ЕГЭ

Е.Н. Васильева

готовимся к ЕГЭ

МАТЕМАТИКА

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ: СЕКРЕТЫ ОЦЕНКИ ЗАДАНИЙ ЧАСТИ С.

РЕШЕНИЯ И КОММЕНТАРИИ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС «МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ЕГЭ»

ЛЕГИОН

Учебные пособия издательства «Легион» допущены к использованию
в образовательном процессе приказом Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009

Е.Н. Васильева

МАТЕМАТИКА

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ

СЕКРЕТЫ ОЦЕНКИ ЗАДАНИЙ ЧАСТИ С

Решения и комментарии

Учебно-методическое пособие

ЛЕГИОН
Ростов-на-Дону
2013

ББК 74.262.21
В 19

Рецензент: Шкерина Л.В., доктор педагогических наук, профессор кафедры математического анализа КГПУ им.В. Астафьева

Васильева Е.Н.

В 19 Математика. Подготовка к ЕГЭ: секреты оценки заданий части С. Решения и комментарии: Учебно-методическое пособие Е.Н. Васильева. - Ростов-на-Дону: Легион, 2013. — 144 с. — (Готовимся к ЕГЭ)

ISBN 978-5-9966-0348-0

Предлагаемое пособие эффективно дополняет любую книгу для подготовки к ЕГЭ по математике, поскольку поднимает и анализирует одну из важных проблем — **оценивание выполнения заданий части С на ЕГЭ.**

На страницах нашего издания подробно представлены детали процесса оценивания работ ЕГЭ: приведены задачи, их решения, ответы, комментарии и экспертная оценка в баллах. Также предложены тренинговые задания с комментариями и варианты для самостоятельного выполнения. Обучающимся предлагается научиться правильно оценивать свой труд и оформлять свои решения, избегая чужих ошибок. Комментарии к решениям помогут выпускникам систематизировать свои компетенции и, как следствие, сдать ЕГЭ на максимально высокий балл.

Книга предназначена широкому кругу участников процесса подготовки к ЕГЭ — обучающимся, учителям, методистам, экспертам по проверке части С, родителям.

ББК 74.262.21

ISBN 978-5-9966-0348-0

Оглавление

Введение

Анализ результатов ЕГЭ предыдущих лет побудил составить это пособие, которое содержит материал, подробно раскрывающий особенности процесса оценки экзаменационных работ выпускников. Читатель сможет увидеть, как «работают» критерии оценки выполненных заданий, и не допустить возможных ошибок.

В книге на конкретных примерах показаны не только ошибки и недочеты, за которые можно лишиться на ЕГЭ столь важных баллов, но и те моменты, за которые поощряется работа ученика. В связи с этим книга полезна прежде всего учителям, организующим подготовку к ЕГЭ, самим выпускникам, а также родителям, стремящимся помочь своему ребенку получить на экзамене максимально высокий балл.

О структуре пособия

В первой части книги представлена технология оценивания всех заданий С1 — С6 по следующей схеме:

- приведены задачи с одним или двумя решениями и верным ответом;
- даны комментарии экспертов[1] к приведенным решениям;
- представлены реальные примеры выполнения этих заданий выпускниками с комментариями и оценкой экспертов (оценка в баллах).

Данная схема работы поможет обучающимся проанализировать возможные варианты потенциальных и реальных, часто встречающихся ошибок и в будущем избежать их. Выпускник, выполняя те или иные тренировочные задания, сможет посмотреть на свой результат через призму будущей экспертной оценки и самостоятельно оценить его. Эта компетенция непременно пригодится на экзамене! Следует помнить, что нужно не только верно выполнить задания, надо еще правильно обосновать и записать своё решение.

Во второй части пособия даны тренинговые задания блока С1 — С6. Выполняя их, можно научиться оценивать представленные «чужие» решения и, тем самым пополнить копилку своих навыков, чтобы уже на следующем этапе безошибочно оценивать свои решения. Таблицы критериев по выполнению каждого из заданий, ответы, соответствующее выполненным заданиям количество баллов и краткий комментарий к каждому из решений будут важным подспорьем для читателей.

Третья часть книги — это варианты для самостоятельной работы. К этим вариантам дана таблица ответов, содержащая только количество баллов, выставляемых за выполнение каждого задания. Материал будет полезен как

[1] Все специалисты проходили курсовое обучение по подготовке экспертов ЕГЭ в Москве при Федеральном институте педагогических измерений

обучающимся, учителям, так и экспертам, которым предстоит большая ответственная работа по оцениванию части С на ЕГЭ по математике.

Краткие советы по работе с книгой.

Рекомендуем **учителю**:

- рассмотреть с учениками решения задач и на их основе подробнейшим образом описать алгоритм записи соответствующих решений;
- рассмотреть примеры из первой и второй частей нашей книги и акцентировать внимание учеников на имеющихся в них недочетах и ошибках.

Рекомендуем **ученику**:

- изучая материалы этой книги, а в дальнейшем выполняя другие задания, попробовать себя в «роли» эксперта;
- учесть типичные ошибки в записи решений, систематизировать эту информацию и научиться максимально четко оформлять свои решения и выполнять чертежи.

Внимание! Следует помнить, что достаточно часто правильно решенная задача записана небрежно, содержит логические ошибки, а поэтому оценивается недостаточно высоко: попросту теряются драгоценные баллы. Также бывают ситуации, когда выпускник вынужден идти на апелляцию, чтобы получить максимум возможных баллов при несогласии с первоначальной оценкой. Владея всеми «секретами» оценивания и верного оформления ответа, вы сможете более предметно и аргументированно вести диалог с экспертом.

Рекомендуем **родителям**:

- ознакомиться с критериями оценивания заданий на случай возникновения спорных ситуаций;
- мотивировать своего ребенка не только научиться выполнять задания, но и самостоятельно оценивать их выполнение;
- обеспечить психологический комфорт в процессе подготовки и помочь ребенку равномерно распределить время на отработку всех необходимых умений и компетенций для сдачи ЕГЭ.

Разумеется, эта книга будет очень полезной тем учителям, которые уже стали экспертами по проверке части С на ЕГЭ по математике или собираются стать таковыми. Для них мы приводим в приложении к пособию инструкцию «Нормативно-правовые основы работы экспертов по проверке выполнения заданий ЕГЭ с развернутым ответом».

Издание подготовлено при участии специалистов Красноярского краевого института повышения квалификации и профессиональной переподготовки работников образования.

Автор и коллектив издательства выражают благодарность старшим преподавателям Красноярского краевого института повышения квалификации и профессиональной переподготовки работников образования С.В.Крохмаль и Т.В.Поляковой за помощь в сборе и подготовке материала для этой книги.

Часть 1. Оценивание выполнения заданий ЕГЭ с развернутым ответом (С1 — С6)

ЕГЭ по математике в 2013 г. не имеет принципиальных отличий от модели ЕГЭ 2012 г.

Согласно демоверсии без изменения сложности представлена тематика заданий В1—В14.

Практически неизменной осталась и тематическая принадлежность заданий: С1 — тригонометрия, С2 — стереометрия, С3 — без изменения сложности несколько расширена тематика, в этом задании может присутствовать система неравенств, С4 — планиметрия, С5 — задание с параметром (без изменения сложности несколько расширена тематика задания, в задании может присутствовать система неравенств), С6 — задание или на теорию чисел, или неравенства с использованием материала за курс средней школы.

В 2013 году сохранена успешно зарекомендовавшая себя в 2010 – 2012 гг. система оценивания заданий с развернутым ответом. Эта система основывается на следующих принципах:

1. Возможны различные способы решения в записи развернутого ответа. Главное требование — решение должно быть математически грамотным, из него должен быть понятен ход рассуждений автора работы. В остальном (метод, форма записи) решение может быть произвольным. Полнота и обоснованность рассуждений оцениваются независимо от выбранного метода решения. При этом оценивание происходит «в плюс»: оценивается продвижение выпускника в решении задачи, а не недочеты по сравнению с «эталонным» решением.

2. При решении задачи можно использовать без доказательств и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, допущенных или рекомендованных Министерством образования и науки РФ.

Как и в предыдущие два года, выполнение каждого из заданий С1 и С2 оценивается в 0 баллов, 1 балл или 2 балла. За выполнение каждого из двух следующих заданий С3 и С4 можно получить оценку от 0 до 3-х баллов. Выполнение заданий С5 и С6 оценивается от 0 до 4-х баллов.

Задания С1 и С6 разбиты на несколько пунктов: а, б, ..., а в задании С3 следует решить систему из двух, независимых между собой, неравенств с одной переменной, то есть, по существу, это задание разбито на два пункта. Количество выставляемых баллов по критериям оценивания совпадает с количеством верно и обоснованно решенных пунктов задания (или жестко фиксированных частей этих пунктов).

Например, верное решение хотя бы одного из неравенств системы в задании С3 оценивается в 1 балл, 2 балла выставляется, если верно решены оба неравенства, но не найдено множество решений системы, а максимально возможные 3 балла — если полученные ранее ответы правильно сравнены между собой и получен верный ответ для всей системы.

Оценка выполнения заданий высокого уровня сложности с развернутым ответом проводится с учетом **полноты и правильност**и приведенного решения.

При этом **полнота и правильность** решения задачи определяются:

— присутствием и правильностью приведенной последовательности всех необходимых шагов решения, отвечающих используемому верному методу решения;

— правильностью обоснования основных моментов решения;

— правильностью выполнения соответствующих преобразований и вычислений;

— верным конечным ответом и его соответствием условию задачи.

Задание С1

Задание С1 в определенной степени занимает одну из важнейших позиций в структуре КИМ. Успешность выполнения задания С1 является весьма точным характеристическим свойством, различающим базовый и профильный уровни подготовки учащихся. Кроме того, это именно то задание из части 2 КИМ, к решению которого приступает наибольшее число участников экзамена.

Критерии оценивания задания С1

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в п. а) и в п. б)	2
Обоснованно получен верный ответ в п. а), но обоснование отбора корней в п. б) не приведено или задача в п. а) обоснованно сведена к исследованию простейших тригонометрических уравнений без предъявления верного ответа, а в п. б) приведен обоснованный отбор корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задачи, примеры работ выпускников, комментарии и количество баллов

Задача С1-1

а) Решите уравнение $\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.

Решение № 1

а) Так как $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, то $1 - 2\sin^2 x = 1 - \sin x$,

$2\sin^2 x - \sin x = 0$, $\sin x(\sin x - \frac{1}{2}) = 0$.

Корни уравнения: $x = \pi n$, $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $n \in Z, k \in Z$.

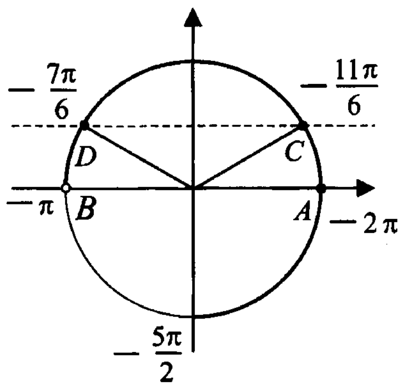


Рис. 1.

б) Корни уравнения $\sin x = 0$ изображаются точками A и B, а корни уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ — точками C и D, промежуток $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$ изображается жирной дугой (см. рис. 1).

В указанном промежутке содержатся три корня уравнения:

-2π; $-2\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6}$, $-\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}$.

Ответ: а) $\pi n, (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, n \in Z, k \in Z$; б) $-2\pi, -\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}$.

Решение № 2

а) $\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$,

$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x - \sin x$,

$2\sin^2 x - \sin x = 0$,

$\sin x(2\sin x - 1) = 0,$

1) $\sin x = 0,\ x = \pi n,\ n \in Z.$

2) $2\sin x - 1 = 0,\ \sin x = \frac{1}{2},\ x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$

б) Отберем корни, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2};\ -\pi\right).$

1) Пусть $x = \pi n, n \in Z.$

Тогда $-\frac{5\pi}{2} \leqslant \pi n < -\pi,\ -\frac{5}{2} \leqslant n < -1,\ n = -2.$

Корень, принадлежащий промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2};\ -\pi\right) : x = -2\pi.$

2) Пусть $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z.$

Тогда $-\frac{5\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{6} + 2\pi k < -\pi,\ -\frac{4}{3} \leqslant k < -\frac{7}{12},\ k = -1.$

Корень, принадлежащий промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2};\ -\pi\right) :\ x = -\frac{11\pi}{6}.$

Пусть $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.$

Тогда $-\frac{5\pi}{2} \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2\pi k < -\pi,\ -\frac{5}{3} \leqslant k < -\frac{11}{12},\ k = -1.$

Корень, принадлежащий промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2};\ -\pi\right) : x = -\frac{7\pi}{6}.$

Промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2};\ -\pi\right)$ принадлежат корни: $-2\pi, -\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}.$

Ответ: а) $\pi n, (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k, n \in Z, k \in Z;$

б) $-2\pi, -\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}.$

Комментарий. Заметим, что к последовательности решений 1 и 2 можно предъявить некоторые претензии. Например, в решении 1 в части а) не обоснован переход к корням уравнения. Полагалось бы написать, например, так:

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ \sin x - \frac{1}{2} = 0,\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x = \pi n, n \in Z,\\ x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.\end{array}\right.$$

В решении 2 части б) многие учителя считают, что корректнее следовало бы перед пунктом 2) записать:

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z \qquad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z. \end{array}\right.$$

Однако это не обязательно, и следует считать предложенные решения верными.

Как же оценить эти решения? Учитывая, что к выполнению настоящего задания приступает около 70 % выпускников, не стоит принимать излишне жёсткие критерии, а значит, они заслуживают оценку в 2 балла.

Оценка эксперта: 2 балла.

Задача С1-2

а) Решите уравнение $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = \cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие

промежутку $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right)$.

Решение

а) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = \cos x$,

$\sin 2x = \cos x$,

$2\sin x \cos x - \cos x = 0$,

$\cos x(2\sin x - 1) = 0$.

1) $\cos x = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

2) $2\sin x - 1 = 0,\ \sin x = \frac{1}{2},\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z. \end{array}\right.$

б) Найдем все корни, принадлежащие промежутку $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right)$.

1) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

$\frac{5\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} + \pi n < 4\pi,\ 2 \leqslant n < \frac{7}{2},\ n = 2,\ n = 3$.

При $n = 2$ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$. При $n = 3$ $x = \frac{\pi}{2} + 3\pi = \frac{7\pi}{2}$.

2) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$.

$\frac{5\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{6} + 2\pi k < 4\pi,\ \frac{7}{6} \leqslant k < \frac{23}{12}$, Промежуток $\left[\frac{7}{6};\ \frac{23}{12}\right)$ не содержит целых значений k, следовательно, в серии $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$ нет корней, принадлежащих промежутку $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right)$.

3) $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z.$

$\frac{5\pi}{2} \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2\pi k < 4\pi,\ \frac{5}{6} \leqslant k < \frac{19}{12},\ k = 1.$

При $k = 1\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{17\pi}{6}.$

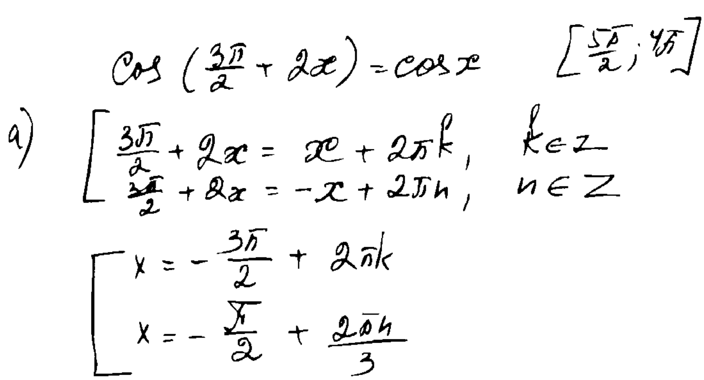
Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z,\ \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z.$

б) $\frac{5\pi}{2},\ \frac{7\pi}{2},\ \frac{17\pi}{6}.$

Комментарий. Задача в целом находится в рамках сложности заданий С1. Обоснованы все этапы решения, верно выполнены преобразования, проведен подробный отбор корней, получен верный ответ. Решение может быть оценено в 2 балла.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 1. (Оригинал) [2]

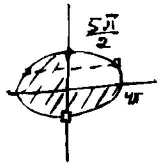


$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = \cos x \qquad \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$

а) $\left[\begin{array}{ll} \frac{3\pi}{2} + 2x = x + 2\pi k, & k \in Z \\ \frac{3\pi}{2} + 2x = -x + 2\pi n, & n \in Z \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{3\pi}{2} + 2\pi k \\ x = -\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3} \end{array}\right.$

[2]Здесь и далее после изображения оригинала приводится пример работы в виде печатного текста с рисунком из оригинала. Практически все орфографические и пунктуационные ошибки оригинала сохранены.

б) 

$n=0 \quad x=-\frac{\pi}{2}$

$n=1 \quad x=-\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$

$n=2 \quad x=-\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}=\frac{5\pi}{2}$

$n=3 \quad x=-\frac{\pi}{2}+2\pi$ — не подходит

$\left\{\frac{5\pi}{2};\ \frac{7\pi}{2};\ \frac{17\pi}{6}\right\}$

подходят

Пример 1.

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)=\cos x \qquad \left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$$

а) $$\left[\begin{array}{l} \frac{3\pi}{2}+2x=x+2\pi k,\ \ k\in Z \\ \frac{3\pi}{2}+2x=-x+2\pi n,\ \ n\in Z \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=-\frac{3\pi}{2}+2\pi k \\ x=-\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi n}{3} \end{array}\right.$$

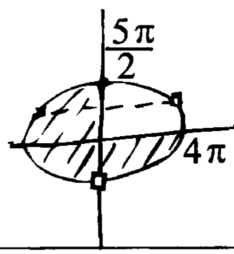
б) $n=0 \quad x=-\frac{\pi}{2}$

$n=1 \quad x=-\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$

$n=2 \quad x=-\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}=\frac{5\pi}{2}$

$n=3 \quad x=-\frac{\pi}{2}+2\pi$ — не подходит

$\left\{\frac{5\pi}{2};\ \frac{7\pi}{2};\ \frac{17\pi}{6}\right\}$ — подходят



Комментарий. Весьма «пограничный» случай. Нет даже отдельно выписанного ответа. С другой стороны, в тексте работы верные ответы получены и ошибок нет. Кроме того, весьма оригинален сам подход к решению, не использующий формул приведения и формул двойного аргумента, а основанный на раскрытии смысла более первичного равенства $\cos\alpha=\cos\beta$. Открытым остается вопрос об «обоснованности» отбора корней.

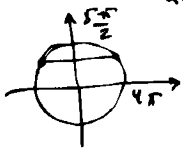
Если судить по тексту, после подстановки $n=0,\ 1,\ 2,\ 3$ в формулу и проверки, что эти значения не подходят, автор остальные подстановки перестал выписывать, а произвел вычисления и (верный!) отбор в уме или, быть может, на черновике. Несмотря на отмеченные замечания, воспользуемся фразой критерия «Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах» и поставим 2 балла.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 2.(Оригинал)

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = -\sin 2x$$

$$-\sin 2x = \cos x \Leftrightarrow (2\sin x + 1)\cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sin x = -\frac{1}{2}\end{array}\right.$$



$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$

$(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $k, n \in Z$

Отбор 1) из серии $\frac{\pi}{2} + \pi k$ на принадлежат

$\frac{5\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{2}$

2) из $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ — $\frac{7\pi}{6} + \pi = \frac{13\pi}{6}$

$-\frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{23\pi}{6}$

$\frac{5\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{19\pi}{6}$

Ответ: б) $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{23\pi}{6}$; $\frac{19\pi}{6}$.

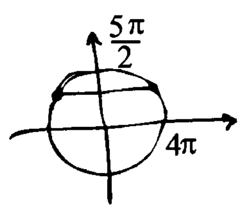
Пример 2.

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi\right) = -\sin 2x$$

$$-\sin 2x = \cos x \Leftrightarrow (2\sin x + 1)\cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sin x = -\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$$



Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$

$(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ k,\ n \in Z$

Отбор 1) Из серии $\frac{\pi}{2} + \pi k$ принадлежат $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{2}$

2) из $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $\frac{7\pi}{6} + \pi = \frac{13\pi}{6}$

$$-\frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{23\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{19\pi}{6}$$

Ответ: б) $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{23\pi}{6}$; $\frac{19\pi}{6}$.

Комментарий. Ответ в пункте б) неверен, а отбор по имеющейся из пункта а) формуле $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$ и неполон, и неверен. Поэтому 2 балла выставить нельзя. Тем не менее, ответ в пункте а) верен, и этот факт (к сожалению) для некоторых выпускников есть основание претендовать на 1 балл. Однако этот верный ответ получен в результате двойной ошибки. Во-первых, $\cos(\frac{3\pi}{2}+2x)\neq-\sin 2x$, и во-вторых, неверно решено уравнение $\sin x=-\frac{1}{2}$. Нет права на ошибку. Поэтому 1 балл ставить нельзя, остается 0 баллов.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 3. (Оригинал)

$\boxed{C_1}$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)=\cos x$ $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$

а) $\sin 2x=\cos x$

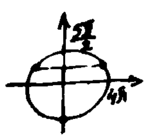
$2\sin x\cdot\cos x-\cos x=0$

$\cos x\,(2\sin x-1)=0$

$\cos x=0$ или $\sin x=\frac{1}{2}$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$

б) $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$



$\left\{\frac{7\pi}{2};\ \frac{5\pi}{6};\ \frac{5\pi}{2}\right\}$

Пример 3.

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)=\cos x$ $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$

а) $\sin 2x=\cos x$

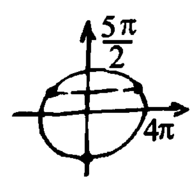
$2\sin\cdot\cos x-\cos x=0$

$\cos\cdot(2\sin x-1)=0$

$\cos x=0$ или $\sin x=\frac{1}{2}$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$

б) $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$



$\left\{\frac{7\pi}{2};\ \frac{5\pi}{6};\ \frac{5\pi}{2}\right\}$

Комментарий. В пункте а) решение верно и обоснованно, ответ верен, разве что не хватает $k \in Z$,$n \in Z$, но только за это снизить оценку вряд ли нужно.

Так что 1 балл есть.

Ответ в пункте б) неверен, и ясно, где произошла ошибка: в ответ (из картинки) включен «основной» корень $\frac{5\pi}{6}$, явно меньший $\frac{5\pi}{2}$, а следовало бы включить $\frac{5\pi}{6}+2\pi=\frac{17\pi}{6}$. Согласно предлагаемым критериям «Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или пункте б)» ставим 1 балл.

Оценка эксперта: 1 балл.

Задание С2

Среди особенностей проверки заданий С2, выделим проблему «обоснованности» решений стереометрических заданий, приводимых в работах участников ЕГЭ-2012.

Достаточными являются верное описание конструкции, констатация положения искомого угла или расстояния и верно проведенное вычисление.

Отметим, что в то же время необходимым условием получения положительного балла является отсутствие в тексте работы неверных утверждений о свойствах и расположении тех или иных геометрических объектов.

Подчеркнем, что при наличии развернутых и полных обоснований всех конструкций и построений, разумеется, следует выставлять 2 балла. Но те же 2 балла следует выставлять и в тех случаях, когда в решении лишь описана и продемонстрирована верная конструкция.

Дело в том, что многие достаточно успешные выпускники за время своего обучения вполне могли просто отвыкнуть (или не привыкнуть) приводить необходимые доказательства верности своих конструкций: они их «видят» и по школьной своей привычке считают это достаточным.

Критерии оценивания задания С2

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

В содержании критерия на 1 балл имеются слова «...или при правильном ответе решение недостаточно обосновано». Формально это положение противоречит вышеприведенному тезису о допустимой минимизации обоснований.

Позиция разработчиков КИМ здесь состоит в том, что эти слова относятся не к возможности понижения (за недостаточностью обоснований) оценки с 2 баллов на 1 балл, а к возможности повышения оценки с 0 баллов до 1 балла.

Дело в том, что по результатам проверки работ ЕГЭ 2010 — 2012 гг. устойчиво выделился массив работ, в которых изложение ограничивается лишь верным рисунком, указанием искомого объекта и верным ответом без приведения сколько-нибудь развернутых вычислений.

Приведем конкретный пример.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, стороны основания которой равны 5, а боковые ребра равны 11, найдите расстояние от точки A до прямой C_1D_1.

Решение

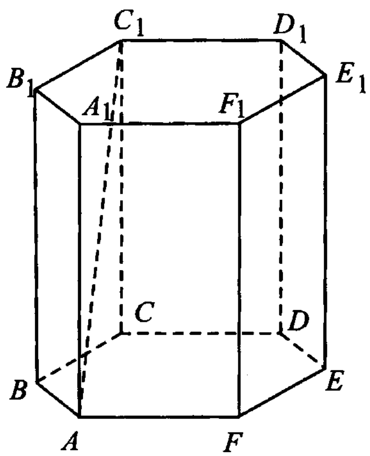


Рис. 2.

Это расстояние (см. рис.2) равно $AC_1 = 14$.

Ответ: 14.

По критериям двух предыдущих лет — это 0 баллов, так как решение не содержит никакого обоснованного перехода куда-либо, а по критериям ЕГЭ -2013 — это 1 балл именно из-за дополнения «... или при правильном ответе решение недостаточно обосновано».

Еще раз заметим, что дополнение «... или при правильном ответе решение недостаточно обосновано» введено не для того, чтобы «зарубить» двухбалльные решения, массово выставив за них 1 балл, а, наоборот, для того, чтобы иметь в некоторых случаях возможность повысить оценку с 0 до 1 балла. Необходимо отметить еще одно существенное обстоятельство, связанное с использованием в решении заданий 2 элементов аналитической геометрии (координаты точек, уравнения плоскостей и прямых т.п.). Так как получение формул, скажем, для тех или иных расстояний основано, в конечном счете, на сведении к соответствующей планиметрической задаче, то верное использование этих формул автоматически подразумевает обоснованное сведение к планиметрической задаче. Тем самым, критерий на 1 балл нормально работает и в применении к тем случаям, когда правильно используется верная формула аналитической стереометрии, но в вычислениях содержится арифметическая ошибка.

Задачи, примеры работ выпускников, комментарии и количество баллов

Задача С2-1

Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Найдите расстояние от вершины B до плоскости ACD_1.

Решение №1

Прямая AC перпендикулярна плоскости BDD_1, так как она перпендикулярна прямым BD и DD_1 (см. рис. 3).

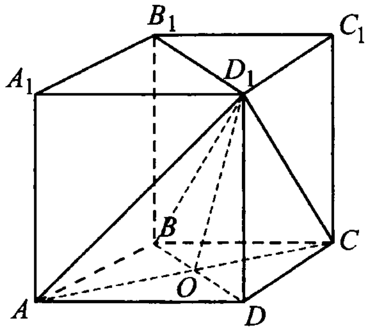


Рис. 3.

Плоскость ACD_1 содержит прямую AC, следовательно, плоскости BDD_1 и ACD_1 перпендикулярны. Тогда расстояние от точки B до плоскости ACD_1 есть высота треугольника BOD_1, проведенная из вершины B (см. рис. 4).

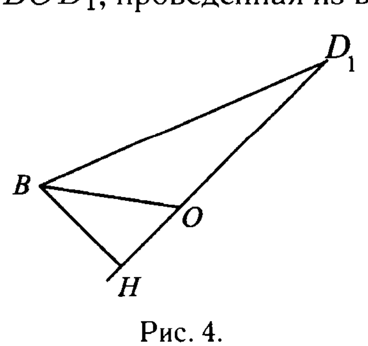


Рис. 4.

В треугольнике $BOD_1 : BD_1 = \sqrt{3}, BO = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, OD_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Из треугольников BHO и BHD_1: $BH^2 = BO^2 - OH^2 = BD_1^2 - (OD_1 + OH)^2$, откуда получаем: $OH = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$, тогда $BH = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение №2

1. В плоскости BDD_1 проведем $BH \perp OD_1$ (см. рис. 5 а))
   $DD_1 \perp (ADC) \Rightarrow DD_1 \perp AC,\ AC \perp BD \Rightarrow$
   $AC \perp (BDD_1) \Rightarrow AC \perp BH \Rightarrow\ BH \perp (ACD_1)$
   по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, следовательно, BH — искомое расстояние.

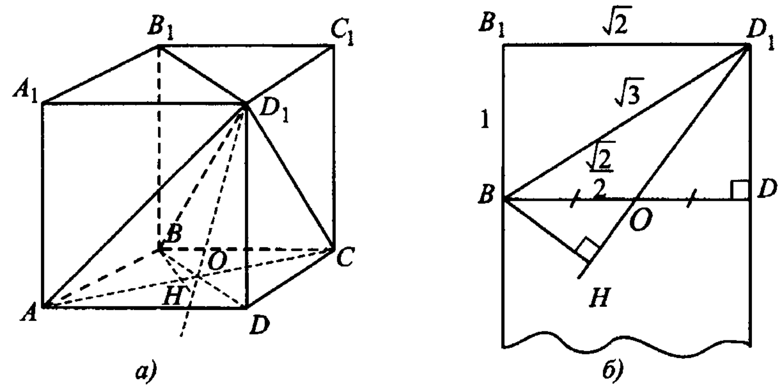


Рис. 5.

2. В $\triangle ODD_1:\ OD_1 = \sqrt{OD^2 + DD_1^2} = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ (см. рис. 5 б)).

   В $\triangle BHD_1:\ BH^2 = BD_1^2 - HD_1^2 = BD_1^2 - (OH + OD_1)^2$ (1).
   В $\triangle BHO$: $BH^2 = BO^2 - OH^2$ (2).
   Приравняв правые части равенств (1) и (2), получим

$BD_1^2 - OH^2 - 2OH \cdot OD_1 - OD_1^2 = BO^2 - OH^2,\ 3 - \sqrt{6}OH - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2}$,

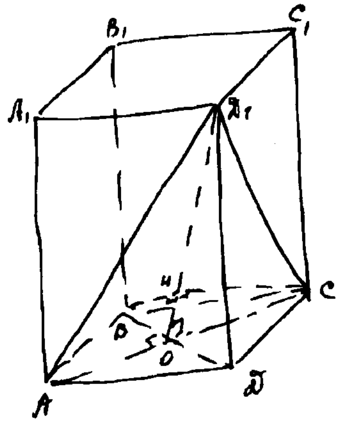
$OH = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$, тогда $BH = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Комментарий. Обратим внимание на то, что в каждом решении выполнено правильное изображение, доказано положение искомого расстояния и верно проведено вычисление. Остается одно — поставить 2 балла.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 1. (Оригинал)



Дано: $ABCD \ldots D_1$ – куб
$AB = 1$
$\rho(B; AD_1C)$ – ?

Решение:

1) $\rho(B; AD_1C) = \rho(B; D_1O) = BH$ т.к. $BH \perp AD_1C$

2) $\triangle AD_1C$ – равносторонний; $AD_1 = AC = D_1C = \sqrt{2} \to$
$\to D_1O \perp AC$, $AO = OC \to D_1O = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

3) H – точка пересечения медиан, биссектрис в равносторонем $\triangle AD_1C \Rightarrow \frac{D_1H}{HO} = \frac{2}{1} \to$
$\to OH = \frac{1}{3} OD_1 = \frac{\sqrt{6}}{6}$

4) $BO = \frac{1}{2} BD = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (диагональ в квадрате

5) $\triangle BOH$: $\angle H = 90^\circ$ $OB = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $OH = \frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow$
$\Rightarrow BH = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

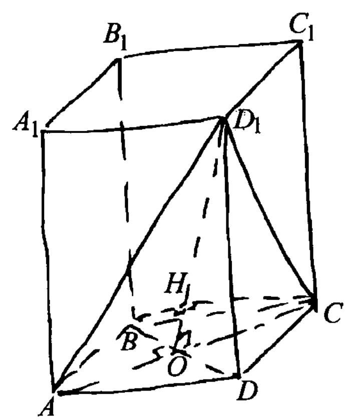
Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Пример 1.

Дано: $ABCD \cdots D_1$ — куб
$AB = 1$
$\rho(B;\ AD_1C)$ — ?

Решение:

1) $\rho(B;\ AD_1C) = \rho(B;\ D_1O) = BH$ т.к. $BH \perp AD_1C$
2) $\triangle AD_1C$ — равносторонний; $AD_1 = AC = D_1C = \sqrt{2} \to$
$D_1O \perp AC,\ AO = OC \to\ D_1O = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$
3) H — точка пересечения медиан;
биссектрис в равностороннем $\triangle AD_1C \to \frac{D_1H}{HO} = \frac{2}{1} \to$
$\to OH = \frac{1}{3}OD_1 = \frac{\sqrt{6}}{6}$
4) $BO = \frac{1}{2}BD = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (диагональ в квадрате



5) $\triangle BOH:\ \angle H = 90^\circ\ OB = \frac{\sqrt{2}}{2};\ OH = \frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow BH = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Комментарий. Работа не пустая, и ответ верен. Тем не менее, в работе не прослеживается правильного геометрического представления о происходящем. На самом деле основание перпендикуляра попадает не на сторону D_1O, а на ее продолжение. В тексте имеется явно неверное утверждение. А именно, если «H — точка пересечения медиан …». Неверно, что $BH \perp AD_1C$. По предлагаемым критериям работу можно оценить только в 0 баллов.

Оценка эксперта: 0 баллов.

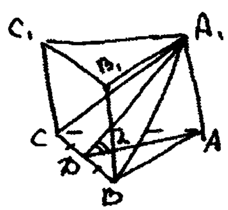
Задача C2-2

Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.

Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

Пример 2. (Оригинал)

C2



Проведем AD ⊥ BC, D ∈ BC

$CD = DB = 1$

$A_1D = \sqrt{A_1B^2 - DB^2} = \sqrt{5-1} = 2$

$AA_1 = \sqrt{A_1B^2 - AB^2} = \sqrt{5-4} = 1$

$\sin\alpha = \frac{AA_1}{A_1D} = \frac{1}{2}$

$\alpha = \frac{\pi}{6}$

Пример 2.

Проведем $AD \perp BC,\ D \in BC$

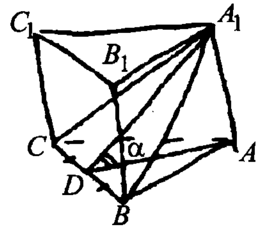
$CD = DB = 1$

$A_1D = \sqrt{A_1B^2 - DB^2} = \sqrt{5-1} = 2$

$AA_1 = \sqrt{A_1B^2 - AB^2} = \sqrt{5-4} = 1$

$\sin\alpha = \frac{AA_1}{A_1D} = \frac{1}{2}$

$\alpha = \frac{\pi}{6}$



Комментарий. Типичный случай, когда нет «идеальной» проверки того, что $\angle A_1DA$ — искомый линейный угол, но все построения и вычисления верны, следовательно, ставим 2 балла.

Оценка эксперта 2 балла.

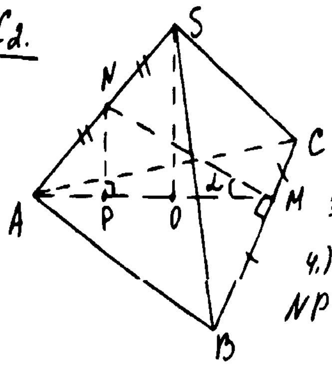
Задача С2 - 3

Найти угол между прямой, проходящей через середины скрещивающихся ребер правильной треугольной пирамиды, и плоскостью ее основания. Боковое ребро равно 17, сторона основания равна $15\sqrt{3}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{4}{15}$.

Пример 3. (Оригинал)

С2.



1.) $AM = AB\cdot\sin 60° = \dfrac{15\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = \dfrac{15\cdot 3}{2} = 22{,}5$

2.) $OA = \dfrac{2}{3}AM = 15;\ OM = 7{,}5$

3.) $OS = \sqrt{17^2-15^2} = 8$

4.) $PO = AP = \dfrac{1}{2}OA = 7{,}5$

$NP = \dfrac{1}{2}OS = 4$

5.) $PM = 22{,}5 - 7{,}5 = 15$

6.) $tg\,\alpha = \dfrac{NP}{PM} = \dfrac{4}{15}$

$\alpha = arctg\,\dfrac{4}{15}$

Ответ: $arctg\,\dfrac{4}{15}$.

Пример 3.

1) $AM = AB\cdot\sin 60° = \dfrac{15\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = \dfrac{15\cdot 3}{2} = 22{,}5$

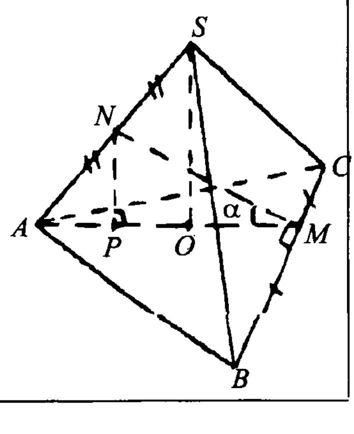
2) $OA = \dfrac{2}{3}AM = 15;\ OM = 7{,}5$

3) $OS = \sqrt{17^2-15^2} = 8$

4) $PO = AP = \dfrac{1}{2}OA = 7{,}5\ \ NP = \dfrac{1}{2}OS = 4$

5) $PM = 22{,}5 - 7{,}5 = 15$

6) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{NP}{PM} = \dfrac{4}{15}\ \ \alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{4}{15}$



Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{4}{15}$.

Комментарий. В предложенном решении данного задания вычисления логичны, выбран разумный способ подсчета через нахождение тангенса искомого угла и, самое главное, вычисления не содержат ошибок. Ставим 2 балла.

Оценка эксперта: 2 балла.

Задание С3

Критерии для С3 в 2013 году, как и в 2012 году, делают процедуру оценивания ясной и алгоритмичной, они в заметной степени ликвидируют разночтения в выставлении 1 или 2 баллов.

В целом, критерии такого типа удобны, но в то же время они более суровы. Например, если в каждом из неравенств системы автор решения при целом верном подходе к решению обоих неравенств допустил (пусть и незначительную) арифметическую ошибку, то его решение следует оценить в 0 баллов.

Критерии оценивания задания С3

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	3
Для обоих неравенств системы обоснованно получены верные ответы, но не проведено обоснованного сравнения значений конечных точек найденных промежутков	2
Для одного из двух неравенств системы обоснованно получен верный ответ	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Задачи, примеры работ выпускников, комментарии, количество баллов

Задача С3-1

Решите систему неравенств $\begin{cases} 4^x \leqslant 9\cdot 2^x + 22, \\ \log_3(x^2-x-2) \leqslant 1+\log_3\dfrac{x+1}{x-2}. \end{cases}$

Решение

$$\begin{cases} 4^x \leqslant 9\cdot 2^x + 22, \\ \log_3(x^2-x-2) \leqslant 1+\log_3\dfrac{x+1}{x-2}. \end{cases}$$

1) Решим первое неравенство системы $2^{2x} - 9\cdot 2^x - 22 \leqslant 0$.

Выполним замену $2^x = t,\ t > 0$.

Неравенство примет вид $t^2 - 9t - 22 \leqslant 0$, $(t+2)(t-11) \leqslant 0$, $-2 \leqslant t \leqslant 11$.

Учитывая, что $t > 0$, получаем $0 < t \leqslant 11$, значит, $2^x \leqslant 11$, $x \leqslant \log_2 11$.

2) Решим второе неравенство системы $\log_3(x^2 - x - 2) \leqslant 1 + \log_3 \dfrac{x+1}{x-2}$.

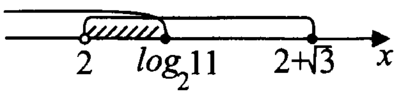
ОДЗ: $\begin{cases} (x+1)(x-2) > 0, \\ \dfrac{x+1}{x-2} > 0, \end{cases}$ $\qquad x \in (-\infty;\ -1) \cup (2;\ +\infty)$.

При допустимых значениях переменной получаем:

$\log_3((x+1)(x-2)) - \log_3 \dfrac{x+1}{x-2} \leqslant 1$, $\log_3(x-2) \leqslant \dfrac{1}{2}$, $2 < x \leqslant 2 + \sqrt{3}$.

3) Найдем решение системы неравенств.

Сравним $\log_2 11$ и $2 + \sqrt{3}$. Так как $\sqrt{3} > \sqrt{2{,}25} = 1{,}5$, то $2 + \sqrt{3} > 3{,}5 = \log_2(8\sqrt{2}) > \log_2(8 \cdot 1{,}4) = \log_2(11{,}2) > \log_2 11$, следовательно, $\log_2 11 < 2 + \sqrt{3}$.



Решение системы неравенств: $(2;\ \log_2 11]$.

Ответ: $(2;\ \log_2 11]$.

Комментарий. Четко просматривается последовательность решения: решение показательного неравенства, решение логарифмического неравенства, получение решения системы неравенств. Проведено обоснованное сравнение значений конечных точек найденных промежутков.

Согласно приведенным критериям ставим максимальный балл — 3.

Оценка эксперта: 3 балла.

Задача С3 - 2

Решите систему неравенств $\begin{cases} 3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3^x} > 2\sqrt[4]{3}, \\ \log_2^2 x + 6 \geqslant 5\log_2 x. \end{cases}$

Ответ: $0 < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{3} < x \leqslant 4$, $x \geqslant 8$.

Пример 1. (Оригинал)

$\begin{cases} 3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} > 2 \cdot \sqrt[4]{3} \\ \log_2^2 x + 6 \geqslant 5\log_2 x \end{cases}$ ОДЗ: $x > 0$

Преобразуем первое неравенство:

$3^{\log_3^2 x} = 3^{\log_3 x \cdot \log_3 x} = (3^{\log_3 x})^{\log_3 x} = x^{\log_3 x}$

$$x^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} > 2 \cdot \sqrt[4]{3}$$
$$2 \cdot x^{\log_3 x} > 2 \cdot \sqrt[4]{3}$$
$$x^{\log_3 x} > \sqrt[4]{3}$$
$$\log_3 x^{\log_3 x} > \log_3 \sqrt[4]{3}$$
$$\log_3 x \cdot \log_3 x > \log_3 3^{\frac{1}{4}}$$
$$\log_3^2 x > \frac{1}{4}$$

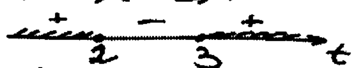
$\log_3 x < -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\log_3 x > \frac{1}{2}$

$x < 3^{-\frac{1}{2}}$ $\qquad$ $x > 3^{\frac{1}{2}}$

$x < \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad$ $x > \sqrt{3}$

Решим второе неравенство. Обозначим $t = \log_2 x$

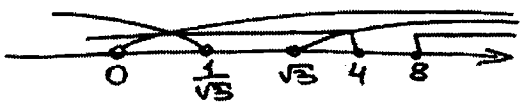
$$t^2 + 6 \geq 5t$$
$$t^2 - 5t + 6 \geq 0$$
$$(t-2)(t-3) \geq 0$$



$t \leq 2$ или $t \geq 3$

$\log_2 x \leq 2$ $\qquad$ $\log_2 x \geq 3$

$x \leq 4$ $\qquad$ $x \geq 8$



Ответ: $x \in \left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup (\sqrt{3}; 4] \cup [8; +\infty)$

Пример 1.

$$\begin{cases} 3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3^x} > 2\sqrt[4]{3}, \\ \log_2^2 x + 6 \geqslant 5\log_2 x. \end{cases} \quad \text{ОДЗ: } x > 0$$

Преобразуем первое неравенство:

$$3^{\log_3^2 x} = 3^{\log_3 x \cdot \log_3 x} = \left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} = x^{\log_3 x}$$

$$x^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} > 2 \cdot \sqrt[4]{3}$$

$$2 \cdot x^{\log_3 x} > 2 \cdot \sqrt[4]{3}$$

$$x^{\log_3 x} > \sqrt[4]{3}$$

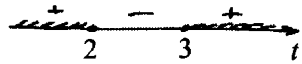
$$\log_3 x^{\log_3 x} > \log_3 \sqrt[4]{3}$$

$$\log_3 x \cdot \log_3 x > \log_3 3^{\frac{1}{4}}$$

$$\log_3^2 x > \frac{1}{4}$$

$\log_3 x < -\frac{1}{2}$	$\log_3 x > \frac{1}{2}$
$x < 3^{-\frac{1}{2}}$	$x > 3^{\frac{1}{2}}$
$x < \frac{1}{\sqrt{3}}$	$x > \sqrt{3}$

Решим второе неравенство. Обозначим $t = \log_2 x$



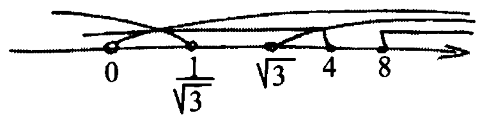
$t^2 + 6 \geqslant 5t$

$t^2 - 5t + 6 \geqslant 0$

$(t-2)(t-3) \geqslant 0$

$t \leqslant 2$	или	$t \geqslant 3$
$\log_2 x \leqslant 2$		$\log_2 x \geqslant 3$
$x \leqslant 4$		$x \geqslant 8$

Ответ: $x \in \left(0;\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup (\sqrt{3};\ 4] \cup [8;\ +\infty)$.



Комментарий. Оба неравенства системы решены обоснованно и верно. Для обоих неравенств не приведен отдельный ответ, но условие $x > 0$ явно выписано в начале и явно учтено в конце решения. Ответ верен, следовательно, оценка — 3 балла.

Оценка эксперта: 3 балла.

Задача С3 - 3

Решите систему неравенств
$$\begin{cases} 7\log_9(x^2 - x - 6) \leqslant 8 + \log_9 \dfrac{(x+2)^7}{x-3}, \\ \dfrac{1}{3^{x-1}} + \dfrac{1}{3^x} + \dfrac{1}{3^{x+1}} < 52. \end{cases}$$

Ответ: $(-1 - \log_3 4; -2)$, $(3;\ 12]$.

Пример 2. (Оригинал)

$$Б \begin{cases} 7\log_9(x^2-x-6) \leq 8 + \log_9 \frac{(x+2)^7}{x-3} \\ \frac{1}{3^{x-1}} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{3^{x+1}} < 52 \end{cases}$$

$D = 1+24 = 5^2$

$x = 3$ или -2

$$\begin{cases} 7\log_9(x-3)(x+2) - 7\log_9 \frac{x+2}{x-3} \leq 8 \\ 3\cdot 3^{-x} + 3^{-x} + \frac{1}{3}\cdot 3^{-x} < 52 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7\log_9 (x-3)^2 \leq 8 \\ 3^{-x}\left(\frac{13}{3}\right) < 52 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_9 (x-3) \leq \frac{4}{7} \\ 3^{-x} < 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3 \leq 9^{\frac{4}{7}} \\ 3^{-x} < 12 \end{cases}$$

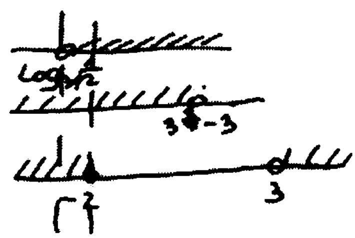
$$\begin{cases} x \leq 3^{\frac{8}{7}} - 3 \\ \dfrac{1-3\cdot 4\cdot 3^x}{3^x} < 0 \end{cases} \qquad 3^x > 0 \;\Downarrow$$

$$\begin{cases} x \leq 3^{\frac{8}{7}} - 3 \\ 1-3\cdot 4\cdot 3^x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 3^{\frac{8}{7}} - 3 \\ 3^x > \frac{1}{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 3^{\frac{8}{7}} - 3 \\ \log_3 \frac{1}{12} < x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > \log_3 \frac{1}{12} \\ x \leq 3^{\frac{8}{7}} - 3 \\ (x-3)(x+2) > 0 \end{cases}$$



Ответ: $x \in \left(\log_3 \frac{1}{12} ; -2\right)$

Рис. 6.

Пример 2.

$$\begin{cases} 7\log_9(x^2-x-6) \leqslant 8+\log_9 \dfrac{(x+2)^3}{x-3} \\ 3^{\frac{1}{x-1}} + 3^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x+1}} < 52 \end{cases}$$

$D = 1 + 24 = 5^2$

$x = 3$ или -2

$$\begin{cases} 7\log_9(x-3)(x+2) - 7\log_9 \dfrac{x+2}{x-3} \leqslant 8 \\ 3\cdot 3^{-x} + 3^{-x} + \dfrac{1}{3}\cdot 3^{-x} < 52 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7\log_9(x-3)^2 \leqslant 8 \\ 3^{-x}\left(\dfrac{13}{3}\right) < 52 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_9(x-3) \leqslant \dfrac{4}{7} \\ 3^{-x} < 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3 \leqslant 9^{\frac{4}{7}} \\ 3^{-x} < 12 \end{cases}$$

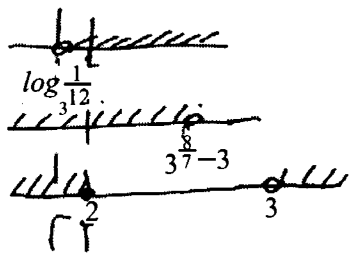
$$\begin{cases} x \leqslant 3^{\frac{8}{7}} - 3^1 \\ \dfrac{1-3\cdot 4\cdot 3^x}{3^x} < 0 \end{cases} \quad 3^x > 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x \leqslant 3^{\frac{8}{7}} - 3 \\ 1-3\cdot 4\cdot 3^x < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > \log_3 \frac{1}{12} \\ x \leqslant 3^{\frac{8}{7}} - 3 \\ (x-3)(x+2) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leqslant 3^{\frac{8}{7}} - 3 \\ 3^x > \dfrac{1}{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leqslant 3^{\frac{8}{7}} - 3 \\ \log_3 \dfrac{1}{12} < x \end{cases}$$



Ответ: $x \in (\log_3 \frac{1}{12};\ -2)$.

Комментарий. Ученик решает систему, как его учили, т.е. переходя от системы к системе, а не решая неравенства по отдельности. Если двигаться по вторым строчкам в системе, то видно, что показательное неравенство решено верно, хотя и замысловато. В логарифмическом — много ошибок. Придется поставить только 1 балл.

Оценка эксперта: 1 балл.

Задача С3 - 4

Решите систему неравенств $\begin{cases} 3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} > 2\sqrt[4]{3}, \\ \log_2^2 x + 6 \geqslant 5\log_2 x. \end{cases}$

Ответ: $0 < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \sqrt{3} < x \leqslant 4,\ x \geqslant 8.$

Пример 3. (Оригинал)

$$\begin{cases} 3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} > 2\sqrt[4]{3} & (1) \\ \log_2^2 x + 6 \geqslant 5\log_2 x & (2) \end{cases}$$

(1) $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} > 2\sqrt[4]{3}$

$$\cancel{2}\, 3^{\log_3^2 x} > \cancel{2}\sqrt[4]{3}$$

$$3^{\log_3^2 x} > 3^{\frac{1}{4}}$$

$$\log_3^2 x > \frac{1}{4}$$

$$\left[\begin{array}{l} \log_3 x > \frac{1}{2} \\ \log_3 x < -\frac{1}{2} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x > 3^{\frac{1}{2}} \\ x < 3^{-\frac{1}{2}} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x > \sqrt{3} \\ x < \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

(2) $\log_2^2 x + 6 \geqslant 5\log_2 x$

$$\log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 \geqslant 0$$

$$\log_2 x = a$$

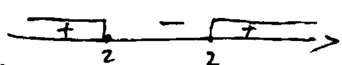
$$a^2 - 5a + 6 \geqslant 0$$

$$D = 25 - 24 = 1$$

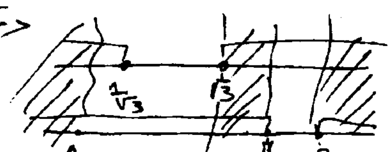
$$a = \frac{5+1}{2} = 3$$

$$a = \frac{5-1}{2} = 2$$

$$(a-3)(a-2) \geqslant 0$$



$$\left[\begin{array}{l} \log_2 x \leqslant 2 \\ \log_2 x \geqslant 3 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x \leqslant 4 \\ x \geqslant 8 \end{array}\right.$$



$$x \in \left(-\infty; \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup (\sqrt{3}; 4] \cup [8; +\infty)$$

Пример 3.

$$\begin{cases} 3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} > 2\sqrt[4]{3} \; (1) \\ \log_2^2 x + 6 \geqslant 5\log_2 x \; (2) \end{cases}$$

$$(1)\ 3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} > 2\sqrt[4]{3}$$

$$2 \cdot 3^{\log_3^2} > 2 \cdot \sqrt[4]{3}$$

$$3^{\log_3^2 x} > 3^{\frac{1}{4}} \qquad \log_3^2 x > \frac{1}{4}$$

$$\left[\begin{array}{l} \log_3 x > \frac{1}{2} \\ \log_3 x < -\frac{1}{2} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x > 3^{\frac{1}{2}} \\ x < 3^{-\frac{1}{2}} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x > \sqrt{3} \\ x < \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

$$(2)\ \log_2^2 x + 6 \geqslant 5\log_2 x$$

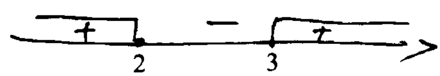
$$\log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 \geqslant 0$$

$$\log_2 x = a$$

$$a^2 - 5a + 6 \geqslant 0$$

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$a = \frac{5+1}{2} = 3$$

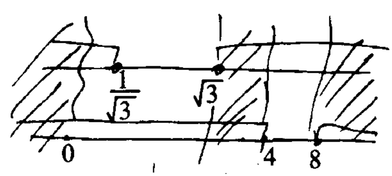


$$a = \frac{5-1}{2} = 2$$

$$(a-3)(a-2) \geqslant 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \log_2 x \leqslant 2 \\ \log_2 x \geqslant 3 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x \leqslant 4 \\ x \geqslant 8 \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (-\infty;\ \frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\sqrt{3};\ 4] \cup [8;\ +\infty)$.



Комментарий. Дважды при решении каждого неравенства системы и еще при выписывании ответа пропущено одно и то же условие $x > 0$. Даже 1 балл не получается, поэтому 0 баллов.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Задание С4

Практика проверки работ на 2010 – 2012 гг. показала, что оценивать задание С4 легче всего. По крайней мере, количество спорных ситуаций и неоднозначных, пограничных способов трактовки критериев оценивания было минимальным.

Как и во всякой геометрической, и особенно достаточно сложной, геометрической задаче весьма деликатным является вопрос о степени и характере обоснованности построений и утверждений. Излишняя требовательность к обоснованиям в принципе ведет к необходимости текста, изложение в котором начинается с аксиом, продолжается формулировками теорем, приведением нужных формул, и только после этого появляется решение задачи.

Позиция разработчиков КИМ ЕГЭ-2013 состоит в том, что в задании 4 не следует от выпускников школ на ЕГЭ требовать изложения, приближающегося к стилю учебников. Достаточным является наличие ясного понимания возможности разных геометрических конфигураций искомых объектов, верного описания (предъявления) этих конфигураций и грамотно проведенных вычислений. Обратим также внимание на то, что часто при решении геометрических задач школьники ссылаются на весьма невразумительный чертёж, а иногда чертёж вообще отсутствует (если рисунок сделан на бланке карандашом, то эта область не сканируется). Снижать оценку только за это не рекомендуется.

Критерии оценивания задания С4

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины, или рассмотрены все конфигурации, для которых получены значения искомой величины, неправильные из-за арифметических ошибок	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Задачи, примеры работ выпускников, комментарии и количество баллов

Задача С4-1

Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит точка C, а на другой — точки A и B, причем треугольник ABC — равнобедренный и его боковая сторона равна 13. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Решение

Рассмотрим возможные случаи.

Первый случай (см. рис. 7). $AC = BC = 13$.

Пусть H — точка касания вписанной окружности треугольника ABC с основанием AB, r_1 — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC. Тогда CH — высота и медиана треугольника ABC. Из прямоугольного треугольника AHC находим, что $AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$. Тогда $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) \cdot r_1 = \frac{1}{2}(10 + 13 + 13) \cdot r_1 = 18r_1.$$

Так как $18r_1 = 60$, то $r_1 = \frac{10}{3}$.

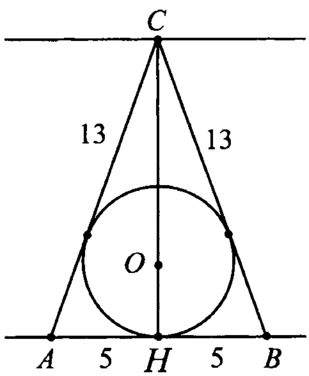


Рис. 7.

Второй случай (см. рис. 8). Пусть $AB = BC = 13$. Пусть CH — высота треугольника ABC, r_2 — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC. Тогда $BH = 5$, $AH = AB + BH = 13 + 5 = 18$.

Из прямоугольного треугольника ACH находим, что $AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{18^2 + 12^2} = 6\sqrt{9 + 4} = 6\sqrt{13}$,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 12 = 78,$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) \cdot r_2 = (13 + 3\sqrt{13}) \cdot r_2.$$

Из равенства $(13 + 3\sqrt{13})r_2 = 78$ получаем, что $r_2 = \dfrac{3(13 - 3\sqrt{13})}{2}$.

Третий случай (см. рис.9). Пусть $AB = AC = 13$, CH — высота треугольника ABC, r_3 — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

В прямоугольных треугольниках ACH и BCH $AH = 5$, $BH = 8$, $BC = \sqrt{BH^2 + CH^2} = \sqrt{8^2 + 12^2} = \sqrt{208} = 4\sqrt{13}$.

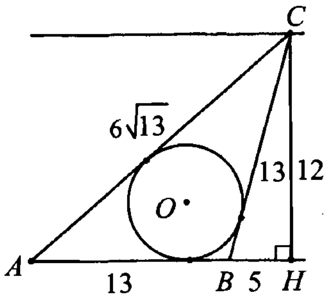


Рис. 8.

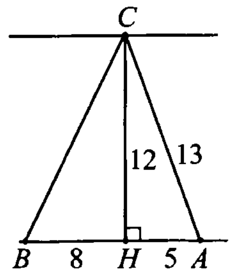


Рис. 9.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CH = 78,\ S_{ABC} = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) \cdot r_3 = (13 + 2\sqrt{13}) \cdot r_3.$$

Из равенства $(13 + 2\sqrt{13}) \cdot r_3 = 78$ получаем $r_3 = \dfrac{2(13 - 2\sqrt{13})}{3}$.

Ответ: $\dfrac{10}{3}$, $\dfrac{3(13 - 3\sqrt{13})}{2}$, $\dfrac{2(13 - 2\sqrt{13})}{3}$.

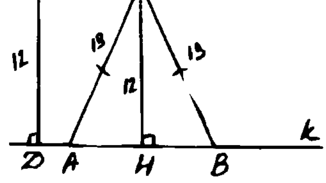
Комментарий. Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, получены верные значения искомой величины. Решение оценивается максимальным баллом. Ставим 3 балла.

Оценка эксперта: 3 балла.

Пример 1. (Оригинал)

C4

I случай+



Задача

Дано: $L \parallel k$ $FD = 12$ $AC = CB = 13$

Найти: R

Решение

Опустим из точки C высоту CH на AB. $CH = FD = 12$

из $\triangle HCB$:

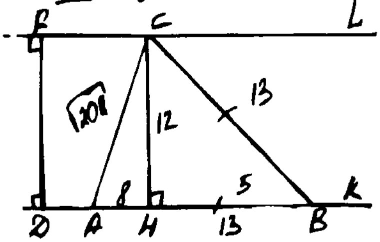
$HB = \sqrt{CB^2 - CH^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$

$AH = HB = 5$ по свойству равнобедр. тр-ка $\Rightarrow AB = 10$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = \frac{AC \cdot CB \cdot AB}{4R} \Rightarrow R = \frac{AC \cdot CB \cdot AB}{2 \cdot AB \cdot CH} = \frac{AC \cdot CB}{2CH}$$

$$R = \frac{13 \cdot 13}{2 \cdot 12} = \frac{169}{24} = 7\frac{1}{24}$$

II случай*



Дано: $L \parallel k$ $FD = 12$ $AB = CB = 13$

Найти: R

Решение

Опустим из точки C высоту CH на AB. $CH = FD = 12$

Из $\triangle CHB$:

$HB = \sqrt{CB^2 - CH^2} = 5 \Rightarrow AH = AB - HB = 8$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{AC \cdot CB \cdot AB}{4R} \Rightarrow R = \frac{AC \cdot CB}{2CH}$$

Найдем AC из $\triangle ACH$:

$AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{144 + 64} = \sqrt{208} = 4\sqrt{13} \Rightarrow R = \frac{4\sqrt{13} \cdot 13}{2 \cdot 12} = \frac{13}{6}\sqrt{13}$

Ответ: $7\frac{1}{24}$; $\frac{13}{6}\sqrt{13}$

* очевидно, что оба тр-ка остроуг., т.к. по т. косинусов cos всегда > 0.

Пример 1.

I случай* Задача

Дано: $L \parallel k$ $FD = 12$ $AC = CB = 13$

Найти: R

Решение:

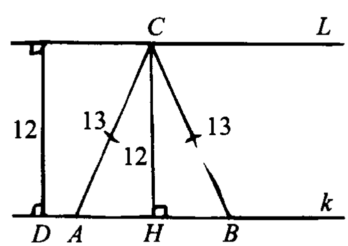
Опустим из точки C высоту CH на AB.

$CH = FD = 12$

Из $\triangle HCB$:

$HB = \sqrt{CB^2 - CH^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$

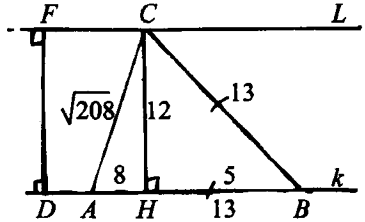
$AH = HB = 5$ по свойству равнобедр. тр-ка $\Rightarrow AB = 10$



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = \frac{AC \cdot CB \cdot AB}{4R} \Rightarrow R = \frac{AC \cdot CB \cdot AB}{2 \cdot AB \cdot CH} = \frac{AC \cdot CB}{2CH}$$

$$R = \frac{13 \cdot 13}{2 \cdot 12} = \frac{169}{24} = 7\frac{1}{24}$$

II случай* Дано: $L \parallel k$ $FD = 12$ $AB = CB = 13$
Найти: R
Решение:



Опустим из точки C высоту CH на AB. $CH = FD = 12$
Из $\triangle CHB$: $HB = \sqrt{CB^2 - CH^2} = 5$
$\Rightarrow AH = AB - HB = 8$
$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = \frac{AC \cdot CB \cdot AB}{4R} \Rightarrow R = \frac{AC \cdot CB}{2CH}$
Найдем AC из $\triangle ACH$:

$AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{144 + 64} = \sqrt{208} = 4\sqrt{13} \Rightarrow R = \frac{4\sqrt{13} \cdot 13}{2 \cdot 12} = \frac{13}{6}\sqrt{13}$

Ответ: $7\frac{1}{24}$; $\frac{13}{6}\sqrt{13}$

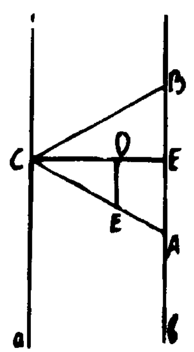
*Очевидно, что оба тр-ка-остроуг., т.к. по т. косинусов cos всегда > 0.

Комментарий. Ситуация классическая. Верно решена не та задача: вместо вписанной рассмотрена описанная окружность. Можно много говорить и довольно долго спорить о том, что «...решение-то грамотное, ученик хороший...» и т.п. Но тут может быть только одно решение, однозначное и применимое ко всем аналогичным ситуациям — это 0 баллов.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 2. (Оригинал)

C4.



Дано: $a \parallel b$;

$EC = 12$; $AC = BC = 13$;

Найти: r-?

Решение: 1) Рассмотрим $\triangle ACE$-он прямоугольный, т.к. $EC \perp AB$, по теореме Пифагора $EA = \sqrt{AC^2 - EC^2}$; $EA = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$.

2) $EA = EB$, т.к. EC-высота, медиана и биссектриса в равнобедренном треугольнике.

и. $AB = 2EA$; $AB = 2 \cdot 5 = 10$.

3) $r = OE$, т.к. O-центр вписанной окружности, а E-середина стороны AC.

$r = \frac{2S}{AC+BC+AB}$; $S_{abc} = \sqrt{p(p-AC)(p-AB)(p-BC)}$; $p = \frac{AC+BC+AB}{2}$; $p = \frac{13+13+10}{2} = 18$

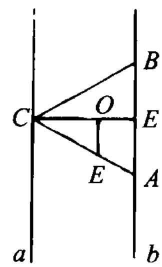
$S_{abc} = \sqrt{18(18-13)(18-13)(18-10)} = \sqrt{18 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 8} = 3 \cdot 5 \cdot 4 = 60.$

$r = \frac{60}{36} = 1\frac{2}{3}$

Ответ: $1\frac{2}{3}$.

Пример 2.

Дано: $a \parallel b$ $EC = 12$ $AC = BC = 13$
Найти: r—?
Решение: 1) Рассмотрим $\triangle ACE$ — он прямоугольный, т.к. $EC \perp AB$. по теореме Пифагора $EA = \sqrt{AC^2 - EC^2}$; $EA = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$.
2) $EA = EB$, т.к. EC — высота, медиана и биссектриса в равнобедренном треугольнике. $AB = 2EA$; $AB = 2 \cdot 5 = 10$.
3) $r = OE$, т.к. O — центр вписанной окружности, а E — середина стороны AC.



$r = \dfrac{2S}{AC \cdot BC \cdot AB}$; $S_{ABC} = \sqrt{p(p-AC)(p-AB)(p-BC)}$; $p = \dfrac{AC+BC+AB}{2}$;

$p = \dfrac{13+13+10}{2} = 18$

$S_{ABC} = \sqrt{18(18-13)(18-13)(18-10)} = \sqrt{18 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 8} = 3 \cdot 5 \cdot 4 = 60.$

$r = \dfrac{60}{36} = 1\dfrac{2}{3}$

Ответ: $1\dfrac{2}{3}$.

Комментарий. Тоже весьма стандартное положение. Почти то же самое, что и в предыдущем примере 2, но при вычислении радиуса вписанной окружности есть ошибка. Площадь делится на периметр, а не на полупериметр. Поэтому цифровой ответ — в два раза меньше. Другие случаи не рассмотрены, но 1 балл поставить можно.

Оценка эксперта: 1 балл.

Задача С4-2

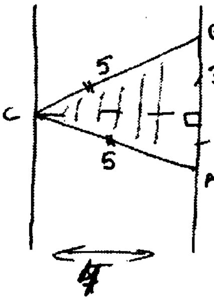
Расстояние между параллельными прямыми равно 4. На одной из них лежит точка C, а на другой — точки A и B , причем треугольник ABC — равнобедренный и его боковая сторона равна 5. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Ответ: 1,5, $10 - 4\sqrt{5}$, $\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$.

Пример 3. (Оригинал)

$\boxed{C3}$

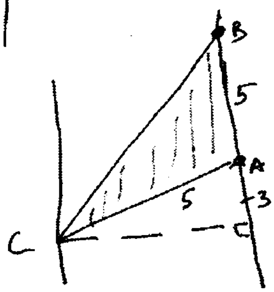
А)



3 – по т. Пифагора

$$r = \frac{\frac{1}{2}(3+3)\cdot 4}{\frac{1}{2}(5+5+3+3)} = \frac{24}{16} = 1{,}5$$

Б)



3 – по т. Пифагора

$$r = \frac{\frac{1}{2}(\cancel{5+3})\cdot 4\cdot 5}{\frac{1}{2}(5+5+\sqrt{4^2+(5+3)^2})} = \frac{20}{10+\sqrt{80}} = \frac{10}{5+2\sqrt{5}}$$

Ответ: 1,5 и $\frac{10}{5+2\sqrt{5}}$.

C3

Пример 3.

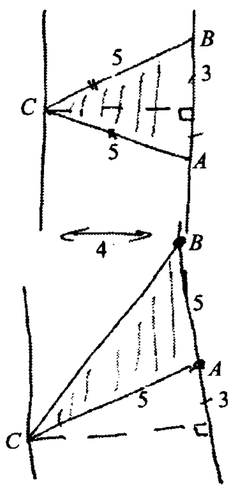
А) 3 — по т.Пифагора

$$r = \frac{\frac{1}{2}(3+3)\cdot 4}{\frac{1}{2}(5+5+3+3)} = \frac{24}{16} = 1{,}5.$$

Б) 3 — по т.Пифагора

$$r = \frac{\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5}{\frac{1}{2}(5+5+\sqrt{4^2+(5+3)^2})} = \frac{20}{10+\sqrt{80}} = \frac{10}{5+2\sqrt{5}}$$

Ответ: 1,5 и $\frac{10}{5+2\sqrt{5}}$.



Комментарий. Рисунки неаккуратные, есть зачеркивания и исправления, общих формул для площади, полупериметра, радиуса нет, номер задачи указан неверно, иррациональность из знаменателя не убрана и т.д. Но при спокойном взгляде на решение становится ясно, что снижать оценку можно только за отсутствие еще одного случая. Оцениваем в 2 балла.

Оценка эксперта: 2 балла.

Задание C5

Как это обычно бывает, задачи с параметром допускают либо чисто алгебраический способ решения, либо способ решения, основанный на построении и исследовании простейшей геометрической модели.

Рассмотрим два типа задач (на взаимное расположение или окружностей, или парабол).

Критерии оценивания задания C5

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены оба верных значения параметра, но — или в ответ включены также и одно-два неверных значения; — или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра (или промежуток, содержащий верный ответ)	2
Задача сведена к исследованию: — или взаимного расположения трёх окружностей (двух парабол); — или двух квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Задачи, примеры работ выпускников, комментарии, количество баллов

Задача C5-1

Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система $\begin{cases} (|x|-6)^2+(y-12)^2=4, \\ (x+1)^2+y^2=a^2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение

Если $x \geqslant 0$, то уравнение $(|x|-6)^2+(y-12)^2=4$ задаёт окружность ω_1 с центром в точке $C_1(6;12)$ радиуса 2, а если $x<0$, то оно задаёт окружность ω_2 с центром в точке $C_2(-6;12)$ того же радиуса (см. рис.10).

При положительных значениях параметра a уравнение $(x+1)^2+y^2=a^2$ задаёт окружность ω с центром в точке $C(-1;0)$ радиуса a . Поэтому задача

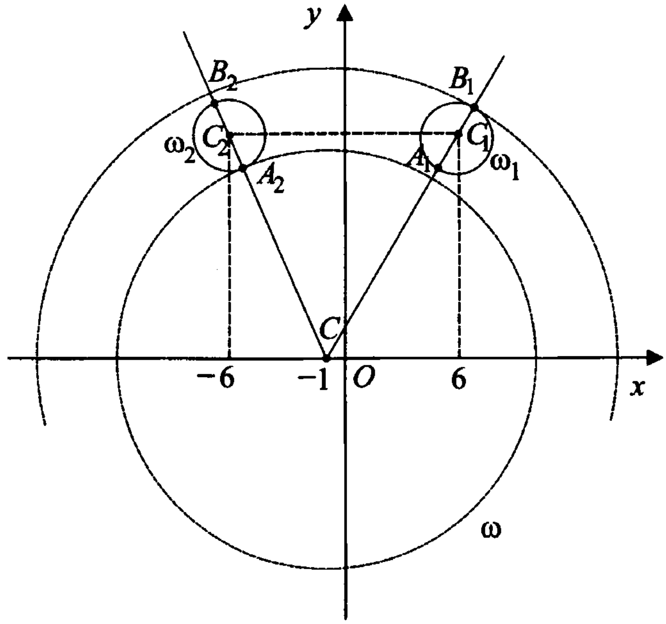


Рис. 10.

состоит в том, чтобы найти все значения параметра a , при каждом из которых окружность ω имеет единственную общую точку с объединением окружностей ω_1 и ω_2 .

Из точки C проведём луч CC_1 и обозначим A_1 и B_1 точки его пересечения с окружностью ω_1, где A_1 лежит между C и C_1. Так как $CC_1 = \sqrt{(6+1)^2 + 12^2} = \sqrt{193}$, то $CA_1 = \sqrt{193} - 2, CB_1 = \sqrt{193} + 2$.

При $a < CA_1$ или $a > CB_1$ окружности ω и ω_1 не пересекаются.

При $CA_1 < a < CB_1$ окружности ω и ω_1 имеют две общие точки.

При $a = CA_1$ или $a = CB_1$ окружности ω и ω_1 касаются.

Из точки C проведём луч CC_2 и обозначим A_2 и B_2 точки его пересечения с окружностью ω_2 , где A_2 лежит между C и C_2 . Так как $CC_2 = \sqrt{(-6+1)^2 + 12^2} = 13$, то $CA_2 = 13 - 2 = 11, CB_2 = 13 + 2 = 15$.

При $a < CA_2$ или $a > CB_2$ окружности ω и ω_2 не пересекаются.

При $CA_2 < a < CB_2$ окружности ω и ω_2 имеют две общие точки.

При $a = CA_2$ или $a = CB_2$ окружности ω и ω_2 касаются.

Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность ω касается ровно одной из двух окружностей ω_1 и ω_2 и не пересекается с другой. Так как $CA_2 < CA_1 < CB_2 < CB_1$, то условию задачи удовлетворяют только числа $a = 11$ и $a = \sqrt{193} + 2$.

Ответ: 11; $\sqrt{193} + 2$.

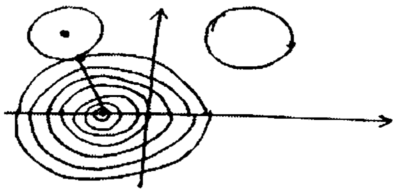
Комментарий. Все критерии выполнены, ставим максимальный балл — 4.

Оценка эксперта: 4 балла.

Пример 1. (Оригинал)

$\boxed{C\ 5}$

$$\begin{cases} (|x|-6)^2+(y-12)^2=4 \\ (x+1)^2+y^2=a^2 \end{cases}$$



Одно решение $\Leftrightarrow$ окружности касаются $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ расстояние между центрами
равно сумме радиусов $\Leftrightarrow$

$2+a=\sqrt{(-6-(-1))^2+12^2}=\sqrt{25+144}=13$

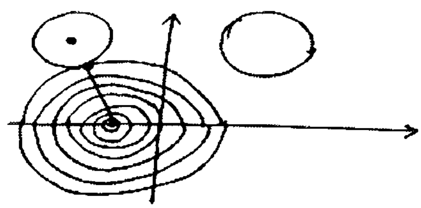
Другие случаи не подходят.

Ответ: $a=\cancel{13}.\ 11$

Пример 1.

С5.

$$\begin{cases} (|x|-6)^2+(y-12)^2=4 \\ (x+1)^2+y^2=a^2 \end{cases}$$



Одно решение $\Leftrightarrow$ окружности касаются $\Leftrightarrow$ расстояние между центрами равно сумме радиусов $\Leftrightarrow$
$2+a=\sqrt{(-6-(-1))^2+12^2}=\sqrt{25+144}=13$
Другие случаи не подходят.
Ответ: $a=11$.

Комментарий. Подход, как говорят, «в принципе» верен. Одно нужное значение параметра найдено верно и обосновано (хорошо, что в ответе есть исправление). Так что по критериям менее 2-х баллов — не поставить. Нельзя поставить и более 2 баллов, так как не «...получены оба верных значения параметра...», следовательно, ставим 2-х балла.

Оценка эксперта: 2 балла.

Задача С5-2

Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=4ax+|x^2-6x+5|$ больше чем -24.

Решение

1. Функция $f(x)$ имеет вид:

а) при $x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5) \geqslant 0$, $f(x) = 4ax + (x^2 - 6x + 5) = x^2 + 2(2a-3)x + 5$, а ее график состоит из двух частей параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 3 - 2a$;

б) при $(x-1)(x-5) \leqslant 0$, $1 \leqslant x \leqslant 5$,

$f(x) = 4ax - (x^2 - 6x + 5) = -x^2 + 2(2a+3)x - 5$, а ее график представляет собой часть параболы с ветвями, направленными вниз.

2. Если $3 - 2a$ принадлежит отрезку $[1; 5]$, то наименьшее значение функция может принимать только на концах отрезка, то есть при $x = 1$ или $x = 5$. Если $3 - 2a \notin [1; 5]$ - то еще и в точке $x = 3 - 2a$.

3. Наименьшее значение функции $f(x)$ больше -24 тогда и только тогда,

когда либо $\left\{\begin{array}{l} (3-2a) \in [1;5], \\ f(1) > -24, \\ f(5) > -24, \end{array}\right.$ либо $\left\{\begin{array}{l} (3-2a) \notin [1;5], \\ f(1) > -24, \\ f(5) > -24, \\ f(3-2a) > -24. \end{array}\right.$

Решим первую систему $\left\{\begin{array}{l} 1 \leqslant 3 - 2a \leqslant 5, \\ f(1) > -24, \\ f(5) > -24, \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} -1 \leqslant a \leqslant 1, \\ 4a > -24, \\ 20a > -24, \end{array}\right.$ $-1 \leqslant a \leqslant 1$

Решим вторую систему $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} -1{,}2 < a < -1, \\ a > 1, \end{array}\right. \\ |2a - 3| < \sqrt{29}, \end{array}\right.$ $\dfrac{3-\sqrt{29}}{2} < a < -1$ или $1 < a < \dfrac{3+\sqrt{29}}{2}$.

Ответ: $\left(\dfrac{3-\sqrt{29}}{2}; \dfrac{3+\sqrt{29}}{2}\right)$.

Комментарий. Обоснованно получен верный ответ, ставим 4 балла.

Оценка эксперта: 4 балла.

Пример 2. (Оригинал)

$4ax + |x^2 - 6x + 5| > -24, \quad x \in R$ C5

$|x^2 - 6x + 5| > -24 - 4ax$ $\quad |f| > c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f > c \\ -f > c \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x^2 - 6x + 5 > -24 - 4ax \\ -x^2 + 6x - 5 > -24 - 4ax \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+4ax-6x+29>0 \\ x^2-4ax-6x-19<0 \end{array}\right.$$

(1) $x^2+4ax-6x+29>0$, $x \in R$

$$\Updownarrow$$

$D<0$ $\quad D=(4a-6)^2-4\cdot 29=$

$=4\left((2a-3)^2-29\right)=4\left(4a^2-12a-20\right)=$

$=16\left(a^2-3a-5\right)<0$

$$\frac{3-\sqrt{29}}{2}<a<\frac{3+\sqrt{29}}{2}$$

(2) $x^2-4ax-6x-19<0$, $x< R$ $\quad a-\varnothing$, т.к. парабола, ветви вверх.

Ответ: $\left(\frac{3-\sqrt{29}}{2};\ \frac{3+\sqrt{29}}{2}\right)$

Пример 2.

C5

$4ax+|x^2-6x+5|>-24,\ x\in R$

$|x^2-6x+5|>-24-4ax$ $\quad |b|>c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b>c \\ -b>c \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x^2-6x+5>-24-4ax \\ -x^2+6x-5>-24-4ax \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} x^2+4ax-6x+29>-0 \\ x^2-4ax-6x-19<0 \end{array}\right.$

1) $x^2+4ax-6x+29>0,\ x\in R$

$D<0$

$D=(4a-6)^2-4\cdot 29=4((2a-3)^2-29)=4(4a^2-12a-20)=16(a^2-3a-5)<0$

$\frac{3-\sqrt{29}}{2}<a<\frac{3+\sqrt{29}}{2}$

(2) $x^2-4ax-6x-19<0,\ x<R\ \ a—\varnothing$, т.к. парабола, ветви вверх.

Ответ: $\left(\frac{3-\sqrt{29}}{2};\ \frac{3+\sqrt{29}}{2}\right)$

Комментарий. Получен верный ответ, но получен он **необоснованно!** Конкретнее, при решении неравенства (1) (или (2)) ошибка состоит в том, что рассматриваются $x \in R$, а нужно рассматривать x вне отрезка $[1;5]$ (или x в отрезке $[1;5]$). Значит, задача не « …сведена к исследованию взаимного расположения частей двух парабол…», можно поставить только 0 баллов.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 3. (Оригинал)

Раскроем модуль с плюсом

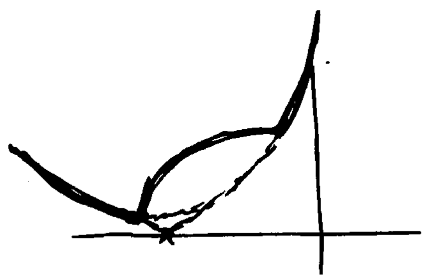
$y = 4ax + x^2 - 6x + 5$ – парабола, ветви вверх.

$x_в = -\frac{в}{2a} = -\frac{4a-6}{2} = 3-2a$

$y_в = y_{наим} > -24$

Там, где модуль раскрывается с минусом, будет замена на параболу, ветви вниз.

Все "новые" точки будут выше "старых"



Решим неравенство

$y_в = 4a(3-2a) + (3-2a)^2 - 6(3-2a) + 5 > -24$

$12a - 8a^2 + 9 - 12a + 4a^2 - 18 + 12a + 5 > -24$

$-4a^2 + 12a - 4 > -24 \quad : -4$

$a^2 - 3a - 1 < 6$

$a^2 - 3a - 7 < 0$

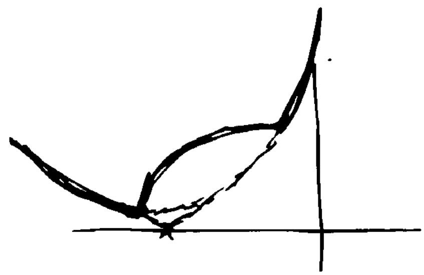
$\frac{3-\sqrt{9+28}}{2} < a < \frac{3+\sqrt{9+28}}{2}$

Ответ: $\left(\frac{3-\sqrt{37}}{2}; \frac{3+\sqrt{37}}{2}\right)$

Пример 3.

Раскроем модуль с плюсом
$y = 4ax + x^2 - 6x + 5$ — парабола, ветви ввер.
$$x_b = -\frac{b}{2a} = -\frac{4a-6}{2} = 3 - 2a$$
$y_b = y_{\text{наим}} > -24$
Там, где модуль раскрывается с минусом, будет замена на параболу, ветви вниз.
Все «новые» точки будут выше «старых».

Решим неравенство
$y_b = 4a(3-2a) + (3-2a)^2 - 6(3-2a) + 5 > -24$
$12a - 8a^2 + 9 - 12a + 4a^2 - 18 + 12a + 5 > -24$
$-4a^2 + 12a - 4 > -24 \; : \; -4$
$a^2 - 3a - 1 < 6$
$a^2 - 3a - 7 < 0$
$$\frac{3-\sqrt{9+28}}{2} < a < \frac{3+\sqrt{9+28}}{2}$$
Ответ: $\dfrac{3-\sqrt{37}}{2} < a < \dfrac{3+\sqrt{37}}{2}$



Комментарий. Имеется арифметическая ошибка при делении на -4. Без нее ответ совпадал бы с верным ответом.

Однако для обоснованного получения ответа недостаточно одного неравенства $y_{\text{верш}} > -24$. Кроме того, явно не хватает указания тех промежутков, где автор «раскрывает модуль» с плюсом или с минусом. С некоторой натяжкой, но задача «...сведена к исследованию взаимного расположения частей двух парабол...», ставим 1 балл.

Оценка эксперта: 1 балл.

Задание С6

Содержательно задание С6 проверяет в первую очередь не уровень математической (школьной) образованности, а уровень математической культуры. В связи с этим хотелось бы подчеркнуть, что никаких фактов из теории чисел типа теоремы Вильсона, чисел Мерсенна, малой теоремы Ферма, теории сравнений и т.п. для решения заданий не требуется. Тот, кто эти факты знает, разумеется, может их использовать, но, подчеркиваем, при решении всегда можно обойтись и без них.

Рассмотрим два типа задач (на исследование четности числа, на построение и анализ неравенств).

Критерии оценивания задания С6

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован (верно выполнены три пункта из четырех: а), б), в) пример, в) оценка))	3
Верно найдено наибольшее значение суммы и доказано, что она всегда отлична от 0 (верно выполнены два пункта из четырех)	2
Верно найдено только наибольшее значение суммы или только доказано, что она всегда отлична от 0 (верно выполнен один пункт из четырех)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Задачи, примеры работ выпускников, комментарии и количество баллов.

Задача С6 - 1

Каждое из чисел 2, 3, ..., 7 умножают на каждое из чисел 13, 14, ..., 21 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение

1. Если все произведения взяты со знаком плюс, то их сумма максимальна и равна $(2+\ldots+7)(13+\ldots+21) = \left(\frac{2+7}{2}\cdot 6\right)\cdot\left(\frac{13+21}{2}\cdot 9\right) = 27\cdot 153 = 4131$.

2. Так как сумма оказалась нечетной, то число нечетных слагаемых в ней — нечетно, причем это свойство всей суммы не меняется при смене знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при такой расстановке знаков у произведений, которая получится при раскрытии следующих скобок: $(-2+3-4+5+6-7)(-13-14-15-16+17-18+19+20+21) = 1\cdot 1 = 1$.

Ответ: 1 и 4131.

Комментарий. Воспользуемся фразой критерия «Обоснованно получен правильный ответ» и поставим 4 балла.

Оценка эксперта: 4 балла.

Пример 1. (Оригинал)

$\boxed{C6}$ Даны два набора чисел:

1) 2, 3, 4, 5, 6, 7 – 6 чисел

2) 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 – 9 чисел

1) Очевидно, что максимальная сумма получится, если перед всеми произведениями поставить знак „+", т.е

$S_{max} = (2\cdot13+2\cdot14+\ldots+2\cdot21)+(3\cdot13+3\cdot14+\ldots+3\cdot21)+\ldots+(7\cdot13+7\cdot14+\ldots+7\cdot2$

$=(2+3+4+5+6+7)\cdot(13+14+15+16+17+18+19+10+21)=27\cdot153=\underline{\underline{4131}}$

2) При указанных перемножениях получаются 54 числа, из которых 39 - четные, и 15 - нечетные. Отсюда следует, что указанная сумма всегда будет являться нечетным числом.

Следовательно, наименьшая возможная по модулю сумма равна 1 или –1

Распишем получившуюся сумму:

$S=(\pm(2\cdot13)\pm(2\cdot14)\pm\ldots\pm(2\cdot21))+(\pm(3\cdot13)\pm(3\cdot14)\pm\cdots\pm(3\cdot21))+\ldots+$

$+(\pm(7\cdot13)\pm(7\cdot14)\pm\ldots\pm(7\cdot21))=(\pm2\pm3\pm4\pm5\pm6\pm7)\cdot(\pm13\pm14\pm15\pm16\pm$

$\pm17\pm18\pm19\pm20\pm21)$

Сумма будет минимальна по модулю, когда обе скобки будут

минимальны по модулю

минимальное по модулю значение 1-ой скобки = 1, например

$-2+3+4-5-6+7=1$

минимальное по модулю значение 2-ой скобки = 1, например

$-13-14-15-16+17-18+19+20+21=1$

Значит, минимальное по модулю значение суммы = 1 (суммы: ±1)

Ответ: ±1; 4131

Пример 1.

Даны два набора чисел:
1) 2, 3, 4, 5, 6, 7 — 6 чисел.
2) 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 — 9 чисел.
1) Очевидно, что максимальная сумма получится, если перед всеми произведениями поставить знак «+», т.е. $S_{\max} = (2\cdot 13 + 2\cdot 14 + \ldots + 2\cdot 21) + (3\cdot 13 + 3\cdot 14 + \ldots + 3\cdot 21) + \ldots$
$\ldots + (7\cdot 13 + 7\cdot 14 + \ldots + 7\cdot 21) = (2+3+4+5+6+7)\cdot(13+14+15+16+17+18+19+20+21) =$
$= 27\cdot 153 = 4131$
2) При указанных перемножениях получаются 54 числа, из которых 39 — четные, и 15 — нечетные. Отсюда следует, что указанная сумма всегда будет являться нечетным числом.
Следовательно, наименьшая возможная по модулю сумма равна 1 или -1.
Распишем получившуюся сумму:
$S = (\pm(2\cdot 13) \pm (2\cdot 14) \pm \ldots \pm (2\cdot 21)) + (\pm(3\cdot 13\cdot) \pm (3\cdot 14) \pm \ldots \pm (3\cdot 21)) + \ldots$
$\ldots + (\pm(7\cdot 13) \pm (7\cdot 14) \pm \ldots \pm (7\cdot 21)) = (\pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5 \pm 6 \pm 7)\cdot$
$\cdot(\pm 13 \pm 14 \pm 15 \pm 16 \pm 17 \pm 18 \pm 19 \pm 20 \pm 21)$
Сумма будет минимальна по модулю, когда обе скобки будут минимальны по модулю. Минимальное по модулю значение 1-й скобки= 1, например
$-2 + 3 + 4 - 5 - 6 + 7 = 1$
Минимальное по модулю значение 2-й скобки= 1, например
$-13 - 14 - 15 - 16 + 17 - 18 + 19 + 20 + 21 = 1$
Значит, минимальное по модулю значение суммы = 1
(суммы ± 1)
Ответ: ± 1; 4131

Комментарий. Ситуация понятная. Решение, пожалуй, даже более ясное, чем приведенное выше. В нем конкретно указано и общее число (54) произведений, и число (15) нечетных произведений. Формально выписанный ответ не совпадает с верным ответом. Но верный ответ обоснованно получен строчкой ранее.

Оценка эксперта: 4 балла.

Задача С6 - 2

На доске написано более 27, но менее 45 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -5, среднее арифметическое всех положительных из них равно 9, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -18.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Решение

Пусть среди написанных чисел k положительных, l отрицательных и m нулей. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому $9k - 18l + 0\cdot m = -5(k+l+m)$.

а) Заметим, что в левой части каждое слагаемое делится на 9, поэтому $k + l + m$ — количество целых чисел — делится на 9. По условию

$27 < k + l + m < 45$, поэтому $k + l + m = 36$. Таким образом, написано 36 чисел.

б) Приведём равенство $9k - 18l = -5(k + l + m)$ к виду $13l = 14k + 5m$. Так как $m \geqslant 0$, получаем, что $13l \geqslant 14k$, откуда $l > k$. Следовательно, отрицательных чисел больше, чем положительных.

в) Дадим оценку. Подставим $k + l + m = 36$ в правую часть равенства $9k - 18l = -5(k + l + m)$: $9k - 18l = -180$, откуда $k = 2l - 20$. Так как $k + l \leqslant 36$, получаем $3l - 20 \leqslant 36$, $3l \leqslant 56$, $l \leqslant 18$, $k = 2l - 20 \leqslant 16$; то есть положительных чисел не более 16.

Приведём пример для 16 положительных чисел. Пусть на доске 16 раз написано число 9, 18 раз написано число -18 и два раза написан 0. Тогда $\frac{9 \cdot 16 - 18 \cdot 18}{36} = \frac{144 - 324}{36} = -5$, указанный набор удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ: а) 36; б) отрицательных; в) 16.

Комментарий. Решение полностью соответствует критериям оценивания задания С6. Ставим 4 балла.

Оценка эксперта: 4 балла.

Пример 2. (Оригинал)

а) Пуст общие число люей n.
Пусть i - это число положительных чисел, пуст j - это число отрицательных чисел
Запишем среднее арифм этих чисел

$$\frac{9i + (-18)(n - i - j)}{n} = -5$$

$$9i - 18n + 18i + 18j = -5n$$

$$27i - 18n + 18j = -5n$$

$27i + 18j = 13n$. Тогда т.к. $i, j, n \in \mathbb{Z}$, то

$n \vdots 9$. Тогда т.к. $27 \leqslant n \leqslant 45$, то n — это 27, ~~36 или 45~~.

~~Рассмотрим три случая соответственно~~

$n = 36$

$27i + 18j = 13 \cdot 36$

$3i + 2j = 13 \cdot 4$

$3i + 2j = 52. \Rightarrow i \vdots 2$

~~Также~~ меньше j чем 2 брать бессмысленно

а) Заметим, что мы можем взять все пол. равные 9, отрицательные −18 и все будет ещё лучше, что пол. больше.

i	j	$n-i-j$
0	26	10
2	23	11
4	20	12
6	17	13
8	14	14
10	11	15
12	8	10
14	5	17
16	2	18

Наибольшее кол-во положительных это 16.

Ответ: а) 36 чисел
б) отрицат.
в) 16 чисел

Пример 2.

а) Пусть общее число людей n.
Пусть i — это число положительных чисел, пусть j — это число отрицательных чисел.
Запишем среднее арифм.этих чисел

$$\frac{9i + (-18)(n - i - j)}{n} = -5$$

$9i - 18n + 18i + 18j = -5n$

$27i - 18n + 18j = -5n$

$27i + 18j = 13n$ Тогда т.к. $i, j, n \in Z$, то

$n \vdots 9$ Тогда т.к. $27 \leqslant n \leqslant 45$, то n — это 27

$n = 36$

$27i + 18j = 13 \cdot 36$

$3i + 2j = 13 \cdot 4$

$3i + 2j = 52 \ \Rightarrow \ i : 2$, так как меньше i брать бессмысленно

i	j	$n-i-j$
0	26	10
2	23	11
4	20	12
6	17	13
8	14	14
10	11	15
12	8	16
14	5	17
16	2	18

Заметим, что мы можем взять все пол равные 9, отрицательные −18 И все будет вер Заметим, что пол больше. Наибольшее кол-во положительных это 16.

Ответ: а) 36 чисел б) отрицат. в) 16 чисел

Комментарий. Сложный случай. Формально первое же равенство неверно. Но из этого равенства ясно, что имеет место описка: j — кол-во нулевых чисел. Тогда далее — почти всё верно! Только почему-то в тексте есть слова «...пол. больше», хотя в ответе верно указано, что больше отрицательных. Посчитаем это опиской и поставим 4 балла.

Оценка эксперта: 4 балла.

Пример 3. (Оригинал)

составим ур-не: x) все числа

$-5x = -18(\cancel{y}\ x-y) + 9y$ y) положит

x-y) отриц

$13x = 9y \Rightarrow x = 36$, т.к. $\frac{x}{9}$ -целое число, т.к. $\frac{13}{9}$ не делится.

а) 36 чисел.

Пример 3.

Составим уравнение: $-5x = -18(x-y) + 9y$

x) все числа

y) положит

$x-y$) отриц

$13x = 9y \Rightarrow x = 36$, т.к. $\frac{x}{9}$ — целое число, т.к. $\frac{13}{9}$ не делится.

а) 36 чисел.

Комментарий. В рассуждениях допущена вычислительная ошибка ($18y + 9y \neq 9y$). Верный ответ получен явно спонтанно, ставим 0 баллов.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Часть 2. Материалы для тренинга по оцениванию заданий ЕГЭ с развернутым ответом

Задание С1

Критерии оценивания

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или в пункте б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача С1 - 1

а) Решите уравнение $4\sin 2x - 4\cos x - 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение

а) Запишем уравнение в виде: $4 - 4\cos^2 x - 4\cos x - 1 = 0$; $4\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0$; $(2\cos x + 3)(2\cos x - 1) = 0$.

Значит, или $\cos x = -\frac{3}{2}$ — уравнение не имеет корней, или $\cos x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

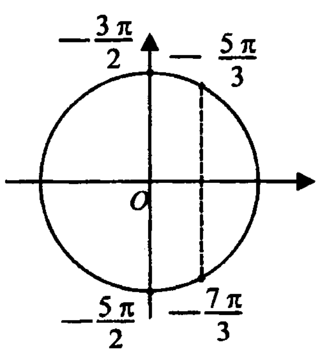


Рис. 11.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}]$.

Получим числа: $-\frac{7\pi}{3}; -\frac{5\pi}{3}$.

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$; б) $-\frac{7\pi}{3}$; $-\frac{5\pi}{3}$.

Пример 1. (Оригинал)

С1. $4\sin^2 x - 4\cos x - 1 = 0$.

$4\cdot(1-\cos^2 x) - 4\cos\alpha - 1 = 0$.

$-4\cos^2 - 4\cos x + 3$

Пусть: $\cos x = y$

$4y^2 + 4y - 3 = 0$

$y_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{16+48}}{8} = \frac{-4\pm 8}{8}$

$y' = \frac{-4-8}{8} = -\frac{12}{8} \neq \cos\alpha$ т.к

$y_2 = \frac{-4+8}{8} = \frac{4}{2} = \frac{1}{2}$.

$\cos\alpha = \frac{1}{2}$ $\quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$.

пусть: $n = -1$

$x_1 = -\frac{\pi}{3} - 2\pi = -2\frac{1}{3}\pi = -\frac{7}{3}\pi$.

пусть: $n = 1$

$x_2 = \frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5}{3}\pi$.

Ответ: $-\frac{7}{3}\pi$; $-\frac{5}{3}\pi$.

Пример 1.

С1 $4\sin^2 x - 4\cos x - 1 = 0$.

$4\cdot(1-\cos^2 x) - 4\cos\alpha - 1 = 0$.

$-4\cos^2 - 4\cos x + 3$

Пусть: $\cos x = y$

$4y^2 + 4y - 3 = 0$

$$y_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{16+48}}{8} = \frac{-4\pm 8}{8}$$

$$y' = \frac{-4-8}{8} = -\frac{12}{8} \neq \cos\alpha \text{ т.к.}$$

$$y_2 = \frac{-4+8}{8} = \frac{4}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n.$$

пусть: $n = -1$

$$x_1 = -\frac{\pi}{3} - 2\pi = -2\frac{1}{3}\pi = -\frac{7\pi}{3}$$

пусть: $n = 1$

$$x_2 = \frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5}{3}\pi.$$

Ответ: $-\frac{7}{3}\pi$; $-\frac{5}{3}\pi$.

Пример 2. (Оригинал)

С1. $4\sin^2 x - 4\cos x - 1 = 0$

1) $4\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0$

$\cos x = a$, $\in [-1; 1]$

$4a^2 + 4a - 3 = 0$

$D = 64$; $\pm\sqrt{D} = 8$

$a_1 = \frac{1}{2}$ $a_2 = -1\frac{1}{2} \notin [-1; 1]$.

$\cos x = \frac{1}{2}$

$x = \pm \arccos\frac{1}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$

2) Отбор корней на промежутке $[-450°; -270°]$.

$x_1 = -60° + 360°n$; $x_2 = 60° + 360°n$

$n = -1$; $x_1 = -420°$(уд); $x_2 = -300°$(уд)

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

б) Корни: $-420°$; $-300°$.

Пример 2.

С1 $4\sin^2 x - 4\cos x - 1 = 0$

1) $4\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0$

$\cos x = a$, $\in [-1;\ 1]$

$4a^2 + 4a - 3 = 0$

$D = 64$; $\pm\sqrt{D} = 8$

$a_1 = \frac{1}{2}$ $a_2 = -1\frac{1}{2} \notin [-1;\ 1]$.

$\cos x = \frac{1}{2}$

$x = \pm \arccos\frac{1}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$

2) Отбор корней на промежутке

$[-450°;\ -270°]$

$x_1 = -60° + 360°n$; $x_2 = 60° + 360°n$

$n = -1$; $x_1 = -420°$(уд.); $x_2 = -300°$(уд.)

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

б) корни: $-420°$; $-300°$.

Задача С1 - 2

а) Решите уравнение $6\sin^2 x + 7\cos x - 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$$

Решение

а) Запишем уравнение в виде: $6 - 6\cos^2 x + 7\cos x - 1 = 0$; $6\cos^2 x - 7\cos x - 5 = 0$; $(3\cos x - 5)(2\cos x + 1) = 0$. Значит, или $\cos x = \frac{5}{3}$ — уравнение не имеет корней, или $\cos x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$. Получим числа: $-\frac{10\pi}{3}$; $-\frac{8\pi}{3}$ (см. рис. 12).

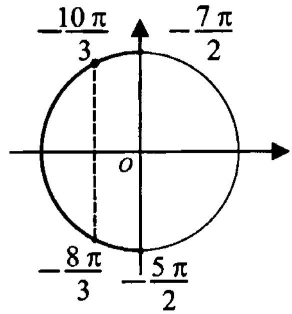


Рис. 12.

Ответ: а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$,$k \in Z$.; б) $-\frac{10\pi}{3}$; $-\frac{8\pi}{3}$.

Пример 3. (Оригинал)

C1 $6\sin^2 x+7\cos x-1=0$

1) $6(1-\cos^2 x)+7\cos x-1=0$

$6-6\cos^2 x+7\cos x-1=0$

$6\cos^2 x-7\cos x-5=0$

$\cos x=a$, $a\in[-1;1]$

$6a^2-7a-5=0$

$D=49+120=169$

$a_{1,2}=\frac{7\pm13}{12}=\{1\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\}$ $1\frac{2}{3}$ не подходит, т.к. $a\in[-1;1]$

$\cos x=-\frac{1}{2}$

$x=\pm\arccos(-\frac{1}{2})+2\pi n$

$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$

2) Все корни, принадлежащие $[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}]$

$x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n$ $\quad$ $n=-2$ $\quad$ $x=-\frac{10\pi}{3}$

$x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi n$ $\quad$ $n=-1$ $\quad$ $x=-\frac{8\pi}{3}$

Ответ 1) $\pm\arccos(-\frac{1}{2})+2\pi n$, 2) $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{10\pi}{3}$

C1 $6\sin^2 x+7\cos x-1=0$
1) $6(1-\cos^2 x)+7\cos x-1=0$
$6-6\cos^2 x+7\cos x-1=0$
$6\cos^2 x-7\cos x-5=0$
$\cos x=a,\ a\in[-1;\ 1]$
$6a^2-7a-5=0$
$D=49+120=169$
$a_{1,2}=\frac{7\pm 13}{12}=\left\{1\frac{2}{3};\ -\frac{1}{2}\right\}$ $1\frac{2}{3}$ не подходит, т.к. $a\in[-1;\ 1]$

$\cos x = -\frac{1}{2}$

$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n$

$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$

2) Все корни, принадлежащие $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$

$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ $\qquad$ $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$

$n = -2$ $x = -\frac{10\pi}{3}$ $\qquad$ $n = -1$ $x = -\frac{8\pi}{3}$

Ответ: 1) $\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n$; 2) $-\frac{8\pi}{3}; -\frac{10\pi}{3}$

Пример 4. (Оригинал)

С1. а) Решить уравнение: $6\sin^2 x + 7\cos x - 1 = 0$

Из основного тригонометрического тождества:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ Подставим получившееся уравнение

$6(1 - \cos^2 x) + 7\cos x - 1 = 0$

$6 - 6\cos^2 x + 7\cos x - 1 = 0$

$-6\cos^2 x + 7\cos x + 5 = 0 \quad | \cdot (-1)$

$6\cos^2 x - 7\cos x - 5 = 0$

Введём новую переменную: $\cos x = a$

$6a^2 - 7a - 5 = 0$

$D = (-7)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-5) = 49 + 120 = 169 = 13^2$ $D > 0$, то 2 корня.

$a_1 = \frac{7-13}{12} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$; $a_2 = \frac{7+13}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$

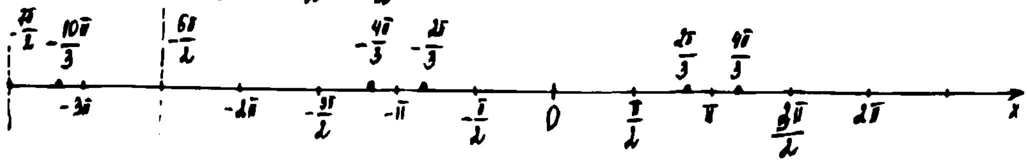
$\cos x = -\frac{1}{2}$

$x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z$

$x = \pm\frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

$\cos x = 1\frac{2}{3}$ так как $D(f) = [-1; 1]$, то данное уравнение решений не имеет.

б) Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$.



$x = \pm\frac{4\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$

1) $n = 0$

① $-\frac{4\pi}{3} + 2\pi \cdot 0 = -\frac{4\pi}{3}$

② $\frac{4\pi}{3} + 2\pi \cdot 0 = \frac{4\pi}{3}$

2) $n = 1$

① $-\frac{4\pi}{3} + 2\pi \cdot 1 = \frac{2\pi}{1} - \frac{4\pi}{3} = \frac{6\pi - 4\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

② $\frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi}{1} = \frac{10\pi}{3}$

3) $n = -1$

① $-\frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{1} = \frac{-4\pi - 6\pi}{3} = -\frac{10\pi}{3}$

② $\frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{1} = \frac{4\pi - 6\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$

$-\frac{7\pi}{2};\ -\frac{10\pi}{3};\ -\frac{5\pi}{2}$

Ответ: а) $x = \pm\frac{4\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$

б) $-\frac{7\pi}{2};\ -\frac{10\pi}{3};\ -\frac{5\pi}{2}$

C1 а) Решить уравнение: $6\sin^2 x + 7\cos x - 1 = 0$

Из основного тригонометрического тождества: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

Подставим получившееся в уравнение $6(1 - \cos^2 x) + 7\cos x - 1 = 0$

$6 - 6\cos^2 x + 7\cos x - 1 = 0$

$-6\cos^2 x + 7\cos x + 5 = 0 \mid \cdot (-1)$

$6\cos^2 x - 7\cos x - 5 = 0$

Введем новую переменную: $\cos x = a$

$6a^2 - 7a - 5 = 0$

$D = (-7)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-5) = 49 + 120 = 169 = 13^2$ $D > 0$, то 2 корня.

$a_1 = \frac{7 - 13}{12} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$; $a_2 = \frac{7 + 13}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$

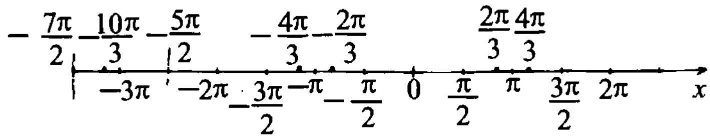
$\cos x = -\frac{1}{2}$

$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in Z$

$x = \pm\frac{4\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$

$\cos x = 1\frac{2}{3}$ так как $D(f) = [-1;\ 1]$, то данное уравнение решений не имеет.

б) Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$.



$x = \pm\frac{4\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$

1) $n = 0$

1. $-\frac{4\pi}{3} + 2\pi \cdot 0 = -\frac{4\pi}{3}$

2. $\frac{4\pi}{3} + 2\pi \cdot 0 = \frac{4\pi}{3}$

2) $n = 1$

1. $-\frac{4\pi}{3} + 2\pi \cdot 1 = 2\pi - \frac{4\pi}{3} = \frac{6\pi - 4\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

2. $\frac{4\pi}{3} + 2\pi = \frac{10\pi}{3}$

3) $n = -1$

1. $-\frac{4\pi}{3} - 2\pi = \frac{-4\pi - 6\pi}{3} = -\frac{10\pi}{3}$

2. $\frac{4\pi}{3} - 2\pi = \frac{4\pi - 6\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$

Ответ:

а) $x \pm \frac{4\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$

б) $-\frac{7\pi}{2};\ -\frac{10\pi}{3};\ -\frac{5\pi}{2}$

Задание С2

Критерии оценивания

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ, или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача С2-1

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 2, боковые рёбра равны 1, точка D — середина ребра CC_1. Найдите расстояние от вершины C до плоскости ADB_1 .

Решение

Прямая B_1D пересекает прямую BC в точке K (см. рис. 13).

Плоскости ABC и ADB_1 пересекаются по прямой AK. Из точки D опустим перпендикуляр DH на прямую AK , тогда отрезок CH (проекция DH) перпендикулярен прямой AK. Прямая AK перпендикулярна плоскости CDH, следовательно, плоскости ADB_1 и CDH перпендикулярны. Высота MC треугольника CDH перпендикулярна плоскости ADB_1, следовательно, MC — расстояние от точки C до плоскости ADB_1.

Точка D - середина ребра CC_1, поэтому $CD = DC_1 = \frac{1}{2}$. Из равенства треугольников B_1C_1D и KCD получаем: $CK = B_1C_1 = 2$. В равнобедренном

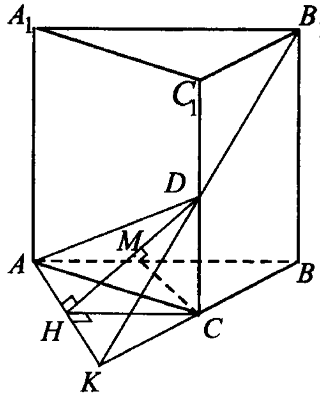


Рис. 13.

треугольнике ACK угол C равен $120°$, $AC = CK = 2$, высота CH является биссектрисой, откуда $CH = AC\cos 60° = 1$.

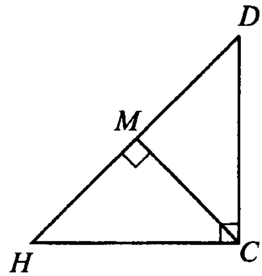


Рис. 14.

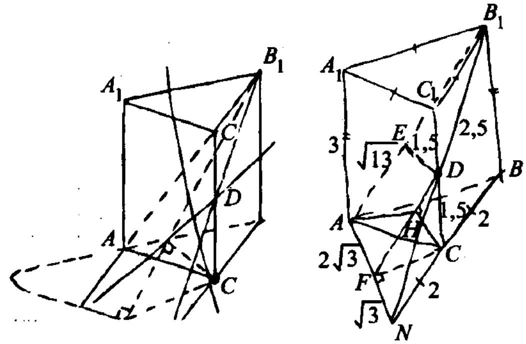
В прямоугольном треугольнике CDH с прямым углом C (см. рис. 14): $CD = \frac{1}{2}$; $CH = 1$; $DH = \sqrt{CD^2 + CH^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, откуда высота $CM = \frac{CD \cdot CH}{DH} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Пример 1. (Оригинал)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 2, боковые рёбра равны 3, точка D — середина ребра CC_1. Найдите расстояние от вершины С до плоскости ADB_1.

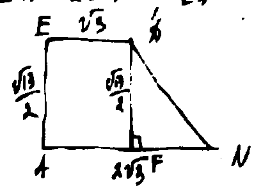
Ответ: $\frac{3\sqrt{13}}{13}$.



Дано: правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, $AC = BC = AB = 2$, $A_1A = B_1B = C_1C = 3$, D - середина C_1C. Найти расстояние от вершины C до плоскости ADB_1

Решение:

1. Т.к. D - середина C_1C, то $B_1D \cap AC = N$ так, что $NC = CA = 2$. ~~Проведем высоту CH в Δ DCN~~. E - середина AB_1, тогда ED - средняя линия в ΔAB_1N, тогда $ED \parallel AN$. $ED = \frac{1}{2}AN$. $AB_1 = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ т.к. призма прямая. $EB_1 = \frac{\sqrt{13}}{2}$. ~~$C_1B_1$~~ В ΔC_1DB_1, $\angle C_1 = 90^\circ$ т.к. призма прямая, по теореме Пифагора $DB_1 = \sqrt{4+2,25} = \sqrt{6,25} = 2,5$. В ΔB_1ED $\angle E = 90^\circ$ $ED = \sqrt{6,25 - \frac{13}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{13}{4}} = \sqrt{3}$, тогда $AN = 2\sqrt{3}$.

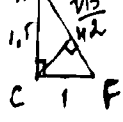


2. $AEDN$ - прямоугольная трапеция, $DF = \frac{\sqrt{13}}{2}$, $FN = \sqrt{3}$.

~~3. В Δ FCN ∠F = 90° NC = 2, FN = √3. FC = √(4-3) = 1~~

3. CF - высота в ΔACN, $DC \perp CB$ т.к. призма прямая, значит DF - наклонная на (FCN), CF - ее проекция, тогда по теореме о 3-х перпендикулярах $CF \perp AN$, тогда $FC = \sqrt{4-3} = 1$.

4. В ΔCDF проведем высоту CH, т.к. $CH \subset (AB_1D)$, то CH - искомое расстояние.

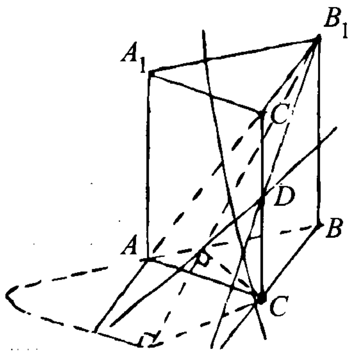


$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S_\Delta = \frac{a \cdot h_a}{2}$

$S_{\Delta DFC} = \frac{1,5 \cdot 1}{2} = \frac{15}{10 \cdot 2} = \frac{3}{4}$; $S_{\Delta DFC} = \frac{CH \cdot DF}{2}$

$\frac{3}{4} = \frac{CH \cdot \frac{\sqrt{13}}{2}}{2}$ $CH = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot \sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$. Ответ: $\frac{3\sqrt{13}}{13}$.



C2 Дано: правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, $AC = BC_1 = AB = 2$, $A_1A = B_1B = C_1C = 3$, D — середина C_1C. Найти расстояние от вершины C до плоскости ADB_1

Решение:

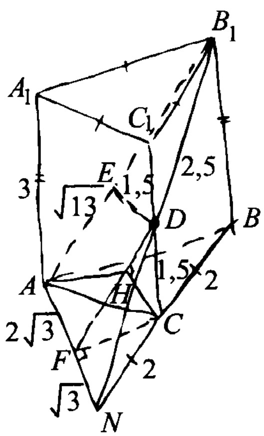
1) Т.к. D — середина C_1C, то $B_1D \cap BC = N$ так, что $NC = CB = 2$ E — середина AB_1, тогда ED — средняя линия в $\triangle AB_1N$, тогда $ED \parallel AN$.

$ED = \frac{1}{2}AN$. $AB_1 = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ т.к. призма прямая.

$EB_1 = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

В $\triangle C_1DB_1$ $\angle C_1 = 90°$ т.к. призма прямая, по теореме Пифагора $DB_1 = \sqrt{4+2{,}25} = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$. В $\triangle B_1ED$ $\angle E = 90°$,

$ED = \sqrt{6{,}25 - \frac{13}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{13}{14}} = \sqrt{3}$, тогда $AN = 2\sqrt{3}$.



2. $AEDN$ — прямоугольная трапеция, $DF = \frac{\sqrt{13}}{2}$, $FN = \sqrt{3}$.

3. CF — высота в $\triangle ACN_1$, $DC \perp CB$ т.к. призма прямая, значит DF — наклонна на (FCN), CF— ее проекция, тогда по теореме о 3-х перпендикулярах $CF- \perp AN$, тогда $FC = \sqrt{4-3} = 1$.

4. В $\triangle CDF$ проведем высоту CH, т.к. $CH \subset (AB_1D)$, то CH — искомое расстояние.

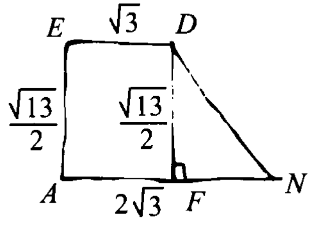
$S_\triangle \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

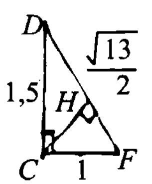
$S_\triangle = \frac{a \cdot h_n}{2}$

$S_{\triangle DPC} = \frac{1{,}5 \cdot 1}{2} = \frac{15 \cdot 1}{10 \cdot 2} = \frac{3}{4}$

$S_{\triangle DFC} = \frac{CH \cdot DF}{2} = \frac{3}{4} = \frac{CH \cdot \frac{\sqrt{13}}{2}}{2}$

$CH = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot \sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$





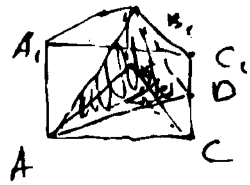
Ответ: $\frac{3\sqrt{13}}{13}$

Задача С2-3

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 1, боковые рёбра равны 3, точка D - середина ребра CC_1. Найдите расстояние от вершины C до плоскости ADB_1.

Ответ: $\frac{3\sqrt{10}}{20}$.

Пример 2. (Оригинал)

C2. 

Искомое расстояние найдём как высоту пирамиды AB_1DC_0 (т.к $CH_0 \perp AB_1D$)

$V_{пирамиды} = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h$ $\quad V_{AB_1DC_0} = \frac{1}{3} \cdot S_{AB_1D} \cdot CH_0$

т.к $V_{пирамиды} = const \Rightarrow V_{ADCB_1} = V_{AB_1DC}$

$V_{ADCB_1} = \frac{1}{3} \cdot S_{ADC} \cdot B_1H_1 \Rightarrow CH_0 = \frac{S_{ADC} \cdot BH_1}{S_{AB_1D}}$

$S_{ADC} = \frac{1}{2} AC \cdot CD$ (т.к $\angle ACD = 90^\circ$) $= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$.

опустим высоту B_1H_2 в $\triangle A_1B_1C_1$

т.к AA_1C_1C включает в себя ADC и $B_1H_2 \perp A_1C_1$, а A_1C_1 принадлежит $AA_1C_1C \Rightarrow$

B_1H_2 – высота пирамиды $ADCB_1$. т.к $\triangle A_1B_1C_1$ – правильный $\Rightarrow BH_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} a \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$BH_2 = BH_1$

найдём $S_{AB_1D} = \frac{1}{2} \cdot AB_1 \cdot DH_3$ (где $DH_3 \perp AB_1$).

по теореме Пифагора найдём, что $AD^2 = AC^2 + DC^2$

$AD^2 = 1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4} \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{13}}{2}$

$B_1D^2 = 1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4} \Rightarrow B_1D = \frac{\sqrt{13}}{2} \Rightarrow \triangle B_1DA$ равнобедр.

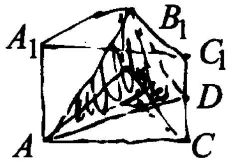
$\Rightarrow B_1H_3 = \frac{1}{2} B_1A$. $\quad B_1A = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$DH_3 = \sqrt{B_1D^2 - \frac{1}{4} B_1A^2} = \sqrt{\frac{13}{4} - \frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$S_{AB_1D} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{30}}{4}$.

$CH_0 = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{30}}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{20}$

Ответ: $\frac{3 \cdot \sqrt{10}}{20}$ $\quad$ см. доп. бланк №2



C2 Искомое расстояние найдем как высоту пирамиды AB_1DC (т.к. $CH \perp AB_1D$)

Vпирамиды $= \frac{1}{3}S$осн $\cdot h\, V_{AB_1DC_0} = \frac{1}{3} \cdot S_{AB_1D} \cdot CH_0$

Т.к. Vпирамиды $= const \Rightarrow V_{ADCB_1} = V_{AB_1DC}$

$V_{ADCB_1} = \frac{1}{3} \cdot S_{ADC} \cdot B_1H_1 \Rightarrow CH_0 = \frac{S_{ADC} \cdot BH_1}{S_{AB_1D}}$

$S_{ADC} = \frac{1}{2}AC \cdot CD$ (т.к. $\angle ACD < 90°$) $= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$.

Опустим высоту B_1H_2 в $\triangle A_1B_1C_1$

Т.к. AA_1C_1C включает в себя ADC и $B_1H_2 \perp A_1C_1$,а A_1C_1 принадлежит $AA_1C_1C \Rightarrow B_1H_2$ — высота пирамиды $ADCB_1$, т.к. $\triangle_1B_1C_1$ — правильный $\Rightarrow BH_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$. $BH_2 = BH_1$

найдем $S_{AB_1D} = \frac{1}{2} \cdot AB_1 \cdot DH_3$ (где $DH_3 \perp AB_1$) по теореме Пифагора найдем, что

$AD^2 = AC^2 + DC^2$

$AD^2 = 1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4} \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{13}}{2}$

$B_1D^2 = 1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4} \Rightarrow B_1D = \frac{\sqrt{13}}{2} \Rightarrow \triangle B_1DA$ равнобедр.

$\Rightarrow B_1H_3 = \frac{1}{2}B_1A$. $B_1A = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$DH_3 = \sqrt{B_1D^2 - \frac{1}{4}B_1A^2} = \sqrt{\frac{13}{4} - \frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$S_{AB_1D} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{30}}{4}$

$$CH_0 = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{30}}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{20}$$

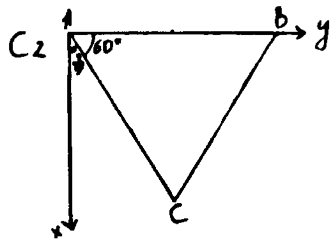
Ответ: $3 \cdot \frac{\sqrt{10}}{20}$ см доп.бланк №2

Задача C2-4

В правильной треугольной призме $BCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 2, боковые рёбра равны 1, точка D — середина ребра CC_1. Найдите расстояние от вершины C до плоскости ADB_1.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

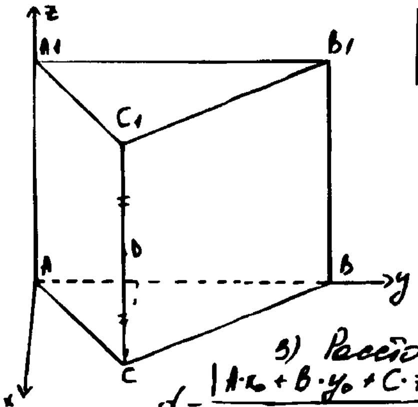
Пример 3. (Оригинал)



1) Координаты: $A(0;0;0)$; $B_1(0;2;1)$

$D(\sqrt{3};1;\frac{1}{2})$; $C(\sqrt{3};1;0)$

2) Уравнение плоскости ADB_1:



$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$, где $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}$ —

— определитель 3^0 порядка.

$\sqrt{3}y-2\sqrt{3}z=0$; из уравнения плоскости: $Ax+By+Cz+K=0$, видим, что $A=K=0$; $B=\sqrt{3}$; $C=-2\sqrt{3}$.

3) Расстояние находим:

$d=\dfrac{|A\cdot x_0+B\cdot y_0+C\cdot z_0+K|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; $d=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Ответ: $\cancel{\dfrac{1}{\sqrt{6}}}$ $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

С2 1) Координаты:

$A(0;\ 0;\ 0)$; $B_1(0;\ 2;\ 1)$; $D(\sqrt{3};\ 1;\ \frac{1}{2})$; $C(\sqrt{3};\ 1;\ 0)$

2) Уравнение плоскости ADB_1:

$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$, где $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}$

— определитель 3^0 порядка.

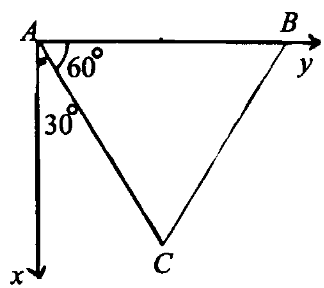
$\sqrt{3}y-2\sqrt{3}z=0$: из уравнения плоскости:

$A_x+B_y+C_z+K=0$, видим, что $A=K=0$: $B=\sqrt{3}$: $C=-2\sqrt{3}$.

3) Расстояние находим:

$d=\dfrac{|A\cdot x_0+B\cdot y_0+C\cdot z_0+K|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; $d=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$



Задание С3

Критерии оценивания

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Задача С3 - 1

Решите систему неравенств $\begin{cases} 9\cdot 3^x + 18\cdot 3^{-x} \leqslant 57, \\ \log_{0,125}(2x)\cdot\log_{8x}2 + \dfrac{1}{9} \leqslant 0. \end{cases}$

Решение

1. Решим первое неравенство системы. Сделаем замену $y = 3^x$. $9y + \dfrac{18}{y} \leqslant 57$; $\dfrac{9y^2 - 57y + 18}{y} \leqslant 0$; $\dfrac{3(y-6)(3y-1)}{y} \leqslant 0$; $\left[\begin{array}{l} y < 0, \\ \dfrac{1}{3} \leqslant y \leqslant 6. \end{array}\right.$

Учитывая, что $3^x > 0$, получаем $\dfrac{1}{3} \leqslant 3^x \leqslant 6$, откуда находим решение первого неравенства системы: $-1 \leqslant x \leqslant 1 + \log_3 2$.

2. Решим второе неравенство системы:

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ 8x \neq 1, \end{cases}$ $x \in \left(0;\ \dfrac{1}{8}\right) \cup \left(\dfrac{1}{8}; +\infty\right)$.

$\dfrac{\log_{0,125}(2x)}{\log_2(8x)} + \dfrac{1}{9} \leqslant 0$; $\dfrac{-\frac{1}{3}(\log_2 x + 1)}{\log_2 x + 3} + \dfrac{1}{9} \leqslant 0$; $\dfrac{1}{9} - \dfrac{\log_2 x + 1}{3(\log_2 x + 3)} \leqslant 0$; $\dfrac{\log_2 x + 1}{\log_2 x + 3} \geqslant \dfrac{1}{3}$.

Сделаем замену $z = \log_2 x$.

$\dfrac{z+1}{z+3} \geqslant \dfrac{1}{3}$; $\dfrac{2z}{3(z+3)} \geqslant 0$; $\left[\begin{array}{l} z < -3, \\ z \geqslant 0. \end{array}\right.$

Получим $\left[\begin{array}{l} \log_2 x < -3, \\ \log_2 x \geqslant 0. \end{array}\right.$ Решение второго неравенства системы с учетом ОДЗ имеет вид: $0 < x < \dfrac{1}{8}$; $x \geqslant 1$.

3. Поскольку $1 < 1 + \log_3 2$, получаем решение исходной системы неравенств: $0 < x < \dfrac{1}{8}$; $1 \leqslant x \leqslant 1 + \log_3 2$.

Ответ: $\left(0; \dfrac{1}{8}\right)$; $[1;\ 1 + \log_3 2]$.

Пример 1. (Оригинал)

$$C_3 \quad \begin{cases} 9\cdot 3^x + 18\cdot 3^{-x} \le 57 \\ \log_{0,125} 2x \cdot \log_{8x} 2 + \frac{1}{9} \le 0 \end{cases}$$

1) $\log_{0,125} 2x \cdot \log_{8x} 2 + \frac{1}{9} \le 0$; $x > 0$

$-\log_8 2x \cdot \log_{8x} 2 + \frac{1}{9} \le 0$

$-\frac{\log_{8x} 2x}{\log_{8x} 8} \cdot \log_{8x} 2 + \frac{1}{9} \le 0$; $-\frac{\log_{8x} 2x}{3\log_{8x} 2} \cdot \log_{8x} 2 + \frac{1}{9} \le 0$

$-\frac{\log_{8x} 2x}{3} + \frac{1}{9} \le 0$; $\frac{1}{9} - \frac{3\log_{8x} 2x}{9} \le 0$

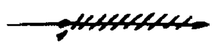
$1 - 3\log_{8x} 2x \le 0$; $\log_{8x} 2x \ge \frac{1}{3}$

$\log_{8x} 2x \ge \log_{8x} (8x)^{\frac{1}{3}}$

$2x - (8x)^{\frac{1}{3}} \ge 0$ — $8x = 0$ — нет реш. т.к. $x > 0$ — $x^2 - 1 = 0$

$8x^3 - 8x \ge 0$ — $x^2 = 1$

$8x(x^2 - 1) \ge 0$ — $x = 1$ — $x_2 = -1$ — нет решений.



$x \ge 1$

2) $9\cdot 3^x + 18\cdot 3^{-x} \le 57$; $3^x = t$

$9t + \frac{18}{t} - 57 \le 0$

$9t^2 - 57t + 18 \le 0$

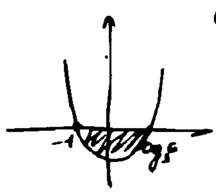
$D = 57^2 - 4\cdot 9\cdot 18 = 3249 - 648 = 2601$; $\sqrt{D} = 51$

$t = \frac{57 \pm 51}{18}$ $\quad t_1 = \frac{1}{3}$ $\quad t_2 = 6$

$3^x = \frac{1}{3}$ $\quad 3^x = 6$

$x = -1$ $\quad \log_3 3^x = \log_3 6$

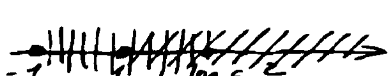
$x = \log_3 6$ $\quad 1 < \log_3 6 < 2$



$-1 \le x \le \log_3 6$

3) $-1 \le x \le \log_3 6$

$x \ge 1$



$1 \le x \le \log_3 6$

Ответ: $1 \le x \le \log_3 6$

С3

$$\begin{cases} 9 \cdot 3^x + 18 \cdot 3^{-x} \leqslant 57 \\ \log_{0,125} 2x \cdot \log_{8x} 2 + \frac{1}{9} \leqslant 0 \end{cases}$$

1) $\log_{0,125} 2x \cdot \log_{8x} 2 + \frac{1}{9} \leqslant 0; \ x > 0$

$-\log_8 2x \cdot \log_{8x} 2 + \frac{1}{9} \leqslant 0$

$-\frac{\log_{8x} 2x}{\log_{8x} 8} \cdot \log_{8x} 2 + \frac{1}{9} \leqslant 0; \ -\frac{\log_{8x} 2x}{3\log_{8x} 2} \cdot \log_{8x} 2 + \frac{1}{9} \leqslant 0$

$-\frac{\log_{8x} 2x}{3} + \frac{1}{9} \leqslant 0; \ \frac{1}{9} - \frac{3\log_{8x} 2x}{9} \leqslant 0$

$1 - 3\log_{8x} 2x \leqslant 0; \ \log_{8x} 2x \geqslant \frac{1}{3}$

$\log_{8x} 2x \geqslant \log_{8x} (8x)^{\frac{1}{3}}$

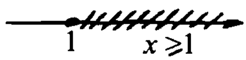
$2x - (8x)^{\frac{1}{3}} = 0$

$8x^3 - 8x \geqslant 0$

$8x(x^2 - 1) \geqslant 0$

$8x = 0$ — нет решений

т.к. $x > 0$



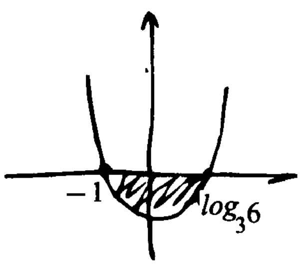
$x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1$

$x = 1 \ x_2 = -1$ —нет решений

2) $9 \cdot 3^x + 18 \cdot 3^{-x} \leqslant 57; \ 3^x = t$

$9t + \frac{18}{t} - 57 \leqslant 0$



$9t^2 - 57t + 18 \leqslant 0$

$D = 57^2 - 4 \cdot 9 \cdot 18 = 3249 - 648 = 2601; \ \sqrt{D} = 51$

$t = \frac{57 \pm 51}{18} \quad t_1 = \frac{1}{3} \quad t_2 = 6$

$3^x = \frac{1}{3}$

$x = -1$

$3^x = 6$

$\log_3 3^x = \log_3 6$

$x = \log_3 6 \ \ 1 < \log_3 6 < 2$

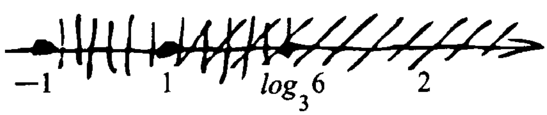
$-1 \leqslant x \leqslant \log_3 6$

3) $-1 \leqslant x \leqslant \log_3 6$

$x \geqslant 1$

$1 \leqslant x \leqslant \log_3 6$

Ответ: $1 \leqslant x \leqslant \log_3 6$



Пример 2. (Оригинал)

C_3. $\begin{cases} 9\cdot 3^{x}+18\cdot 3^{-x}\le 57, \\ \log_{0,125} 2x\cdot \log_{8x} 2+\frac{1}{9}\le 0. \end{cases}$

1) Т.к. $\log_a b$ имеет смысл при $a>0,\ a\ne 1,\ b>0$, то

$$\begin{cases} 2x>0, \\ 8x>0, \\ 8x\ne 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>0, \\ x\ne \frac{1}{8} \end{cases}$$

2) Найдем решение первого неравенства: $9\cdot 3^{x}+18\cdot 3^{-x}\le 57$.

Пусть $3^{x}=t$, $t>0$, тогда получим $9t+\frac{18}{t}-57\le 0$

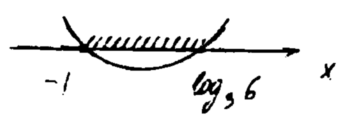
$9t^{2}-57t+18\le 0$

$3t^{2}-19t+6\le 0$

$D=361-72=289$

$t_1=\frac{19-17}{6}=\frac{1}{3}$ $\quad \left[\begin{array}{l} 3^{x}=3^{-1}, \\ 3^{x}=6. \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\log_3 6 \end{array}\right.$

$t_2=\frac{36}{6}=6$



3) Решим второе неравенство $\log_{0,125}2x\cdot\log_{8x}2+\frac{1}{9}\le 0$

$\log_{\frac{1}{8}}2x\cdot\log_{8x}2+\frac{1}{9}\le 0$

$-\frac{1}{3}\log_2 2x\cdot\frac{1}{\log_2 8x}+\frac{1}{9}\le 0$

$-\frac{1}{3}\left(\left(\log_2 x+1\right)\cdot\frac{1}{\log_2 x+3}-\frac{1}{3}\right)\le 0$

$\frac{\log_2 x+1}{\log_2 x+3}-\frac{1}{3}\ge 0$

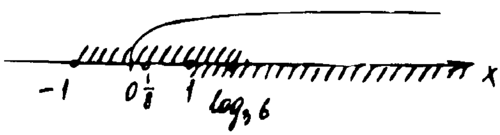
Пусть $\log_2 x=t$, тогда получим $\frac{t+1}{t+3}\ge\frac{1}{3}$. $\quad 3t+3\ge t+3$, $\ 2t\ge 0$, $\ t\ge 0$.

$\log_2 x \geqslant 0$

$\log_2 x \geqslant \log_2 1$

Т.к. функция $y = \log_2 t$ возрастает, то получим $x \geqslant 1$.

4) Сведем решения двух неравенств на числовой прямой.



$\log_3 3 < \log_3 6 < \log_3 9$

$1 < \log_3 6 < 2$

Ответ: $[1; \log_3 6]$.

C3 $\begin{cases} 9 \cdot 3^x + 18 \cdot 3^{-x} \leqslant 57, \\ \log_{0,125} 2x \cdot \log_{8x} 2 + \dfrac{1}{9} \leqslant 0 \end{cases}$

1) Т.к. $\log_a b$ имеет смысл при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, то

$\begin{cases} 2x > 0, \\ 8x > 0, \\ 8x \neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq \dfrac{1}{8} \end{cases}$

2) Найдем решение первого неравенства: $9 \cdot 3^x + 18 \cdot 3^{-x} \leqslant 57$.

Пусть $3^x = t$, $t > 0$, тогда получим $9t + \dfrac{18}{t} - 57 \leqslant 0$

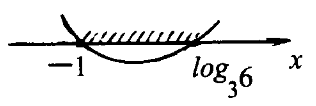
$9t^2 - 57t + 18 \leqslant 0$

$3t^2 - 19t + 6 \leqslant 0$

$D = 361 - 72 = 289$

$t_1 = \dfrac{19 - 17}{6} = \dfrac{1}{3}$ $\left[\begin{array}{l} 3^x = 3^{-1} \\ 3^x = 6 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \log_3 6 \end{array}\right.$

$t_2 = \dfrac{36}{6} = 6$



3) Решим второе неравенство $\log_{0,125} 2x \cdot \log_{8x} 2 + \dfrac{1}{9} \leqslant 0$

$\log_{\frac{1}{8}} 2x \cdot \log_{8x} 2 + \dfrac{1}{9} \leqslant 0$

$-\dfrac{1}{3} \log_2 2x \cdot \dfrac{1}{\log_2 8x} + \dfrac{1}{9} \leqslant 0$

$-\dfrac{1}{3}\left((\log_2 x + 1) \cdot \dfrac{1}{\log_2 x + 3} - \dfrac{1}{3}\right) \leqslant 0$

$\dfrac{\log_2 x + 1}{\log_2 x + 3} - \dfrac{1}{3} \geqslant 0$

Пусть $\log_2 x = t$, тогда получим $\frac{t+1}{t+3} \geqslant \frac{1}{3}$

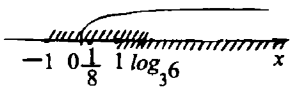
$3t + 3 \geqslant t + 3$ $\qquad$ $2t \geqslant 0,\ t \geqslant 0$

$\log_2 x \geqslant 0$

$\log_2 x \geqslant \log_2 1$

Т.к. функция $y = \log_2 t$ — возрастает, то получим $x \geqslant 1$.

4) Сведем решение двух неравенств на числовой прямой.



$\log_3 3 < \log_3 6 < \log_3 9$

$1 < \log_9 6 < 2$

Ответ: $[1;\ \log_3 6]$

Пример 3. (Оригинал)

$\boxed{C3}$ $\begin{cases} 9 \cdot 3^x + 18 \cdot 3^{-x} \leq 57 \\ \log_{0,125} 2x \cdot \log_{8x} 2 + \frac{1}{9} \leq 0 \end{cases}$

ОДЗ: $\begin{cases} 8x \neq 1 \\ 8x > 0 \\ 2x > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq \frac{1}{8} \\ x > 0 \\ x > 0 \end{cases}$

$9 \cdot 3^x + \frac{18}{3^x} \leq 57$

$t = 3^x$, $t > 0$ т.к. $3^x > 0$

$9t + \frac{18}{t} \leq 57$

$\frac{9t^2 + 18 - 57t}{t} \leq 0$

т.к. $t > 0$ то:

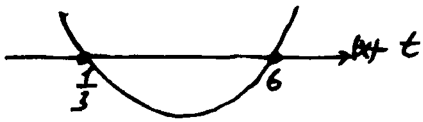
$9t^2 + 18 - 57t \leq 0 \ \Big|\cdot \frac{1}{3}$

$3t^2 + 6 - 19t \leq 0$

$y = 3t^2 + 6 - 19t$, $y = 0$

$D = 361 - 72 = 289$

$t_1 = \frac{19+17}{6} = 6$, $t_2 = \frac{19-17}{6} = \frac{1}{3}$



$\frac{1}{3} \le t \le 6$

$\frac{1}{3} \le 3^x \le 6.$

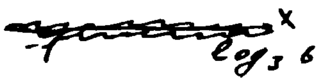
$3^x \ge \frac{1}{3}$

$x \ge -1$

$3^x \le 6$

$\log_3 3^x \le \log_3 6$

$x \le \log_3 6$



$[-1;\ \log_3 6]$

$\log_{\frac{1}{8}} 2x \cdot \log_{8x} 2 + \frac{1}{9} \le 0$

$-3\log_2 2x \cdot \frac{1}{\log_2 8x} + \frac{1}{9} \le 0$

$-\frac{3(\log_2 2 + \log_2 x)}{\log_2 8 + \log_2 x} + \frac{1}{9} \le 0$

$\frac{9(-3 - 3\log_2 x) + \log_2 x + 3}{27 + 9\log_2 x} \le 0$

$\frac{-24 - 26\log_2 x}{27 + 9\log_2 x} \le 0$

$(-24 - 26\log_2 x)(27 + 9\log_2 x) \le 0$

$-24 - 26\log_2 x = 0$

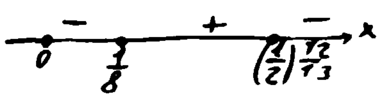
$\log_2 x = -\frac{12}{13}$

$x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{13}}$

$27 + 9\log_2 x = 0$

$\log_2 x = -3$

$x = +\frac{1}{8}$



$(0;\ \frac{1}{8}] \cup [\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{13}};\ +\infty)$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{8} \\ [-1;\ \log_3 6] \\ \left(\overset{0}{\cancel{-\infty}};\ \frac{1}{8}\right] \cup \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{13}};\ +\infty\right) \end{cases} \quad \left(0;\ \frac{1}{8}\right) \cup \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{13}};\ \log_3 6\right]$$

Ответ: $\left(0;\ \frac{1}{8}\right) \cup \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{13}};\ \log_3 6\right]$

С3 $\begin{cases} 9 \cdot 3^x + 18 \cdot 3^{-x} \leqslant 57 \\ \log_{0,125} 2x \cdot \log_{8x} 2 + \frac{1}{9} \leqslant 0 \end{cases}$ ОДЗ: $\begin{cases} 8x \neq 1 \\ 8x > 0 \\ 2x > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq \frac{1}{8} \\ x > 0 \\ x > 0 \end{cases}$

$9 \cdot 3^x + \frac{18}{3^x} \leqslant 57$

$t = 3^x,\ t > 0$, т.к. $3^x > 0$

$9t + t \leqslant 57$

$\frac{9t^2 + 18 - 57t}{t} \leqslant 0$

т.к. $t > 0$ то :

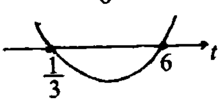
$9t^2 + 18 - 57t \leqslant 0 \ | \cdot \frac{1}{3}$

$3t^2 + 6 - 19t \leqslant 0$

$y = 3t^2 + 6 - 19t,\ y = 0$

$D = 361 - 72 = 289$

$t_1 = \frac{19 + 17}{6} = 6,\ t_2 = \frac{19 - 17}{6} = \frac{1}{3}$



$\frac{1}{3} \leqslant t \leqslant 6$

$\frac{1}{3} \leqslant 3^x \leqslant 6$

$3^x \geqslant \frac{1}{3}$

$x \geqslant -1$

$3^x \leqslant 6$

$\log_3 3^x \leqslant \log_3 6$

$x \leqslant \log_3 6$

$[-1;\ \log_3 6]$

$\log_{\frac{1}{8}} 2x \cdot \log_{8x} 2 + \frac{1}{9} \leqslant 0$

$-3 \log_2 2x \cdot \frac{1}{\log_2 8x} + \frac{1}{9} \leqslant 0$

$\frac{-3(\log_2 2 + \log_2 x)}{\log_2 8 + \log_2 x} + \frac{1}{9} \leqslant 0$

$$\frac{9(-3-3\log_2 x)+\log_2 x+3}{27+9\log_2 x}\leqslant 0$$

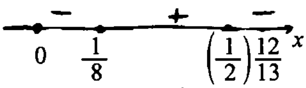
$$\frac{-24-26\log_2 x}{27+9\log_2 x}\leqslant 0$$

$$(-24-26\log_2 x)(27+9\log_2 x)\leqslant 0$$

$$-24-26\log_2 x=0 \qquad 27+9\log_2 x=0$$

$$\log_2 x=-\frac{12}{13} \qquad \log_2 x=-3$$

$$x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{13}} \qquad x=+\frac{1}{8}$$



$$\left(0;\ \frac{1}{8}\right]\cup\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{13}};\ +\infty\right)$$

$$\begin{cases} x>0 \\ x\neq\frac{1}{8} \\ [-1;\ \log_3 6] \\ \left(0;\ \frac{1}{8}\right]\cup\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{13}};\ +\infty\right) \end{cases} \qquad \left\{\left(0;\ \frac{1}{8}\right)\cup\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{13}};\ \log_3 6\right]\right.$$

Ответ: $\left(0;\ \frac{1}{8}\right)\cup\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{13}};\ \log_3 6\right]$

Задача С3 - 2

Решите систему неравенств $\begin{cases} 2^{2x}+12\cdot 4^{-x}\leqslant 13, \\ \log_{0,04}(125x)\cdot\log_{25x}5+\frac{3}{4}\geqslant 0. \end{cases}$

Решение

1. Решим первое неравенство системы. Сделаем замену $y=4^x$.

$$y+\frac{12}{y}\leqslant 13;\ \frac{y^2-13y+12}{y}\leqslant 0;\ \frac{(y-1)(y-12)}{y}\leqslant 0;\ \left[\begin{array}{l} y<0, \\ 1\leqslant y\leqslant 12. \end{array}\right.$$

Учитывая, что $4^x>0$, получаем $1\leqslant 4^x\leqslant 12$, откуда находим решение первого неравенства системы: $0\leqslant x\leqslant 1+\log_4 3$.

2. Решим второе неравенство системы $\dfrac{\log_{0,04}(125x)}{\log_5(25x)}+\dfrac{3}{4}\geqslant 0$.

ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ 25x\neq 1, \end{cases}$ $x\in\left(0;\ \frac{1}{25}\right)\cup\left(\frac{1}{25};\ +\infty\right)$.

$$-\frac{\frac{1}{2}(\log_5 x+3)}{\log_5 x+2}+\frac{3}{4}\geqslant 0;\ \frac{3}{4}-\frac{\log_5 x+3}{2\cdot(\log_5 x+2)}\geqslant 0;\ \frac{\log_5 x+3}{\log_5 x+2}\leqslant\frac{3}{2}.$$

Сделаем замену $z=\log_5 x$.

$$\frac{z+3}{z+2}\leqslant\frac{3}{2};\ -\frac{z}{2(z+2)}\leqslant 0;\ \left[\begin{array}{l} z<-2, \\ z\geqslant 0. \end{array}\right.$$

Тогда $\left[\begin{array}{l}\log_5 x < -2\\ \log_5 x \geqslant 0,\end{array}\right.$ откуда находим решение второго неравенства системы: $0 < x < \frac{1}{25}$; $x \geqslant 1$.

3. Поскольку $1 < 1 + \log_4 3$, получаем решение исходной системы неравенств: $0 < x < \frac{1}{25}$; $1 \leqslant x \leqslant 1 + \log_4 3$.

Ответ: $\left(0; \frac{1}{25}\right) \cup [1; 1 + \log_4 3]$.

Пример 4. (Оригинал)

C3 $\begin{cases} 2^{2x} + 12 \cdot 4^{-x} \leq 13, \\ \log_{0,04} 125x \cdot \log_{25x} 5 + \frac{3}{4} \geq 0 \end{cases}$

$2^{2x} + 12 \cdot 4^{-x} \leq 13$

$2^{2x} + 12 \cdot 2^{-2} - 13 \leq 0$

$2^{2x} + 12 \cdot 2^{-2x} \leq 13$

Введем новую переменную.

Пусть $2^{2x} = t$

$t + 12 \cdot t^{-1} - 13 \leq 0$

Умножим обе части на t

$t^2 - 13t + 12 \leq 0$

Рассмотрим функцию

$y = t^2 - 13t + 12$.

Найдем нули функции.

$t^2 - 13t + 12 = 0$

$t_1 = 12 \qquad t_2 = 1$

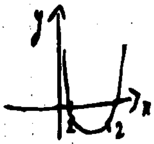
$\log_{0,04} 125x \cdot \log_{25x} 5 + \frac{3}{4} \geq 0$

$\log_{\frac{1}{25}} 125x \cdot \log_{25x} 5 + \frac{3}{4} \geq 0$

Приведем основания логарифмов к 25

$-\log_{25} 125x \cdot \frac{\log_{25} 5}{\log_{25} 25x} + \frac{3}{4} \geq 0$

$\frac{-0,5 \cdot \log_{25} 125x + 0,75 \log_{25} 25x}{\log_{25} 25x} \geq 0$



$y \le 0$ при $x \in [1; 12]$

$1 \le 2^{2x} \le 12.$

Приводим к общему основанию

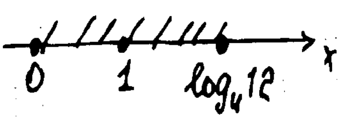
$2^0 \le 2^{2x} \le 12$

$0 \le x \qquad 4^x \le 12$

$\log_4 12 \ge x$

Решение этого неравенства $[0; \log_4 12]$.

Общее решение:



$[0; \log_4 12]$

Решаем методом интервалов.

$D(y) = (0; 0{,}04) \cup (0{,}04; +\infty)$

$$\begin{cases} 125x > 0 \\ 25x > 0 \\ \log_{25} 25x \ne 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0 \\ x \ne \frac{1}{25} \end{cases}$$

$-0{,}5 \log_{25} 125x + 0{,}75 \log_{25} 25x = 0$

$\log_{25} (125x)^{-0{,}5} \cdot (25x)^{0{,}75} = 0$

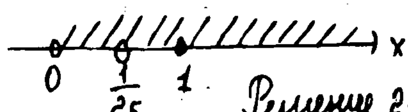
$(125x)^{-0{,}5} \cdot (25x)^{0{,}75} = 1$

$(25x)^{\frac{3}{4}} = (125x)^{\frac{1}{2}}$

$(25x)^{\frac{3}{4}} = \sqrt{125} \cdot \sqrt{x}$

$\cancel{5^{\frac{3}{2}}} \cdot x^{\frac{3}{4}} = \cancel{5^{\frac{3}{2}}} \cdot x^{\frac{1}{2}}$

$x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{1}{2}} \qquad x = 1$



Решение 2-го неравенства: $x = 1$

Ответ: $[0; \log_4 12]$

С3 $\begin{cases} 2^{2x} + 12 \cdot 4^{-x} \leqslant 13, \\ \log_{0,04} 125x \cdot \log_{25x} 5 + \dfrac{3}{4} \geqslant 0 \end{cases}$

$2^{2x} + 12 \cdot 4^{-x} \leqslant 13$

$2^{2x} + 12 \cdot 2^{-2} - 13 \leqslant 0$

$2^{2x} + 12 \cdot 2^{-2x} \leqslant 13$

Введем новую переменную.

Пусть $2^{2x} = t$

$t + 12t^{-1} - 13 \leqslant 0$

Умножим обе части на t

$t^2 - 13t + 12 \leqslant 0$

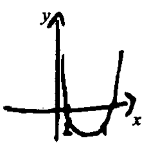
Рассмотрим функцию

$y = t^2 - 13t + 12$

Найдем нули функции

$t^2 - 13t + 12 = 0$

$t_1 = 12 \quad t_2 = 1$



$y \leqslant 0$ при $x \in [1;\ 12]$

$1 \leqslant 2^{2x} \leqslant 12$

Приводим к общему основанию

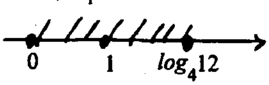
$2^0 \leqslant 2^{2x} \leqslant 12$

$0 \leqslant x \quad 4^x \leqslant 12$

$\log_4 12 \geqslant x$

Решение этого неравенства $[0;\ \log_4 12]$

Общее решение:



$[0;\ \log_4 12]$

$\log_{0,04} 125x \cdot \log_{25x} 5 + \dfrac{3}{4} \geqslant 0$

$\log_{\frac{1}{25}} 125x \cdot \log_{25x} 5 + \dfrac{3}{4} \geqslant 0$

Приведем основания логарифмов к 25

$-\log_{25} 125x \cdot \dfrac{\log_{25} 5}{\log_{25} 25x} + \dfrac{3}{4} \geqslant 0$

$\dfrac{-0{,}5 \log_{25} 125x + 0{,}75 \log_{25} 25x}{\log_{25} 25x} \geqslant 0$

Решаем методом интервалов.

$D(y) = (0;\ 0{,}04) \cup (0{,}04;\ +\infty)$

$\begin{cases} 125x > 0 \\ 25x > 0 \\ \log_{25} 25x \neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \dfrac{1}{25} \end{cases}$

$-0{,}5 \log_{25} 125x + 0{,}75 \log_{25} 25x = 0$

$\log_{25} (125x)^{-0{,}5} \cdot (25x)^{0{,}75} = 0$

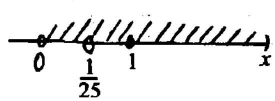
$(125x)^{-0{,}5} \cdot (25x)^{0{,}75} = 1$

$(25x)^{\frac{3}{4}} = (125x)^{\frac{1}{2}}$

$(25x)^{\frac{3}{4}} = \sqrt{125} \cdot \sqrt{x}$

$5^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{3}{4}} = 5^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}$

$x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{1}{2}} \quad x = 1$



Решение второго неравенства: $x = 1$

Ответ: $[0;\ \log_4 12]$

Пример 5. (Оригинал)

(1) $\begin{cases} 2^{2x}+12\cdot 4^{-x} \le 13 \\ \log_{0{,}04}125x\cdot\log_{25x}5+\frac{3}{4}\ge 0\end{cases}$

решим на туое неравенство отдельно.

1) решим первое неравенство:

(1) $2^{2x}+12\cdot4^{-x}\le13$

$2^2+2^x+12\cdot(4^{-1}+4^x)-13\le0$

$4+2^x+3+12\cdot(2^2)^x-13\le0$

Введем новую переменную, пусть $2^x=a$, тогда получим

$4+a+3+12a^2-13\le0$

$12a^2+a-6\le0$

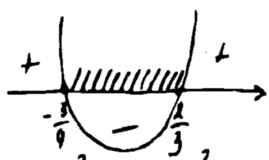
найдем нули функции

$12a^2+a-6=0$

$D=1+288=289=17^2$

$a_1=\frac{-1-17}{24}=-\frac{18}{24}=-\frac{3}{4}$

$a_2=\frac{-1+17}{24}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$



$x\ge-\frac{3}{4}$ $\quad x\le\frac{2}{3}$

выполним обратную подстановку

$2^x\ge-\frac{3}{4}$

нет решений.

$2^x\le\frac{2}{3}$

$\log_2 2^x\le\log_2\frac{2}{3}$

$x\le\log_2\frac{2}{3}$

(3) сравним $\log_2\frac{2}{3}$ и 1

2) решим второе неравенство

(2) $\log_{0{,}04}125x\cdot\log_{25x}5+\frac{3}{4}\ge0$

$\frac{\log_5 125x}{\log_5\frac{1}{25}}\cdot\frac{\log_5 5}{\log_5 25x}+\frac{3}{4}\ge0$

$\frac{\log_5125+\log_5x}{-2}\cdot\frac{1}{\log_525+\log_5x}+\frac{3}{4}\ge0$

$\frac{3+\log_5x}{-2}\cdot\frac{1}{2+\log_5x}+\frac{3}{4}\ge0$

$\frac{3+\log_5x}{-4-2\log_5x}+\frac{3}{4}\ge0$

найдем нули функции:

$\frac{3+\log_5x}{-4-2\log_5x}=-\frac{3}{4}$

Введем новую переменную, пусть $\log_5x=a$, тогда получим

$\frac{3+a}{-4-2a}=-\frac{3}{4}$

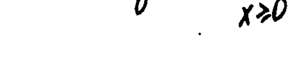
$(3+a)\cdot4=(-4-2a)\cdot(-3)$

$12+4a=12+6a$

$4a-6a=12-12$

$-2a=0$

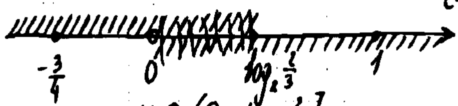
$a=0$



$x\ge0$

$1 = \log_2 2$ – отсюда следует, что 1 будет находится правее на числовой прямой $(2 > \frac{2}{3})$

выполним обратную подстановку.
$\log_5 x \geqslant 0$
$x \geqslant 1$
учитывая ОДЗ, выясняем
$\begin{cases} 125x > 0 \\ 25x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 0 \end{cases}$



$x \in (0; \log_2 \frac{2}{3}]$

Ответ: $(0; \log_2 \frac{2}{3}]$

Пример 5.

С3 $\begin{cases} 2^{2x} + 12 \cdot 4^{-x} \leqslant 13 \\ \log_{0,04} 125x \cdot \log_{25x} 5 + \frac{3}{4} \geqslant 0 \end{cases}$

решим каждое неравенство отдельно.

1) решим первое неравенство:

1. $2^{2x} + 12 \cdot 4^{-x} \leqslant 13$

$2^2 + 2^x + 12 \cdot (4^{-1} + 4^x) - 13 \leqslant 0$

$4 + 2^x + 3 + 12 \cdot (2^2)^x - 13 \leqslant 0$ введем новую переменную, пусть $2^x = a$, тогда получим

$4 + a + 3 + 12a^2 - 13 \leqslant 0$

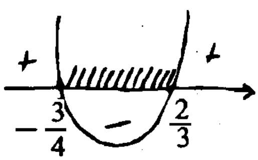
$12a^2 + a - 6 \leqslant 0$

найдем нули функции $12a^2 + a - 6 = 0$

$D = 1 + 288 = 289 = 17^2$

$a_1 = \frac{-1-17}{24} = -\frac{18}{24} = -\frac{3}{4}$

$a_2 = \frac{-1+17}{24} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$



$x \geqslant -\frac{3}{4}$ $x \leqslant \frac{2}{3}$

выполним обратную подстановку

$2^x \geqslant -\frac{3}{4}$ решений нет

$2^x \leqslant \frac{2}{3}$

$\log_2 2^x \leqslant \log_2 \frac{2}{3}$

2) решим второе неравенство:

2. $\log_{0,04} 125x \cdot \log_{25x} 5 + \frac{3}{4} \geqslant 0$

$\frac{\log_5 125x}{\log_5 \frac{1}{25}} \cdot \frac{\log_5 5}{\log_5 25x} + \frac{3}{4} \geqslant 0$

$\frac{\log_5 125x + \log_5 x}{-2} \cdot \frac{1}{\log_5 25 + \log_5 x} + \frac{3}{4} \geqslant 0$

$\frac{3 + \log_5 x}{-2} \cdot \frac{1}{2 + \log_5 x} + \frac{3}{4} \geqslant 0$

$\frac{3 + \log_5 x}{-4 - 2\log_5 x} + \frac{3}{4} \geqslant 0$

найдем нули функции $\frac{3 + \log_5 x}{-4 - 2\log_5 x} = -\frac{3}{4}$

введем новую переменную, пусть $\log_5 x = a$,

тогда получим $\frac{3 + a}{-4 - 2a} = -\frac{3}{4}$

$(3 + a) \cdot 4 = (-4 - 2a) \cdot (-3)$

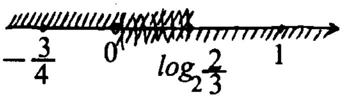
$12 + 4a = 12 + 6a$

$4a - 6a = 12 - 12$

$x \leqslant \log_2 \frac{2}{3}$

3. сравним $\log_2 \frac{2}{3}$ и 1

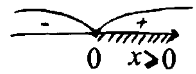
$1 = \log_2 2$ — отсюда следует, что 1 будет находиться правее на числовой прямой $\left(2 > \frac{2}{3}\right)$



$x \in \left(0;\ \log_2 \frac{2}{3}\right]$

Ответ: $(0;\ \log_2 \frac{2}{3}]$

$-2a = 0$



$a = 0$

выполним обратную подстановку $\log_5 x \geqslant 0$ учитывая ОДЗ, выясняем

$$\begin{cases} 125x > 0 \\ 25x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

Задание C4

Критерии оценивания

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины, или рассмотрены обе конфигурации, для которых получены значения искомой величины, неправильные из-за арифметических ошибок	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Задача C4 - 1

Косинус угла, противолежащего основанию равнобедренного треугольника, равен $\frac{7}{25}$, а боковая сторона равна 15. Внутри треугольника расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

Решение

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, в котором $\cos\angle BAC = \frac{7}{25}$,

$AB = AC = 15$. Обозначим $\angle ABC = \angle ACB = \alpha$.

Тогда $\angle BAC = 180^\circ - 2\alpha$, $\cos\angle BAC = \cos(180^\circ - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$,

$\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$, значит, $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} = \frac{9}{25}$. При этом $\alpha < 90^\circ$, поэтому

$\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$.

Пусть AH — высота треугольника ABC. Тогда H — середина BC, $BC = 2 \cdot BH = 2AB\cos\alpha = 18$. Предположим, что окружность радиуса r с центром O_1 вписана в угол ACB и касается основания BC в точке N, а окружность того же радиуса с центром O_2 вписана в угол ABC, касается основания BC в точке M, а первой окружности — в точке D.

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому $\angle O_2BM = \frac{\alpha}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1}{2}$.

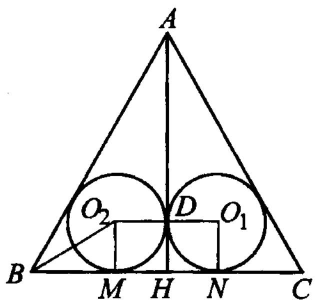


Рис. 15.

Из прямоугольного треугольника BMO_2 находим:

$BM = O_2M \operatorname{ctg}\angle MBO_2 = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 2r$. Тогда $CN = BM = 2r$.

Линия центров касающихся окружностей проходит через точку их касания, поэтому $O_1O_2 = 2r$, значит, $MN = O_1O_2 = 2r$, поскольку O_1O_2MN — прямоугольник.

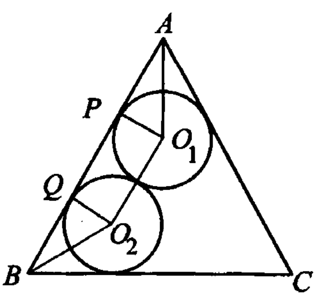


Рис. 16.

Следовательно, $18 = BC = BM + MN + CN = 2r + 2r + 2r = 6r$, откуда находим $r = 3$.

Пусть теперь окружность радиуса r с центром O_1 вписана в угол BAC и касается боковой стороны AB в точке P, вторая окружность радиуса r с центром O_2 вписана в угол ABC, касается боковой стороны AB в точке Q, а также касается первой окружности.

Из прямоугольных треугольников APO_1 и BQO_2 находим:

$$AP = O_1P \operatorname{ctg} \angle PAO_1 = r \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}r,$$

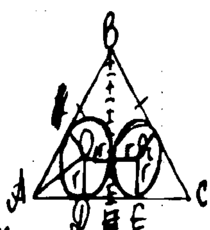
$$BQ = O_2Q \operatorname{ctg} \angle QBO_2 = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = 2r.$$

Следовательно, $15 = AB = AP + PQ + QB = AP + O_1O_2 + QB =$
$= \frac{4}{3}r + 2r + 2r = \frac{16}{3}r$, откуда находим $r = \frac{45}{16}$.

В случае, когда окружности вписаны в углы BAC и ACB , получим тот же результат.

Ответ: 3 или $\frac{45}{16}$.

Пример 1. (Оригинал)

I) 

C4.

Дано: $\triangle ABC$ - равнобедр.; ~~AB = BC~~; $\cos\angle ABC = \frac{7}{25}$; $AB = BC = 15$; O_1 и O_2 - центры равн. окр-тей, кас. двух стор. $\triangle ABC$; O_1 и O_2 - касающ. окр-ти; r - радиус окр-тей.
Найти r.

Решение:

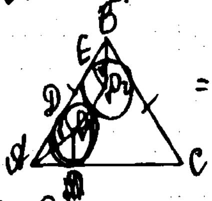
1) Найдём AC по т. косинусов. $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC$
$AC^2 = 225 + 225 - 2\cdot 15\cdot 15\cdot\frac{7}{25} = 450 - 126 = 324$; откуда $AC = 18$
2) Т.к. $\triangle ABC$ - равнобедр., $\angle BAC$ и $\angle BCA$ - углы при осн., то $\angle BAC = \angle BCA$
3) Т.к. O_1 и O_2 имеют одинак. рад., и $\angle BAC = \angle BCA$, то $AD = CE$,
4) Пусть $AD = CE = x$. Тогда $AD + DE + EC = AC$; т.е. $2x + 2r = 18 \Rightarrow x + r = 9$
5) $\cos\angle BAC = \cos\left(\frac{180° - \angle ABC}{2}\right) = \cos\left(90° - \frac{\angle ABC}{2}\right) = \sin\left(\angle\frac{ABC}{2}\right)$;
6) $\cos\angle ABC = 2\cos^2\angle\frac{ABC}{2} - 1$

$\frac{7}{25} = 2\cos^2\angle\frac{ABC}{2} - 1$
$2\cos^2\angle\frac{ABC}{2} = \frac{32}{25}$
Т.к. $\angle ABC$ - остр., то $\cos\angle\frac{ABC}{2} = \frac{4}{5}$; тогда $\sin\angle\frac{ABC}{2} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$.
7) Т.к. O_1 - центр окр., то AO_1 - бисс. $\angle BAC$, т.е. $\angle O_1AD = \frac{1}{2}\angle BAC$.
~~$\cos\angle O_1AD = 2$~~ $\cos\angle BAD = 2\cos^2\angle O_1AD - 1$.
$\frac{3}{5} = 2\cos^2\angle O_1AD - 1 \Rightarrow \cos\angle O_1AD = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\sin\angle O_1AD = \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ см. на обороте

Откуда $tg\angle O_1AD = \frac{1}{2}$, т.е. $\frac{r}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2r$, т.е. $2r + r = 9$, отсюда $r = 3$.

Ответ: 3.

II.



Дано: $\triangle ABC$ – равнобедр.; $AB = BC = 15$; $\cos\angle ABC = \frac{7}{25}$; O_1, O_2 – касающ. окр. с равными рад. r, причём O_1 и O_2 кас. 2 стор. $\triangle ABC$. Найти r.

Решение:

1) Т.к. O_1 – центр окр., то $\angle DAO_1 = \frac{1}{2}\angle BAC$; $tg\angle DAO_1 = \frac{1}{2}$ (см 1 сл.)

2) $\angle EBO_2 = \frac{1}{2}\angle ABC$, т.к. O_2 – центр окр. След., $\cos\angle ABC = 2\cos^2\angle EBO_2 - 1$.

$\frac{7}{25} = 2\cos^2\angle EBO_2 - 1$; откуда $\cos\angle EBO_2 = \frac{4}{5}$ (т.к. $\angle ABC$ – остр.).

Значит, $\sin\angle EBO_2 = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$. Т.е. $tg\angle EBO_2 = \frac{3}{4}$.

3) Пусть $AD = x$; $EB = y$. Тогда ~~x+y~~ $AD + DE + EB = 15$, т.е. $x + 2r + y = 15$.

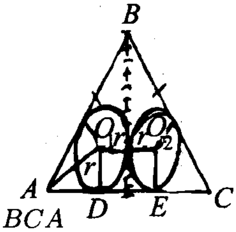
4) $\triangle AO_1D$ – прямоуг., т.к. O_1D – рад., AD – касат. След., $tg\angle DAO_1 = \frac{r}{x}$, т.е. $\frac{r}{x} = \frac{1}{2}$, след., $x = 2r$.

5) $\triangle BO_2E$ – прямоуг., т.к. O_2E – рад., EB – касат. След., $tg\angle EBO_2 = \frac{r}{y}$, т.е. $\frac{r}{y} = \frac{3}{4}$; след. $y = \frac{4}{3}r$.

6) Итак, $2r + 2r + \frac{4}{3}r = 15$; $\frac{16}{3}r = 15$; Отсюда $r = \frac{45}{16} = 2\frac{13}{16}$.

Ответ: $2\frac{13}{16}$.

I) Дано: $\triangle ABC$ — равноб.; $\cos\angle ABC = \frac{7}{25}$; $AB = BC = 15$; O_1 и O_2 — центры равн. окр-тей, кас. двух сторон $= \triangle ABC$ O_1 и O_2 — касающ. окр-ти; r — радиус окр-тей. Найти r.



Решение:

1) Найдем AC по т.косинусов. $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC$

$AC^2 = 225 + 225 - 2 \cdot 15 \cdot 15 \cdot \frac{7}{25} = 450 - 126 = 324$, откуда $AC = 18$

2) Т.к. $\triangle ABC$ — равноб., $\angle BAC$ и $\angle BCA$ — углы при осн, то $\angle BAC = \angle BCA$

3) Т.к. O_1 и O_2 имеют одинак рад., и $\angle BAC = \angle BCA$, то $AD = CE$

4) Пусть $AD = CE = x$. Тогда $AD + DE + EC = AC$; т.е. $2x + 2r = 18 \Leftrightarrow x + r = 9$

5) $\cos\angle BAC = \cos\left(\frac{180^\circ - \angle ABC}{2}\right) = \cos(90^\circ - \frac{\angle ABC}{2}\Big) = \sin\left(\angle\frac{ABC}{2}\right)$

6) $\cos\angle ABC = 2\cos^2\frac{\angle ABC}{2} - 1$

$\frac{7}{25} = 2\cos^2\frac{\angle ABC}{2} - 1$

$2\cos^2\frac{\angle ABC}{2} = \frac{32}{25}$

Т.к. $\angle ABC$ — остр., то $\cos\frac{\angle ABC}{2} = \frac{4}{5}$; тогда $\sin\frac{\angle ABC}{2} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$

7) Т.к. O_1 — центр окр., то AO_1 — бисс. $\angle BAC$, т.е. $\angle O_1AD = \frac{1}{2}\angle BAC$

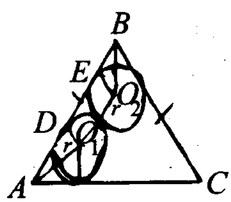
$\cos\angle BAC = 2\cos^2\angle O_1AD - 1.$

$\frac{3}{5} = 2\cos^2\angle O_1AD - 1 \Rightarrow \cos\angle O_1AD\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\sin\angle O_1AD = \sqrt{\left(1 - \frac{4}{5}\right)} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Откуда $\operatorname{tg}\angle O_1AD = \frac{1}{2}$, т.е. $\frac{r}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2r$, т.е. $2r + r = 9$, отсюда $r = 3$.

Ответ: 3.

II) Дано: $\triangle ABC$ — равнобедр.; $AB = BC = 15$; $\cos\angle ABC = \frac{7}{25}$; O_1 и O_2 — касающ. окр-ти с равными рад. r, причем O_1 и O_2 — кас. 2 стор. $\triangle ABC$. Найти r.



Решение:

1) Т.к. O_1 — центр окр, то $\angle DAO_1 = \frac{1}{2}\angle BAC$; $\operatorname{tg}\angle DAO_1 = \frac{1}{2}$ (см 1 сл)

2) $\angle EBO_2 = \frac{1}{2}\angle ABC$, т.к. O_2 — центр окр след, $\cos\angle ABC = 2\cos^2\angle EBO_2 - 1$.

$\frac{7}{25} = 2\cos^2\angle EBO_2 - 1$, откуда $\cos\angle EBO_2 = \frac{4}{5}$ (т.к. $\angle ABC$ — остр.).

Значит, $\sin\angle EBO_2 = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$. Т.е. $\operatorname{tg}\angle EBO_2 = \frac{3}{4}$.

3) Пусть $AD = x$, $EB = y$ Тогда $AD + DE + EB = 15$, т.е. $x + 2r + y = 15$.

4) $\triangle AO_1D$ — прямоуг., т.к. O_1D — рад., AD — касат. След., $\operatorname{tg}\angle DAO_1 = \frac{r}{x}$, т.е. $\frac{r}{x} = \frac{1}{2}$, след; $x = 2r$.

5) $\triangle BO_2E$ — прямоуг. т.к. O_2E — рад., AB — касат. След, $\operatorname{tg}\angle EBO_2 = \frac{r}{y}$, т.е. $\frac{r}{y} = \frac{3}{4}$, след., $y = \frac{4}{3}r$.

6) Итак, $2r + 2r + \frac{4}{3}r = 15$; $\frac{16}{3}r = 15$; Отсюда $r = \frac{45}{16} = 2\frac{13}{16}$

Ответ: $2\frac{13}{16}$

Задача С4 - 2

Косинус угла, противолежащего основанию равнобедренного треугольника, равен $-\frac{7}{25}$, а основание равно 16. Внутри треугольника расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

Ответ: 2 или $\frac{40}{23}$.

Пример 2 .(Оригинал)

С4) Дано:

$\cos\alpha = -\frac{7}{25}$

BO - высота

$\triangle ABC$ - равнобед.

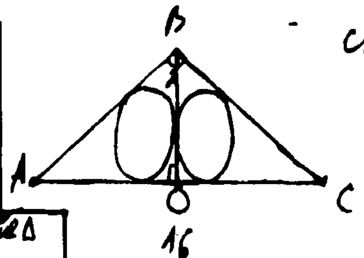
AC = 16 - основание $\triangle$

окружности - равные

каждая касается

двух сторон

Найти: радиусы окружностей.



- схематичный рисунок

Решение:

~~т.к. cos вершины < 0 ⇒ угол при вершине - тупой, ⇒~~

1) ⇒ т.к. окружности - равные ⇒ и обе вписаны в углы, которые вписаны в равные $\triangle$, ⇒

равнобедренный $\triangle$, ~~что прямая~~ высота BO будет проходить через точку ~~пересечения~~ касания окружностей.

2) находим по теореме косинусов ~~равные~~ боковые стороны

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\alpha$

т.к. AB = BC => Заменим AB и BC на X и подставим все известные значения: $16^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cdot \left(-\frac{7}{25}\right)$

$256 = \frac{14x^2}{25} + 2x^2 \Rightarrow 256 = \frac{64x^2}{25} \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = 10$

AB = BC = 10 см.

3) т.к. окружности вписаны в равные Δ, на которые биссектриса BO разделила ΔABC, то чтобы найти радиусы окружностей, достаточно найти значение радиуса одной из окружностей.

$r_{\Delta ABO} = \frac{S}{p}$, где P - полупериметр а r - радиус вписанной в Δ окружности.

4) $P = (AB + BO + AO) : 2$. находим BO по теор. Пифагора: $BO = \sqrt{100-64} = 6$

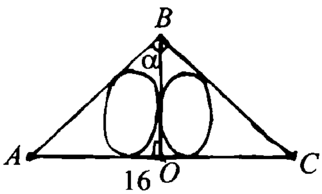
$\Rightarrow P = (10 + 6 + 8) : 2 = 12$

5) $S = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO$, $S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$

6) $r_{\Delta ABO} = \frac{24}{12} = 2$

Ответ: радиусы окружностей равны 2.

— схематичный рисунок



Решение:

1) т.к. окружности — равные и обе вписаны в значит, они вписаны в равные △, ⇒ равнобедренный △, высота BO будет

проходить через точку касания окружностей:

Дано:

$\cos\alpha = -\frac{7}{25}$

BO — высота

$\triangle ABC$ — равнобед.

$AC = 16$ — основание △

окружности равные и каждая касается двух сторон

Найти:

радиусы окружностей

2) находим по теореме косинусов боковые стороны

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cos\alpha$

т.к. $AB = BC \Rightarrow$ Заменим AB и BC на x и подставим известные значения: $16^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cdot \left(-\frac{7}{25}\right)$

$256 = \frac{14x^2}{25} + 2x^2 \Rightarrow 256 = \frac{64x^2}{25} \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = 10$

$AB = BC = 10$

3) т.к. окружности вписаны в равные △, на которые биссектриса BO разделила $\triangle ABC$, то чтобы найти радиусы окружностей, достаточно найти значение радиуса одной из окружностей. $r_{\triangle ABO} = \frac{S}{p}$, где p — полупериметр, а r — радиус вписанной в △ окружности.

4) $p = (AB + BO + AO) : 2$. находим BO по теор.Пифагора:

$BO = \sqrt{100 - 64} = 6 \Rightarrow p = (10 + 6 + 8) : 2 = 12$

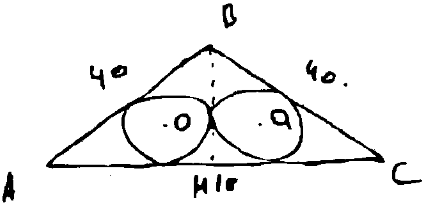
5) $S = \frac{1}{2} AO \cdot BO, S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$

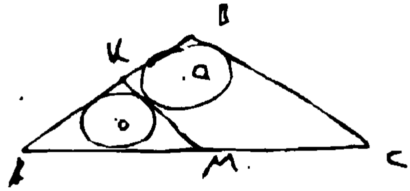
6) $r_{\triangle ABO} = \frac{24}{12} = 2$

Ответ: радиусы окружностей равны 2.

Пример 3. (Оригинал)

С4. т.к $\cos\angle < 0 \Rightarrow \angle > 90$
найдем боковые стороны
$16^2 = x^2 + x^2 - 2\cos\angle x^2$
$x = 40$.





из симметрии. I случай

$$r = \frac{S}{p} = \frac{64\sqrt{6}}{64+8\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{6}(3-\sqrt{6})}{15} = \frac{24\sqrt{6}-48}{15} = \frac{8\sqrt{6}-16}{5} = \frac{8(\sqrt{6}-2)}{5}$$

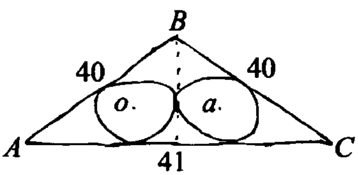
$BK^2 = BC^2 - CK^2$
$BK^2 = 32 \cdot 48 = 2^5 \cdot 2^4 \cdot 3$
$BK = 2^4 \cdot \sqrt{6} = 16\sqrt{6}$
$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 16 \cdot \sqrt{6} = 64\sqrt{6}$
$p = \frac{40+8+16\sqrt{6}}{2} = 24+8\sqrt{6}$

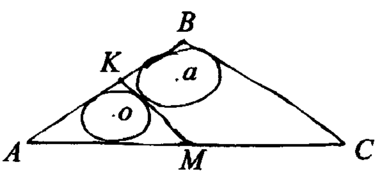
Второй случай.
$\triangle AKM \sim \triangle ABC \Rightarrow$
$r \sim R$.
$R = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{16\sqrt{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot 46}{36} =$
$= \frac{16\sqrt{6}}{12}$.
$\frac{AK}{AB} = \frac{1}{2}$ (т.к $AB = 4r$, а $AK = 2r$)

$$\Rightarrow r = \frac{R}{2} = \frac{16\sqrt{6}}{24} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Ответ: $r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, $r = 1{,}6(\sqrt{6}-2)$

С4 т.к. $\cos\alpha < 0 \Rightarrow \alpha > 90$ найдем боковые стороны $16^2 = x^2 + x^2 - 2\cos\alpha^2$
$x = 40$.





из симметрии I случай

$$r = \frac{S}{p} = \frac{64\sqrt{6}}{64+8\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{6}(3-\sqrt{6})}{15} = \frac{24\sqrt{6}-48}{15} = \frac{8\sqrt{6}-16}{5} = \frac{8(\sqrt{6}-2)}{5}$$

$BH^2 = BC^2 - CH^2$

$BH^2 = 32 \cdot 48 = 2^5 \cdot 2^4 \cdot 3$

$BH = 2^4 \cdot \sqrt{6} = 16\sqrt{6}$

$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 16 \cdot \sqrt{6} = 64 \cdot \sqrt{6}$

второй случай

$\triangle AKM \sim \triangle ABC \Rightarrow r \sim R$

$$R = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{16 \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot 16}{96} = \frac{16 \cdot \sqrt{6}}{12}$$

$\frac{AK}{AB} = \frac{1}{2}$ (т.к. $AB = 4r$, а $AK = 2r$)

$\Rightarrow r = \frac{R}{2} = \frac{16\sqrt{6}}{24} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

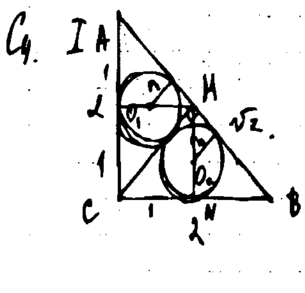
Ответ: $r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, $r = 1{,}6(\sqrt{6} - 2)$

Задача С4 - 3

Дан равнобедренный прямоугольный треугольник с боковой стороной 2. Внутри треугольника расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

Ответ: $\sqrt{2} - 1$ и $\frac{4 - \sqrt{2}}{7}$.

Пример 4. (Оригинал)

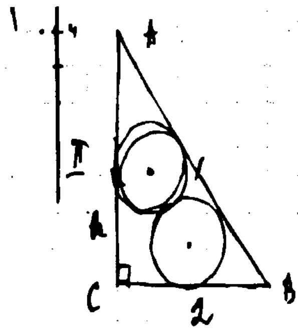


Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$

$AC = CB = 2$

$r_1 = r_2$

Найти r_1 и r_2



Дано: ΔABC

$\angle C = 90°$,

$AC = AB$,

$CB = 2$.

Решение,

1) $CH = \sqrt{2}$

$HN = \sqrt{2-1} = 1$.

$S_{\Delta CHB} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$.

$P_{CHB} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2}{2} = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{2} = \sqrt{2}+1$.

$S_\Delta = pr$

$r = \frac{S}{p}$

$r = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1$.

Ответ: $\sqrt{2} - 1$.

C4

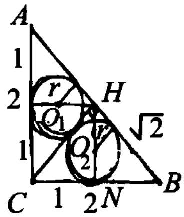
I

Дано: $\triangle ABC$,
$\angle C = 90°$
$AC = CB = 2$
$r_1 = r_2$
Найти: r_1 и r_2
Решение:
1) $CH = \sqrt{2}$
$HN = \sqrt{2 - 1} = 1$

$S_{\triangle CHB} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$

$P_{CHB} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2}{2} = \frac{2(\sqrt{2} + 1)}{2} = \sqrt{2} + 1.$

Ответ: $\sqrt{2} - 1.$



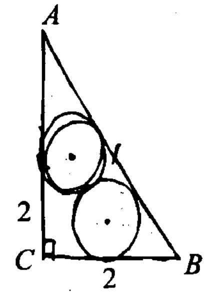
II

Дано: $\triangle ABC$
$\angle C = 90°$
$AC = AB$
$CB = 2$

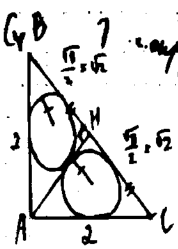
$S_\triangle = pr$

$r = \frac{S}{p}$

$r = \frac{1}{\sqrt{2+1}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1} = \sqrt{2} - 1.$



Пример 5. (Оригинал)

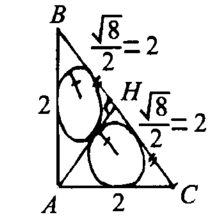


Т.к. окружности равны, то ∩ вместе с высотой AH. (Δ равнобедренный).

1) $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$ $\quad BH = HC.$

2) $BC^2 = 4 + 4 = 8 = (\sqrt{8})^2$

Найдем сторону AH в прямоугольном треугольнике по т. Пифагора.
$AH^2 = 4 - 2 = 2 = (\sqrt{2})^2$
$S = pr$ откуда $\quad S_{BHA} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 1$
$p = S/r$ $\quad p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{2 + \sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$
$r = S/p$ $\quad r = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$ (радиус одной окружности).
Отв: $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$



C4

Т.к. окружности равны, то $\bigcap$ вместе с высотой AH ($\triangle$ равнобедренный)

1) $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$ $BH = HC$

2) $BC^2 = 4 + 4 = 8 = (\sqrt{8})^2$

Найдем сторону AH в прямоугольном треугольнике по т. Пифагора
$AH^2 = 4 - 2 = 2 = (\sqrt{2})^2$

$S = pr$ отсюда

$S_{BHA} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 1$

$p = \frac{S}{r}$

$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} == \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$

$r = \frac{S}{p}$

$r = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$ (радиус одной окружности).

Отв: $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$

Задание С5

Критерии оценивания

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек, или верный ответ	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Задача С5 - 1

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\frac{2}{x+1} = a|x-5|$ на промежутке $[0; +\infty)$ имеет более двух корней.

Решение

Рассмотрим функции $f(x) = a|x-5|$ и $g(x) = \frac{2}{x+1}$. Исследуем уравнение $f(x) = g(x)$ на промежутке $[0; +\infty)$.

При $a \leqslant 0$ все значения функции $f(x)$ на промежутке $[0; +\infty)$ неположительны, а все значения функции $g(x)$ — положительны, поэтому при $a \leqslant 0$ уравнение $f(x) = g(x)$ не имеет решений на промежутке $[0; +\infty)$.

При $a > 0$ функция $f(x)$ возрастает на промежутке $(5; +\infty)$, функция $g(x)$ убывает на этом промежутке. Поскольку $f(5) < g(5)$ и $f\left(5+\frac{1}{a}\right) > g\left(5+\frac{1}{a}\right)$, то уравнение $f(x) = g(x)$ на промежутке $(5;\ +\infty)$ имеет ровно одно решение.

На промежутке $[0; 5]$ уравнение $f(x) = g(x)$ принимает вид

$5a - ax = \dfrac{2}{x+1}$.

Это уравнение сводится к уравнению $ax^2 - 4ax + (2 - 5a) = 0$. Будем считать, что $a > 0$, поскольку случай $a \leqslant 0$ был рассмотрен ранее.

Дискриминант квадратного уравнения $D = 16a^2 - 4a(2 - 5a) = 36a^2 - 8a$, поэтому при $0 < a < \dfrac{2}{9}$ это уравнение не имеет корней; при $a = \dfrac{2}{9}$ уравнение имеет единственный корень, равный 2; при $a > \dfrac{2}{9}$ уравнение имеет два корня.

Пусть уравнение имеет два корня, то есть $a > \dfrac{2}{9}$. Тогда оба корня меньше 5, поскольку при $x \geqslant 5$ значения функции $5a - ax$ неположительны, а значения функции $\dfrac{2}{x+1}$ положительны. По теореме Виета сумма корней равна 4, а произведение равно $\dfrac{2}{a} - 5$. Значит, больший корень всегда принадлежит промежутку $[0; 5]$ (иначе сумма корней была бы отрицательной), а меньший принадлежит этому промежутку тогда и только тогда, когда $\dfrac{2}{a} - 5 \geqslant 0$, то есть $a \leqslant \dfrac{2}{5}$.

Таким образом, уравнение $\dfrac{2}{x+1} = a|x - 5|$ имеет следующее количество корней на промежутке $[0; +\infty)$:

- нет корней при $a \leqslant 0$;
- один корень при $0 < a < \dfrac{2}{9}$;
- два корня при $a = \dfrac{2}{9}$ и $a > \dfrac{2}{5}$;
- три корня при $\dfrac{2}{9} < a \leqslant \dfrac{2}{5}$.

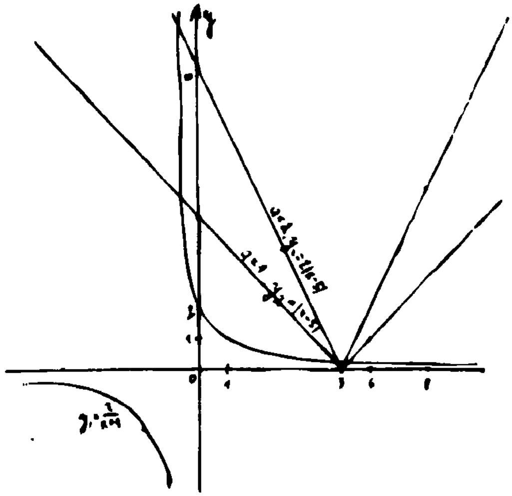
Ответ: $\dfrac{2}{9} < a \leqslant \dfrac{2}{5}$.

Пример 1. (Оригинал)

С5. $\frac{2}{x+1} = a|x-5|$

$y_1 = \frac{2}{x+1}$, $x \neq -1$, построим график ф-и:

x	0	1	3	-2	-3
y	2	1	0,5	-2	-1



Построим $y_2 = a|x-5|$ для различных a.

При $a=0$ ур-е не имеет корней, т.к. $y=\frac{2}{x+1}$ не может равняться нулю.

При $a=1$, $y_2 = |x-5|$

x	0	5	6
y	5	0	1

При $a=2$, $y_2 = 2|x-5|$

x	0	5	8
y	10	0	6

При $a>0$ ветви графика $y_2 = a|x-5|$ направлены вверх, ур-е будет иметь корни на промежутке $[0;+\infty)$, при $a<0$ корней на данном промежутке не будет.
Правая ветвь графика $y_2 = a|x-5|$ при любых положит. значениях a будет пересекать $y_1 = \frac{2}{x+1}$ один раз, что дает 1 реш-е, следовательно нужно найти такие a, при которых левая ветвь графика y_2 пересечет гр. y_1 более 2 раз.

$\frac{2}{x+1} = -a(x-5)$,

$\frac{2+ax(x+1)-5a(x+1)}{x+1} = 0$;

$ax^2-4ax-5a+2=0$; $x \neq -1$.

$D = 16a^2+20a^2-8a > 0$;

$36a^2-8a>0$

$4a(9a-2)>0$

$a>0$ или $a>\frac{2}{9}$

$a>\frac{2}{9}$

На конце данного отрезка $[0;+\infty)$ из y находим, что $x=0$, значит пересечение графиков должно быть ниже $y=2$, при $x=0$.

$-a(x-5)\leq 2$

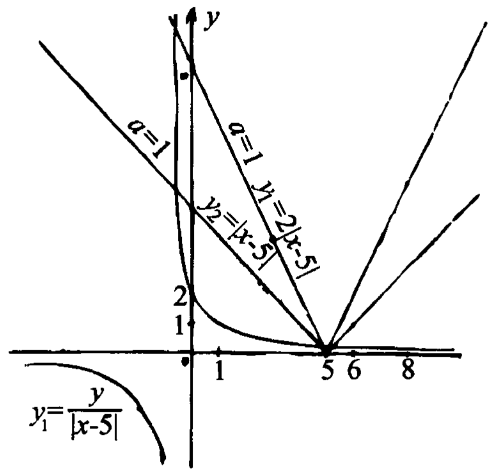
$-a(0-5)\leq 2$

$5a\leq 2$

$a\leq \frac{2}{5}$, В итоге имеем, что при $a>\frac{2}{5}$ ур-е имеет 2 корня, а при $\frac{2}{9}<a\leq\frac{2}{5}$ ур-е имеет более 2х на отр $[0;+\infty)$

Ответ: $\frac{2}{9}<a\leq\frac{2}{5}$

C5. $\dfrac{2}{x+1}=a|x-5|$



$y_1=\dfrac{2}{x+1}$, $x\neq-1$. Построим график функции:

x	0	1	3	−2	−3
y	2	1	0,5	−2	−1

Построим $y_2=a|x-5|$ для произвольных a.

При $a=0$ ур-е не имеет корней, т.к. $y_1=\dfrac{2}{x+1}$ не может равняться нулю.

При $a=1$, $y_2=|x-5|$

x	0	5	6
y	5	0	1

При $a=2$, $y_2=2|x-5|$

x	0	5	8
y	10	0	6

При $a>0$ ветви графика $y_2=a|x-5|$ направлены вверх, ур-е будет иметь корни на промежутке $[0;\ +\infty)$, при $a<0$ корней на данном промежутке не будет.

Правая ветвь графика $y_2=a|x-5|$ при любых положит. значениях a будет пересекать $y_1=\dfrac{2}{x+1}$ один раз, что дает 1 реш-е, следовательно нужно найти такие a, при которых левая ветвь графика y_2 пересечет гр. y_1 более 2 раз.

$$\frac{2}{x+1}=-a(x-5),$$

$$\frac{2+ax(x+1)-5a(x+1)}{x+1}=0;$$

$$ax^2-4ax-5a+2=0;\ x\neq-1$$

$$D=16a^2+20a^2-8a>0;$$

$$36a^2-8a>0$$

$$4a(9a-2)>0$$

$$a>0 \text{ или } a>\frac{2}{9}$$

$$\Downarrow$$

$$a>\frac{2}{9}$$

На конце данного отрезка $[0;\ +\infty)$ из y находим, что $x=0$, значит пересечение графиков должно быть ниже $y=2$, при $x=0$.

$-a(x-5)\leqslant 2$

$-a(0-5)\leqslant 2$

$5a\leqslant 2$

$a \leqslant \frac{2}{5}$, в итоге имеем, что при $a > \frac{2}{5}$ ур-е имеет 2 корня, а при $\frac{2}{9} < a \leqslant \frac{2}{5}$ ур-е имеет более 2-х на отр $[0;\ +\infty)$

Ответ: $\frac{2}{9} < a \leqslant \frac{2}{5}$

Задача С5 - 2

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$\frac{2}{x+1} = a|x-3|$ на промежутке $[0; +\infty)$ имеет более двух корней.

Ответ: $\frac{1}{2} < a \leqslant \frac{2}{3}$.

Пример 2. (Оригинал)

С5

$\frac{2}{x+1} = a|x-3|$

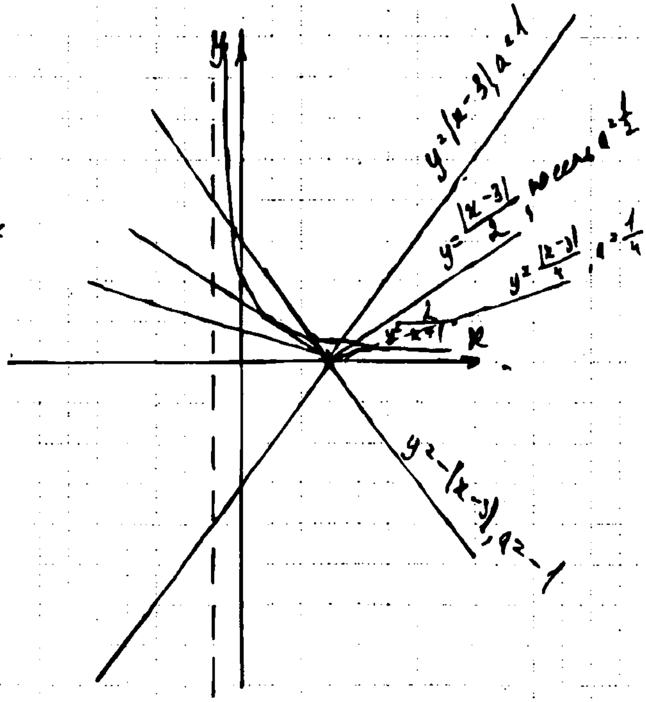
$x \in [0, +\infty)$

при $a > \frac{1}{2}$, то уравнение имеет 3 корня, т.к

при $a = \frac{1}{2}$ уравнение имеет 2 корня,

а при $0 < a < \frac{1}{2}$ – имеет 1 корень и

при $a < 0$ – не имеет корней



$$\frac{2}{x+1} = a|x-3|$$

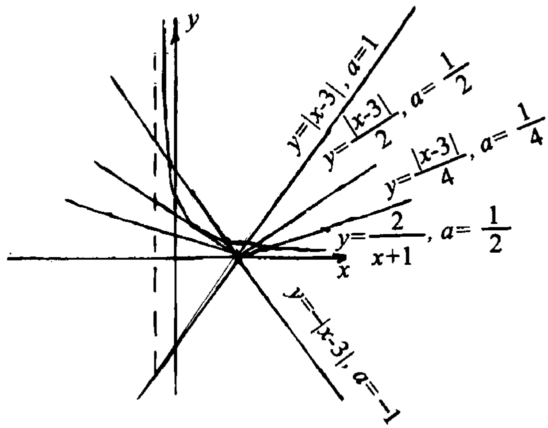
$x \in [0;\ +\infty)$

Если $a > \frac{1}{2}$, то уравнение имеет 3 корня,

т.к. при $a = \frac{1}{2}$ уравнение имеет 2 корня,

а при $0 < a < \frac{1}{2}$ — имеет 1 корень

и при $a < 0$ — не имеет корней

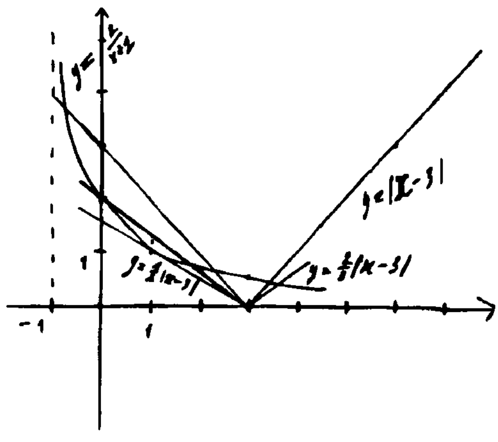


Пример 3. (Оригинал)

С5) На промежутке от $[0;+\infty)$ функция $a|x-3|=y$ может пересечь функцию $\frac{2}{x+1}=y$ в трех точках, или она пересекает точку $(0;2)$ составим уравнение:

$a|0-3|=2$;

$3a=2$; $a=\frac{2}{3}$



0

составим таблицу для нового уравнения $\frac{2}{3}|x-3|=y$.

x	0	1	3	4
y	2	$1\frac{1}{3}$	0	$1\frac{2}{3}$

, При пересечении графиков в точке $(1;1)$ уравнение будет иметь два корня. Нас интересуют значения $0<x\leq 1$ и $1<y\leq 2$. Найдем a для точки $(1;1)$

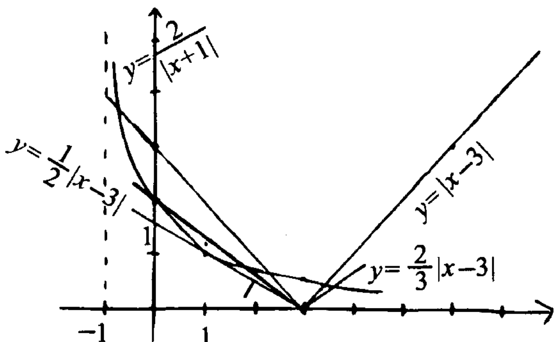
$a|1-3|=1$

$2a=1$; $a=\frac{1}{2}$. Составим таблицу:

x	1	3	5
y	1	0	1

. уравнение действительно имеет 2-а корня, а значит: а ~~принадлежит~~ a принадлежит промежутку $(\frac{1}{2};\frac{2}{3}]$;

С5. На промежутке от $[0;\ +\infty)$ функция $a|x-3| = y$ может пересечь функцию $\frac{2}{x+1} = y$ в трех точках, если она пересекает точку $(0;\ 2)$ составим уравнение: $a|0-3| = 2$; $3a = 2$; $a = \frac{2}{3}$



составим таблицу для нового уравнения $\frac{2}{3}|x-3| = y$

x	0	1	3	4
y	2	$1\frac{1}{3}$	0	$1\frac{1}{3}$

, При пересечении графиков в точке $(1;\ 1)$ уравнение будет иметь два корня. Нас интересуют значения $a \leqslant x_1 \leqslant 1$ и $1 < y \leqslant 2$. Найдем a для точек $(1;\ 1)$ $a|1-3| = 1$

$2a = 1$; $a = \frac{1}{2}$. Составим таблицу

x	1	3	5
y	1	0	1

уравнение действительно имеет 2-а корня, а значит: a принадлежит промежутку $\left(\frac{1}{2};\ \frac{2}{3}\right]$;

Пример 4. (Оригинал)

$\boxed{С5}$ $\frac{2}{x+1} = a|x-3|$

Гипербола $\frac{2}{x+1}$ лежит в I, II и III четвертях оси координат (II I III IV), но т. к. $x \in [0;\ +\infty)$ то рассматривается только I четверть. При $a \leqslant 0$ график функции $a|x-3|$ хотя (при $x \in [0;\ +\infty)$) лежит в IV четверти. Отсюда при $a < 0$ – нет корней.

При $a = 0$ также нет корней., т. к. $\frac{2}{x+1} \neq 0$

~~$\left(\frac{2}{x+1} = 0 \cdot |x-3|\right)$~~

При $a > 0$ в части графика $x > 3$ всегда есть 1 корень, т. е. для удовлетворения условия ~~в~~ часть (~~$x \in [0;3]$ должен быть~~) графика на промежутке $[0;3]$ должна иметь 2 корня.

$\frac{2}{x+1} = a|x-3|$ т. к. $x < 3$, то:

$\frac{2}{x+1} = a(3-x)$ $| \cdot x+1 \neq 0$

$x \neq -1$.

$2 = a(3-x)(x+1)$

$2 = -a(x-3)(x+1)$

$2 = -ax^2 - 2x - 3$

$-ax^2 - 2x - 5 = 0$.

При $D = 0$ уравнение имеет 1 корень.

При $D > 0$ 2 корня что и требуется по условию

$4 - 20a > 0$

$a < \frac{1}{5}$, но т. к. урав-

Квадратное уравнение вида $kx^2 + bx + c = 0$ раскладывается на множители в виде: $k(x-x_1)(x-x_2)$ где x_1 и x_2 корни этого уравнения. Отсюда $-a(x-3)(x+1)$ можно записать в виде квадратного уравнения: $-ax^2 + bx + c$ где

$-b = 3 - 1 = 2$ $b = -2$.

$c = 3 \cdot (-1) = -3$.

-нение решалось при $-a$ то $a > \frac{1}{5}$ будет иметь 2 корня.

Т. к. $x \in [0; +\infty)$ то

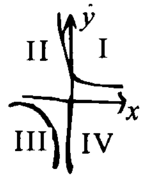
$a \le \frac{2}{(x+1)|x-3|}$ $x = 0$

$a \le \frac{2}{0+1\,|0-3|} = \frac{2}{3}$

$\begin{cases} a \le \frac{2}{3} \\ a > \frac{1}{5} \end{cases}$ $\left\{ (\frac{1}{5}; \frac{2}{3}] \right.$

Ответ: $(\frac{1}{5}; \frac{2}{3}]$.

$$\frac{2}{x+1} = a(x-3)$$



Гипербола $\frac{2}{x+1}$ лежит в I, II и III четвертях оси координат, но т.к. $x \in [0;\ +\infty)$ то рассматривается только I четверть.
При $a \leqslant 0$ график функции $a|x-3|$ (при $x \in [0;\ +\infty)$) лежит в IV четверти. Отсюда при $a < 0$ — нет корней.

При $a = 0$ также нет корней, т.к. $\frac{2}{x+1} \neq 0$

При $a > 0$ в части графика $x > 3$ всегда есть 1 корень, т.е. для удовлетворения условия часть графика на промежутке $[0;\ 3)$ должна иметь 2 корня.

$\frac{2}{x+1} = a|x-3|$ т.к.$x < 3$, то:

$\frac{2}{x+1} = a(3-x)\ \ |\cdot x+1 \neq 0\ \ x \neq -1.$
$2 = a(3-x)(x+1)$

$2 = -a(x-3)(x+1),$
$2 = -ax^2 - 2x - 3$
$-ax^2 - 2x - 5 = 0.$
при $d = 0$ уравнение имеет 1 корень.
При $d > 0$ 2 корня что и требуется по условию $4 - 20a > 0$

$a < \frac{1}{5}$, то т.к. уравн решалось

при $-a$ то $a > \frac{1}{5}$ будет иметь 2 корня.

Т.к. $x \in [0;\ +\infty)$ то $a \leqslant \frac{2}{(x+1)|x-3|}$

$x = 0 \quad a \leqslant \frac{2}{0+1|0-3} = \frac{2}{3}.$

$$\begin{cases} a \leqslant \frac{2}{3} \\ a > \frac{1}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} \left(\frac{1}{5};\ \frac{2}{3}\right] \\ \end{cases}$$

квадратное уравнение типа
$kx^2 + bx + c = 0$
разлагается на множители в виде $k(x-x_1)(x-x_2)$: где x_1 и x_2 корни этого уравнения.
Отсюда $-a(x-3)(x+1)$ можно записать в виде квадратного уравнения: $-ax^2+bx+c$
где $-b = 3 - 1 = 2\ \ b = -2.$
$c = 3 \cdot (-1) = -3$

Ответ: $\left(\frac{1}{5};\ \frac{2}{3}\right]$.

Задача С5 - 3.

Найдите все значения a при каждом из которых уравнение $\frac{5}{x+1} = a|x-4|$ на промежутке $[0; +\infty)$ имеет более двух корней.

Ответ: $\frac{4}{5} < a \leqslant \frac{5}{4}$.

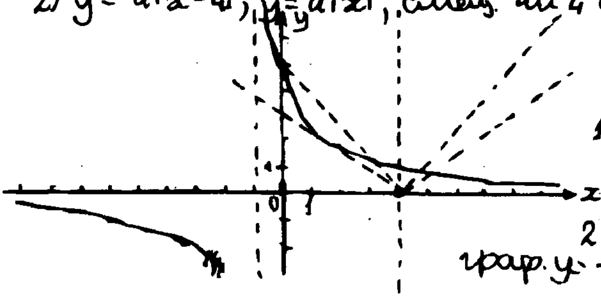
Пример 5. (Оригинал)

C5.

$\frac{5}{x+1} = a|x-4|$.

1) $y = \frac{5}{x+1}$ - гипероб. $y = \frac{5}{x}$, смещ на 1 ед. влево.

2) $y = a|x-4|$; $y = a|x|$, смещ. на 4 ед. вправо



Пунктиром показ. границы, при кот. будет более 2 корней

1 граница: $x=0$; $y=5$.

$a|0-4|=5$; $a=1{,}25$.

2 граница: $y=a|x-4|$ кас. слева граф. $y = \frac{5}{x+1}$

т.е. $(a|x-4|)' = \left(\frac{5}{x+1}\right)'$, т. к. $x < 4$ (см. рис.); то $((4-x)a)' = \frac{5}{x+1}$; откуда $-a = -\frac{5}{(x+1)^2}$, т.е. $a = \frac{5}{(x+1)^2}$.

$\frac{5}{x+1} = \frac{5}{(x+1)^2}(4-x)$; $5(x+1)=5(4-x)$; $x+1=4-x$ $2x=3$; $x=1{,}5$.

$a = \frac{5}{(1{,}5+1)^2} = \frac{5}{(2{,}5)^2} = 0{,}8$. Т.е. $a \in (0{,}8;\ 1{,}25]$. (Если $a<0$ граф с мод. будет распол. внизу)

Ответ: $(0{,}8;\ 1{,}25]$.

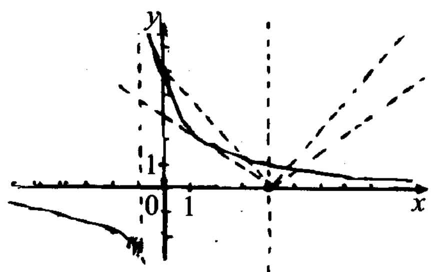
C5.

$$\frac{5}{x+1} = a|x-4|$$

1) $y = \frac{5}{x+1}$ — гиперб. $y = \frac{5}{x}$, смещ. на 1 ед. влево.

2) $y = a|x-4|$; $y = a|x|$, смещ. на 4 ед. вправо

Пунктиром показ. границы, при кот. будет более 2 корней



1 граница: $x = 0$; $y = 5$.

$a|0-4| = 5$; $a = 1{,}25$.

2 граница: $y = a|x-4|$ кас. слева граф (см.рис.) $y = \frac{5}{x+1}$

т.е. $(a|x-4|)' = \left(\frac{5}{x+1}\right)'$, т.к. $x < 4$, то $((4-x)a)' = \frac{5}{x+1}$, откуда $-a = -\frac{5}{(x+1)^2}$, т.е. $a = \frac{5}{(x+1)^2}$.

$\frac{5}{x+1} = \frac{5(4-x)}{(x+1)^2}$; $5(x+1) = 5(4-x)$; $x+1 = 4-x$; $2x = 3$; $x = 1{,}5$.

$a = \frac{5}{(1{,}5+1)^2} = \frac{5}{(2{,}5)^2} = 0{,}8$. Т.е. $a \in (0{,}8;\ 1{,}25]$. (Если $a < 0$, граф с мод. будет распол. внизу)

Ответ: $(0{,}8;\ 1{,}25]$.

Пример 6. (Оригинал)

C5 $\frac{5}{x+1} = a|x-4|$ – представлю это уравнение в виде графиков функций:

$f_1(x) = \frac{5}{x+1}$; $f_2(x) = a|x-4|$

$f_1(x)$ представляет собой гиперболу,

смещенную на 1 единицу влево, а график $f_2(x)$ – V-образная кривая с центром перелома в точке $(4;0)$.

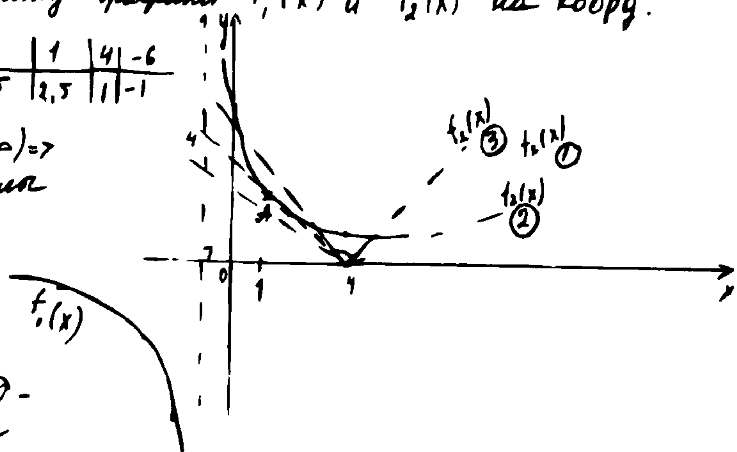
C5 (продолжение) Изображу графики $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на коорд. плоскости

$f_1(x)$

x	-2	0	1	4	-6
y	-5	5	2,5	1	-1

Т.к промежуток $[0;+\infty)$ => ~~парабо~~ гиперболы

=> нижнюю ветвь не учитываю



При расположении $f_2(x)$ ① – 2 решения; при расположении ② – 1 решение, а при расположении ③ – 3 решения.

Для того, чтобы было > 2 решений, нужно, чтобы угол наклона был меньше, чем на рис. ①, т.к на рис ① прямая является касательной.

tg α должен быть больше. Коэффициент a в ур-и касат. к связь ~~по~~ tg α. => $\operatorname{tg}\alpha = a > \frac{4}{5}$, но a должно быть > 0, т.к в противном случае ветви графика $f_2(x)$ будут направлены вниз. Т.о $a \in (0{,}8; +\infty)$

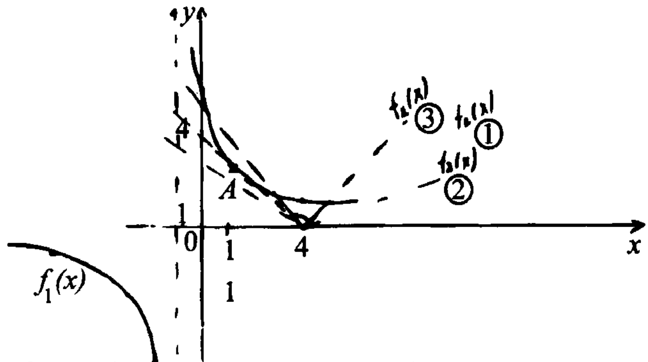
Ответ: $a \in (0{,}8; +\infty)$

$\frac{5}{x+1} = a|x-4|$ — представлю это уравнение в виде графиков функций: $f_1(x) = \frac{5}{x+1}$;

$f_2(x) = a|x-4|$

$f_1(x)$ представляет собой гиперболу, смещенную на 1 единицу влево, а график $f_2(x)$ — V - образная кривая с центром перелома в точке (4; 0).

С5 (продолжение) Изображу графики $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на коорд. плоскости



$f_1(x)$

x	−2	0	1	4	−6
y	−5	5	2,5	1	−1

т.к. промежуток $[0;\ +\infty) \Rightarrow$ нижнюю ветвь гиперболы не учитываю

При расположении $f_2(x)$ 1 — 2 решения; при расположении 2 — 1 решение, а при расположении 3 — 3 решения.

Для того, чтобы было $>$ 2 решений, нужно, чтобы угол наклона был меньше, чем на рис 1, т.к. на рис 1 прямая является касательной.

$\operatorname{tg}\alpha$ должен быть больше. Коэффициент a в ур-и касат. и есть $\operatorname{tg}\alpha \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha > \frac{4}{5}$, но a должно быть > 0, т.к. в противном случае ветви графика $f_2(x)$ будут направлены вниз. т.о. $a \in (0{,}8;\ +\infty)$

Ответ: $a \in (0{,}8;\ +\infty)$

Задание С6

Критерии оценивания

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — искомая оценка в п. а); — пример в п. а), обеспечивающий точность предыдущей оценки; — искомая оценка в п. б); — пример в п. б), обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Задача С6 - 1

Назовём кусок верёвки стандартным, если его длина не меньше 115 см, но не больше 120 см.

а) Некоторый моток верёвки разрезали на 23 стандартных куска, среди которых есть куски разной длины. На какое наибольшее число одинаковых стандартных кусков можно было бы разрезать тот же моток верёвки?

б) Найдите такое наименьшее число l, что любой моток верёвки, длина которого больше l см, можно разрезать на стандартные куски.

Решение

Решение каждого пункта состоит из двух частей: оценка и пример.

Рассмотрим моток верёвки длиной x см. Условие того, что его можно разрезать на n стандартных кусков, записывается в виде $115n \leqslant x \leqslant 120n$ или $115 \leqslant \frac{x}{n} \leqslant 120$.

а) В данном случае имеем $115 \cdot 23 < x < 120 \cdot 23$ (неравенства строгие, поскольку среди кусков есть неравные). Пусть эту верёвку можно разрезать на n стандартных кусков, тогда $115 \leqslant \frac{x}{n} \leqslant 120$.

При $n \geqslant 24$ получаем $\frac{x}{n} < \frac{x}{24} < \frac{120 \cdot 23}{24} = 115$, то есть этот моток верёвки нельзя разрезать больше чем на 23 стандартных куска.

При $n = 23$ получаем $115 < \frac{x}{23} < 120$. Значит, эту верёвку можно разрезать на 23 одинаковых стандартных куска, но нельзя разрезать на большее количество стандартных кусков.

б) Отрезки $[115n; 120n]$ и $[115(n+1); 120(n+1)]$, являющиеся решениями неравенств $115n \leqslant x \leqslant 120n$ и $115(n+1) \leqslant x \leqslant 120(n+1)$, имеют общие точки для всех n , при которых $115(n+1) \leqslant 120n$, то есть при $n \geqslant 23$. Значит, любую верёвку длиной $115 \cdot 23 = 2645$ см или более можно разрезать на стандартные куски.

Докажем, что верёвку, длина которой x см больше $120 \cdot 22 = 2640$ см, но меньше $115 \cdot 23 = 2645$ см, нельзя разрезать на n стандартных кусков ни для какого n. При $n \geqslant 23$ получаем $x < 115 \cdot 23 \leqslant 115n$, что противоречит условию $115n \leqslant x$. При $n \leqslant 22$ получаем $x > 120 \cdot 22 \geqslant 120n$, что противоречит условию $x \leqslant 120n$. Таким образом, искомое число равно 2645.

Ответ: а) 23; б) 2645.

Пример 1. (Оригинал)

С6)

а) так как из 23 кусков нужно чтобы хотя бы 2 куска были разными, то 22 куска могут быть одинаковыми, но не больше.

Ответ: 22

б) ~~наименьш~~ найти наименьшее L, такое чтобы
Чтобы любой моток веревки, длина которого больше L см можно было разрезать на стандартные куски, нужно чтобы $L = 115 \cdot X$, где X находим из ур-ния $(120 - 115) \cdot X = 115$, так как только ~~тогда~~ тогда мы сможем разрезать любой ~~моток~~ моток, длиной большей чем L на стандартные отрезки. $X = 23 \Rightarrow L = 2645$

Ответ: 2645 ~~см~~

С6 а) так как из 23 кусков нужно чтобы хотя бы 2 куска были разными, то 22 куска могут быть одинаковыми, но не больше.
Ответ: 22
б) Чтобы найти наименьшее L, такое, чтобы любой моток веревки, длина которого больше L см можно было разрезать на стандартные куски, нужно чтобы $L = 115 \cdot x$, где x находим из ур-ния $(120 - 115) \cdot x = 115$, так как только тогда мы сможем разрезать любой моток, длиной большей, чем L на стандартные отрезки $x = 23 \Rightarrow L = 2645$
Ответ: 2645.

Пример 2. (Оригинал)

С6 $115 \leq X \leq 120$

$\frac{y}{x} = 23$

X - длина куска

y - длина веревки.

если в веревке y есть 22 куска одной длины и хотя бы один другой (как и сказано по условию) то MAX длина веревки будет 2759 (22 куска по 120 см и один 119), min

а) Опред. MAX число кусков из веревки y

длина 2646 (22 куска 115 см и один 116). Нужно найти на какое максимальное кол-во кусков может быть разрезана веревка. Находим что разность между MAX и Min равна 113 см, при том что мин. длина куска должна быть 115 см. Значит нельзя разрезать веревку на большее кол-во частей. Наибольшее кол-во частей 23.

C6		
$115 \leqslant x \leqslant 120$ $\frac{y}{x} = 23$	x — длина куска y — длина веревки	если в веревке y есть 22 куска одной длины и хотя бы один другой (как и сказано в условии) то max длина веревки будет 2759 (22 куска по 120 см и один 119), min длина 2646 (22 куска 115 см и один 116). Нужно найти на какое максимальное кол-во кусков может быть разрезана веревка. Находим, что разность между max и min равна 113 см, при том что мин. длина куска должна быть 115 см. Значит нельзя разрезать веревку на большее кол-во частей. Наибольшее кол-во частей 23.

Задача С6 - 2

Назовём кусок верёвки стандартным, если его длина не меньше 93 см, но не больше 96 см.

а) Некоторый моток верёвки разрезали на 31 стандартный кусок, среди которых есть куски разной длины. На какое наибольшее число одинаковых стандартных кусков можно было бы разрезать тот же моток верёвки?

б) Найдите такое наименьшее число l, что любой моток верёвки, длина которого больше l см, можно разрезать на стандартные куски.

Ответ: а) 31 б) 2883.

Пример 3. (Оригинал)

С6

а) Обозначим L - длина мотка верёвки из 31 стандартного куска, тогда $93 \cdot 31 < L < 96 \cdot 31$, Наибольшее число кусков равных стандартных кусков получим при минимальном значении 93 см. Значит, число кусков $31 < \frac{L}{93} < \frac{96 \cdot 31}{93} = \frac{96}{3} = 32$; число кусков находится между числами 31 и 32. Наибольшее целое, не превосходящее эти значения - 31.

см. на обороте.

б) Если моток резать на 2, то его длина от 186 до 192, если на 3, то от 279 до 288; если на n, то от $93n$ до $96n$; а если на $(n+1)$, то от $(93n+93)$, до $(96n+96)$. ~~Всегда всякое~~

$96n \geqslant 93n+93$, — иначе не всякое число, большее $93n$ можно резать на стандартные куски.
$3n \geqslant 93$, $\Rightarrow n \geqslant 31$.

$l = 93 \cdot n = 93 \cdot 31 = 2883$

Ответ: а) 31.
б) $l = 2883$.

С6 а) Обозначим L — длина мотка веревки из 31 стандартного куска, тогда $93 \cdot 31 < L < 96 \cdot 31$. Наибольшее число равных стандартных кусков получим при минимальном значении 93 см. Значит, число кусков $31 < \frac{L}{93} < \frac{96 \cdot 31}{93} = 32$; число кусков находится между числами 31 и 32. Наибольшее число, не превосходящее эти условия — 31.
б) Если моток резать на 2, то его длина от 186 до 192, если на 3, то от 279 до 288; если на n, то от $93n$ до $96n$; а если на $(n+1)$, то от $(93n+93)$, до $(96n+96)$.
$96n \geqslant 93n + 93$, — иначе не всякое число, большее $93n$ можно резать на стандартные куски.
$3n \geqslant 93$, $\Rightarrow n \geqslant 31$.
$l = 93 \cdot n = 93 \cdot 31 = 2883$
Ответ: а) 31.
б) $l = 2883$.

Пример 4. (Оригинал)

С6

а) Самый большой моток — это $96 \cdot 30 + 95 = 2975$

Невозможно ~~подобрать~~ разрезать моток больше, чем на 31 стандартный кусок, т.к самое длинное — 2975 — это $2976(93 \cdot 32)$, но есть в любом случае число 2975 будет невозможно получить, а если мы возьмем моток < 2975, то число кусков, на которое можно разрезать моток будет $\leqslant 31$

Ответ: 31

б) $l = 2882$ т.к. разность всех последующих чисел с числом $93 \cdot n$, будет $\geqslant 93$

Ответ: $l = 2882$

C6

а) Самый большой моток — это $96 \cdot 30 + 95 = 2975$

Невозможно разрезать моток больше, чем на 31 стандартный кусок, т.к. самое близкое к 2975 — это $2976 (93 \cdot 32)$ то есть в любом случае число 2975 будет невозможно получить,а, если мы возьмем моток < 2975, то число кусков, на которое можно разрезать моток будет $\leqslant 31$

Ответ: 31

б) $l = 2882$ т.к. разность всех последующих чисел с числом $93 \cdot n$, будет $\geqslant 93$

Ответ: $l = 2882$

Задача C6 - 3

Назовём кусок верёвки стандартным, если его длина не меньше 120 см, но не больше 124 см.

а) Некоторый моток верёвки разрезали на 30 стандартных кусков, среди которых есть куски разной длины. На какое наибольшее число одинаковых стандартных кусков можно было бы разрезать тот же моток верёвки?

б) Найдите такое наименьшее число l, что любой моток верёвки, длина которого больше l см, можно разрезать на стандартные куски.

Ответ: а) 30; б) 3600.

Пример 5. (Оригинал)

$\boxed{C6}$ a – длина стандартной веревки

$120 \leq a \leq 124$

а) $3600 \leq 30a \leq 3720$

Т.к. все куски разной длины $\Rightarrow n \neq 31$, ~~ххх~~.

Поэтому $n = 30$.

б) $L = 240$ см.

C6

a — длина стандартной веревки

$120 \leqslant a \leqslant 124$

а) $3600 \leqslant 30a \leqslant 3720$

Т.к. все куски разной длины $\Rightarrow n \neq 31$,

Поэтому $n = 30$

б) $L = 240$ см.

Пример 6. (Оригинал)

(C_6. а) Моток верёвки разрезали на 30 кусков ~~длиной~~ с длиной от 120 см до 124 см, среди которых есть куски разных длин. Этот же моток можно разрезать на 30 одинаковых кусков. Длина одного куска тогда будет равна среднему арифметическому длин кусков первоначального разреза, т.е. все l_e (длины каждого куска начального разреза) будут подгоняться на один „уровень". Иными словами, пусть:

n_{l_i} – число кусков с одинаковой длиной l;
l_i – длина одного куска;
i показывает, что l не одинаково;

первоначальный подход.

тогда длина одного куска нового разреза, в котором все куски имеют одинаковую длину, равна

$$l = \frac{l_0 \cdot n_{e_0} + l_1 n_{e_1} + \ldots + l_k \cdot n_{e_k}}{30}.$$

Ответ: тот же моток верёвки можно разрезать на 30 одинаковых кусков.

б) Для нахождения l необходимо отталкиваться от верхнего предела длины куска – 124 см. l должно быть таким, чтобы ~~то число~~ $l+1$ можно было выразить как ~~сумму~~ $120 \cdot n + k$, где $n \in Z$, а $k \in [120; 124]$, а простое $l = 124 \cdot m$, где $m \in Z$

при $m = 1$, $l = 124$, $l+1 = 125$, тогда $k = 5$

при $m = 2$ $l = 248$, $l+1 = 249$, тогда $k = 9$

при $m=3$: $l=372$, $l+1=373$, тогда $k=13$

...

с увеличением m на 1, k увеличивается на 4.

$k_q=5+4\cdot(q-1)$ $k_q \in [120;124]$, тогда

k_q-5 должно быть кратно 4. 121 подходит.

$116=4\cdot(q-1)$ отсюда $q=30$, т.е. после $l=124\cdot30=$
$=3720$ будет выполняться данное в задаче условие.

Ответ: $l=3720$.

C6

а) Моток веревки разрезали на 30 кусков с длиной от 120 см до 124 см, среди которых есть куски разных длин. Этот же кусок можно разрезать на 30 одинаковых кусков. Длина одного куска тогда будет равна среднему арифметическому длин кусков первоначального разреза, т.е. все l_2 (длины каждого куска начального разреза будут подгоняться на один «уровень». Иными словами, пусть:

$$\left.\begin{array}{l} n_{li} \text{ — число кусков с одинаковой длиной} \\ l_i \text{ — длина одного куска;} \\ i \text{ показывает, что } l \text{ не одинаково} \end{array}\right\} \text{первоначальный разрез}$$

тогда длина одного куска нового разреза, в котором все куски имеют одинаковую длину, равна

$$l = \frac{l_0 \cdot n_{l0} + l_1 \cdot n_{l1} + \ldots + l_k \cdot n_{lk}}{30}$$

Ответ: тот же моток веревки можно разрезать на 30 одинаковых кусков.

б) Для нахождения l необходимо отталкиваться от верхнего предела длины куска — 124 см. l должно быть таким, чтобы $l+1$ можно было выразить как $120 \cdot n + k$, где $n \in Z$, а $k \in [120;\ 124]$, а простое $l = 124 \cdot m$, где $m \in Z$

при $m=1$, $l=124$, $l+1=125$, тогда $k=5$
при $m=2$, $l=248$, $l+1=249$, тогда $k=9$
при $m=3$, $l=372$, $l+1=373$, тогда $k=13$

с увеличением m на 1 k увеличивается на 4.
$k_q = 5 + 4\cdot(q-1)$ $k_q \in [120;\ 124]$, тогда $k_q - 5$ должно быть кратно 4. 121 подходит.
$116 = 4\cdot(q-1)$ отсюда $q = 30$, т.е. после $l = 124 \cdot 30 = 3720$ будет выполняться данное в задаче условие.
Ответ: $l = 3720$.

Часть 3. Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

$\boxed{\text{C1}}$ а) Решите уравнение $6\sin^2 x + 7\cos x - 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};\ -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$;

б) $-\frac{10\pi}{3};\ -\frac{8\pi}{3}$.

C1 а) $6\sin^2 x + 7\cos x - 1 = 0$

$6(1-\cos^2 x) + 7\cos x - 1 = 0.$

$6 - 6\cos^2 x + 7\cos x - 1 = 0$

$-6\cos^2 x + 7\cos x + 5 = 0 \mid \cdot(-1)$

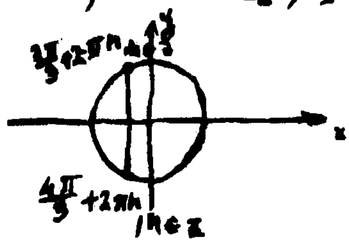
$6\cos^2 x - 7\cos x - 5 = 0$

$D = 49 + 20\cdot 6 = 169 = 13^2$

$\cos x = \frac{7+13}{12} = \frac{20}{12} > 1$, что невозможно, т.к. $\cos x \in [-1;1]$

$\cos x = \frac{7-13}{12} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n\in Z \\ x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z \end{array}\right.$



б) 1) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n\in Z$

$n=-1 \Rightarrow \frac{2\pi}{3}-\frac{6\pi}{3}=-\frac{4\pi}{3} \in \left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$

2) $n=-2 \Rightarrow \frac{2\pi}{3}-4\pi = \quad \frac{2\pi}{3}-\frac{12\pi}{3}=\boxed{-\frac{10\pi}{3}} \in \left[-\frac{7\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$

3) $\frac{4\pi}{3}+2\pi n, \; n\in Z$

$n=-1 \Rightarrow \frac{4\pi}{3}-2\pi = \frac{4\pi}{3}-\frac{6\pi}{3}=-\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \notin \left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$

4) $n=-2 \Rightarrow \frac{4\pi}{3}-4\pi = \frac{4\pi}{3}-\frac{12\pi}{3}=\boxed{-\frac{8\pi}{3}} \Rightarrow \in \left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n, \; n\in Z \\ x=\frac{4\pi}{3}+2\pi n, \; n\in Z \end{array}\right.$

$x=-\frac{10\pi}{3}$

$x=-\frac{8\pi}{3}$

C1

а) $6\sin^2 x + 7\cos x - 1 = 0$

$6(1-\cos^2 x) + 7\cos x - 1 = 0$

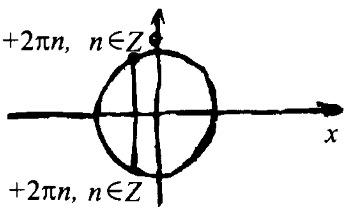
$6 - 6\cos^2 x + 7\cos x - 1 = 0$

$-6\cos^2 x + 7\cos x + 5 = 0 \mid \cdot -1$

$6\cos^2 x - 7\cos x - 5 = 0$

$D = 49 + 20\cdot 6 = 169 = 13^2$

$\cos x = \frac{7+13}{12} = \frac{20}{12} > 1$, что невозможно, т.к. $\cos x \in [-1; 1]$



$\cos x = \frac{7-13}{12} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \; n\in Z \\ x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, \; n\in Z \end{array}\right.$

б) 1) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \; n \in Z$

$n=-1 \Rightarrow \frac{2\pi}{3} - \frac{6\pi}{3} = -\frac{4\pi}{3} \notin \left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$

2) $n = -2 \Rightarrow \frac{2\pi}{3} - 4\pi = \frac{2\pi}{3} - \frac{12\pi}{3} = -\frac{10\pi}{3} \in \left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$

3) $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$

$n = -1 \Rightarrow \frac{4\pi}{3} - 2\pi = \frac{4\pi}{3} - \frac{6\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} \Rightarrow\notin \left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{7}\right]$

4) $n = -2 \Rightarrow \frac{4\pi}{3} - 4\pi = \frac{4\pi}{3} - \frac{12\pi}{3} = -\frac{8\pi}{3} \Rightarrow\in \left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{7}\right]$

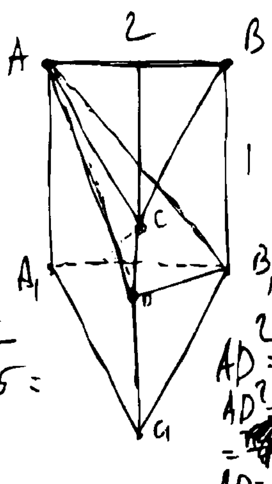
Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z \\ x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z \end{array}\right.$

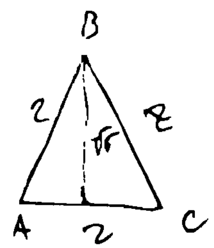
$x = -\frac{10\pi}{3}\ x = -\frac{8\pi}{3}$

C2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 2, боковые ребра равны 1, точка D — середина ребра CC_1. Найдите расстояние от вершины C до плоскости ADB_1.

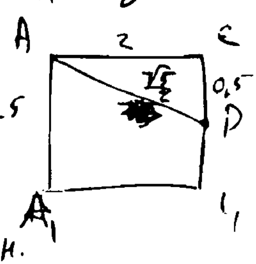
Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

C2 $AB = BC = AC = \ldots =$
$= A_1C_1 = 2.$
$AA_1 = \ldots = 1$
$CD = DC_1 = \frac{1}{2}$
$AD = \sqrt{4 + 0{,}25} = \sqrt{4{,}25} =$
$= \sqrt{4\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$





$AD^2 = 4 + 0{,}25$
$AD^2 = 4\frac{1}{4} =$
$=$
$AD = \frac{\sqrt{17}}{2}$ н.



$AB_1 = \sqrt{5}$.

$0{,}25 = \frac{5}{4} + x^2$?

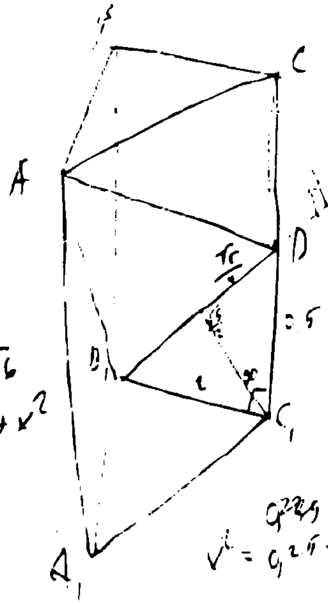
$x^2 = \frac{5}{16} - \frac{4}{16} = \frac{1}{16}$

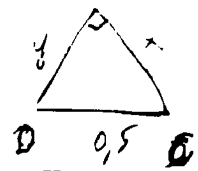
$0{,}25 = \frac{17}{4} + x^2$

Ответ: 1. $x^2 =$

$x = \frac{1}{4}$

Ответ: $\frac{1}{4}$.





CH = ?

Расстояние от C до плоскости AB_1D = расстоянию от C_1 до

$V^2 = 0{,}25 + 4$, $x^2 = 4\frac{1}{4} = \frac{17}{4}$ $x = \frac{\sqrt{17}}{2}$

C2 $AB = BC = AC = \ldots = A_1C_1 = 2$

$AA_1 = \ldots = 1$

$CD = DC_1 = \frac{1}{2}$

$AD = \sqrt{4 + 0{,}25} = \sqrt{4{,}25} = \sqrt{4\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$AD^2 = 4 + 0{,}25$

$AD^2 = 4\frac{1}{4}$

$AD = \frac{\sqrt{17}}{2}$

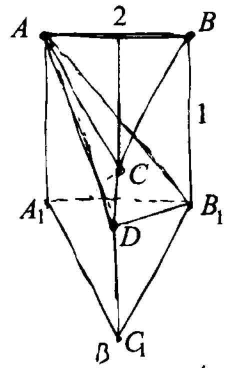
$AB_1 = \sqrt{5}$

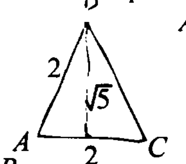
$x = \frac{1}{4}$

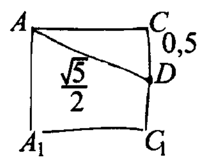
Расстояние от C до плоскости AB_1D = расстоянию от C_1 до

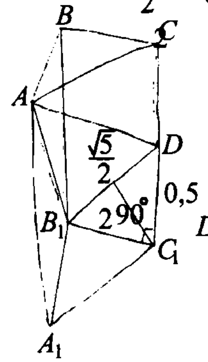
$V^2 = 0{,}25 + 4,\ x^2 = 4\frac{1}{4} = \frac{17}{4}\ \ x = \frac{\sqrt{17}}{2}$

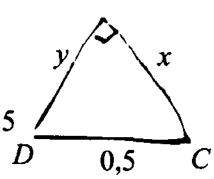
Ответ: $\frac{1}{4}$











$\boxed{\text{C3}}$ Решите систему неравенств $\begin{cases} 4^{x+1} + 3 \cdot 4^{2-x} \leqslant 52 \\ \log_{0,01}(10x)\log_{100x} 10 + \dfrac{1}{4} \leqslant 0 \end{cases}$

Ответ: $(0;\ 0{,}01) \cup [1;\ 1 + \log_4 3]$.

C3

$$\begin{cases} 4^{x+1} + 3\cdot 4^{2-x} \leq 52 & (1) \\ \log_{0,01}(10x)\cdot \log_{100x}(10) + \frac{1}{4} \leq 0 & (2) \end{cases}$$

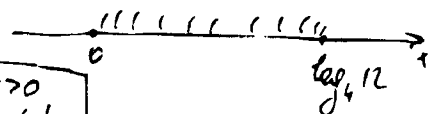
(1) $4^{x+1} + 3\cdot 4^{2-x} \leq 52$; $4\cdot 4^x + 3\cdot 4^{-x}\cdot 4^2 - 52 \leq 0$; $4^x = t$, тогда $4^{-x} = \frac{1}{t}$, $t > 0$

$4t + 48\cdot\frac{1}{t} - 52 \leq 0 \mid \cdot t$, т.к. $t > 0$

$4t^2 - 52t + 48 \leq 0$

$t^2 - 13t + 12 \leq 0$

$t_1 t_2 = 12$, $t_1 + t_2 = 13$ $\Rightarrow \begin{cases} t_1 \leq 12 \\ t_2 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 4^x \leq 12 \\ 4^x \geq 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 4^x \leq 4^{\log_4 12} \\ 4^x \geq 1 \end{cases}$ ~~x = log~~ $\begin{cases} x \leq \log_4 12 \\ x \geq 0 \end{cases}$



(2) $\log_{0,01}(10x)\cdot \log_{100x} 10 + \frac{1}{4} \leq 0$

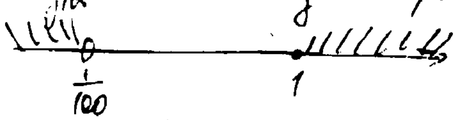
$\log_{10^{-2}}(10x)\cdot \log_{100x}(10) + \frac{1}{4} \leq 0$; ОДЗ: $\begin{cases} 10x > 0 \\ 100x > 0 \\ 100x \neq 1 \end{cases}$ $\boxed{\Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{100} \end{cases}}$

$-\frac{1}{2}(\log_{10} 10x)\cdot \frac{1}{\log_{10} 100x} + \frac{1}{4} \leq 0$;

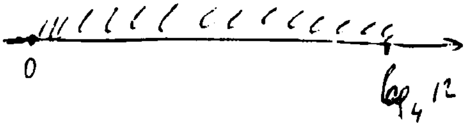
$-\frac{1}{2}(1 + \log_{10} x)\cdot \frac{1}{2 + \log_{10} x} + \frac{1}{4} \leq 0 \mid \cdot -4$

$\frac{2 + 2\log_{10} x}{2 + \log_{10} x} - 1 \geq 0$; $\frac{2 + 2\log_{10} x - 2 - \log_{10} x}{2 + \log_{10} x} \geq 0$; $\frac{\log_{10} x}{2 + \log_{10} x} \geq 0$

Далее метод интервалов: $\log_{10} x = 0$, если $x = 1$



(2) $2 + \log_{10} x = 0$, если $x = \frac{1}{100}$ (но ОДЗ $x \neq \frac{1}{100}$)



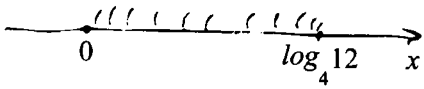
(1) $(\log_4 12 = \log_4 3 + 1)$

Ответ: $x \in [0; 0{,}01) \cup [1; \log_4 12]$

$x \in [0; 0{,}01) \cup [1; 1+\log_4 3]$

C3

$$\begin{cases} 4^{x+1} + 3 \cdot 4^{2-x} \leqslant 52 \ (1) \\ \log_{0,01}(10x) \cdot \log_{100x}(10) + \frac{1}{4} \leqslant 0 \ (2) \end{cases}$$



(1) $4^{x+1} + 3 \cdot 4^{2-x} \leqslant 52;$

$4 \cdot 4^x + 3 \cdot 4^{-x} \cdot 4^2 - 51 \leqslant 0;$

$4^x = t$, тогда $4^{-x} = \frac{1}{t}$ $t > 0$

$4t + 48 \cdot \frac{1}{t} - 52 \leqslant 0 \mid \cdot t$, т.к. $t > 0$

$4t^2 - 52t + 48 \leqslant 0$

$t^2 - 13t + 12 \leqslant 0$

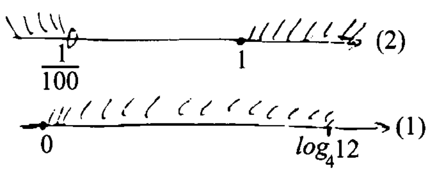
$$\begin{matrix} t_1 t_2 = 12 \\ t_1 + t_2 = 13 \end{matrix} \Rightarrow \left[\begin{matrix} t_1 \leqslant 12 \\ t_2 \geqslant 1 \end{matrix} \right. \Rightarrow \begin{matrix} 4^x \leqslant 12 \\ 4^x \geqslant 1 \end{matrix} \Rightarrow \left[\begin{matrix} 4^x \leqslant 4^{\log_4 12} \\ 4^x \geqslant 1 \end{matrix} \right. \quad \left[\begin{matrix} x \leqslant \log_4 12 \\ x \geqslant 0 \end{matrix} \right.$$

(2) $\log_{0,01}(10x) \cdot \log_{100x} 10 + \frac{1}{4} \leqslant 0$

$\log_{10^{-2}}(10x) \cdot \log_{100x}(10) + \frac{1}{4} \leqslant 0;$ ОДЗ: $\begin{cases} 10x > 0 \\ 100x > 0 \\ 100x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{100} \end{cases}$

$-\frac{1}{2}\left(\log_{10} 10x\right) \cdot \frac{1}{\log_{10} 100x} + \frac{1}{4} \leqslant 0;$

$-\frac{1}{2}(1 + \log_{10} x) \cdot \frac{1}{2 + \log_{10} x} + \frac{1}{4} \leqslant 0 \mid \cdot -4;$



$\frac{2 + 2\log_{10} x}{2 + \log_{10} x} - 1 \geqslant 0;$

$\frac{2 + 2 \cdot \log_{10} x - 2 - \log_{10} x}{2 + \log_{10} x} \geqslant 0$

$\frac{\log_{10} x}{2 + \log_{10} x} \geqslant 0;$

Далее метод интервалов: $\log_{10} x = 0$, если $x = 1$

$2 + \log_{10} x = 0$, если $x = \frac{1}{100}$ (по ОДЗ; $x \neq \frac{1}{100}$)

$(\log_4 12 = \log_4 3 + 1)$

Ответ: $x \in [0;\ 0{,}01) \cup [1;\ 1 + \log_4 3]$

$\boxed{\text{C4}}$ Косинус угла, противолежащего основанию равнобедренного треугольника, равен $\frac{7}{25}$, а боковая сторона равна 15. Внутри треугольника расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

Ответ: 3 или $\frac{45}{16}$.

C4 $\cos\alpha = \frac{7}{25}$

$BC = AB = 15$

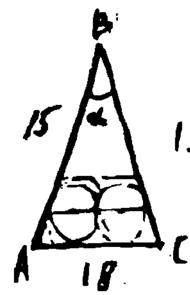
$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\alpha$

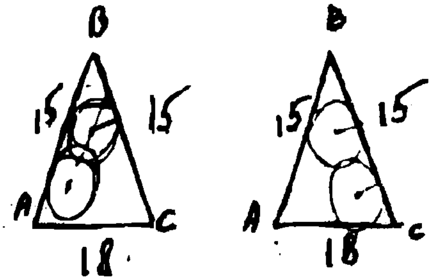
$AC^2 = 225 + 225 - 225 \cdot 2 \cdot \frac{7}{25}$

$AC^2 = 450 - 450 \cdot \frac{7}{25} = 450\left(1 - \frac{7}{25}\right) =$

$450\left(\frac{18}{25}\right) = 18^2$

$C = 18$





C4

$\cos\alpha = \frac{7}{25}$

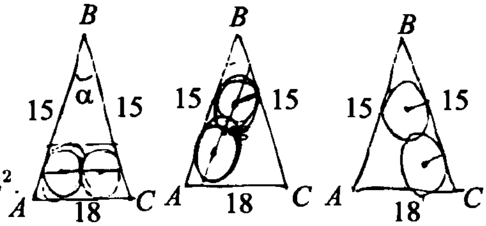
$BC = AB = 15$

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\alpha$

$AC^2 = 225 + 225 - 225 \cdot 2 \cdot \frac{7}{25}$

$AC^2 = 450 - 450 \cdot \frac{7}{25} = 450 \cdot \left(1 - \frac{7}{25}\right) = 450\left(\frac{18}{25}\right) = 18^2.$

$AC = 18$



$\boxed{\text{C5}}$ Найдите все значения a, при которых уравнение $\frac{2}{x+1} = a|x-5|$ на промежутке $[0;\ +\infty)$ имеет более двух корней.

Ответ: $\frac{2}{9} < a \leqslant \frac{2}{5}$.

С5 $\frac{2}{x+1}=a|x-5|$;

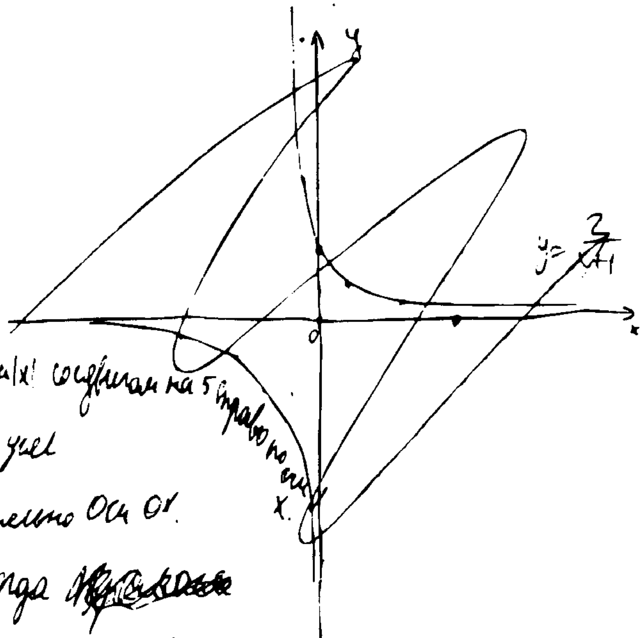
рассмотрим функцию:

$y=\frac{2}{x+1}$, $x\neq-1$

график функции

$y=a|x-5|$ и ~~[illegible]~~ $=y=a|x|$ сдвинутая на 5 вправо по оси x.

параметр a влияет на угол наклона ~~прямой~~ прямых относительно оси Ox.



Найдём все случаи, когда ~~[illegible]~~

$y=a|x-5|$ будет пересекать график $y=\frac{2}{x+1}$ таким образом,

чтобы ~~точка~~ абсцисса этих точек пересечения была общей?

1) $a=0$. Тогда ~~[illegible]~~ график будет иметь вид $y=0$. В этом случае не будет точек пересечения $\Rightarrow a\neq0$.

2) из рисунка видно, что

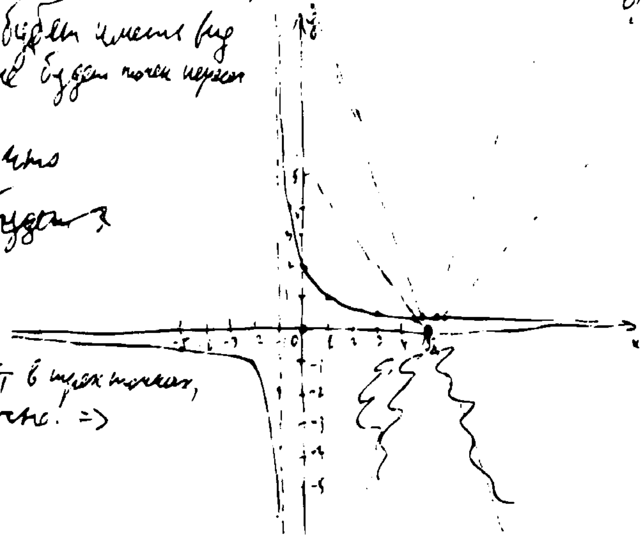
$a|x-5|>2$, ~~иначе будет~~

если $a|x-5|=2$, то

$5a=2$ [illegible]

прямая пересечет $\frac{2}{x+1}$ в трех точках, чего быть не должно! $\Rightarrow$

$a\in\left(\frac{2}{5};+\infty\right)$.



C5

$\dfrac{2}{x+1} = a|x-5|$;

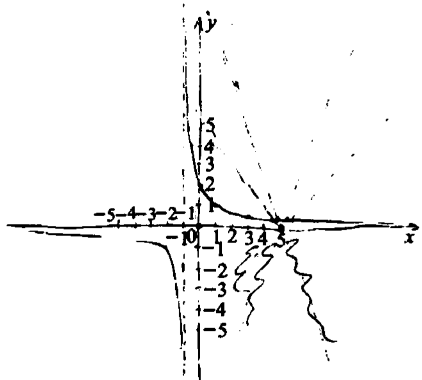
построим функцию:

$y = \dfrac{2}{x+1}$, $x \neq -1$

график функции $y = a|x-5|$ и $y = a|x|$ со сдвигом на 5 вправо по оси x.

параметр a влияет на угол наклона прямых относительно оси OX.

Найдем все случаи, когда $y = a|x-5|$ будет пересекать график $y = \dfrac{2}{x+1}$ таким образом, чтобы абсцисса этих точек пересечения была общая



1) $a = 0$. Тогда график будет иметь вид $y = 0$. В этом случае не будет точек пересечения $\Rightarrow a \neq 0$.

2) Из рисунка видно, что если $a|x-5| = 2$, то прямая пересечет $y = \dfrac{2}{x+1}$ в трех точках, чего быть не должно! $\Rightarrow a \in \left(\dfrac{2}{5};\ +\infty\right)$.

Вариант 2

$\boxed{\text{C1}}$ а) Решите уравнение $6\sin^2 x + 7\cos x - 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2};\ -\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$;

б) $-\dfrac{10\pi}{3};\ -\dfrac{8\pi}{3}$.

(C1) $6\sin^2 x + 7\cos x - 1 = 0$

$6(1 - \cos^2 x) + 7\cos x - 1 = 0$

$6\cos^2 x - 7\cos x - 5 = 0$

$\cos x = t$

$6t^2 - 7t - 5 = 0$

$D = 49 + 120 = 13^2$

$t_1 = \frac{20}{12}$ ∅

$t_2 = -\frac{1}{2}$

б) $\left[-\frac{7\pi}{2};\ -\frac{5\pi}{2}\right]$

1) $-\frac{7\pi}{2} \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \le -\frac{5\pi}{2}$

$-\frac{7}{2} \le \frac{2}{3} + 2n \le -\frac{5}{2}$

$-\frac{25}{12} \le n \le -\frac{19}{12}$

$n = -2 \quad x = -\frac{10\pi}{3}$

2) $-\frac{7\pi}{2} \le -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \le$

$-\frac{17}{6} \le 2k \le -\frac{11}{6}$

$-\frac{17}{12} \le k \le -\frac{11}{12}$

$k = -1 \quad x = -\frac{8\pi}{3}$

$\cos x = -\frac{1}{2}$

$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

$\boxed{\text{Ответ}}$ $n = -1$ $x = -\frac{4\pi}{3}$

а) $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

$x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, n \in Z$.

б) $-\frac{10\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{8\pi}{3}$.

C1

$6\sin^2 x + 7\cos x - 1 = 0$

$6(1 - \cos^2 x) + 7\cos x - 1 = 0$

$6\cos^2 - 7\cos x - 5 = 0$

$\cos x = t$

$6t^2 - 7t - 5 = 0$

$D = 48 + 120 = 13^2$

$t_1 = \frac{10}{12}$

$t_2 = -\frac{1}{2} \cos x = -\frac{1}{2}$

$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \ n \in Z$

б) $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$

1) $-\frac{7\pi}{2} \leqslant \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leqslant -\frac{5\pi}{2}$

$-\frac{7}{2} \leqslant \frac{2}{3} + 2n \leqslant -\frac{5}{2}$

$-\frac{25}{12} \leqslant n \leqslant -\frac{19}{12}$

$n = -2 \ x = -\frac{10\pi}{3}$

$n = -1 \ x = -\frac{4\pi}{3}$

2) $-\frac{7\pi}{2} \leqslant -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$

$-\frac{17}{8} \leqslant 2k \leqslant -\frac{11}{6}$

$-\frac{17}{12} \leqslant k \leqslant -\frac{11}{12}$

$k = -1 \ x = -\frac{8\pi}{3}$

Ответ:

а) $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in Z$

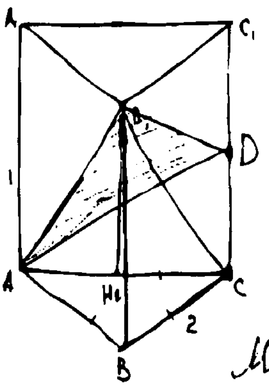
$x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \ n \in Z$

б) $-\frac{10\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{8\pi}{3}$

$\boxed{\text{C2}}$ В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 2, боковые ребра равны 1, точка D — середина ребра CC_1. Найдите расстояние от вершины C до плоскости ADB_1.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

C2



Найди расстояние от т. D до плоск. AB_1D.

$C_1C = 1$

$BC = 2$

соединив точки плоскости с т. C получаем пирамиду AB_1DC, в которой высота и будет искомым расстоянием.

Метод объемов:

$V_{AB_1CD} = S_{AB_1C} \cdot H$.

$V_{AB_1DC} = S_{AB_1D} \cdot H$

Решение:

$H = \sqrt{3}$ (AB_1C) из $\triangle ABC$ - высота.

$S_{AB_1C} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$.

$B_1C = \sqrt{B_1B^2 + BC^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$B_1H_2 = \sqrt{B_1C^2 - (\frac{1}{2}CA)^2} = \sqrt{5-1} = 2$.

1) $V_{AB_1CD} = 2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

2) $V_{AB_1DC} = S_{AB_1D} \cdot H$.

$S_{AB_1D} = S_{AB_1D} \cdot H =$

$S_{AB_1D} = \frac{\sqrt{17}}{2 \cdot 2}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{51}}{4}$

$AD = \sqrt{AC^2 + (\frac{1}{2}C_1C)^2} = \sqrt{4 + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$.

$V_{AB_1DC} = \frac{\sqrt{51}}{4} \cdot H$

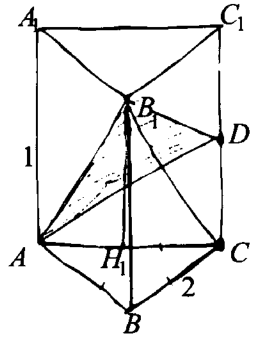
$2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{51}}{4} H$

$H = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{51}} = \frac{8}{\sqrt{17}} = \frac{8\sqrt{17}}{17}$

Ответ: $\frac{8\sqrt{17}}{17}$

C2

Найди расстояние от т. D до плоск. AB_1D.
$C_1C = 1$
$BC = 2$
соединив тоски плоскости с т. C получаем пирамиду AB_1DC_1, в которой высота и будет искомым расстоянием.



Метод объемов:
$V_{AB_1CD} = S_{AB_1C} \cdot H$
$V_{AB_1DC} = S_{AB_1D} \cdot H$

Решение:
$H = \sqrt{3}(AB_1C)$ из $\triangle ABC$ —высота.

$$S_{AB_1C} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$$

$$B_1C = \sqrt{B_1B^2 + BC^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$B_1H_1 = \sqrt{(B_1C)^2 - \left(\frac{1}{2}CA\right)^2} = \sqrt{5-1} = 2$$

1) $V_{AB_1CD} = 2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$
2) $V_{AB_1DC} = S_{AB_1D} \cdot H.$
$S_{AB_1D} = S_{AB_1D} \cdot H =$

$$S_{AB_1D} = \frac{\sqrt{17}}{2 \cdot 2}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{51}}{4}$$

$$AD = \sqrt{AC^2 + (\tfrac{1}{2}C_1C)^2} = \sqrt{4 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$V_{AB_1DC} = \frac{\sqrt{51}}{4} \cdot H$$

$$2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{51}H}{4}$$

$$H = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{51}} = \frac{8\sqrt{17}}{17}$$

Ответ: $\frac{8\sqrt{17}}{17}$

$\boxed{C3}$

Решите систему неравенств $\begin{cases} 4^{x+1} + 3 \cdot 4^{2-x} \leqslant 52 \\ \log_{0{,}01}(10x)\log_{100x}10 + \frac{1}{4} \leqslant 0 \end{cases}$

Ответ: $(0;\ 0{,}01) \cup [1;\ 1 + \log_4 3]$.

C3 $\begin{cases} 1)\ 4^{x+1} + 3 \cdot 4^{2-x} \leq 52 \\ 2)\ \log_{0,01} 10x \cdot \log_{100x} 10 + \frac{1}{4} \leq 0 \end{cases}$ $x>0$

а) $4^{x+1}+3\cdot 4^{2-x}\leq 52$

$4^x\cdot 4+3\cdot\frac{4^2}{4^x}\leq 52$

$4^x=t$

$t^2-13t+12\leq 0$

$t\in[1;12]$

$1\leq 4^x\leq 12$

$0\leq x\leq \log_4 12$

$x\in[0;\log_4 12]$

б) $\log_{\frac{1}{100}}10x\cdot\log_{100x}10+\frac{1}{4}\leq 0$

$-\log_{100}10x\cdot\log_{100x}10+\frac{1}{4}\leq 0$

$-\frac{\log_{100}10x}{\log_{10}100x}\geq\frac{1}{4}$

$\log_4 12\vee 1$

$\log_4 12>\log_4 4$

$\frac{\log_{10^2}10x}{\log_{10}100x}\geq\frac{1}{4}$

$\frac{\log_{10}10x}{2\log_{10}100x}\geq\frac{1}{4}$

$\log_{100x}10x\geq\frac{1}{2}$

$\log_{100x}10x\geq\log_{100x}\sqrt{100x}$ рационализация

$\begin{cases}(100x-1)(10x-\sqrt{100x})\geq 0\\ x\neq 0{,}01\end{cases}$

$100x-1=0$

$x=0{,}01$

$x=0;\ x=1$

$-\quad +\quad -\quad +$

$0\quad 0{,}01\quad 1$

$x\in(0;0{,}01)\cup[1;+\infty)$

$0\quad 0{,}01\quad 1\quad \log_4 12$

Ответ: $(0;0{,}01)\cup[1;\log_4 12]$

C3

$$\begin{cases}4^{x+1}+3\cdot 4^{2-x}\leqslant 52\\ \log_{0{,}01}10x\cdot\log_{100x}10+\dfrac{1}{4}\leqslant 0\end{cases}$$

$x>0$

а) $4^{x+1}+3\cdot 4^{2-x}\leqslant 52$

$4^x\cdot 4+3\cdot\dfrac{4^2}{4^x}\leqslant 52$

$4^x=t$

$t^2-13t+12\leqslant 0$

$t\in[1;\ 12]$

$1\leqslant 4^x\leqslant 12$

$0\leqslant x\leqslant\log_4 12$

$x\in[0;\ \log_4 12]$

б) $\log_{\frac{1}{100}}10x\cdot\log_{100x}10+\dfrac{1}{4}\leqslant 0$

$-\log_{100}10x\cdot\log_{100x}10+\dfrac{1}{4}\leqslant 0$

$-\dfrac{\log_{100}10x}{\log_{10}100x}\geqslant\dfrac{1}{4}$

$\log_4 12\bigvee 1$

$\log_4 12\bigvee\log_4 4$

$\dfrac{\log_{10^2}10x}{\log_{10}100x}\geqslant\dfrac{1}{4}$

;

$\dfrac{\log_{10}10x}{2\log_{10}100x}\geqslant\dfrac{1}{4}$

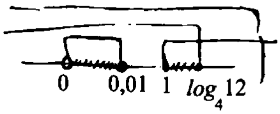
$\log_{100x}10x\geqslant\dfrac{1}{2}$

$\log_{100x}10x\geqslant\log_{100x}\sqrt{100x}$

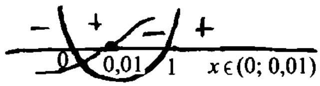
$\begin{cases}(100x-1)(10x-\sqrt{100x})\geqslant 0\\ x\neq 0{,}01\end{cases}$

$100x-1=0$

$x=0{,}01$



$x = 0;\ x = 1$



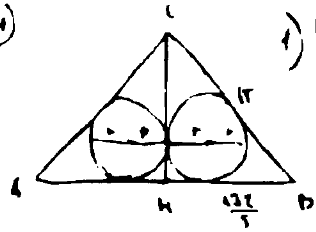
$x \in (0;\ 0{,}01) \cup [1;\ +\infty]$

Ответ: $(0;\ 0{,}01) \cup [1;\ \log_4 12]$

$\boxed{C4}$ Косинус угла, противолежащего основанию равнобедренного треугольника, равен $\frac{7}{25}$, а боковая сторона равна 15. Внутри треугольника расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

Ответ: 3 или $\frac{45}{16}$.

(C4)



1) $\cos\angle BCH = \frac{7}{25}$

$CB = 15$.

Из $\triangle BCH$ найдем CH.

$\frac{7}{25} = \frac{CH}{15}$; $CH = \frac{7\cdot 15}{25} = \frac{21}{5}$

$HB = \sqrt{CB^2 - CH^2} = \frac{72}{5}$

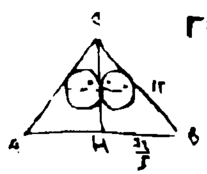
$S = pr$ $\quad S = \dfrac{\frac{21}{5}\cdot\frac{72}{5}}{2} = \frac{1512}{50}$

$r = \frac{S}{p}$

$p = 15 + \frac{72}{5} + \frac{21}{5} = \frac{168}{5} : \frac{1}{2} = \frac{168}{10}$

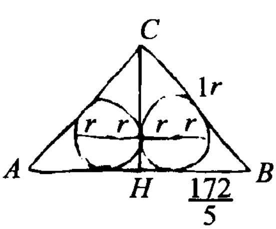
$r = \frac{1512\cdot 10}{50\cdot 168} = 9$ Ответ: 9

2)



$r = ?$

C4

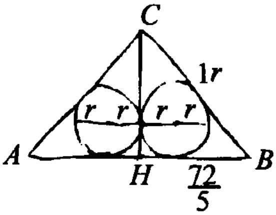


1) $\cos\angle BCH = \frac{7}{25}$

$CB = 15$.

Из $\triangle BCH$ найдем CH.

$\frac{7}{25} = \frac{CH}{15}$; $CH = \frac{7\cdot 15}{25} = \frac{21}{5}$.



$$HB = \sqrt{CB^2 - CH^2} = \frac{72}{5}.$$

$$S = pr \quad S = \frac{\frac{21}{15} \cdot \frac{72}{5}}{2} = \frac{1512}{50}$$

$$r = \frac{S}{p} \quad p = 15 + \frac{72}{5} + \frac{21}{5} = \frac{168}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{168}{10}$$

$$2)\ r = \frac{1512 \cdot 10}{50 \cdot 168} = 9$$

Ответ: 9.

$\boxed{C5}$ Найдите все значения a, при которых уравнение $\frac{2}{x+1} = a|x-5|$ на промежутке $[0;\ +\infty)$ имеет более двух корней.

Ответ: $\frac{2}{9} < a \leqslant \frac{2}{5}$.

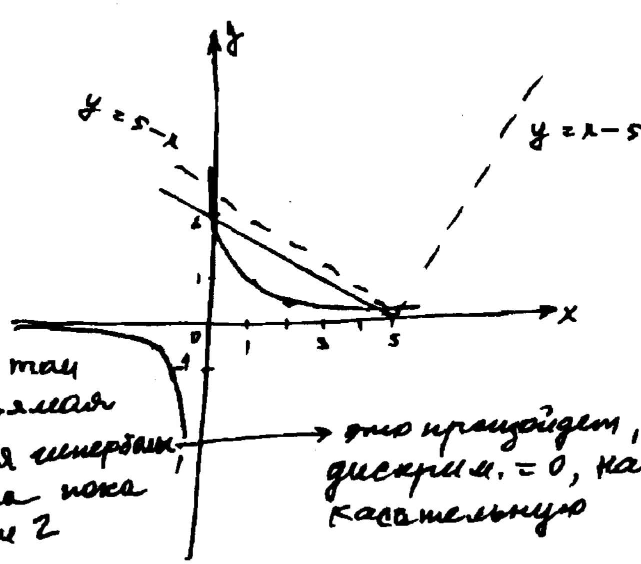
C_5 $\quad \frac{2}{x+1} = a|x-5| \quad [0;\ +\infty) \quad \exists > 2x$

$\begin{cases} y = \frac{2}{x+1} \\ y = a|x-5| \end{cases}$ (стан. график гипербола в точках

x	0	1	2	3	4	5
y	2	1	2/3	1/2	2/5	1/3

{ „галочка" с точкой $(0;5)$.

из-за коэфицента $a|x-5|$ - будет происходить сжатие по оси Oy



более 2^x будет в том случае, когда прямая $y = a(5-x)$ коснется гиперболы, и до того момента пока она станет выше 2

это произойдет, когда дискрим. $= 0$, найдем касательную

$\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$ $y=a(5-x)$
$5a-ax=y$
$5a=2$
$a=\frac{2}{5}$

$a(5-x)=\frac{2}{x+1}$
$a(5-x)(x+1)=2$
$-ax^2+4ax+5a-2=0$
$ax^2-4ax-5a+2=0$
$D=16a^2-4a(2-5a)=16a^2-8a+20a^2$
$36a^2-8a=0$
$36a=8$
$a=\frac{2}{9}$

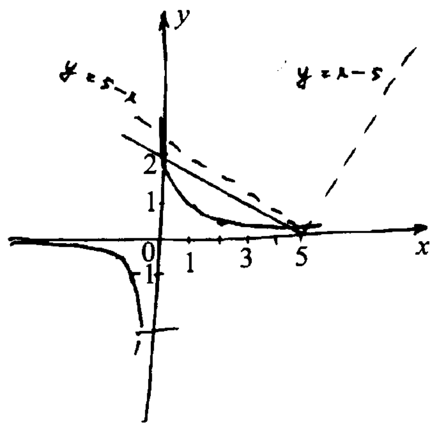
Ответ: $a \in \left(\frac{2}{9}; \frac{2}{5}\right)$

C5

$\frac{2}{x+1}=a|x-5|$ $[0;\ +\infty)$ $\exists > 2x$

$\begin{cases} y=\frac{2}{x+1} \text{ (стац. график гипербола в точках)} \\ y=a|x-5| \text{ («галочка» с точкой) } (0;\ 5) \end{cases}$

x	0	1	2	3	4	5
y	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$



из за коэфициента $a|x-5|$ — будет происходить сжатие по оси Oy

более 2^{X} будет в том случае, когда прямая $y=a(5-x)$ коснется гиперболы, и до того момента пока она станет выше 2

это произойдет, когда дискрим. $=0$, Найдем касательную

$a(5-x)=\frac{2}{x+1}$
$a(5-x)(x+1)=2$
$-ax^2+4ax+5a-2=0$
$ax^2-4ax-5a+2=0$
$D=16a^2-4a(2-5a)=16a^2-8a+20a^2$
$36a^2-8a=0$
$36a=8$
$a=\frac{2}{9}$

$\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$

$y=a(5-x)$
$5a-ax=y$
$5a=2$
$a=\frac{2}{5}$

Ответ: $a \in \left(\frac{2}{9};\ \frac{2}{5}\right)$

Вариант 3

$\boxed{\text{C1}}$ а) Решите уравнение $6\sin^2 x + 7\cos x - 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$;

б) $-\frac{10\pi}{3}; -\frac{8\pi}{3}$.

C1.

а) $6\sin^2 x + 7\cos x - 1 = 0$

$6 - 6\cos^2 x + 7\cos x - 1 = 0$

$5 - 6\cos^2 x + 7\cos x = 0$

$6\cos^2 x - 7\cos x - 5 = 0$ $\cos x = t$ $|t| \leq 1$

$6t^2 - 7t - 5 = 0$

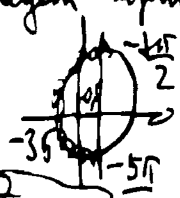
$t_1 = \frac{20}{12}$ − не удовл $|t| \leq 1$

$t_2 = -\frac{1}{2}$.

$\cos x = -\frac{1}{2}$

$x = \pm(\pi - \frac{\pi}{3}) + 2\pi n$ $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ Ответ: а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$

б) Найдем корни при помощи круга.



$-3\pi - \frac{\pi}{3} = -\frac{10\pi}{3}$

$-3\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{8\pi}{3}$

Ответ: б) $-\frac{10\pi}{3}; -\frac{8\pi}{3}$

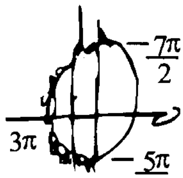
а) $6\sin^2 x + 7\cos x - 1 = 0$
$6 - 6\cos^2 x + 7\cos x - 1 = 0$
$5 - 6\cos^2 x + 7\cos x = 0$
$6\cos^2 x - 7\cos x - 5 = 0$ $\cos x = t$ $|t| \leqslant 1$
$6t^2 - 7t - 5 = 0$

$t_1 = \frac{20}{12}$ — не удовл $|t| \leqslant 1$

$t_2 = -\frac{1}{2}$.

$\cos x = -\frac{1}{2}$

$x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n$ $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ Ответ: а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$



б) Найдем корни при помощи круга.

$-3\pi - \frac{\pi}{8} = -\frac{10\pi}{3}$

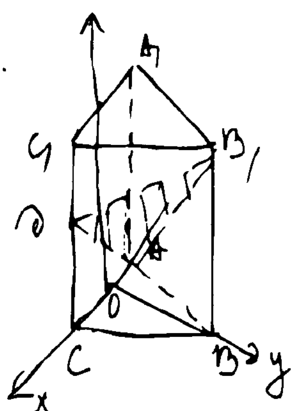
$-3\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{8\pi}{3}$

Ответ: б) $-\frac{10\pi}{3}$; $-\frac{8\pi}{3}$

$\boxed{\text{C2}}$ В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 3, боковые ребра равны 1, точка D — середина ребра CC_1. Найдите расстояние от вершины C до плоскости ADB_1.

Ответ: $\frac{3\sqrt{10}}{20}$.

C2.



$C\left(\frac{3}{2}; 0; 0\right)$

$B_1\left(0; \frac{3\sqrt{3}}{2}; 1\right)$

$D\left(\frac{3}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$

$A\left(-\frac{3}{2}; 0; 0\right)$

$$\begin{cases} \frac{3\sqrt{3}}{2}B + C + D = 0 \\ \frac{3}{2}A + \frac{1}{2}C + D = 0 \\ -\frac{3}{2}A + D = 0 \end{cases}$$

$D = \frac{3}{2}$

$A = 1$

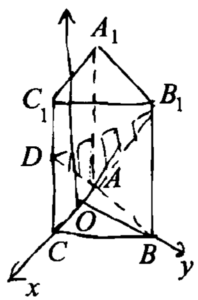
$C = -6$

$B = \sqrt{3}$

$$h = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}}{\sqrt{1 + 3 + 36}} = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{40}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{40}} = \frac{3\sqrt{40}}{40} = \frac{6\sqrt{10}}{40} = \frac{3\sqrt{10}}{20}$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{10}}{20}$.



$C\left(\frac{3}{2};\ 0;\ 0\right)$

$B_1\left(0;\ \frac{3\sqrt{3}}{2};\ 1\right)$

$D\left(\frac{3}{2};\ 0;\ \frac{1}{2}\right)$

$A\left(-\frac{3}{2};\ 0;\ 0\right)$

$$\begin{cases} \frac{3\sqrt{3}}{2}B + C + D = 0 \\ \frac{5}{2}A + \frac{1}{2}C + D = 0 \\ -\frac{3}{2}A + D = 0 \end{cases}$$

$D = \frac{3}{2}$
$A = 1$
$C = -6$

$$h = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}}{\sqrt{1 + 3 + 36}} = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{40}} = \frac{3}{\sqrt{40}} = \frac{3\sqrt{40}}{40} = \frac{6\sqrt{10}}{40} = \frac{3\sqrt{10}}{20}$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{10}}{20}$

$\boxed{\text{C3}}$ Решите систему неравенств $\begin{cases} 4^{x+1} + 3 \cdot 4^{2-x} \leqslant 52, \\ \log_{0,01}(10x)\log_{100x} 10 + \frac{1}{4} \leqslant 0. \end{cases}$

Ответ: $(0;\ 0{,}01) \cup [1;\ 1 + \log_4 3]$.

C3. $\begin{cases} 4^{x+1} + 3 \cdot 4^{2-x} \le 52 & (1) \\ \log_{0,01} 10x \cdot \log_{100x} 10 + \frac{1}{4} \le 0 & (2) \end{cases}$

1) $4^{x+1} + 3 \cdot 4^{2-x} \le 52$

$4 \cdot 4^x + 3 \cdot \frac{16}{4^x} \le 52 \;/:4 \qquad 4^x = t \quad t > 0$

$t + \frac{12}{t} \le 13$

$\frac{t^2 - 13t + 12}{t} \le 0 \qquad \frac{(t-1)(t-12)}{t} \le 0$

$-\ \ +\ \ -\ \ +$

$0 \quad 1 \quad 12 \quad t$

$1 \le t \le 12$

$1 \le 4^x \le 12$

$0 \le x \le \log_4 12$

$x \in [0;\ \log_4 12]$

2). $\log_{0,01} 10x \cdot \log_{100x} 10 + \frac{1}{4} \le 0$ ОДЗ $x > 0$, $x \ne 0{,}01$

$\log_{10^{-2}} 10x \cdot \log_{10^2} x + \frac{1}{4} \le 0$

$$-\frac{1}{2}\log_{10} 10x \cdot \frac{1}{\log_{10} 10^2 x} + \frac{1}{4} \leqslant 0$$

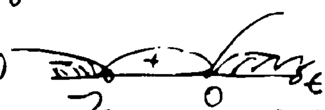
$$-\frac{1}{2}(\log_{10} 10 + \log_{10} x) \cdot \frac{1}{\log_{10} 10^2 + \log_{10} x} + \frac{1}{4} \leqslant 0$$

$$-\frac{1}{2}(1 + \log 10x) \cdot \frac{1}{2 + \log 10x} + \frac{1}{4} \leqslant 0$$

$$\frac{1+\log 10x}{-4-2\log 10x} + \frac{1}{4} \leqslant 0$$

$$\frac{4+4\log 10x - 4 - 2\log 10X}{-16-8\log 10X} \leqslant 0 \quad \log 10x = t$$

$$\frac{2t}{-2(8+4t)} \leqslant 0 \quad \frac{t}{-8-4t} \leqslant 0$$

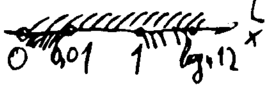


$\log_4 12 \vee 1$

$\log_4 12 \vee \log_4 4$

$\log_4 12 > 1$

$$\left[\begin{array}{l} t < -2 \\ t \geqslant 0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \log_{10} x < -2 \\ \log_{10} x \geqslant 0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x < 0{,}01 \\ x \geqslant 1 \end{array}\right.$$



Ответ: $x \in (0; 0{,}01) \cup [1; \log_4 12]$

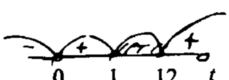
C3 $\begin{cases} 4^{x+1} + 3 \cdot 4^{2-x} \leqslant 52 \ (1) \\ \log_{0,01} 10x \cdot \log_{100x} 10 + \frac{1}{4} \leqslant 0 \ (2) \end{cases}$

1) $4^{x+1} + 3 \cdot 4^{2-x} \leqslant 52$

$4 \cdot 4^x + 3 \cdot \frac{16}{4^x} \leqslant 52| : 4 \quad 4^x = t \quad t > 0$

$t + \frac{12}{t} \leqslant 13$

$\frac{t^2 - 13t + 12}{t} \leqslant 0 \quad \frac{(t-1)(t-12)}{t} \leqslant 0 \quad 1 \leqslant t \leqslant 12 \quad 1 \leqslant 4^x \leqslant 12$



$0 \leqslant x \leqslant \log_4 12 \quad x \in [0; \log_4 12]$

2) $\log_{0,01} 10x \cdot \log_{100x} 10 + \frac{1}{4} \leqslant 0$ ОДЗ $x > 0 \quad x \neq 0{,}01$

$\log 10^{-2} \cdot 10x \cdot \log_{10^2} x + \frac{1}{4} \leqslant 0$

$-\frac{1}{2}\log_{10} 10x \cdot \frac{1}{\log_{10} 10^2 x} + \frac{1}{4} \leqslant 0$

$-\frac{1}{2}\Big(\log_{10} 10 + \log_{10} x\Big) \cdot \frac{1}{\log_{10} 10^2 + \log_{10} x} + \frac{1}{4} \leqslant 0$

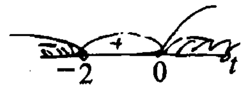
$-\frac{1}{2}(1 + \log 10x) \cdot \frac{1}{2 + \log 10x} + \frac{1}{4} \leqslant 0$

$\frac{1 + \log 10x}{-4 - 2\log 10x} + \frac{1}{4} \leqslant 0$

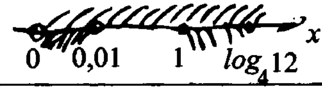
$\frac{4 + 4\log_{10} x - 4 - 2\log 10x}{-16 - 8\log 10x} \leqslant 0 \quad \log 10x = t$

$\frac{2t}{-2(8+4t)} \leqslant 0 \quad \frac{t}{-8-4t} \leqslant 0$

$\log_4 12 \vee 1$
$\log_4 12 \vee \log_4 4$
$\log_4 12 > 1$



$\left[\begin{array}{l} t < 2 \\ t \geqslant 0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \log 10x < -2 \\ \lg 10x \geqslant 0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x < 0{,}01 \\ x \geqslant 1 \end{array}\right.$

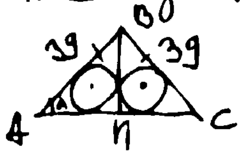


Ответ: $x \in (0;\ 0{,}01) \cup [1;\ \lg_4 12]$

$\boxed{C4}$ Косинус угла, прилежащего к основанию равнобедренного треугольника, равен $\frac{5}{13}$, а боковая сторона равна 39. Внутри треугольника расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

Ответ: 6 или $\frac{390}{59}$.

С4. I случай



$\cos\alpha = \frac{AH}{AB}$ $\frac{AH}{39} = \frac{5}{13}$ $AH = \frac{39 \cdot 5}{13} = 15.$

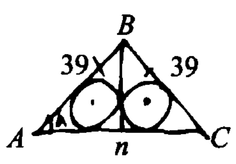
по Т пифагора $BH = 36$

$S = p \cdot r$ $S_{\triangle BAH} = \frac{36 \cdot 15}{2} = 18 \cdot 15.$

$p = \frac{P}{2} = \frac{39 + 36 + 15}{2} = 45.$

$r = \frac{S}{p} = \frac{18 \cdot 15}{45} = 6.$ Ответ 6.

I случай



$\cos\alpha = \frac{AH}{AB}$ $\frac{AH}{39} = \frac{5}{13}$ $AH = \frac{39 \cdot 5}{13} = 15$

по Т пифагора $BH = 36$

$S = p \cdot r$ $S_{\triangle BAH} = \frac{36 \cdot 15}{2} = 18 \cdot 15$

$p = \frac{P}{2} = \frac{39 + 36 + 15}{2} = 45$

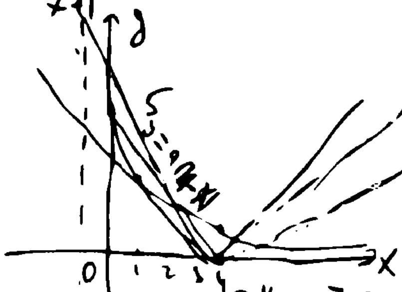
$r = \frac{S}{p} = \frac{18 \cdot 15}{45} = 6.$

Ответ: 6.

$\boxed{C5}$ Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\frac{5}{x+1} = a|x - 4|$ на промежутке $[0;\ +\infty)$ имеет более двух корней.

Ответ: $\frac{4}{5} < a \leqslant \frac{5}{4}$.

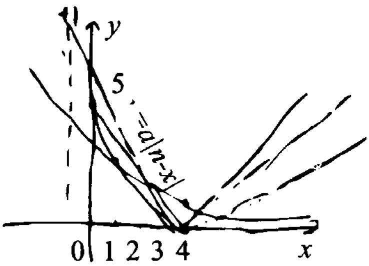
C5. $\frac{5}{x+1}=a|x+4|$



1) $y=a(-x+4)$
$5=a(-x+4)$
$5=4a \quad a=\frac{5}{4}$

2) $\frac{5}{x+1}=a(4-x)$
$(x+1)(4a-ax)=5$
$4ax-ax^2+4a-ax=5$
$3ax-ax^2-4a-5=0$
$ax^2-3ax-4a+5=0$
$D=0 \quad 9a^2+16a-20a=0$
$9a^2-4a=0$
$a(9a-4)=0$
$a=\frac{4}{9} \Rightarrow$
$a\in\left[\frac{4}{9};\frac{5}{4}\right]$

Ответ: при $a\in\left[\frac{4}{9};\frac{5}{4}\right]$



1) $y=a(-x+4)$
$5=a(-x+4)$
$5=4a \quad a=\frac{5}{4}$

2) $\frac{5}{x+1}=a(4-x)$
$(x+1)(4a-ax)=5$
$4ax-ax^2+4a-ax=5$
$3ax-ax^2-4a-5=0$
$ax^2-3ax-4a+5=0$

$9a^2+16a-20a=0$
$9a^2-4a=0$
$a(9a-4)=0$

$a=\frac{4}{9}\Rightarrow$

$a\in\left[\frac{4}{9};\ \frac{5}{4}\right]$

Ответ: при $a\in\left[\frac{4}{9};\ \frac{5}{4}\right]$

Материалы для тренинга по оцениванию заданий ЕГЭ с развернутым ответом.

Задание С1

Номер примера	Краткий комментарий	Оценка эксперта
1.	а) Отсутствие аргумента в записи $\cos^2 x$, и наличие в знаменателе двойки вместо восьмерки при верном выполнении последующих действий, посчитаем опиской б) Ничего не сказано о значениях n, отличных от -1 и 1, однако можно считать, что это выполнено либо на черновике, либо устно.	2 балла
2.	Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б).	2 балла
3.	Не указано $n \in Z$, рассмотрены только 2 значения n. Получен верный ответ.	2 балла
4.	Автор в пункте а) перепутал $D(f)$ с $E(f)$. Выполнил неверно отбор корней.	0 баллов

Задание С2

Номер примера	Краткий комментарий	Оценка эксперта
1.	Автор выполнил ряд дополнительных построений и верно нашел искомое расстояние. Есть описка (надо $CH \perp AB_1D$), непонятно зачем записана формула Герона. Решение не рациональное, но верное.	2 балла
2.	Верно рассмотрен нестандартный прием решения.	2 балла
3.	Автор, записав общий вид уравнения плоскости, сразу привел уравнение плоскости. Будем надеяться, что подстановку координат точек и нахождение определителя автор выполнил на черновике.	2 балла

Задание С3

Номер примера	Краткий комментарий	Оценка эксперта
1.	Верно только показательное неравенство системы.	1 балл
2.	Верно решено только показательное неравенство системы.	1 балл
3.	При решении логарифмического неравенства в первой строке допущена ошибка (вместо $\frac{1}{3}$ стоит 3).	1 балл
4.	Верно решено только показательное неравенство системы.	1 балл
5.	Решение не соответствует ни одному из критериев.	0 баллов

Задание С4

Номер примера	Краткий комментарий	Оценка эксперта
1.	Рассмотрены оба случая. Получен верный ответ.	4 балла
2.	Рассмотрен только один случай.	2 балла
3.	Рассмотрены два случая, но оба с ошибками.	0 баллов
4.	Рассмотрен один случай.	2 балла
5.	Рассмотрен один случай.	2 балла

Задание C5

Номер примера	Краткий комментарий	Оценка эксперта
1.	Ход решения верный. Имеющуюся неточность (промежуток $[0; +\infty)$ является отрезком) можно считать опиской.	4 балла
2.	Можно подумать, что верно получена одна из пограничных точек. Однако слово «получена» вряд ли здесь применимо, хотя график и намекает о том, что это касание. Отсутствует обоснование.	0 баллов
3.	Ответ верный, но обоснованно получено лишь одно граничное значение $a = \frac{2}{3}$.	1 балл
4.	Арифметическая ошибка при раскрытии скобок. Обоснованно получено лишь одно граничное значение.	1 балл
5.	Запись $\frac{5}{x+1}$ вместо $\left(\frac{5}{x+1}\right)'$ считается опиской, так как последующие действия выполнены верно.	4 балла
6.	Верно найдена одна граница интервала.	1 балл

Задание C6

Номер примера	Краткий комментарий	Оценка эксперта
1.	В пункте а) неправильно понято условие. В пункте б) ответ верный, обоснование не подробно, но верно. Отсутствует пример, подтверждающий точность.	1 балл
2.	Автор посчитал, что длина веревки выражается целым числом сантиметров и не обосновал дальнейшие переходы.	0 баллов
3.	В пункте а) можно считать, что показано число кусков меньше, чем 32, но не сказано почему веревку можно разрезать на 31 кусок. В пункте б) верно проведена оценка, но не показано почему она точна.	2 балла

4.	В пункте а) считать, что оценка проведена верно, хотя автор решения считает, что длина веревки выражается целым числом. Все остальные результаты, отмеченные в критериях, неверны.	1 балл
5.	В пункте а) «случайно» получен верный ответ.	0 баллов
6.	Написано много, но по сути нет ничего. В пункте а) была предпринята попытка приведения примера, но не показано, почему кусок с указанной длиной стандартен.	0 баллов

Ответы:

Задание для самостоятельной работы

Вариант	Количество баллов				
	C1	C2	C3	C4	C5
1	2	0	2	0	1
2	1	0	3	0	3
3	2	2	3	1	2

Приложение

Нормативно-правовые основы работы экспертов по проверке выполнения заданий ЕГЭ с развернутым ответом (часть С)

Настоящая инструкция разработана на основании Положения о проведении Единого государственного экзамена (приказ Минобразования России от 09.04.2002 г. № 1306, зарегистрирован Минюстом России 08.05.2002 г. № 3420) и с учетом рекомендаций Рособрнадзора в целях регламентации действий предметной комиссии (подкомиссии) государственной экзаменационной комиссии субъекта Российской Федерации, уполномоченной осуществлять в период проведения Единого государственного экзамена (далее — ЕГЭ) проверку выполнения заданий с развернутым ответом, представленных на бланках ответов № 2.

Проверка выполнения заданий с развернутым ответом, представленных на бланках ответов №2, выпускниками XI (XII) классов общеобразовательных учреждений, поступающими в образовательные учреждения среднего и высшего профессионального образования, проводится предметной комиссией государственной экзаменационной комиссии субъекта Российской Федерации, осуществляющей свою деятельность на основании Положения о предметных комиссиях субъекта Российской Федерации и Положения о государственной экзаменационной комиссии субъекта Российской Федерации. Комиссия создается по каждому общеобразовательному предмету, по которому проводится ЕГЭ в субъекте Российской Федерации.

Квалификационная характеристика эксперта предметной комиссии по проверке выполнения заданий с развернутым ответом

Эксперт должен:

иметь представление

— о нормативных документах, регламентирующих процедуру проведения Единого государственного экзамена и процедуру проверки выполнения заданий с развернутым ответом;

— о нормативных документах, определяющих полномочия и функции предметной комиссии; функции, права и обязанности председателя, заместителя председателя и членов (экспертов) предметной комиссии;

— о нормативных документах по предмету;

знать:

— типологию заданий с развернутым ответом;

— критерии для оценки выполнения заданий с развернутым ответом различного типа;

— специфику оценивания выполнения заданий с развернутым ответом по предмету;

уметь:

— работать с инструкциями, определяющими процедуру проверки и оценки ответов выпускников на задания с развернутым ответом;

— проверять и объективно оценивать ответы выпускников на задания с развернутым ответом (в соответствии с критериями, разработанными федеральной предметной комиссией разработчиков КИМ);

— оформлять результаты проверки (в т.ч. «Протокол проверки ответов на задания в бланке № 2»), соблюдая установленные технические требования.

Права и обязанности членов предметной комиссии

Член предметной комиссии (эксперт) вправе:

— получать инструкции по организации работы, обсуждать с председателем предметной комиссии процедурные вопросы проверки выполнения заданий с развернутым ответом, представленных на бланках ответов № 2;

— требовать организации необходимых условий труда, согласовывать план-график работ;

— принимать участие в обсуждении итогового отчета о работе предметной комиссии, вносить в него свои предложения.

Член предметной комиссии (эксперт) обязан:

— проверять и оценивать выполнение заданий с развернутым ответом, представленных на бланках ответов № 2, в соответствии с критериями оценивания выполнения заданий с развернутым ответом;

— профессионально и добросовестно выполнять возложенные на него функции, соблюдать этические и моральные нормы;

— соблюдать конфиденциальность и установленный порядок обеспечения информационной безопасности при проверке выполнения заданий с развернутым ответом, представленных на бланках ответов № 2;

— информировать председателя предметной комиссии о проблемах, возникающих при проверке выполнения заданий с развернутым ответом, выполненных на бланках ответов № 2;

— незамедлительно информировать руководство ГЭК в письменной форме о случаях нарушения процедуры проверки выполнения заданий с развернутым ответом, а также нарушения режима информационной безопасности и нарушениях в работе с документацией в деятельности предметной комиссии.

В случае неисполнения или ненадлежащего исполнения возложенных на них обязанностей, несоблюдения требований нормативных правовых актов по проведению ЕГЭ, нарушения требований конфиденциальности и информационной безопасности, а также злоупотреблений установленными полномочиями, совершенными из корыстной или иной личной заинтересованности, члены предметной комиссии (эксперты) привлекаются к ответственности в порядке, установленном законодательством Российской Федерации.

Инструкция для предметной комиссии по проверке выполнения заданий с развернутым ответом № 2

Организация проверки ответов на задания с развернутым ответом

Распределение работ между экспертами, определение окончательных баллов за ответы на задания с развернутым ответом, назначение третьего эксперта выполняются автоматизированно в РЦОИ.

Каждый бланк ответов № 2 проверяется двумя независимыми экспертами.

По результатам проверки эксперты независимо выставляют баллы за каждый ответ на задание с развернутым ответом согласно критериям оценивания выполнения заданий с развернутым ответом. Баллы за ответ на задания с развернутым ответом определяются исходя из следующих положений:

- если баллы двух экспертов за ответ на задание с развернутым ответом (позиции оценивания) совпали, то полученный балл является окончательным;

- если расхождение в баллах двух экспертов за ответ на задание с развернутым ответом составляет не более двух, то окончательный балл определяется как среднее арифметическое баллов двух экспертов (при получении дробных результатов балл округляется по принятым правилам);

- если расхождение в баллах двух экспертов за ответы на задания с развернутым ответом во всей работе выпускника составляет более двух баллов, то для проверки назначается третий эксперт.

Третьим экспертом может быть назначен только эксперт, не являющийся одним из двух экспертов, проверявших работу ранее.

Третий эксперт проверяет и выставляет баллы только за те ответы на задания, в которых было обнаружено расхождение в баллах двух экспертов. Третьему эксперту предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, проверявшими эти ответы на задания ранее. Баллы третьего эксперта за эти ответы на задания являются окончательными.

Примечание: Назначение работы на проверку третьим экспертом происходит в РЦОИ с помощью специальных программных средств. При этом в бланке-копии, переданном на проверку третьему эксперту, приведены баллы, выставленные двумя предыдущими экспертами. Третий эксперт должен проверить только те ответы на задания, в которых было обнаружено недопустимое расхождение в оценках двух экспертов.

Каждому эксперту выдается комплект критериев оценивания выполнения заданий с развернутым ответом по каждому варианту и рабочий комплект для проверки;

Примечание:

Во время работы экспертам запрещается:

— самостоятельно изменять предоставленное рабочее место;

— пользоваться мобильными телефонами или иными средствами связи, фото и видеоаппаратурой, портативными персональными компьютерами (ноутбуками, КПК и другими);

— без уважительной причины покидать аудиторию;

— переговариваться, совместно обсуждать оценивание задания.

Если у эксперта возникают вопросы, он должен обратиться к председателю или заместителю председателя Предметной комиссии, которые решают вопросы в рамках своей компетенции.

Инструкция для экспертов

Эксперты должны:

Заблаговременно пройти обучение по содержанию и технологии оценивания заданий с развернутым ответом.

Прибыть в ППЭ за 30 минут до начала процедуры проверки.

Примечание: в случае, если эксперт не сможет присутствовать в текущий день на процедуре проверки бланков, он должен заранее предупредить об этом председателя ПК. В свою очередь, председатель ПК должен проинформировать об этом руководителя РЦОИ.

В случае неявки эксперта на процедуру проверки в течение 30 минут с момента начала процедуры проверки технический работник в аудитории передает его бланки проверки руководителю РЦОИ.

По указанию председателя комиссии экспертам следует занять рабочие места в предоставленных аудиториях.

Внимательно прослушать инструктаж, получить рабочие комплекты для проверки, начать проверку выполнения заданий с развернутым ответом, следуя следующим правилам:

— заполнять необходимые поля бланка-протокола следует печатными заглавными буквами черной гелевой ручкой; использование карандаша (даже для черновых записей), ручек со светлыми чернилами и корректирующего карандаша для исправления написанного недопустимо (т.к. наличие их на сканируемом бланке может привести к серьезной поломке сканера);

— если при заполнении полей бланка-протокола была сделана ошибка, необходимо более жирно написать верные баллы поверх ошибочно записанных;

— если выпускник (поступающий) не приступал к выполнению задания, то в поле, в котором должен стоять балл за данный ответ на задание в бланке-протоколе, следует поставить **крестик (×)**;

— если выпускник (поступающий) приступал к выполнению задания, то в соответствующее поле (полях - при оценивании ответа на задание) бланка-протокола следует проставить соответствующий балл (от ноля до максимально возможного, указанного в критериях оценивания выполнения заданий с развернутым ответом);

— если эксперт по каким-то причинам не может проверить выданный ему бланк проверки (например, если изображение ответа участника блеклое и его невозможно прочитать), он должен передать данный бланк проверки техническому работнику в аудитории, который должен доставить его старшему оператору РЦОИ.

После окончания заполнения бланка-протокола поставить дату, подпись и передать рабочий комплект председателю Комиссии для регистрации.

Работа экспертов при рассмотрении апелляций

При рассмотрении апелляций о несогласии с выставленными баллами (отметкой) по результату ЕГЭ член апелляционной комиссии должен:

— получить от председателя Комиссии копии бланков ответов № 2, бланков-протоколов проверки работ экспертами;

— рассмотреть работы выпускника (поступающего), а также проанализировать предыдущее оценивание работы;

— узнать у председателя Комиссии время рассмотрения апелляции и прибыть в указанное время в конфликтную комиссию;

— в случае возникновения у выпускника (поступающего) или у конфликтной комиссии претензий к оцениванию выполнения заданий с развернутым

— ответом дать соответствующие разъяснения, аргументировать результат оценивания;

— составить заключение о правильности оценивания выполнения заданий с развернутым ответом, по которым была подана апелляция;

— в случае обнаружения ошибок или некорректных заданий в КИМах обязательно сообщить об этом председателю Комиссии с обязательным указанием номера варианта КИМ, задания и содержания замечания.

Примечание. Решение о корректности задания и об изменении баллов участникам ЕГЭ в случае признания задания некорректным принимается на федеральном уровне. В случае признания задания некорректным всем выпускникам (поступающим), которые выполняли данное задание, выставляются оценки в соответствии с распорядительным актом Рособрнадзора.

Рекомендуемая литература

1. Отчет о результатах ЕГЭ по России 2011 г. http://fipi.ru
2. Отчет о результатах ЕГЭ в Красноярском крае в 2011 году http://www.kipk.ru
3. Отчет о результатах ЕГЭ по России 2012 г. http://fipi.ru
4. Отчет о результатах ЕГЭ в Красноярском крае в 2012 году http://www.kipk.ru
5. Учебно-методические материалы для председателей и членов региональных предметных комиссий по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2011 года. http://fipi.ru
6. Учебно-методические материалы для председателей и членов региональных предметных комиссий по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2012 года. http://fipi.ru
7. Положение о проведении Единого государственного экзамена (приказ Минобразования России от 09.04.2002 № 1306, зарегистрирован Минюстом России 08.05.2002 № 3420).
8. Приказ «Об утверждении Положения о формах и порядке проведения государственной (итоговой) аттестации обучающихся, освоивших основные общеобразовательные программы среднего (полного) общего образования» от 28.11.2008 №362, зарегистрирован Минюстом России 13.01.2009 регистрационный №13065.
9. Положение о ГЭК субъекта Российской Федерации или Положение о предметных комиссиях, ФИПИ http://fipi.ru, Портал информационной поддержки проекта «Единый государственный экзамен» http://ege.edu.ru
10. Инструкция для членов предметной комиссии для проведения процедуры проверки бланков ответов № 2, ФИПИ http://fipi.ru, Портал информационной поддержки проекта «Единый государственный экзамен» http://ege.edu.ru.
11. Решения ГЭК, ФИПИ http://fipi.ru, Портал информационной поддержки проекта «Единый государственный экзамен» http://ege.edu.ru.

Готовимся к ЕГЭ

Учебное издание

Васильева Екатерина Николаевна

МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ЕГЭ СЕКРЕТЫ ОЦЕНКИ ЗАДАНИЙ ЧАСТИ С

Решения и комментарии

Обложка *В. Кириченко*
Компьютерная верстка *О. Сапожников*
Корректор *Н. Пимонова*

Налоговая льгота: издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано в печать 06.03.2013.
Формат 70х100 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 11,6.
Тираж 5000 экз. Заказ № 511.

Издательство ООО «Легион» включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009, зарегистрирован в Минюст России 15.01.2010 № 15987.

ООО «ЛЕГИОН»
Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.
Адрес редакции: 344011, г. Ростов-на-Дону, пер. Доломановский, 55.
www.legionr.ru e-mail: legionrus@legionrus.com

Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография»
Филиал «Чеховский Печатный Двор»
142300, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1
Сайт: www.chpd.ru, E-mail: sales@chpk.ru, 8(495)988-63-87