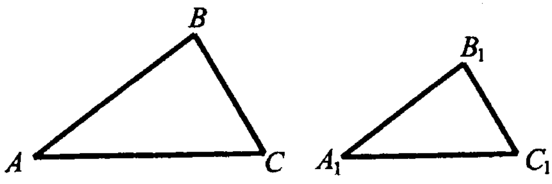


Рис. 28.

Например, если $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (см. рис. 28).

Задачи с решениями

4. Найдите градусную меру угла $\angle C$ треугольника ABC (см. рис. 29), если $\angle A = 120°$, $\angle B = 30°$.

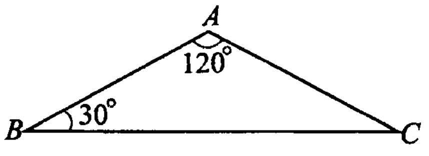


Рис. 29.

Решение.

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, откуда $120° + 30° + \angle C = 180°$, $\angle C = 30°$.

Ответ: 30.

5. Найдите градусную меру меньшего угла между биссектрисами углов $\triangle ABC$, проведёнными из вершин A и C, если $\angle B = 110°$, $\angle C = 24°$.

Решение.

Найдём угол A, используя теорему о сумме углов треугольника.

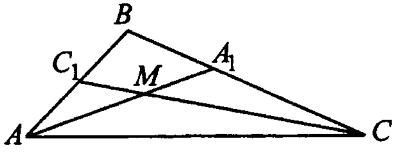


Рис. 30.

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$,

$\angle A = 180° - 110° - 24° = 46°$.

AA_1 и CC_1 — биссектрисы (см. рис. 30), поэтому $\angle MCA = \angle C : 2 = 24° : 2 = 12°$.

Меньший угол между биссектрисами — это внешний угол $\triangle AMC$, $\angle A_1MC = \angle MAC + \angle MCA = 23° + 12° = 35°$.

Ответ: 35.

6. Найдите сторону A_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$, если $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$, $\angle B_1C_1A_1 = \angle BCA$, $AC = 10$, $B_1C_1 = 4$, $BC = 8$ (см. рис. 31).

Решение.

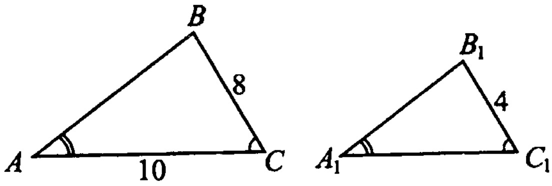


Рис. 31.

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ по двум углам (первый признак подобия треугольников). $\dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{A_1C_1}{AC}$; $\dfrac{4}{8} = \dfrac{A_1C_1}{10}$;

$A_1C_1 = 10 \cdot \dfrac{4}{8} = 5.$

Ответ: 5.

Немного полезной информации

Часто углы измеряют не в градусах, а в радианах. $1° = \dfrac{\pi}{180}$ (радиан), впрочем, единицу измерения часто опускают. $30° = 30 \cdot \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{\pi}{6}$; $60° = \dfrac{\pi}{3}$, $90° = \dfrac{\pi}{2}$, $180° = \pi$ (радиан) и т. д.

Прямоугольный треугольник

Треугольник называется **прямоугольным**, если один из его углов равен 90°. Сторона, лежащая против угла 90° (прямого угла), называется **гипотенузой**, две другие — **катетами**.

Теорема Пифагора.

Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Например, $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (см. рис. 32).

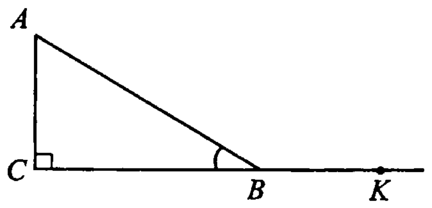


Рис. 32.

Синусом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинусом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Например, $\sin \angle B = \dfrac{AC}{AB}$, $\cos \angle B = \dfrac{CB}{AB}$ (см. рис. 32).

Для любого угла можно найти его синус и косинус, они зависят только от градусной меры угла.

Синус угла равен синусу смежного с ним угла ($\sin \angle ABK = \sin \angle CBA$).

Косинусы смежных углов — противоположные числа ($\cos \angle ABK = -\cos \angle CBA$).

Значения синуса и косинуса некоторых углов

α	**градусы**	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$
	радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin \alpha$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

В прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы. На рисунке 33 в $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, значит, $BC = \frac{1}{2}AB$.

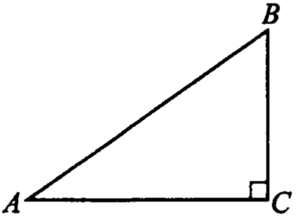


Рис. 33.

Задачи с решениями

7. Найдите $\cos 120°$.

Решение.

Так как угол в 120° смежен с углом в 60° ($120° + 60° = 180°$), то $\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2} = -0{,}5$.

Ответ: $-0{,}5$.

8. Найдите сторону AC треугольника ABC, если $\angle ACB = 90°$, $AB = 5$, $BC = 4$ (см. рис. 34).

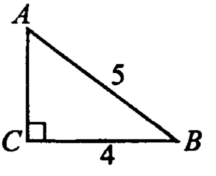


Рис. 34.

Решение.

По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$, откуда $AC^2 = AB^2 - BC^2 = 5^2 - 4^2 = 9$, $AC = \sqrt{9} = 3$.

Ответ: 3.

ⓘ *Немного полезной информации*

Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется **средней линией** треугольника. Она параллельна стороне треугольника и равна её половине. $MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2}AC$ (см. рис. 35).

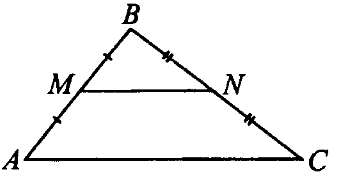


Рис. 35.

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины. На рисунке 36 получаем $\frac{CO}{C_1O} = \frac{BO}{B_1O} = \frac{AO}{A_1O} = \frac{2}{1}$.

Например, если $BB_1 = 12$, то $BO = \frac{2}{3}BB_1 = 12 \cdot \frac{2}{3} = 8$ и $OB_1 = \frac{1}{3}BB_1 = 4$.

Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

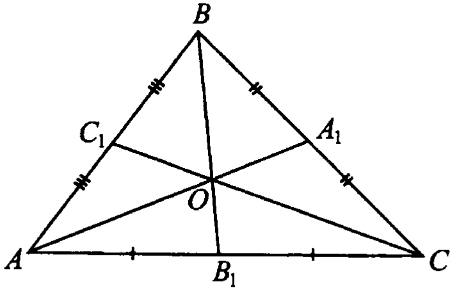


Рис. 36.

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

Равнобедренный и равносторонний треугольники

Треугольник называется **равнобедренным**, если две его стороны равны. Они называются боковыми сторонами. Третья сторона называется основанием. На рисунке 37 $AB = BC$, AC — основание $\triangle ABC$.

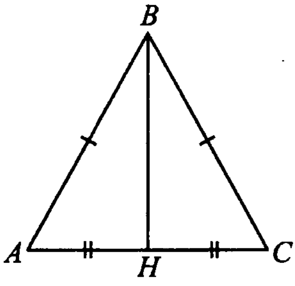


Рис. 37.

В равнобедренном треугольнике углы, прилежащие к основанию, равны ($\angle BCA = \angle BAC$ на рисунке 37), а высота, медиана и биссектриса, проведённые к основанию, совпадают. BH является одновременно и медианой, и биссектрисой, и высотой в $\triangle ABC$ на рисунке 37.

Если в треугольнике два угла равны, то этот треугольник равнобедренный. На рисунке 38 $\angle ABC = \angle ACB$, а значит, $\triangle ABC$ равнобедренный ($AB = AC$).

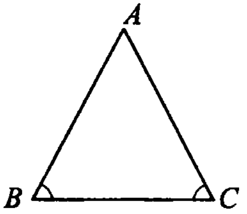


Рис. 38.

Треугольник называется **равносторонним**, если все его стороны равны. Равносторонние треугольники также называют правильными.

В равностороннем треугольнике все углы равны 60°, а медиана, биссектриса и высота, проведённые к любой из его сторон, совпадают.

Если в треугольнике все углы равны, то треугольник равносторонний.

Задачи с решениями

9. Найдите сторону AC треугольника ABC, если $\angle BAC = 120°$, $\angle ABC = 30°$, а $AB = 5$.

Решение.

$\angle ACB = 180° - \angle BAC - \angle ABC = 180° - 120° - 30° = 30° = \angle ABC$, значит, $\triangle ABC$ равнобедренный и $AC = AB = 5$ (см. рис. 39).

Ответ: 5.

10. Медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке O. Найдите AO, если $AA_1 = 6$.

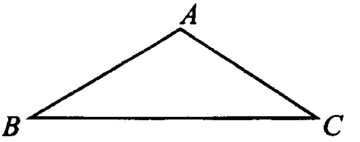


Рис. 39.

Решение.

O — точка пересечения медиан (см. рис. 40).

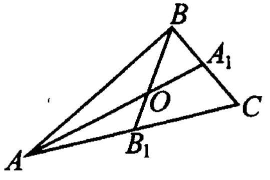


Рис. 40.

$\dfrac{AO}{OA_1} = \dfrac{2}{1} = 2$, $AO = 2OA_1$, $AO + A_1O = AA_1 = 6$, $2OA_1 + OA_1 = 6$, $3OA_1 = 6$, $OA_1 = 2$, $AO = 2OA_1 = 4$.

Ответ: 4.

11. Периметр треугольника равен 39. Найдите его стороны, если стороны подобного ему треугольника равны 3, 4 и 6.

Решение.

Пусть коэффициент подобия треугольников равен k. Тогда искомые стороны равны $3k$, $4k$ и $6k$. Периметр $P = 3k + 4k + 6k = 39$. $k = 3$. Найдём стороны: 9, 12 и 18.

Ответ: 9, 12, 18.

ⓘ *Немного полезной информации*

Площадь треугольника

Площадь треугольника равна половине произведения любой его стороны на высоту, проведённую к этой стороне. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH$ (см. рис. 41).

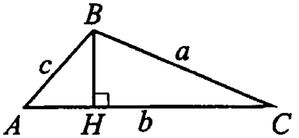


Рис. 41.

Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BA \cdot AC \cdot \sin \angle A$ (см. рис. 41).

Треугольники с равной площадью называются равновеликими.

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC$ (см. рис. 42).

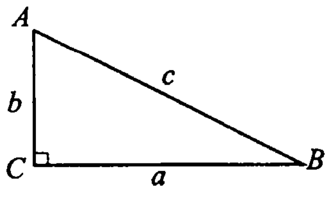


Рис. 42.

Если $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ и $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = k$,

то $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2$.

Задачи с решениями

12. Найдите площадь треугольника, избражённого на рисунке 43.

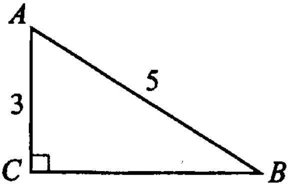


Рис. 43.

Решение.

По теореме Пифагора $CB^2 + AC^2 = AB^2$, $CB =$
$= \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$, $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC \cdot CB = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$.

Ответ: 6.

13. Найдите площади треугольников, изображённых на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 44). Ответ дайте в кадратных сантиметрах.

Решение.

а) Треугольник является прямоугольным. По рисунку катеты равны 3 и 5, площадь $S = 3 \cdot 5 \cdot \dfrac{1}{2} = 7{,}5$.

Проведём высоты на рисунках б) и в) (см. рис. 45).

Найдём площадь S по формуле $S = \dfrac{1}{2}ah$.

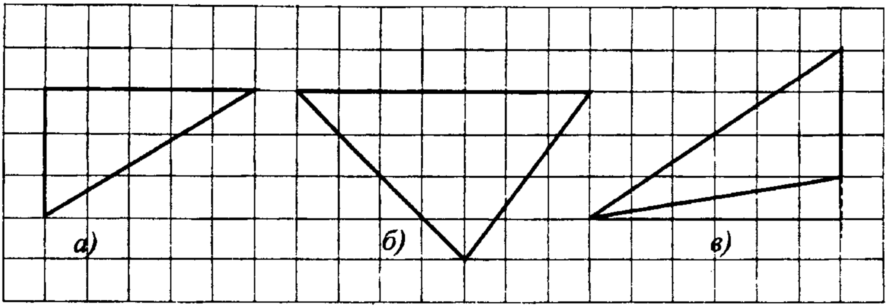


Рис. 44.

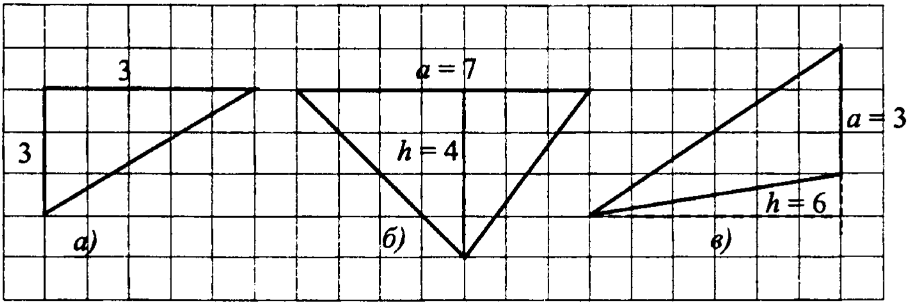


Рис. 45.

б) $S = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 4 = 14;$

в) $S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9.$

Ответ: а) 7,5, б) 14, в) 9.

14. Найдите площадь $\triangle ABC$, изображённого на рисунке 46.

Решение.

$\triangle ABC$ равнобедренный, высота BH является медианой, то есть $AH = HC = 14 : 2 = 7$.

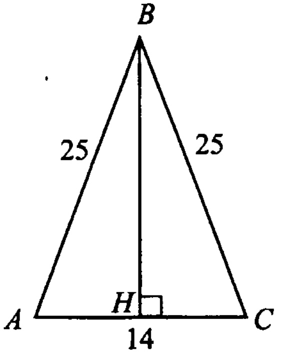


Рис. 46.

Найдём высоту BH из прямоугольного $\triangle ABH$. $BH^2 = AB^2 - AH^2 = 25^2 - 7^2 = 576$, $BH = 24$.
$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 24 = 168.$

Ответ: 168.

Задачи для самостоятельного решения

Вариант 1

1. По данным рисунка 47 найдите $\angle 1$, если $a \parallel b$. Ответ дайте в градусах.

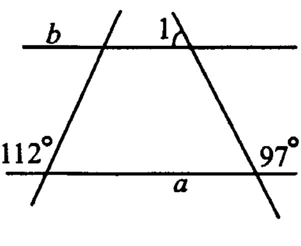


Рис. 47.

2. Дан треугольник ABC со сторонами 9, 4 и 7 (см. рис. 48). Найдите периметр треугольника MNK, вершинами которого являются середины данных сторон.

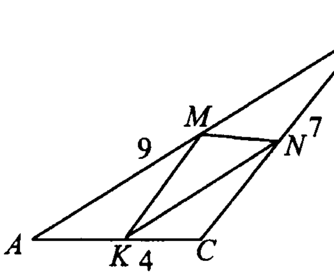


Рис. 48.

3. Найдите площадь треугольника ABC, изображённого на рисунке 49.

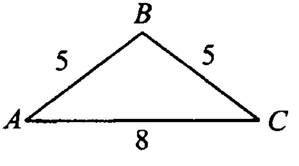


Рис. 49.

4. Найдите периметр прямоугольного треугольника с катетами $AC = 6$, $BC = 8$.

5. Укажите номера верных утверждений.

1) Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

2) Величина одного из углов треугольника может бытьравна 182°.

3) Если два угла треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то треугольники подобны.

4) В треугольнике против большей стороны лежит меньший угол.

5) Смежные углы составляют в сумме 180°.

Вариант 2

1. По данным рисунка 50 найдите $\angle 1$, если $p \parallel q$. Ответ дайте в градусах.

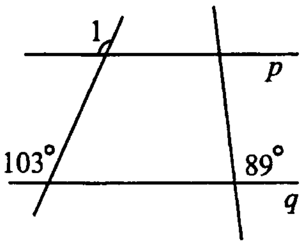


Рис. 50.

2. Дан треугольник ABC со сторонами 3, 4 и 6. Найдите периметр подобного ему треугольника $A_1B_1C_1$, если коэффициент подобия равен 2 и периметр треугольника $A_1B_1C_1$ больше периметра треугольника ABC.

3. Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке 51.

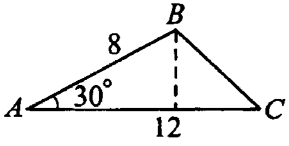


Рис. 51.

4. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если его катеты равны 9 и 12.

5. Укажите номера верных утверждений.

1) Если углы при основании треугольника равны, то этот треугольник равнобедренный.

2) Если две стороны треугольника равны, то он равносторонний.

3) Все высоты треугольника пересекаются в одной точке.

4) Площадь треугольника равна произведению стороны на высоту, перпендикулярную этой стороне.

5) Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Вариант 3

1. По данным рисунка 52 найдите $\angle 1$, если $m \parallel n$. Ответ дайте в градусах.

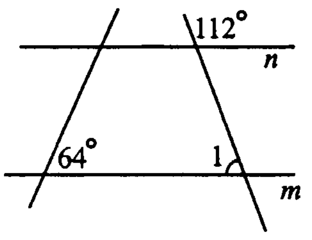


Рис. 52.

2. Дан треугольник со сторонами 6, 8 и 12. Найдите стороны треугольника, подобного данному, если его периметр равен 13.

3. Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке 53.

4. Найдите периметр прямоугольного треугольника, если один из катетов равен 8, а гипотенуза равна 10.

5. Укажите номера неверных утверждений.

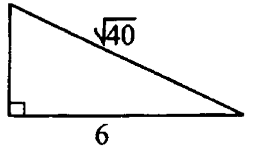


Рис. 53.

1) В равнобедренном треугольнике высота, проведённая к основанию треугольника, является медианой.

2) Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

3) Сумма углов треугольника больше 180°.

4) В треугольнике против большего угла лежит меньшая сторона.

5) Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.

Вариант 4

1. На рисунке 54 $a \parallel b$, $OA : AB = 2 : 3$, $AC = 4$. Найдите BD.

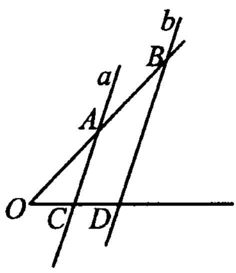


Рис. 54.

2. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Их сходственные стороны относятся как $1 : 3$ $\left(\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{A_1C_1}{AC} = \dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{1}{3}\right)$.

Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна 72.

3. Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке 55.

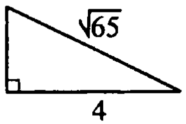


Рис. 55.

4. Найдите BO, если O — точка пересечения медиан $\triangle ABC$, $AB = BC = 5$, $AC = 8$, медиана $BH = 3$ (см. рис. 56).

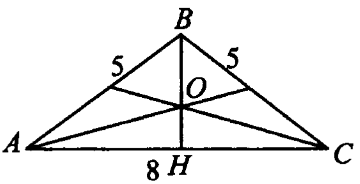


Рис. 56.

5. Укажите номера верных утверждений.

1) В треугольнике медиана не меньше высоты, проведённой из той же вершины.

2) В треугольнике все высоты пересекаются в одной точке.

3) В прямоугольном треугольнике гипотенуза меньше катета.

4) Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести бесчисленное множество прямых, параллельных данной прямой.

5) Треугольники, имеющие равные площади, равны.

Вариант 5

1. На рисунке 57 $a \parallel b$, $AB : CD = 5 : 3$, $OA = 10$. Найдите AC.

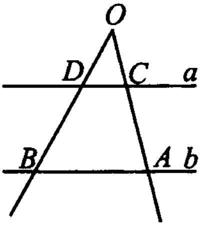


Рис. 57.

2. Стороны треугольника ABC равны 12, 15 и 18. Найдите стороны треугольника $A_1B_1C_1$, подобного данному, если отношение их периметров равно 3 $\left(\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = 3\right)$.

3. Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке 58.

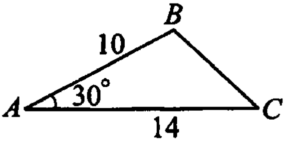


Рис. 58.

4. Найдите катет BC прямоугольного треугольника ABC (см. рис. 59).

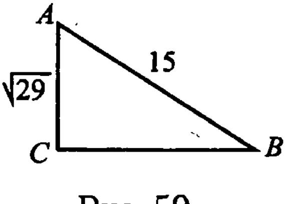


Рис. 59.

5. Укажите номера верных утверждений.

1) Треугольники, имеющие общее основание и вершины, равноудалённые от прямой, содержащей это основание, равновелики.

2) Во всяком треугольнике высота, проведённая к основанию, совпадает с медианой.

3) Если один из углов треугольника острый, то такой треугольник остроугольный.

4) В равнобедренном треугольнике биссектриса и медиана, проведённые из вершины, противоположной основанию, равны.

5) Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Вариант 6

1. На рисунке 60 $a \parallel b$, $AB : CD = 4 : 1$, $OA = 8$. Найдите OC.

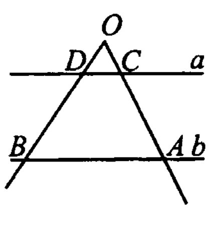


Рис. 60.

2. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Их сходственные стороны соответственно $AB = 2$ и $A_1B_1 = 5$. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника $A_1B_1C_1$ равна 100.

3. Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке 61.

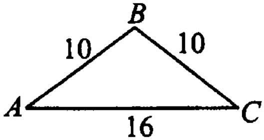


Рис. 61.

4. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, у которого один из катетов равен 10, а противолежащий ему угол равен 30°.

5. Укажите номера неверных утверждений.

1) Сумма углов треугольника равна 180°.

2) Внешний угол треугольника всегда тупой.

3) В равностороннем треугольнике ABC медиана AK равна высоте CH.

4) Площадь прямоугольного треугольника равна произведению двух катетов.

5) Внешний угол треугольника всегда больше внутреннего.

Глава 2. Многоугольники

① *Немного полезной информации*

Параллелограмм

Параллелограмм — это четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны. На рисунке 62 $ABCD$ — параллелограмм, так как $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$.

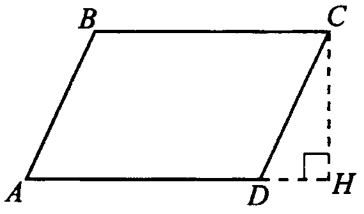


Рис. 62.

Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту, проведённую к этому основанию. $S_{ABCD} = AD \cdot CH$ (см. рис. 62).

Площадь параллелограмма равна произведению двух его сторон на синус угла между ними:
$S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD$ (см. рис. 62).

Свойства:

1) Сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, равна 180°. То есть $\angle A + \angle B = 180°$ и $\angle B + \angle C = 180°$ (см. рис. 62).

2) В параллелограмме противоположные стороны равны, т. е. $AB = CD$, $AD = BC$ (см. рис. 62).

3) В параллелограмме противоположные углы равны, то есть $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$ (см. рис. 62).

4) Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, т. е. $AM = MC$, $BM = MD$ (см. рис. 63).

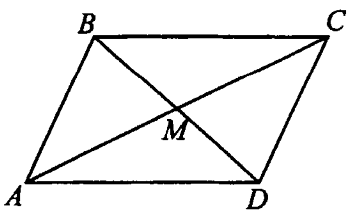


Рис. 63.

Признаки параллелограмма

1) Если в четырёхугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм. То есть, если $AB \parallel CD$ и $AB = CD$, то $ABCD$ — параллелограмм (см. рис. 64).

2) Если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм. То есть, если $AB = CD$ и $BC = AD$, то $ABCD$ — параллелограмм (см. рис. 64).

3) Если в четырёхугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

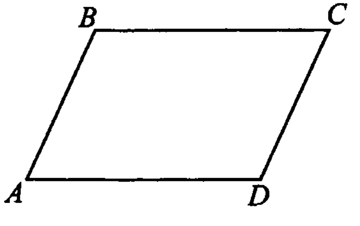


Рис. 64.

Задачи с решениями

6. В четырёхугольнике $ABCD$ $AB = CD = 5$, $\angle DBA = \angle CDB = 30°$. Найдите AO, если $AC = 8$ (см. рис. 65).

Решение.

Так как $\angle DBA = \angle CDB$, то $CD \parallel AB$ по признаку параллельных прямых. Тогда $ABCD$ — параллелограмм. ($AB = CD$, $AB \parallel CD$ — первый признак параллело-

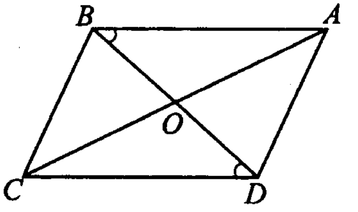


Рис. 65.

грамма). Значит, по свойству 4) параллелограмма получаем $AO = \frac{1}{2}AC = 4$.

Ответ: 4.

7. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке 66 , если величина клеток равна 1.

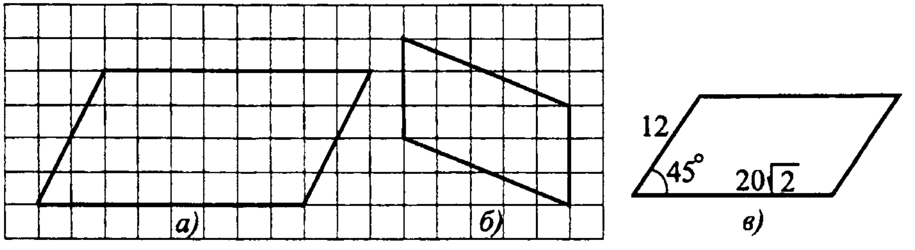


Рис. 66.

Решение.

Проведём высоты в параллелограммах а) и б) (см. рис. 67) и по клеточкам посчитаем их основания a и высоты h. После этого вычислим площадь $S = ah$.

а) $a = 8, h = 4, S = 8 \cdot 4 = 32$.

б) $a = 3, h = 5, S = 3 \cdot 5 = 15$.

в) Вычислим площадь по формуле $S = a \cdot b \cdot \sin\alpha$, где $a = 20\sqrt{2}$,

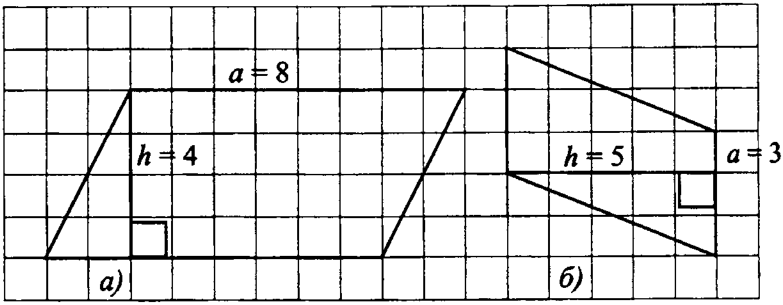


Рис. 67.

$b = 12$, $\alpha = 45°$.

$$S = 20\sqrt{2} \cdot 12 \cdot \sin 45° = 240\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 240.$$

Ответ: а) 32, б) 15, в) 240.

ⓘ *Немного полезной информации*

Трапеция

Трапецией называется четырёхугольник, у которого две стороны параллельны (основания трапеции), а две другие не параллельны. Пример трапеции — на рисунке 68, где BC и AD — основания, а AB и CD — боковые стороны.

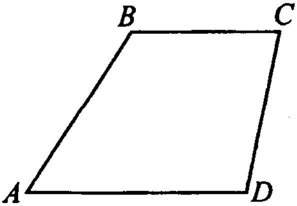


Рис. 68.

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины её боковых сторон (MK в трапеции $ABCD$

на рисунке 69). Средняя линия параллельна основаниям и равна их полусумме, $MK = \frac{1}{2}(BC + AD)$.

Площадь трапеции равна полусумме оснований, умноженной на высоту, $S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BH$ (см. рис. 69).

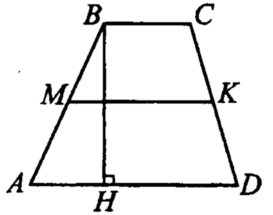


Рис. 69.

Трапеция называется **равнобедренной**, если её боковые стороны равны ($AB = CD$ в трапеции $ABCD$ на рисунке 70).

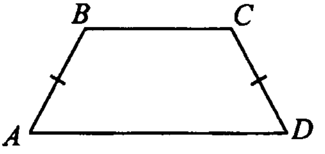


Рис. 70.

В равнобедренной трапеции углы при каждом из оснований равны ($\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$ на рисунке 70). Верно и обратное утверждение: если в трапеции углы при основании равны, то трапеция равнобедренная.

В равнобедренной трапеции диагонали равны. Верно и обратное утверждение: если в трапеции диагонали равны, то она равнобедренная.

Задачи с решениями

8. Найдите площадь трапеции на рисунке 71.

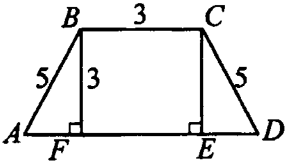


Рис. 71.

Решение.

Заметим, что $BFEC$ — параллелограмм (так как стороны попарно параллельны), откуда $FE = BC$.

Из $\triangle ABF$ по теореме Пифагора найдём
$AF = \sqrt{AB^2 - BF^2} = \sqrt{25-9} = 4$. Аналогично $ED = 4$.
$AD = AF + FE + ED = 4 + 3 + 4 = 11$.
$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot BF = \frac{42}{2} = 21$.

Ответ: 21.

Прямоугольник, ромб, квадрат

Прямоугольник — это параллелограмм, у которого все углы прямые (см. рис. 72).

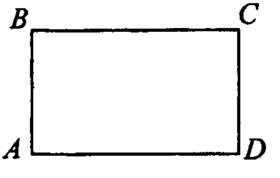


Рис. 72.

Признак прямоугольника: если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Рассмотрим рисунок 73. Если мы знаем, что $ABCD$ — параллелограмм и $AC = BD$, то мы можем утверждать, что $ABCD$ — прямоугольник.

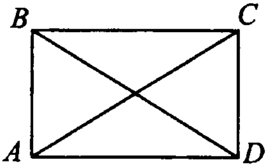


Рис. 73.

Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон ($S_{ABCD} = AB \cdot AD$ на рисунке 73). Диагонали любого прямоугольника равны.

Другим видом параллелограмма является **ромб** — четырёхугольник, все стороны которого равны между собой (см. рис. 74). Ромб является параллелограммом, диагонали которого взаимно перпендикулярны ($AC \perp BD$ на рисунке 75).

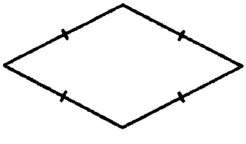


Рис. 74.

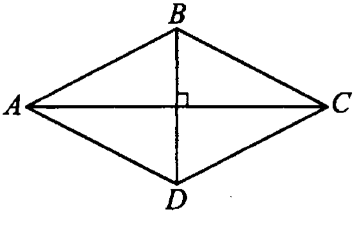


Рис. 75.

Признак ромба: если в параллелограмме диагонали перпендикулярны, то этот параллелограмм является ромбом. Если $ABCD$ — параллелограмм и $AC \perp BD$, то $ABCD$ — ромб (см. рис. 75).

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ для ромба $ABCD$ на рисунке 75.

Квадрат — это такой прямоугольник, у которого все стороны равны (см. рис. 76).

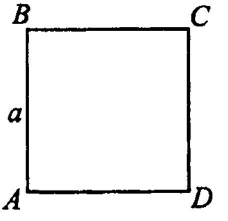


Рис. 76.

Квадрат также является ромбом, а потому сочетает в себе свойства и прямоугольника, и ромба.

Диагональ квадрата $d = \sqrt{2} \cdot a$, если a — сторона квадрата.

Площадь квадрата равна квадрату его стороны, то есть $S_{ABCD} = AB^2 = a^2$ (см. рис. 76).

Если известна диагональ квадрата d, его площадь можно найти по формуле $S = \frac{1}{2}d^2$.

Задачи с решениями

9. Найдите площадь и высоту ромба $ABCD$, изображённого на рисунке 77.

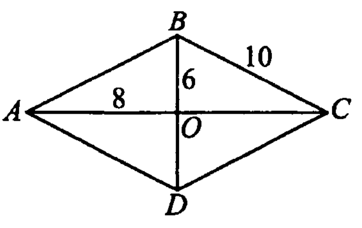


Рис. 77.

Решение.

$BD = 2BO = 2 \cdot 6 = 12$, $AC = 2AO = 2 \cdot 8 = 16$, так как ромб — параллелограмм и диагонали точкой пересечения делятся пополам. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 12 = 96$.

С другой стороны, $S_{ABCD} = AB \cdot h$, где h — высота ромба. $AB \cdot h = 96$, $h = 96 : 10 = 9{,}6$.

Ответ: 96; 9,6.

10. Укажите номера верных утверждений.

1) В равностороннем треугольнике все углы равны 90°.

2) Любой прямоугольник является ромбом.

3) В равнобедренной трапеции углы при основании равны.

4) Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

5) Сумма двух соседних углов ромба может быть больше 180°.

Решение.

Утверждение 1) неверно, так как в равностороннем треугольнике все углы равны 60°.

Утверждение 2) неверно, так как легко привести пример прямоугольника, который не является ромбом (см. рис. 78).

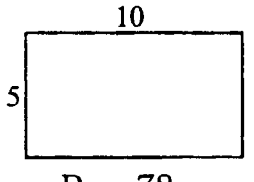


Рис. 78.

Утверждение 3) верно, оно является свойством равнобедренной трапеции.

Утверждение 4) верно, оно является свойством параллелограмма.

Утверждение 5) неверно, так как сумма соседних углов любого параллелограмма равна 180°.

Ответ: 34.

ⓘ *Немного полезной информации*

Многоугольники

Конечно, бывают не только треугольники и четырёхугольники. Иногда встречаются и тринадцатиугольники, и даже 523-угольники. Все многоугольники (n-угольники) подчиняются некоторым общим законам: например, сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n-2)\cdot 180°$. Так, для треугольника сумма углов $(3-2)\cdot 180° = 180°$, для четырёхугольника — $(4-2)\cdot 180° = 360°$, для 13-угольника — $(13-2)\cdot 180° = 1980°$.

Правильным многоугольником называется многоугольник, у которого все стороны равны и все углы равны. На рисунке 79 можно увидеть правильный пятиугольник.

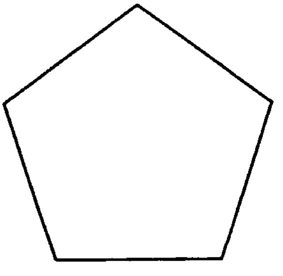


Рис. 79.

Задачи для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Найдите периметр параллелограмма, изображённого на рисунке 80.

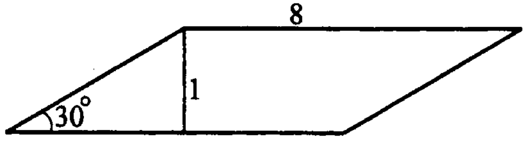


Рис. 80.

2. В ромбе $ABCD$ $\angle ADC = 120°$ (см. рис. 81). Найдите величину $\angle DAB$ (в градусах).

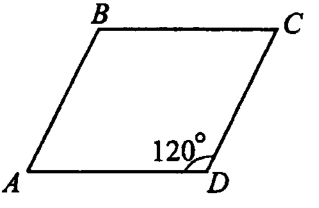


Рис. 81.

3. Найдите площадь ромба, если его сторона равна 6 см, а один из углов 30°.

4. Сумма углов выпуклого n-угольника равна 540°. Найдите количество сторон n-угольника.

5. Укажите номера верных утверждений.

1) В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.

2) Площадь квадрата равна квадрату его стороны.

3) Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

4) Диагонали параллелограмма равны.

5) Отрезок, соединяющий середины любых двух сторон трапеции, является её средней линией.

Вариант 2

1. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке 82.

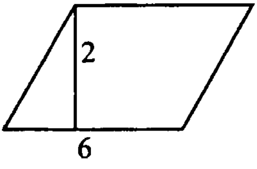


Рис. 82.

2. Пользуясь данными рисунка 83, найдите градусную меру $\angle ABO$, учитывая, что $ABCD$ — ромб. Ответ дайте в градусах.

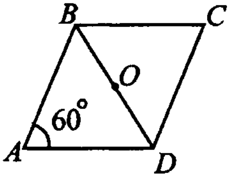


Рис. 83.

3. Найдите площадь трапеции $ABCD$ с основаниями $AB = 15, CD = 8$ и высотой, равной 6.

4. Найдите сумму углов выпуклого восьмиугольника. Ответ дайте в градусах.

5. Укажите номера верных утверждений.

1) Диагонали ромба равны и взаимно перпендикулярны.

2) Сумма углов трапеции равна 180°.

3) Сумма внутренних углов ромба равна 360°.

4) Площадь трапеции равна полусумме оснований, умноженной на высоту.

5) Если один из углов параллелограмма равен 90°, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Вариант 3

1. Найдите углы, прилежащие к одной из сторон параллелограмма, если один из его внешних углов равен 70°. Ответ дайте в градусах.

2. В квадрате диагональ равна $\sqrt{2}$. Найдите сторону квадрата.

3. Найдите площадь ромба, если сторона ромба равна 4 и один из углов ромба равен 30°.

4. Найдите количество сторон выпуклого n-угольника, если сумма его углов равна 900°.

5. Укажите номера неверных утверждений.

1) Сумма углов параллелограмма равна 360°.

2) Противоположные углы параллелограмма в сумме составляют 180°.

3) Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

4) Углы, прилежащие к одной стороне трапеции, в сумме всегда составляют 180°.

5) Диагонали ромба равны.

Вариант 4

1. Найдите бóльшую сторону параллелограмма, если его периметр равен 10 и одна сторона на единицу больше другой.

2. Один из углов ромба равен 100°. Найдите углы, которые образует со сторонами бóльшая диагональ ромба. Ответ дайте в градусах.

3. В трапеции верхнее основание равно 5, нижнее основание 17. Найдите длину отрезка, соединяющего середины боковых сторон трапеции.

4. Найдите величину угла правильного двенадцатиугольника. Ответ дайте в градусах.

5. Укажите номера верных утверждений.

1) Диагонали равнобедренной трапеции равны.

2) Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

3) В параллелограмме суммы противоположных углов равны 180°.

4) Если углы при основании трапеции равны, то её боковые стороны тоже равны.

5) Сумма углов трапеции равна 540°.

Вариант 5

1. В параллелограмме одна из сторон равна 15. Найдите соседнюю с ней сторону, если периметр параллелограмма равен 70.

2. В ромбе $ABCD$ $\angle A = 142°$ (см. рис. 84). Найдите величину угла, смежного с внутренним углом B. Ответ дайте в градусах.

3. Найдите площадь трапеции, если её основания 16 и 10, а высота равна 4.

4. Найдите больший угол (в градусах) выпуклого четырёхугольника, если его углы относятся как 3 : 5 : 7 : 9.

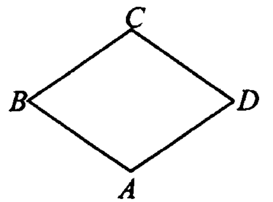


Рис. 84.

5. Укажите номера неверных утверждений.

1) Если в четырёхугольнике сумма двух углов, прилежащих к одной из его сторон, равна 180°, то такой четырёхугольник — параллелограмм.

2) В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны.

3) Прямые, содержащие боковые стороны трапеции, параллельны.

4) Диагонали ромба пересекаются и взаимно перпендикулярны.

5) Площадь параллелограмма равна произведению стороны на высоту, к ней проведённую.

Вариант 6

1. Найдите периметр параллелограмма, изображённого на рисунке 85.

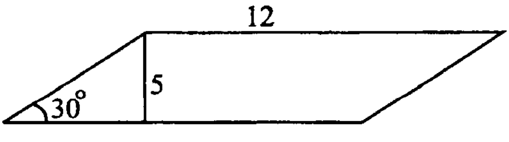


Рис. 85.

2. В квадрате диагональ равна $5\sqrt{2}$. Найдите сторону квадрата.

3. В трапеции нижнее основание равно 20, верхнее — 8. Найдите длину отрезка, соединяющего середины боковых сторон трапеции.

4. Найдите величину угла правильного двадцатиугольника. Ответ дайте в градусах.

5. Укажите номера верных утверждений.

1) В параллелограмме сумма двух углов, прилежащих к одной стороне, равна 90°.

2) Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

3) В параллелограмме противоположные стороны равны и соседние углы равны.

4) Если один из углов параллелограмма тупой, то соседний с ним угол параллелограмма острый.

5) Биссектрисы углов ромба пересекаются в одной точке.

Глава 3. Окружность и круг

Окружность и круг

Окружностью называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, расположенных на заданном расстоянии от данной точки (центра окружности). Пример окружности изображён на рисунке 86.

Отрезок, соединяющий центр окружности с какой-либо точкой окружности, называется **радиусом**.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется **хордой**. Хорда, проходящая через центр окружности, называется **диаметром**. Диаметр — это наибольшая хорда окружности. Диаметр в 2 раза больше радиуса.

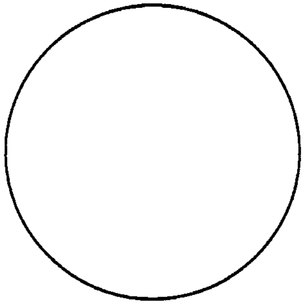


Рис. 86.

На рисунке 87 точка O — центр окружности, OA и OB — радиусы, AB и CD — хорды, при этом AB — диаметр.

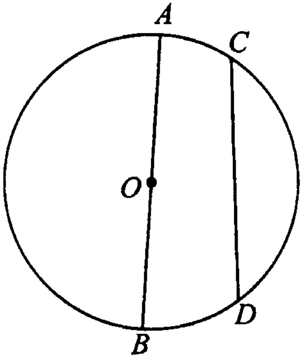


Рис. 87.

Любые две точки окружности делят её на две части. Каждая из этих частей называется **дугой** окружности. На рисунке 88 обозначены $\smile ANB$ и $\smile AMB$ — дуги, ограниченные точками A и B. Если из контекста понятно, о какой дуге идёт речь, то её обозначают только с помощью двух граничных точек, например, $\smile AB$ (см. рис. 88).

Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется **кругом** (см. рис. 89).

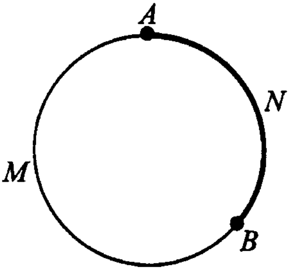


Рис. 88.

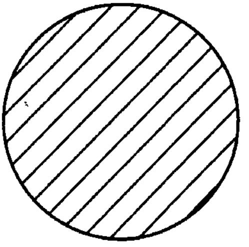


Рис. 89.

Взаимное расположение прямой и окружности

Окружность и прямая могут иметь две общие точки (см. рис. 90 а), одну общую точку (см. рис. 90 б) или не иметь общих точек (см. рис. 90 в).

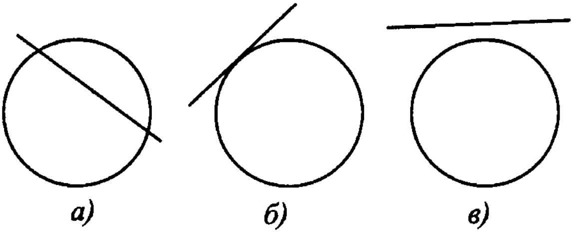


Рис. 90.

Если общих точек 2, то прямая называется **секущей** (см. рис. 90 а), если такая точка одна, то прямая называется **касательной** (см. рис. 90 б).

Радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной. На рисунке 91 касательная $a \perp OA$.

Взаимное расположение двух окружностей

Две окружности могут не иметь общих точек (см. рис. 92), иметь одну общую точку (см. рис. 93) либо иметь две общие точки (см. рис. 94).

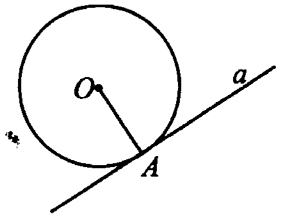


Рис. 91.

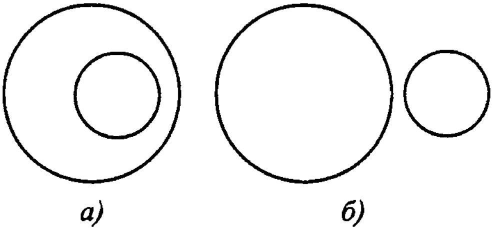


Рис. 92.

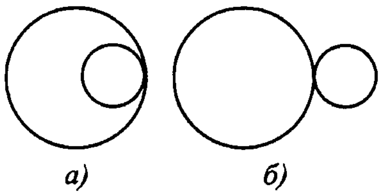


Рис. 93.

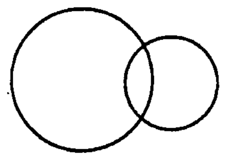


Рис. 94.

Если две окружности касаются, их центры и точка касания лежат на одной прямой (см. рис. 95).

$O_1O_2 = O_1A + AO_2$, $O_3O_4 = O_3M - O_4M$.

Длина окружности и площадь круга

Если радиус окружности равен R, то длина окружности $l = 2\pi R$, а площадь круга, ограниченного данной окружно-

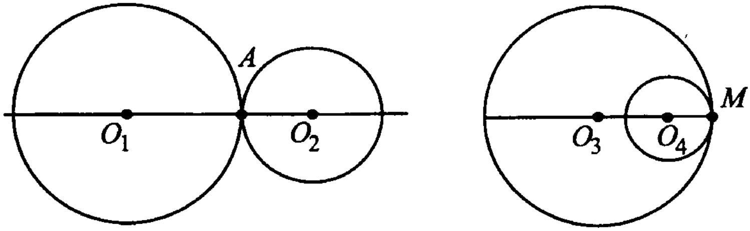


Рис. 95.

стью, $S = \pi R^2$. Зная диаметр (d), можно найти длину окружности как $l = \pi d$, а площадь круга как $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$.

Углы, связанные с окружностью

Угол с вершиной в центре окружности называется **центральным** (см. рис. 96). Угловая величина дуги равна величине центрального угла, на неё опирающегося.

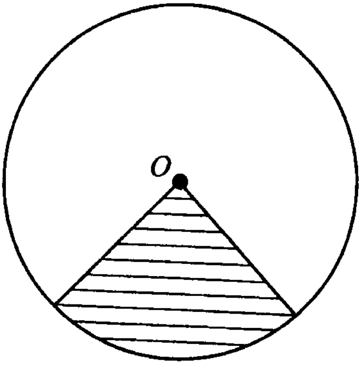


Рис. 96.

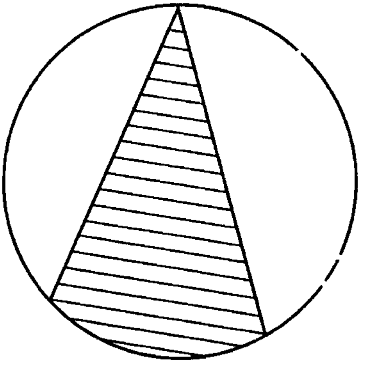


Рис. 97.

Угол, вершина которого принадлежит окружности, а стороны пересекают окружность, называется **вписанным** (см. рис. 97).

Вписанный угол равен половине угловой величины дуги, на которую он опирается. Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны. На рисунке 98 $\angle ABC = \angle AMC$.

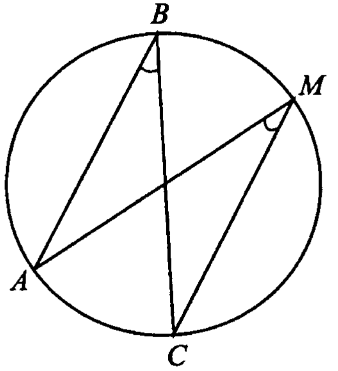


Рис. 98.

Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

Угол между пересекающимися хордами равен полусумме противоположных дуг, высекаемых хордами. На рисунке 99 $\alpha = \frac{1}{2}(\smile AMB + \smile CND)$.

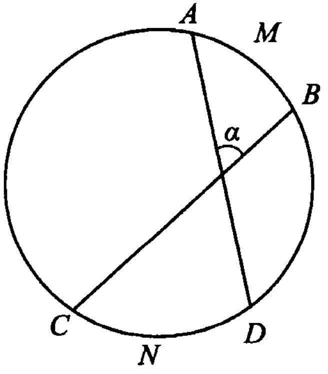


Рис. 99.

Угол между двумя секущими, пересекающимися вне круга, равен полуразности дуг, высекаемых секущими на окружности. На рисунке 100 угол $\alpha = \frac{1}{2}(\smile AMB - \smile CND)$.

Угол между касательной и хордой, проведённой через точку касания, равен половине угловой величины дуги, заключённой между ними. $\alpha = \frac{1}{2} \smile AMB$ на рисунке 101.

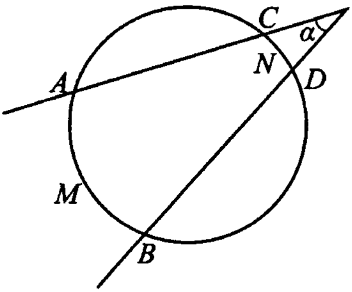


Рис. 100.

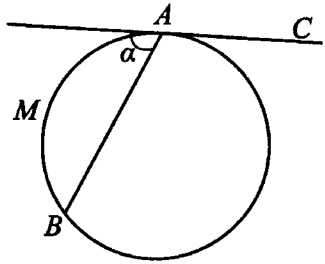


Рис. 101.

Длина дуги и площадь сектора

Рассмотрим дугу окружности радиуса R и центральный угол, на неё опирающийся. Если величина центрального угла (в градусах) равна α, то длина дуги равна $\frac{\pi R \alpha}{180}$. Например, если $\alpha = 60°$, $R = 5$, то длина дуги $\smile AB$ равна $\frac{5\pi \cdot 60}{180} = \frac{5\pi}{3}$ (см. рис. 102).

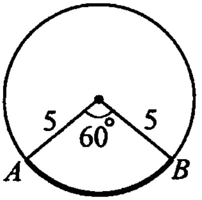


Рис. 102.

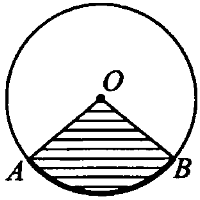


Рис. 103.

Круговым сектором (или просто сектором) называется часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами. Дуга, которая ограничивает сектор, называется **дугой сектора** ($\smile AB$ на рисунке 103). Если её величина равна α (в градусах), то площадь сектора равна $\frac{\pi R^2}{360}\alpha$, где R — радиус окружности.

Задачи с решениями

6. В окружности с центром O (см. рис. 104) найдите градусную меру $\angle ABC$, если $\angle AOC = 82°$.

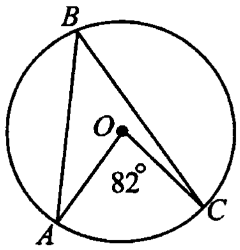


Рис. 104.

Решение.

$\angle ABC$ вписанный, $\angle AOC$ центральный, они опираются на дугу AC, поэтому $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{82°}{2} = 41°$.

Ответ: 41.

7. Найдите длину отрезка AC секущей, используя рисунок 105. O — центр окружности, B — точка касания.

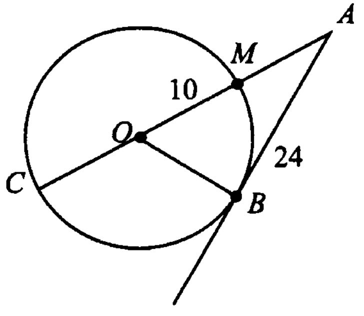


Рис. 105.

Решение.

$OB = OC = OM = 10$ — радиусы окружности. $AC = OA + OC$. Найдём OA из прямоугольного $\triangle OAB$ ($OB \perp BA$ как радиус, проведённый в точку касания). По теореме Пифагора $OB^2 + BA^2 = OA^2$. $OA = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26$. Тогда $AC = 26 + 10 = 36$.

Ответ: 36.

Треугольник и окружность

В любой треугольник можно вписать окружность, которая будет касаться каждой из его сторон, т. е. иметь с ней одну общую точку. Такая окружность — единственная. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, вписанной в треугольник (см. рис. 106).

Вокруг любого треугольника можно описать окружность, которая проходит через все его вершины. Такая окружность — единственная. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая яв-

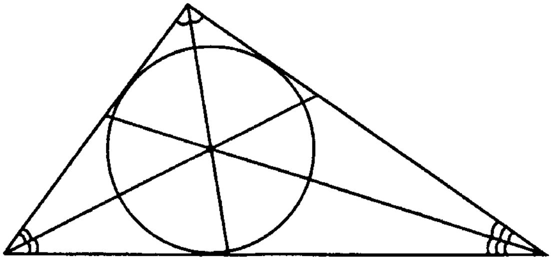
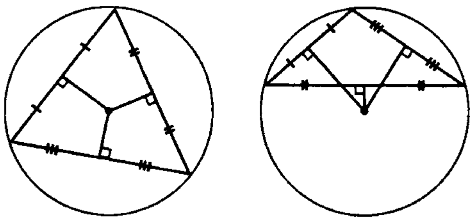


Рис. 106.

ляется центром окружности, описанной около треугольника (см. рис. 107).



а) б)

Рис. 107.

Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности $\left(S = p \cdot r,\right.$ $\left.p = \dfrac{a+b+c}{2}\right)$.

Площадь треугольника равна произведению трёх его сторон, делённому на учетверённый радиус описанной окружности $\left(S = \dfrac{abc}{4R}\right)$.

Если треугольник ABC вписан в окружность и $\angle C = 90°$, то AB — диаметр (см. рис. 108). В этом случае радиус описанной окружности равен половине гипотенузы.

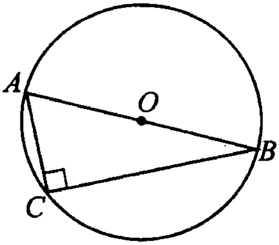


Рис. 108.

Если в треугольнике один из углов опирается на диаметр описанной окружности, то этот угол — прямой.

Задачи с решениями

8. На рисунке 109 окружность с центром O описана вокруг $\triangle ABC$. Найдите радиус окружности.

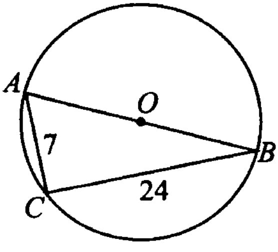


Рис. 109.

Решение.

$\angle ACB$ опирается на диаметр. Значит, $\angle ACB = 90°$, по теореме Пифагора $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = 25$,

$AO = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 25 = 12{,}5.$

Ответ: 12,5.

9. В окружность вписан треугольник. Найдите градусную меру большей из дуг окружности, используя рисунок 110.

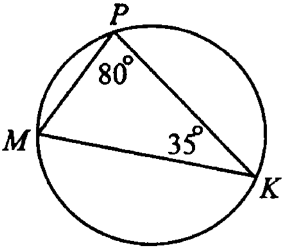


Рис. 110.

Решение.

$\angle MPK$ вписанный, опирается на дугу MK. $\angle MPK = \frac{1}{2} \smile MK$, поэтому $\smile MK = 2 \cdot 80° = 160°$.

Аналогично $\smile MP = 2 \cdot 35° = 70°$.

$\smile PK = 360° - 160° - 70° = 130°$.

Бо́льшая дуга равна 160°.

Ответ: 160.

Четырёхугольник и окружность

Не во всякий четырёхугольник можно вписать окружность.

Не вокруг любого четырёхугольника можно описать окружность.

В любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны. $AD + BC = AB + CD$ (см. рис. 111).

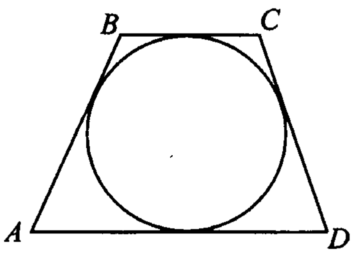


Рис. 111.

Если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность.

В любом вписанном четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180°.

$\angle BCD + \angle BAD = \angle CBA + \angle CDA = 180°$ (см. рис. 112).

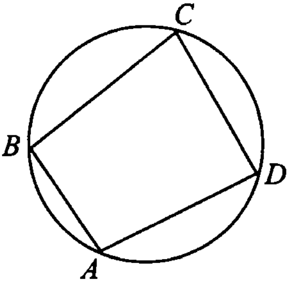


Рис. 112.

Если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180°, то около него можно описать окружность.

Многоугольники и окружность

В любой правильный многоугольник можно вписать окружность, то есть построить такую окружность, которая касается всех сторон правильного многоугольника (имеет с каждой стороной ровно одну общую точку). В этом случае говорят, что многоугольник описан вокруг окружности. Пример для пятиугольника приведён на рисунке 113.

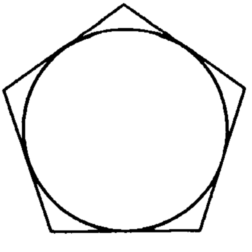


Рис. 113.

6. Зак. № 202

Вокруг любого правильного многоугольника можно описать окружность. То есть построить такую окружность, которая проходит через все вершины правильного многоугольника (см. рис. 114). В этом случае говорят, что многоугольник вписан в окружность.

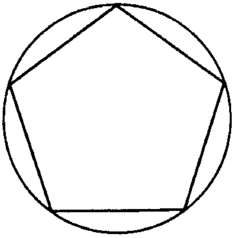


Рис. 114.

Задачи с решениями

10. Около четырёхугольника описана окружность (см. рис. 115). Найдите величину угла A этого четырёхугольника. Ответ дайте в градусах.

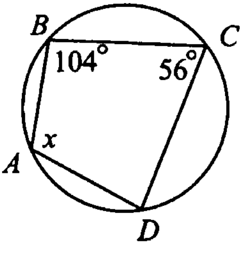


Рис. 115.

Решение.

Сумма противоположных углов вписанного четырёхугольника равна 180°.

$\angle A + \angle C = 180°$, $\angle A = 180° - 56° = 124°$.

Ответ: 124.

11. В четырёхугольник вписана окружность (см. рис. 116). $AB = 10, CD = 8, BC = 5$. Найдите AD.

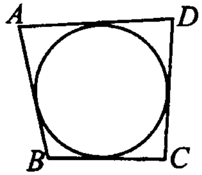


Рис. 116.

Решение.

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Значит, $AB + CD = AD + BC$, то есть $10 + 8 = 5 + AD$, откуда $AD = 18 - 5 = 13$.

Ответ: 13.

Задачи для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Найдите величину угла ACB, изображённого на рисунке 117. Ответ выразите в градусах. O — центр окружности.

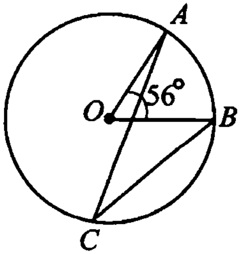


Рис. 117.

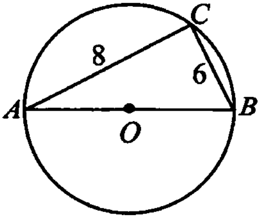


Рис. 118.

2. Найдите радиус окружности с центром O, изображённой на рисунке 118.

3. Окружность вписана в четырёхугольник со сторонами 7, 9, 13, x (см. рис. 119). Найдите величину стороны x.

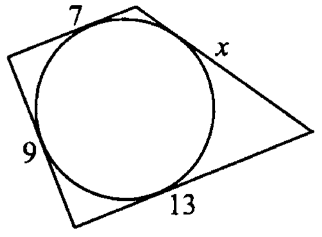


Рис. 119.

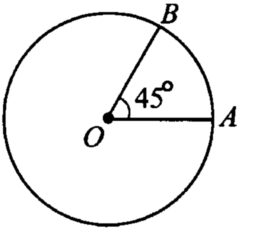


Рис. 120.

4. Найдите площадь S кругового сектора радиусом 1, образованного углом 45° (см. рис. 120). В ответ запишите $\frac{S}{\pi}$.

5. Укажите номера верных утверждений.

1) Если в прямоугольник можно вписать окружность, то этот прямоугольник — квадрат.

2) Многоугольник считается описанным, если все его стороны касаются окружности.

3) В любом описанном четырёхугольнике противоположные стороны равны.

4) В любой треугольник можно вписать окружность.

5) Величина вписанного угла равна величине дуги окружности, на которую он опирается.

Вариант 2

1. Найдите величину угла α, изображённого на рисунке 121. Ответ выразите в градусах. O — центр окружности.

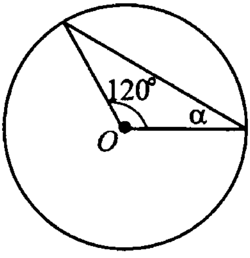


Рис. 121.

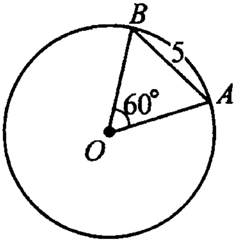


Рис. 122.

2. Найдите радиус окружности с центром O, изображённой на рисунке 122.

3. Около четырёхугольника описана окружность (см. рис. 123). Найдите величину неизвестного угла этого четырёхугольника (в градусах).

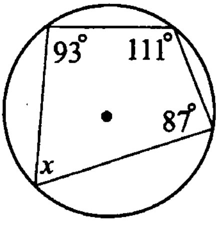


Рис. 123.

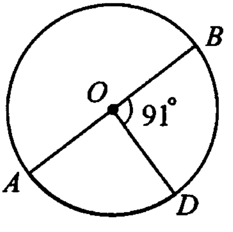


Рис. 124.

4. Найдите величину дуги AD (в градусах), пользуясь рисунком 124. O — центр окружности.

5. Укажите номера неверных утверждений.

1) Около любого ромба можно описать окружность.

2) Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, прямой.

3) Любой выпуклый многоугольник является правильным.

4) Центральный угол окружности равен градусной мере дуги, на которую он опирается.

5) Любой треугольник, имеющий вершину в центре окружности, является равнобедренным.

Вариант 3

1. Найдите величину угла COB, используя рисунок 125. Ответ выразите в градусах. O — центр окружности.

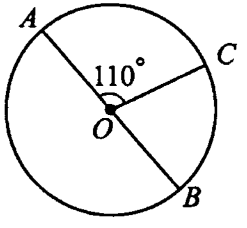


Рис. 125.

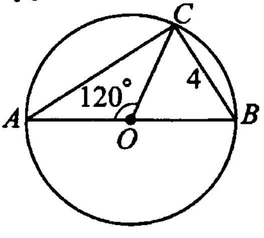


Рис. 126.

2. Найдите радиус окружности с центром O, используя данные рисунка 126.

3. Окружность вписана в четырёхугольник $ABCD$. Используя данные рисунка 127, найдите длину стороны AD.

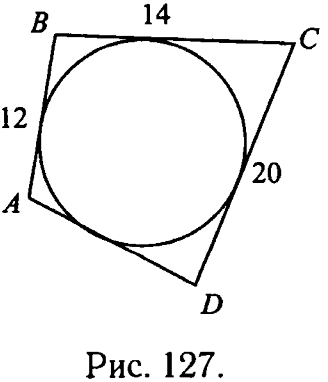


Рис. 127.

4. Найдите площадь S кругового сектора радиусом 2, занимающего четвёртую часть круга. В ответ запишите $\frac{S}{\pi}$.

5. Укажите номера верных утверждений.

1) В треугольник можно вписать только одну окружность.

2) Если в треугольнике, вписанном в окружность, бóльшая сторона является диаметром окружности, то этот треугольник — прямоугольный.

3) Любая хорда окружности меньше её радиуса.

4) Центральный угол в 4 раза больше вписанного.

5) В любой ромб можно вписать окружность.

Вариант 4

1. Найдите величину угла ABC, изображённого на рисунке 128. Ответ выразите в градусах. O — центр окружности.

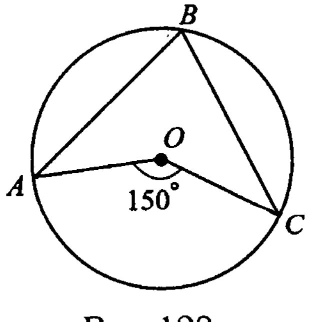


Рис. 128.

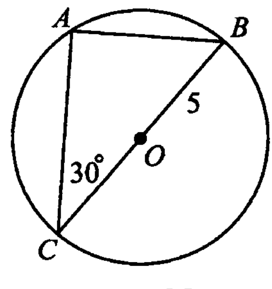


Рис. 129.

2. Найдите длину хорды AB окружности, используя рисунок 129. O — центр окружности.

3. Четырёхугольник вписан в окружность, один из его углов равен 65°. Найдите величину угла, противоположного данному. Ответ выразите в градусах.

4. Найдите угловую величину дуги круга радиуса 10, соответствующей дуге сектора площадью 65π. Ответ выразите в градусах.

5. Укажите номера неверных утверждений:

1) Вокруг параллелограмма всегда можно описать окружность.

2) Около любой трапеции можно описать окружность.

3) У любого выпуклого четырёхугольника, вписанного в окружность, суммы длин противоположных сторон равны.

4) Площадь кругового сектора равна $\frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha$, где R — радиус круга, α — величина дуги сектора.

5) Вписанный угол равен градусной мере дуги, на которую он опирается.

Вариант 5

1. Найдите длину отрезка AD секущей, используя рисунок 130. O — центр окружности.

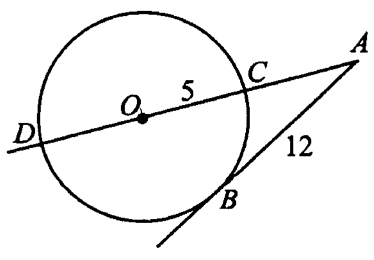


Рис. 130.

2. В окружность вписан треугольник, вершины которого делят окружность на три дуги. Найдите величину меньшей из дуг окружности, используя рисунок 131. Ответ выразите в градусах.

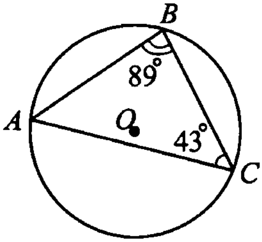


Рис. 131.

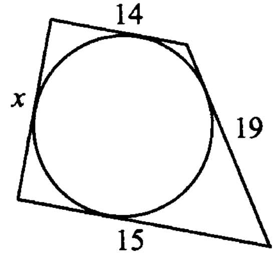


Рис. 132.

3. Окружность вписана в четырёхугольник со сторонами 15, x, 14, 19 (см. рис. 132). Найдите величину стороны x.

4. Найдите площадь S кругового сектора радиусом 3, если сектор занимает двенадцатую часть круга. В ответ запишите $\frac{S}{\pi}$.

5. Укажите номера верных утверждений.

1) Радиус окружности равен половине гипотенузы прямоугольного треугольника, вписанного в эту окружность.

2) Суммы противоположных углов вписанного в окружность четырёхугольника равны.

3) Около любого параллелограмма можно описать окружность.

4) Центральный угол равен половине дуги, на которую он опирается.

5) Прямая и окружность могут иметь три общие точки.

Вариант 6

1. Найдите величину угла ABC, используя рисунок 133. Ответ выразите в градусах. O — центр окружности.

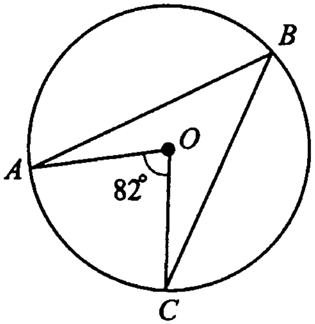


Рис. 133.

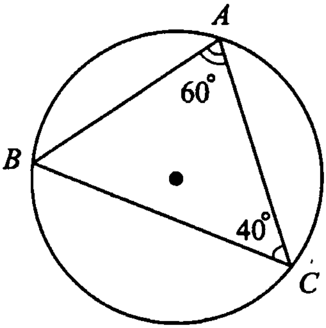


Рис. 134.

2. В окружность вписан треугольник, его вершины разбивают окружность на несколько дуг. Найдите градусную меру большей из них, используя рисунок 134. Ответ выразите в градусах.

3. Окружность описана около четырёхугольника, один из углов которого равен 93°. Найдите величину угла, противоположного данному. Ответ выразите в градусах.

4. Площадь круга равна 12π. Найдите площадь сектора, если величина дуги сектора составляет 120°.

5. Укажите номера неверных утверждений.

1) Около треугольника можно описать окружность и при том только одну.

2) Если вписанный угол опирается на диаметр окружности, то этот угол прямой.

3) Вписанный угол равен градусной мере дуги, на которую опирается.

4) Точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника является центром вписанной окружности.

5) Длина окружности радиусом R равна $2\pi R$.

Глава 4. Векторы и координаты

Векторы

Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая — концом, называется вектором.

Точка плоскости называется нулевым **вектором**.

Длиной или **модулем вектора** $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB. Длина вектора обозначается $|\overrightarrow{AB}|$.

Векторы называются **коллинеарными**, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых. Коллинеарные векторы бывают **сонаправленными** ($\overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{b}$) (см. рис. 135) и **противоположно направленными** ($\overrightarrow{p} \uparrow\downarrow \overrightarrow{d}$) (см. рис. 136).

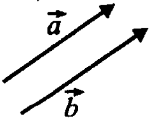


Рис. 135.

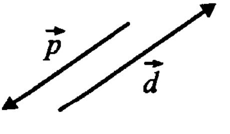


Рис. 136.

Сумма и разность векторов

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$
3. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$

На рисунке 137 показано, как построить сумму и разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

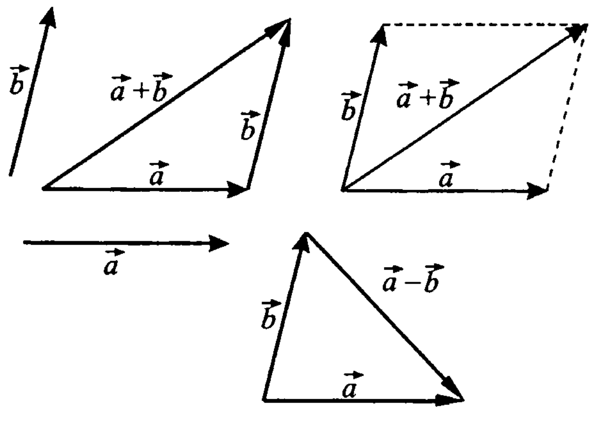


Рис. 137.

4. Умножение вектора на число.

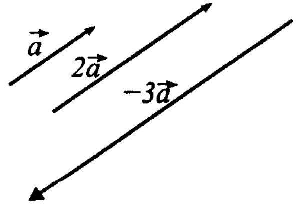


Рис. 138.

$k \cdot \vec{a}$ — такой вектор, длина которого равна $|k| \cdot |\vec{a}|$ и который при $k > 0$ сонаправлен с $\vec{a}$, при $k < 0$ противоположно направлен $\overrightarrow{a}$ (см. рис. 138).

5. Если M — середина AB, то $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$.

Скалярное произведение векторов и его свойства

$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos\alpha$, где α — угол между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ (см. рис. 139).

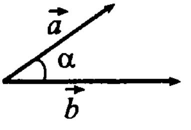


Рис. 139.

$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$

$\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}$

$|\overrightarrow{a}|^2 = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}^2$

$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$

$|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}| \geqslant |\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| \geqslant |\overrightarrow{a}| - |\overrightarrow{b}|$

Координаты вектора

Чтобы найти **координаты вектора**, нужно из координат конца вектора вычесть координаты начала. Если точки A и B заданы координатами $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$, то координаты вектора $\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1\}$.

Длина отрезка $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Например, на рисунке 140 координаты точек $A(5;\ 1)$, $B(1;\ 3)$. Координаты вектора $\overrightarrow{AB}\{1 - 5;\ 3 - 1\}$, то есть $\overrightarrow{AB}\{-4;\ 2\}$. $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

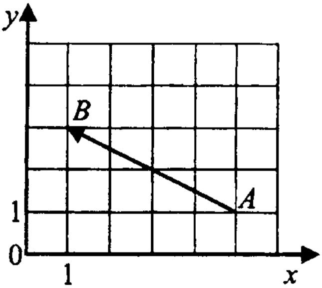


Рис. 140.

Координаты середины отрезка следует находить по формулам $x_c = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$; $y_c = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Например, на рисунке 140 координаты середины отрезка AB равны $x = \dfrac{1+5}{2} = 3$; $y = \dfrac{1+3}{2} = 2$.

Если $\overrightarrow{a}\{x_1;\ y_1\}$, $\overrightarrow{b}\{x_2;\ y_2\}$, то:

1. вектор $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ имеет координаты $\{x_1 + x_2;\ y_1 + y_2\}$;
2. вектор $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ имеет координаты $\{x_1 - x_2;\ y_1 - y_2\}$;
3. вектор $k\overrightarrow{a}$ имеет координаты $\{kx_1;\ ky_1\}$;
4. $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$;
5. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$.

Задачи с решениями

6. Найдите координаты векторов $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $5\vec{a}$, если известно, что $\vec{a}\{2;\ -3\}$, $\vec{b}\{-5;\ -2\}$.

Решение.

$\vec{a} + \vec{b} = \{2 + (-5);\ -3 + (-2)\} = \{-3;\ -5\}$.

$\vec{a} - \vec{b} = \{2 - (-5);\ -3 - (-2)\} = \{7;\ -1\}$.

$5\vec{a} = \{5 \cdot 2;\ 5 \cdot (-3)\} = \{10;\ -15\}$.

Ответ: $\{-3;\ -5\}$, $\{7;\ -1\}$, $\{10;\ -15\}$.

7. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}\{3;\ 8\}$ и $\overrightarrow{MN}\{-2;\ 3\}$.

Решение.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MN} = x_{\overrightarrow{AB}} \cdot x_{\overrightarrow{MN}} + y_{\overrightarrow{AB}} \cdot y_{\overrightarrow{MN}} = 3 \cdot (-2) + 8 \cdot 3 = 18.$

Ответ: 18.

8. Длина вектора $\vec{a}$ равна 4, длина вектора $\vec{b}$ равна 10, а длина вектора $\vec{c}$ равна 5. Найдите $\vec{a} \cdot \vec{b}$ и $\vec{a} \cdot \vec{c}$, если известно, что угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 120°, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ сонаправлены.

Решение.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \widehat{\vec{a}, \vec{b}}.$

Тогда $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 10 \cdot \cos 120^\circ = 40 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -20.$

По условию $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$, значит между ними угол 0°, т.е. $\vec{a} \cdot \vec{c} = 4 \cdot 5 \cdot \cos 0^\circ = 4 \cdot 5 \cdot 1 = 20.$

Ответ: –20; 20.

9. Длина вектора $\vec{m}$ равна 12, длина вектора $\vec{k}$ равна 5. Найдите длину вектора $\vec{m} - \vec{k}$, если вектор $\vec{m}$ перпендикулярен вектору $\vec{k}$.

Решение.

Построим рисунок 141.

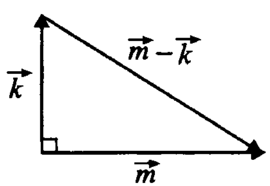


Рис. 141.

$\vec{m} \perp \vec{k}$, поэтому $|\vec{m} - \vec{k}|$ можно найти как гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами 5 и 12. $|\vec{m} - \vec{k}| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.

Ответ: 13.

10. Найдите отрицательную координату y, если расстояние от точки $M(1;\ y)$ до точки $K(4;\ -3)$ равно 5.

Решение.

Запишем расстояние от M до K: $MK = \sqrt{(4-1)^2 + (-3-y)^2} = 5$. Тогда $3^2 + (3+y)^2 = 25$, $(3+y)^2 = 16$, $\left[\begin{array}{l} 3+y=4, \\ 3+y=-4; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} y=1, \\ y=-7. \end{array}\right.$

Выберем отрицательную координату $y = -7$.

Ответ: -7.

Задачи для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Длина вектора $\vec{a}$ равна 3, а длина вектора $\vec{b}$ равна 4. Найдите длину вектора $\vec{a}+\vec{b}$, если вектор $\vec{a}$ перпендикулярен вектору $\vec{b}$.

2. Найдите координаты вектора $\vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a}\{-3;\ 2\}$, $\vec{b}\{2;\ 1\}$.

3. Укажите номера верных утверждений.

1) Координаты равных векторов соответственно равны.
2) Для трёх точек A, B и C выполняется равенство $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

3) Длина вектора вычисляется по формуле
$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$, где $\vec{a}\{x;\ y\}$.

4) От любой точки можно отложить бесчисленное множество векторов, равных данному.

5) Векторы равны, если они сонаправлены.

Вариант 2

1. Длина вектора $\vec{a}$ равна 6, а длина вектора $\vec{b}$ равна 8. Найдите длину вектора $\vec{a}+\vec{b}$, если вектор $\vec{a}$ перпендикулярен вектору $\vec{b}$.

2. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если координаты его начала и конца $A(5;\ 7)$, $B(-3;\ 4)$.

3. Укажите номера неверных утверждений.

1) Длина вектора равна сумме квадратов его координат.

2) Если точка M — точка пересечения диагоналей ромба $ABCD$, то $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$.

3) Координаты вектора равны координатам его начала.

4) Неравенство треугольника выражается формулой
$|\vec{a} + \vec{b}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

5) Единичный вектор имеет длину 0.

Вариант 3

1. Найдите длину вектора $\vec{a}$, если $\vec{a}\{-3;\ 4\}$.

2. Найдите координату x, если расстояние от точки $A(2;\ 3)$ до точки $B(x;\ 1)$ равно 2.

3. Укажите номера верных утверждений.

1) Вектор — это направленный отрезок.

2) Два вектора равны, если равны их длины.

3) Сонаправленные векторы являются коллинеарными.

4) Длина вектора равна значению квадратного корня из суммы квадратов его координат.

5) Вектор $4\vec{b}$ не сонаправлен вектору $\vec{b}$.

Вариант 4

1. Найдите длину вектора $\vec{a}$, если $\vec{a}\{-12;\ 5\}$.

2. Найдите координату x, если расстояние от точки $A(-1;\ x)$ до точки $B(6;\ 3)$ равно 7.

3. Укажите номера неверных утверждений.

1) Вектор $\vec{a}$ сонаправлен вектору $3\vec{a}$.

2) Для любого вектора $\vec{a}$ справедливо $(-1)\cdot\vec{a}=\vec{a}$.

3) Не от любой точки можно отложить вектор, равный данному.

4) Координаты середины отрезка AB равны полусумме соответствующих координат точек A и B.

5) Векторы равны, если они сонаправлены и длины их равны.

Вариант 5

1. Дан вектор $\vec{a}\{3;\ -2\}$. Найдите координаты вектора $3\vec{a}$.

2. Заданы точки $A(-1;\ 3)$, $B(2;\ -4)$. Найдите координаты вектора $\vec{a}=-\overrightarrow{AB}$.

3. Укажите номера верных утверждений.

1) Вектор разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — это вектор суммы вектора $\vec{a}$ и вектора, противоположного вектору $\vec{b}$.
2) Длина вектора вычисляется по формуле $|\vec{a}| = x^2 + y^2$, где $\vec{a}\{x;\ y\}$.
3) Векторы равны, если они имеют одинаковые координаты.
4) Координаты вектора равны координатам его конца.
5) Вектор $\vec{a}$ сонаправлен вектору $5\vec{a}$.

Вариант 6

1. Найдите координаты вектора $\vec{b} - \vec{a}$, если $\vec{a}\{5;\ -3\}$, $\vec{b}\{7;\ 4\}$.

2. Найдите координаты вектора $2\overrightarrow{AB}$, если $A(4;\ -2)$, $B(3;\ -1)$.

3. Укажите номера верных утверждений.

1) Нулевой вектор имеет длину, равную единице.
2) Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.
3) Если вектор $\vec{b}$ имеет координаты x и y, тогда вектор $-\vec{b}$ имеет координаты $-x$ и $-y$.
4) Если у векторов одинаковое начало, то они имеют равные длины.
5) Любой вектор можно задать его координатами.

Тренировочные тесты

Вариант 1

1. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC $\angle BAC = 37°$ (см. рис. 142). В равнобедренном треугольнике с основанием KC найдите величину угла CDK в градусах.

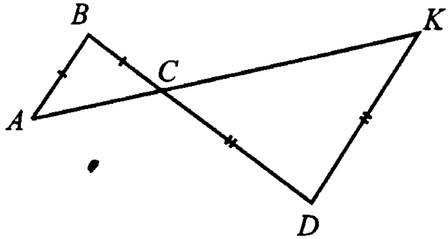


Рис. 142.

2. Из одной вершины на две стороны параллелограмма опустили высоты, длины которых равны 2 и 3,2. Длина большей стороны параллелограмма равна 4. Найдите длину другой стороны.

3. Длина вектора $\overrightarrow{ML}$ равна 2, длина вектора $\overrightarrow{MN}$ равна 4. Косинус угла между ними равен $-0{,}5$. Найдите скалярное произведение $\overrightarrow{ML} \cdot \overrightarrow{MN}$ (см. рис. 143).

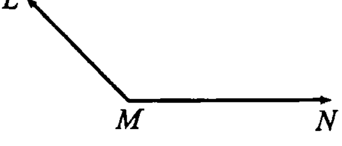


Рис. 143.

4. В трапеции $ABCD$ $\angle A = 70°$, $\angle C = 30°$. Найдите наименьший из углов B и D. В ответе укажите его градусную меру.

5. Найдите расстояние между точками A и G (см. рис. 144).

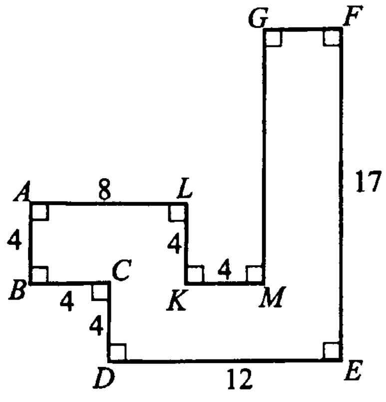


Рис. 144.

6. В трапеции $AB = BC = CD$, $AD = 2BC$ (см. рис. 145). Найдите угол, под которым пересекаются прямые, содержащие боковые стороны AB и CD. Ответ укажите в градусах.

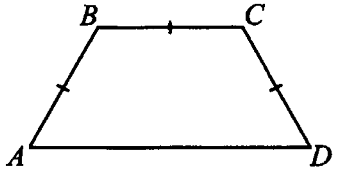


Рис. 145.

7. Найдите периметр трапеции, изображённой на рисунке 146.

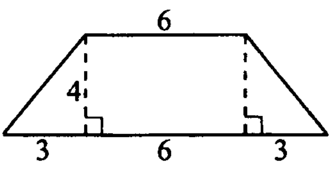


Рис. 146.

8. Укажите номера верных утверждений.

1) Точка пересечения биссектрис треугольника — центр окружности, описанной около него.

2) Сумма углов треугольника — 360°.

3) Диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам.

4) Если противоположные стороны четырёхугольника попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

5) Сумма углов трапеции — 360°.

Вариант 2

1. В равнобедренном треугольнике KLM с основанием KM угол при вершине K равен 50°, LN — медиана. Найдите величину угла NLM. Ответ дайте в градусах.

2. В трапеции $ABCD$ $\angle D = 30°$, $AD = 10$, $AB = 4$, $DC = 12$ (см. рис. 147). Найдите площадь трапеции $ABCD$.

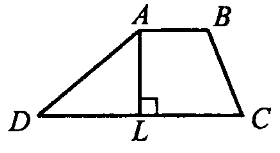


Рис. 147.

3. Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ равна 4, длина вектора $\overrightarrow{AD}$ равна 6. Косинус угла между этими векторами равен $-\frac{1}{6}$ (см. рис. 148). Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

Рис. 148.

4. Известно, что $a \parallel b \parallel c$, $d \parallel l$, $\angle\alpha = 130°$ (см. рис. 149). Найдите $\angle\beta$ (в градусах).

5. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке 150.

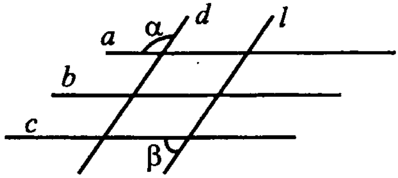


Рис. 149.

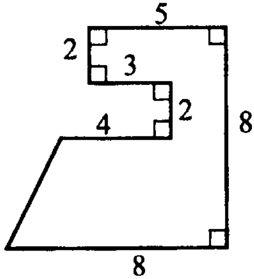


Рис. 150.

6. Две окружности с радиусами 8 и 2 касаются внешним образом. Найдите AB — отрезок на их общей внешней касательной, заключённый между точками касания (см. рис. 151).

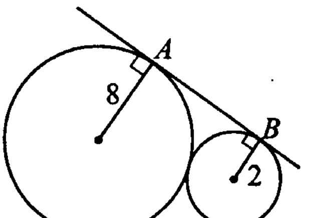


Рис. 151.

7. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке 152.

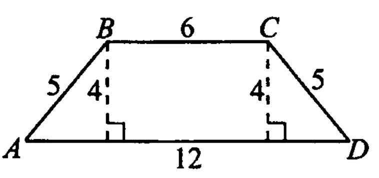


Рис. 152.

8. Укажите номера неверных утверждений.

1) Внешний угол треугольника равен сумме двух углов, не смежных с ним.

2) Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность.

3) Через любые четыре точки можно провести окружность.

4) При пересечении параллельных прямых секущей односторонние углы равны.

5) Градусная мера вписанного угла равна градусной мере дуги, на которую он опирается.

Вариант 3

1. В равнобедренной трапеции $ABCD$ выполняется $\angle A + \angle B = 80°$. Найдите градусную меру $\angle D$.

2. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке 153.

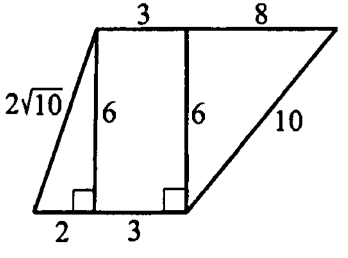


Рис. 153.

3. Найдите сумму углов правильного 17-ти угольника. Ответ укажите в градусах.

4. Найдите S_{ABCDE} (см. рис. 154).

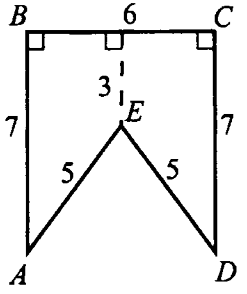


Рис. 154.

5. Про векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ известно, что $(\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{c}$, $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$, $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 11$, $|\vec{c}| = 5$. Найдите длину вектора $\vec{a} + \vec{b}$.

6. Две касательные к окружности пересекаются под углом 60°. A и B — точки касания, O — центр окружности (см. рис. 155). Найдите угол AOB. Ответ укажите в градусах.

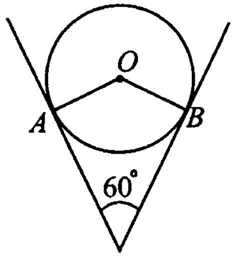


Рис. 155.

7. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$, изображённого на рисунке 156.

8. Укажите номера верных утверждений.

1) Если две прямые перпендикулярны одной и той же прямой, то они не пересекаются.

2) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна сумме катетов.

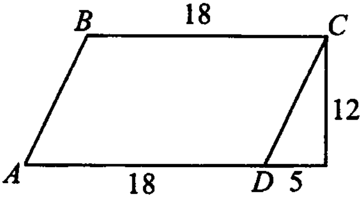


Рис. 156.

3) Прямые, содержащие высóты треугольника, пересекаются в одной точке.

4) Катет, лежащий против угла в 60°, равен половине гипотенузы.

5) Площадь треугольника равна произведению двух его сторон на синус угла между ними.

Вариант 4

1. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность (см. рис. 157), $\angle B + \angle E = 200°$. Найдите меньшую дугу CD. Ответ укажите в градусах.

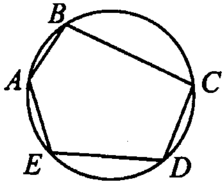


Рис. 157.

2. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. $S_{AOB} = 9$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

3. Про векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ известно, что $|\vec{a}| = 3$, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$, $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{c}$.

4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, $\angle A = 108°$, $\angle B = 70°$ (см. рис. 158). Найдите наименьший из оставшихся углов. Ответ укажите в градусах.

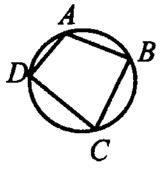


Рис. 158.

5. В параллелограмме $ABCD$ с периметром 24 диагональ AC является биссектрисой тупых углов (см. рис. 159). Найдите AB.

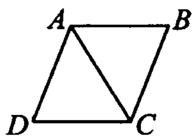


Рис. 159.

6. В треугольнике ABC $AB = BC = 5$, $AC = 6$. В него вписана окружность с центром в точке O. Найдите площадь треугольника AOC.

7. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке 160.

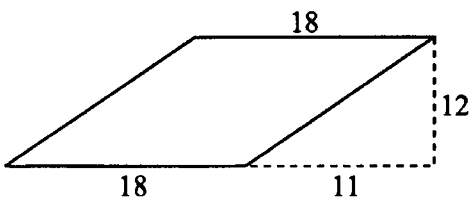


Рис. 160.

8. Укажите номера неверных утверждений.

1) В любую окружность можно вписать треугольник.

2) В любой квадрат можно вписать окружность.

3) Вокруг любого четырёхугольника можно описать окружность.

4) Биссектрисы углов треугольника делят каждый из его углов на 3 равные части.

5) Сумма углов правильного 5-угольника равна 540°.

Вариант 5

1. Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O (см. рис. 161). Найдите угол DBC, если угол AOD равен 130°. Ответ дайте в градусах.

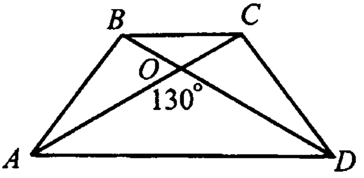


Рис. 161.

2. Площадь треугольника ABC, изображённого на рисунке 162, равна 30. Найдите длину отрезка HC, если $BH = 5$ и $AH = 5$.

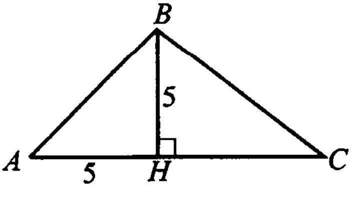


Рис. 162.

3. В равностороннем треугольнике ABC точка O — точка пересечения высот, проведённых из вершин к основаниям. Определите меньший угол между высотами треугольника (в градусах).

4. В трапеции $ABCD$ сторона $AD = 20$, а сторона $AB = 15$. Определите площадь трапеции, если $\angle BCD = 45°$, а $\angle BAD = 90°$ (см. рис. 163).

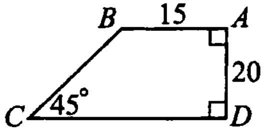


Рис. 163.

5. Длины векторов $\overrightarrow{AJ}$ и $\overrightarrow{AG}$ равны 2 и 4 соответственно. Угол между векторами равен 120°. Найдите квадрат длины вектора $\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{AG}$.

6. Известно, что $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, $\angle BAD = 100°$, $\angle BCD = 70°$, $BD = BC$, $AB = AD$ (см. рис. 164). Найдите $\angle ABC$. Ответ укажите в градусах.

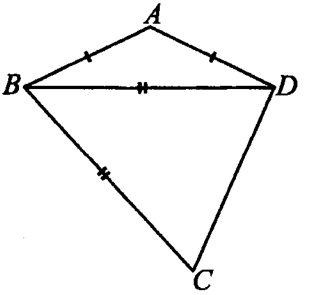


Рис. 164.

7. Найдите площадь ромба, изображённого на рисунке 165.

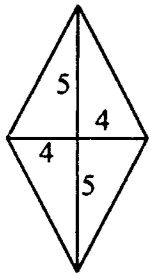


Рис. 165.

8. Укажите номера неверных утверждений.

1) Длина средней линии трапеции равна сумме её оснований.

2) Прямая является касательной к окружности, если пересекает её в двух точках.

3) Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту, проведённую к этому основанию.

4) Биссектриса угла треугольника перпендикулярна стороне, противолежащей этому углу.

5) Площадь треугольника равна половине произведения периметра на радиус описанной окружности.

Вариант 6

1. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC точка O — точка пересечения биссектрис прямого и острого углов. Определите меньший угол между этими биссектрисами. Ответ дайте в градусах.

2. В трапеции $ABCD$ сторона $AD = 30$, а сторона $AB = 15$. Определите площадь трапеции, если $\angle BCA = 45°$, а $\angle BAD = 90°$ (см. рис. 166).

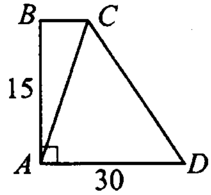


Рис. 166.

3. Длины векторов $\overrightarrow{AJ}$ и $\overrightarrow{AG}$ равны 2 и 4 соответственно. Угол между векторами равен 120°. Найдите квадрат длины вектора $\overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AG}$.

4. Найдите угол ABC ромба $ABCD$, если угол ACD равен 20° (см. рис. 167). Ответ дайте в градусах.

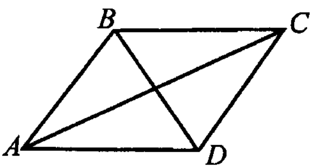


Рис. 167.

5. Площадь параллелограмма $ABCD$, изображённого на рисунке 168, равна 18. Найдите длину отрезка AH, если $BH = 3$ и $HD = 4$.

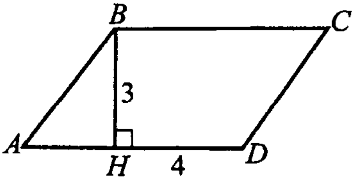


Рис. 168.

6. Найдите сторону BC треугольника ABC, если $\angle ABC = 90°$, $AC = 24$, $\angle BAC = 30°$.

7. Зак. № 202

7. Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 169). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

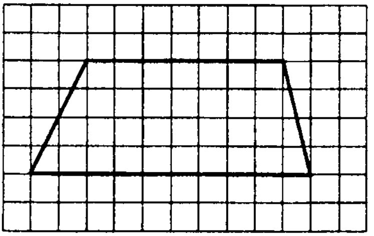


Рис. 169.

8. Укажите номера верных утверждений.

1) Ромб — это четырёхугольник, у которого все углы прямые.
2) Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна 180°.
3) В прямоугольном треугольнике гипотенуза меньше катета.
4) Если углы равны, то они вертикальные.
5) Если в четырёхугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Вариант 7

1. Дан равнобедренный треугольник ABC (см. рис. 170), $\angle C = 53°$. Найдите величину угла CBD (в градусах).

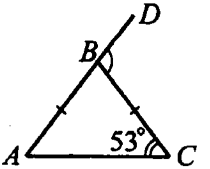


Рис. 170.

2. Найдите периметр квадрата, диагональ которого равна $5\sqrt{2}$.

3. Дана равнобедренная трапеция со сторонами основания 12 и 6. Высота равна 4 (см. рис. 171). Найдите площадь трапеции.

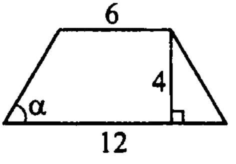


Рис. 171.

4. Сторона ромба равна 8. Радиус окружности, вписанной в этот ромб, равен 2. Найдите площадь ромба.

5. В прямоугольный равнобедренный треугольник ABC вписан квадрат $KFLD$, как показано на рисунке 172. Сторона квадрата равна 3. Вектор $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Найдите длину отрезка CF.

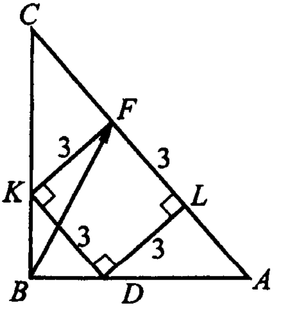


Рис. 172.

6. Найдите катет BC треугольника ABC, если $\operatorname{tg}\angle A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, гипотенуза $AB = 10$.

7. Найдите площадь равнобедренной трапеции, изображённой на рисунке 173.

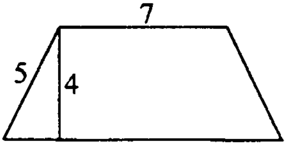


Рис. 173.

8. Укажите номера верных утверждений.

1) Отношение периметров подобных многоугольников равно коэффициенту подобия.
2) В равнобедренной трапеции диагонали не равны.
3) Сумма углов выпуклого четырёхугольника равна 360°.
4) Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен гипотенузе.
5) Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

Вариант 8

1. Внутренние углы треугольника относятся как 2 : 3 : 5. Найдите наибольший внутренний угол, ответ выразите в градусах.

2. Дана трапеция $ABCD$ (см. рис. 174). $EBCF$ — квадрат, вписанный в трапецию со стороной $BC = 2$. $AE = 1, FD = 3$. Продолжения боковых сторон трапеции AB и CD пересекаются в точке G. Найдите высоту GK треугольника AGD.

3. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями 6 и 18 и боковой стороной $AB = 10$. Высота трапеции равна 8 (см. рис. 175). Найдите длину вектора $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$.

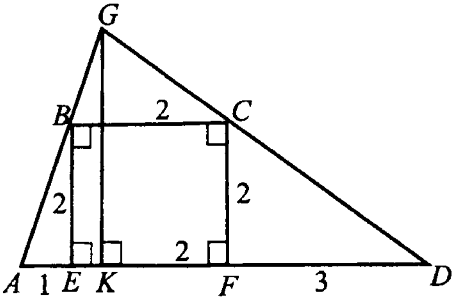


Рис. 174.

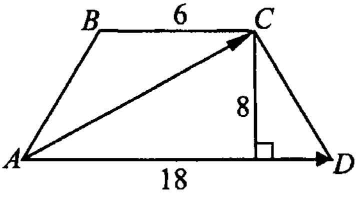


Рис. 175.

4. Дан равнобедренный треугольник ABC (см. рис. 176), $\angle BAE = 140°$. Найдите величину угла CBD (в градусах).

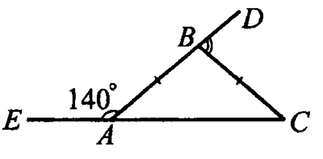


Рис. 176.

5. Найдите площадь квадрата, диагональ которого равна 3.

6. Найдите катет AC треугольника ABC, если $\cos\angle A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $AB = 6\sqrt{3}$.

7. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 177). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

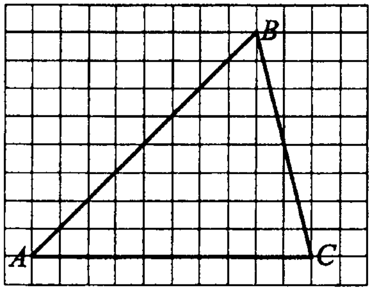


Рис. 177.

8. Укажите номера верных утверждений.

1) Высота, проведённая из вершины прямого угла треугольника, есть среднее арифметическое катетов.

2) Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

3) Сумма углов треугольника меньше 180°.

4) Синус угла в прямоугольном треугольнике — это отношение противолежащего катета к гипотенузе.

5) Вписанный угол окружности равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

Вариант 9

1. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD диагональ AC является биссектрисой угла BAD. Найдите величину угла ACD в градусах, если известно, что $\angle ADC = 50°$. Ответ дайте в градусах.

2. Найдите угол BAC (в градусах), если $\angle BOC = 78°$ и точка O — центр окружности (см. рис. 178).

3. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 150°. Боковая сторона треуголь-

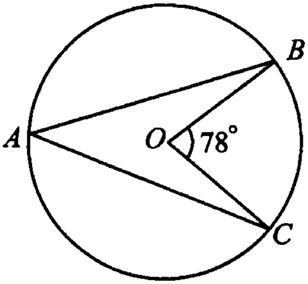


Рис. 178.

ника равна 120 (см. рис. 179). Найдите площадь этого треугольника.

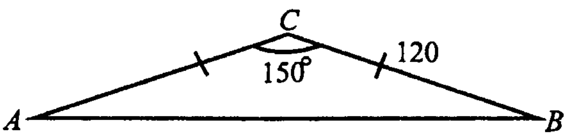


Рис. 179.

4. Прямые AB и AC касаются окружности с центром в точке O в точках B и C. Найдите градусную меру угла BOC, если $\angle BAO = 35°$ (см. рис. 180).

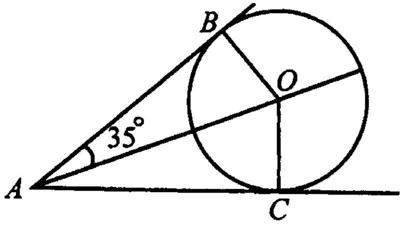


Рис. 180.

5. Диагонали ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$ (см. рис. 181).

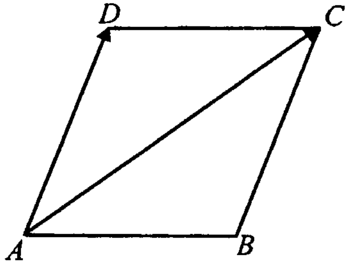


Рис. 181.

6. Найдите гипотенузу AC прямоугольного треугольника ABC, если $\sin\angle A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $BC = 4\sqrt{2}$.

7. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см (см. рис. 182). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

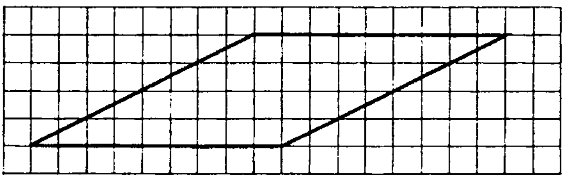


Рис. 182.

8. Укажите номера верных утверждений.

1) Медианы треугольника точкой пересечения делятся пополам.

2) Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

3) Центр описанной около треугольника окружности лежит в точке пересечения биссектрис треугольника.

4) Периметр параллелограмма равен удвоенной сумме двух смежных сторон.

5) Площадь треугольника равна произведению основания на проведённую к нему высоту.

Вариант 10

1. Площадь параллелограмма равна 120, две его стороны равны 15 и 40 (см. рис. 183). Найдите бóльшую высоту этого параллелограмма.

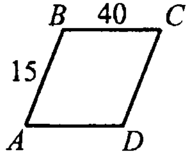


Рис. 183.

2. Прямая AB касается окружности с центром O в точке B, BC — биссектриса $\angle ABO$ (см. рис. 184). Найдите градусную меру угла OBC.

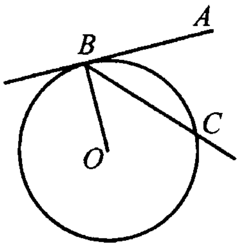


Рис. 184.

3. Диагонали ромба $MPKT$ пересекаются в точке O и равны 14 и 48 (см. рис. 185). Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{MO}$ и $\overrightarrow{TO}$.

4. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD диагональ AC является биссектрисой угла BCD. Найдите величину угла CDA в градусах, если известно, что $\angle CAD = 40°$.

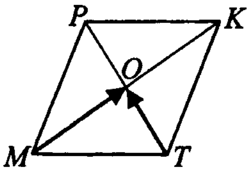


Рис. 185.

5. В окружности с центром O найдите градусную меру угла AOC, если $\angle ABC = 64°$ (см. рис. 186).

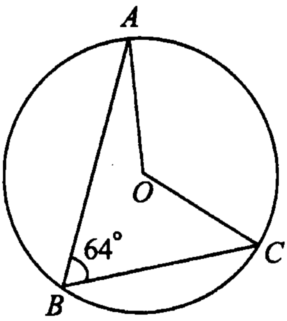


Рис. 186.

6. Найдите сторону AB треугольника ABC, если $\angle ADC = 60°$, $AC = 12$, $\angle DAC = 90°$ (см. рис. 187).

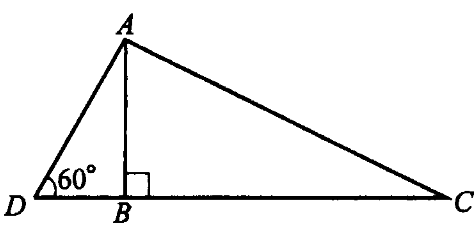


Рис. 187.

7. Найдите площадь трапеции $ABCD$ на рисунке 188.

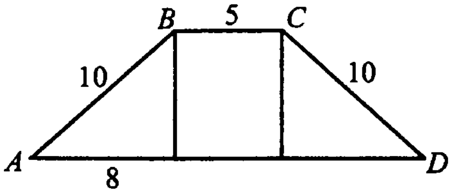


Рис. 188.

8. Укажите номера верных утверждений.

1) Параллелограмм — это четырёхугольник, у которого стороны попарно параллельны.

2) В прямоугольнике все углы равны 80°.

3) Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

4) Градусная мера вписанного угла окружности равна градусной мере дуги, на которую он опирается.

5) Если в треугольнике два угла равны, то этот треугольник — равнобедренный.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

Глава 1. Базовые понятия и треугольник

№	1	2	3	4	5
Вар. 1	83	10	12	24	135
Вар. 2	103	26	24	15	135
Вар. 3	68	3, 4, 6	6	24	34
Вар. 4	10	8	14	2	12
Вар. 5	4	4, 5, 6	35	14	145
Вар. 6	2	16	48	20	245

Глава 2. Многоугольники

№	1	2	3	4	5
Вар. 1	20	60	18	5	123
Вар. 2	12	60	69	1080	345
Вар. 3	70, 110	1	8	7	245
Вар. 4	3	40	11	150	124
Вар. 5	20	142	52	135	123
Вар. 6	44	5	14	162	245

Глава 3. Окружность и круг

№	1	2	3	4	5
Вар. 1	28	5	11	0,125	124
Вар. 2	30	5	69	89	135
Вар. 3	70	4	18	1	125
Вар. 4	75	5	115	234	1235
Вар. 5	18	86	10	0,75	12
Вар. 6	41	160	87	4π	34

Глава 4. Векторы и движение

№	1	2	3
Вар. 1	5	$\{-5;\ 1\}$	123
Вар. 2	10	$\{-8;\ -3\}$	135
Вар. 3	5	2	134
Вар. 4	13	3	23
Вар. 5	$\{9;\ -6\}$	$\{-3;\ 7\}$	135
Вар. 6	$\{2;\ 7\}$	$\{-2;\ 2\}$	235

Ответы к тренировочным тестам

№	1	2	3	4	5	6	7	8
Вар. 1	106	2,5	−4	110	15	60	28	345
Вар. 2	40	40	−4	50	42	8	36	345
Вар. 3	140	48	2700	30	18	120	62	13
Вар. 4	40	36	9	72	6	4,5	216	34
Вар. 5	25	7	60	500	12	80	40	1245
Вар. 6	67,5	337,5	28	140	2	12	34	25
Вар. 7	106	20	36	32	3	5	40	135
Вар. 8	90	3	10	80	4,5	9	40	245
Вар. 9	105	39	3600	110	10	8	36	24
Вар. 10	8	45	0	100	128	6	78	135

Учебное издание

Иванов Сергей Олегович
Войта Елена Александровна
Резникова Нина Михайловна
Ханин Дмитрий Игоревич
Коннова Елена Генриевна

МАТЕМАТИКА.
БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ ГИА-2014.
ПОСОБИЕ ДЛЯ «ЧАЙНИКОВ».
МОДУЛЬ 2: ГЕОМЕТРИЯ

Под редакцией ***Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова***

Налоговая льгота: издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Обложка *В. Кириченко*
Компьютерная верстка *О. Сапожников*
Корректор *Н. Коновалова*

Подписано в печать с оригинал-макета 29.08.2013.
Формат 60x84 1/16. Бумага типографская.
Гарнитура Ньютон. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,5.
Доп. тираж 10 000. Заказ № 251.

Издательство ООО «Легион» включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009, зарегистрирован в Минюст России 15.01.2010 № 15987.

ООО «ЛЕГИОН»
Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.
Адрес редакции: 344011, г. Ростов-на-Дону, пер. Доломановский, 55.
www.legionr.ru e-mail: legionrus@legionrus.com

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных диапозитивов в ЗАО «Полиграфобъединение»
347900, г. Таганрог, ул. Лесная биржа, 6В.