ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

Ю.В. САДОВНИЧИЙ

МАТЕМАТИКА

ЕГЭ

ПРАКТИКУМ В,С

2014

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

- Примеры решений заданий
- Тематические и зачетные задания
- Диагностические работы
- Ответы ко всем заданиям

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

Ю.В. Садовничий

ПРАКТИКУМ
ПО МАТЕМАТИКЕ

Решение уравнений и неравенств. Преобразование алгебраических выражений

Рекомендовано ИСМО Российской Академии Образования для подготовки выпускников всех типов образовательных учреждений РФ к сдаче экзаменов в форме ЕГЭ

Примеры решений заданий
Тематические и зачетные задания
Диагностические работы
Ответы ко всем заданиям

Издательство
«ЭКЗАМЕН»

МОСКВА
2014

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
С14

Садовничий, Ю.В.

С14 ЕГЭ. Практикум по математике: Решение уравнений и неравенств. Преобразование алгебраических выражений / Ю.В. Садовничий.— М. : Издательство «Экзамен», 2014. — 127, [1] с. (Серия «ЕГЭ. Практикум А,В,С»)

ISBN 978-5-377-07081-8

В настоящем пособии систематизированы задания по алгебре (уравнения, неравенства, системы, преобразования выражений), аналогичные которым могут быть предложены учащимся выпускных классов на Едином государственном экзамене по математике и на дополнительном экзамене, проводящемся в некоторых вузах.

Практикум содержит как простые задачи, так и задачи повышенной сложности.

Весь материал в пособии разбит на две части. В первой части все задания разбиты по темам и приводится необходимый теоретический материал. Вторая часть содержит 10 диагностических работ, в каждой из которых собраны задачи на различные темы. Выполнение диагностических работ поможет выявить существующие пробелы в знаниях учащихся. Ко всем заданиям даны ответы.

Издание рассчитано на учителей, методистов, репетиторов, учащихся-старшеклассников.

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных учреждениях.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

Подписано в печать 04.07.2013.
Формат 70x108/16. Гарнитура «Школьная». Бумага газетная.
Уч.-изд. л. 4,2. Усл. печ. л. 11,2. Тираж 4 000 экз. Заказ № 2639/13.

ISBN 978-5-377-07081-8

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем пособии систематизированы задания по алгебре (уравнения, неравенства, системы, преобразования выражений), аналогичные которым могут быть предложены учащимся выпускных классов на Едином государственном экзамене по математике и на дополнительном экзамене, проводящемся в некоторых вузах. В первой части пособия все такие задания разбиты по темам, при этом имеются как простые задачи, так и задачи повышенной сложности. Также приводится необходимый теоретический материал.

Вторая часть содержит 10 диагностических работ, в каждой из которых собраны задачи на различные темы. Решение такой диагностической работы поможет обобщить пройденный материал и выявить существующие пробелы, для устранения которых желательно еще раз обратиться к первой части данного пособия. Работу со второй частью можно рассматривать как итоговое повтороение и завершающий этап подготовки к экзамену.

Автор надеется, что пособие окажется полезным учащимся старших классов для самостоятельной подготовки к Единому государственному экзамену по математике, подготовки к постуилению в вуз, а также учителям математики для работы со школьниками.

Желаем успехов!

1. МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ

Пусть дано неравенство

$$\frac{(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\dots(x-x_i)^{k_i}}{(x-x_{i+1})^{k_{i+1}}\dots(x-x_{n-1})^{k_{n-1}}(x-x_n)^{k_n}} > 0 \quad (< 0, \geq 0, \leq 0),$$

и пусть для определенности $x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{n-1} < x_n$. Точки $x = x_1, \dots, x = x_n$ разбивают числовую прямую на промежутки (рис. 1).

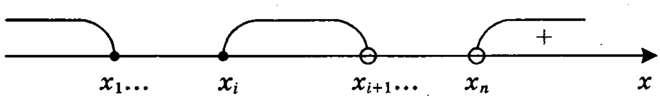

Рис. 1

На промежутке $(x_n, +\infty)$ ставим знак +. Далее правило чередования знаков следующее. Если число k_i нечетное, то знак при переходе через точку $x = x_i$ меняется на противоположный, а если четное, то знак остается прежним. Кроме того, если неравенство нестрогое, то в ответ включаются корни числителя и исключаются корни знаменателя, а если строгое, то исключаются как корни числителя, так и корни знаменателя.

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{x-8}{(x+3)(x+11)} \geq 0.$$

Решение. Нанесем точки на числовую прямую и определим знаки на полученных промежутках (рис. 2).

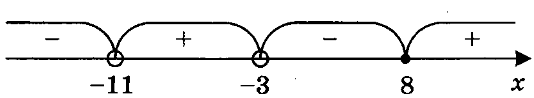

Рис. 2

Согласно правилу, на промежутке $(8, +\infty)$ мы ставим знак <<плюс>>, а далее знаки меняются во всех точках. Кроме того, корень числителя $x = 8$ включается в ответ, так как неравенство нестрогое. В ответ записываем промежутки, на которых стоит знак <<плюс>>.

Ответ: $x \in (-11, -3) \cup [8, +\infty)$.

Пример 2. Решить неравенство

$$x \le 3 - \frac{1}{x-1}.$$

Р е ш е н и е. Преобразуем данное неравенство к виду, удобному для его решения методом интервалов:

$$x \le 3 - \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} + x - 3 \le 0 \Leftrightarrow \frac{1 + (x-1)(x-3)}{x-1} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 4}{x-1} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{x-1} \le 0.$$

Нанесем точки на числовую прямую и определим знаки на полученных промежутках (рис. 3).

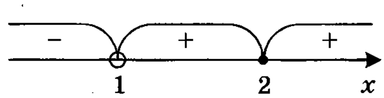

Рис. 3

Согласно правилу, на промежутке $(2, +\infty)$ ставим знак <<плюс>>, далее знак не меняется в точке $x = 2$ и меняется в точке $x = 1$. Кроме того, корень числителя $x = 2$ является решением неравенства, так как неравенство нестрогое. В ответ запишем промежуток $(-\infty, -1)$ на котором стоит знак <<минус>> и точку $x = 2$.

Ответ: $x \in (-\infty, 1) \cup \{2\}$.

Тематические задания

1. Решить неравенство $x > \dfrac{1}{x-1}$.

2. Определить, сколько целочисленных решений имеет неравенство $(n^2 - 1)(n^2 - 11)(n^2 - 101)(n^2 - 1001) < 0$.

3. Решить неравенство $\dfrac{4x^2 + 8x - 5}{x+1} < 0$.

4. Найти все значения x, при которых справедливо неравенство $\dfrac{4}{1-x} > x + 2$.

5. Решить неравенство $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x - 3) \ge 5$.

6. Решить неравенство $\dfrac{30x - 9}{x - 2} \ge 25(x + 2)$.

7. Решить неравенство $\dfrac{2x-3}{4-x} > \dfrac{1}{x}$.

8. Решить неравенство $\frac{x}{1-x} < x - 6$.

9. Найти все решения неравенства $\frac{4x-1}{3x+1} \geq 1$.

10. Решить неравенство $\frac{x-3}{x^2+2x-5} > \frac{1}{2}$.

11. Решить неравенство $x - 3 + \frac{4}{x+1} > 0$.

12. Решить неравенство $x - 1 > \frac{4x}{3-x}$.

13. Решить неравенство $\frac{1}{x-1} \geq -2$.

14. Решить неравенство $\frac{1}{2x} \geq \frac{1}{1-x}$.

15. Решить неравенство $\frac{3x}{x-1} > 2$.

16. Решить неравенство $x \leq \frac{2}{x-1}$.

17. Решить неравенство $\frac{x^2-5x+6}{1-x} < 0$.

18. Решить неравенство $x + 2 < \frac{1}{x+4}$.

19. Решите неравенство $\frac{4}{x^2-1} \geq 1$.

20. Решить неравенство $\frac{3x}{x^2+2} \geq 1$.

21. Решить неравенство $\frac{7}{(x-2)(x-3)} + \frac{9}{x-3} + 1 \leq 0$.

22. Решить неравенство $\frac{x}{x-1} \leq \frac{x-2}{x}$.

23. Решить неравенство $4x + 7 \leq \frac{2}{x}$.

24. Решить неравенство $\frac{1}{x-1996} \leq \frac{x}{x-1996}$.

25. Решить неравенство $\frac{1-2x}{x-5} < \frac{1}{3-x}$.

26. Решить неравенство $3x^4 + 4 < 13x^2$.

27. Решить неравенство $\frac{1}{x-1} > 1$.

28. Решить неравенство $\frac{2x}{x^2-4} \le \frac{1}{x+1}$.

29. Найти все решения неравенства $(x+3)^2 < 5x+11$, принадлежащие отрезку $[-3,0]$.

30. Решить неравенство $\frac{x^2+1}{x} < \frac{1}{x} - 1$.

31. Решить неравенство $(x^2-4x)^2 \ge 16$.

32. Решить неравенство $\frac{x-3}{3x} \ge \frac{1}{2}$.

33. Решить неравенство $\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \le 2$.

Зачетные задания

34. Решить неравенство $\frac{1}{x^2+8x-9} \ge \frac{1}{3x^2-5x+2}$.

35. Решить неравенство $\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+2} > \frac{1}{2x+3}$.

36. Решить неравенство $\frac{1}{3-2x} \le 1$.

37. Решить неравенство $\frac{2x+12}{x-4} - 1 > \frac{5}{x+1}$.

38. Решить неравенство $\frac{1}{x-1} \le \frac{4}{x^2}$.

39. Решить неравенство $\frac{10+3x-x^2}{x^2-3x+2} \le 1$.

40. Решить неравенство $\frac{x^2+3x+7}{x-3} \ge -1$.

41. Решить неравенство $\frac{1}{x} < 2$.

2. УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ МОДУЛЬ

Уравнение вида $|f(x)|=g(x)$ решается следующим образом:

$$|f(x)|=g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\ge 0 \\ f(x)=g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)<0 \\ -f(x)=g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Такое решение называется <<раскрытием модуля по определению>>. Кроме того, существует и другой способ решения этого уравнения:

$$|f(x)|=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x). \end{array}\right. \end{cases}$$

В частности, уравнение вида $|f(x)|=a$, где $a \ge 0$, можно решать следующим образом:

$$|f(x)|=a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=a \\ f(x)=-a. \end{array}\right.$$

Уравнение вида $|f(x)|=|g(x)|$ равносильно следующей совокупности:

$$|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x). \end{array}\right.$$

Если в уравнении или неравенстве модулей два или больше, мы поступаем следующим образом. Приравниваем все выражения, стоящие под знаком модуля, к нулю и полученные точки в нужном порядке расставляем на числовой прямой. Затем определяем знаки подмодульных выражений на каждом из образовавшихся промежутков и в соответствие с этими знаками раскрываем модули, т.е. данный модуль раскрывается на промежутке без изменения знака, если подмодульное выражение положительно, и с изменением знака, если оно отрицательно. Что касается концов промежутков, то, поскольку подмодульное выражение там равно нулю, то модуль можно раскрыть любым из этих двух способов, т.е. общий конец двух промежутков можно включить в любой из них на свой выбор.

Пример 1. Решить уравнение

$$x^2+4\,|\,x-3\,|-7x+11=0.$$

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$x^2+4\,|\,x-3\,|-7x+11=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3\ge 0\\ x^2+4(x-3)-7x+11=0\end{cases}\\ \begin{cases}x-3<0\\ x^2-4(x-3)-7x+11=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 3\\ x^2-3x-1=0\end{cases}\\ \begin{cases}x<3\\ x^2-11x+23=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 3\\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}x<3\\ x=\dfrac{11\pm\sqrt{29}}{2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\\ x=\dfrac{11-\sqrt{29}}{2}.\end{array}\right.$$

Ответ: $x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$, $x=\dfrac{11-\sqrt{29}}{2}$.

Пример 2. Решить уравнение

$$|\,3x-8\,|+|\,x+2\,|=2x.$$

Решение. Разобьем числовую ось на три промежутка и определим знаки подмодульных выражений на каждом из этих промежутков (табл. 1).

Таблица 1

	$(-\infty,-2]$	$\left(-2,\frac{8}{3}\right]$	$\left(\frac{8}{3},+\infty\right)$
$3x-8$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$

Раскрывая модули по определению, получим следующую совокупность:

$$|\,3x-8\,|+|\,x+2\,|=2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le -2\\ -(3x-8)-(x+2)=2x\end{cases}\\ \begin{cases}-2<x\le\dfrac{8}{3}\\ -(3x-8)+x+2=2x\end{cases}\\ \begin{cases}x>\dfrac{8}{3}\\ 3x-8+x+2=2x\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le -2\\ -4x+6=2x\end{cases}\\ \begin{cases}-2<x\le\dfrac{8}{3}\\ -2x+10=2x\end{cases}\\ \begin{cases}x>\dfrac{8}{3}\\ 4x-6=2x\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le -2\\ x=1\end{cases}\\ \begin{cases}-2<x\le\dfrac{8}{3}\\ x=2{,}5\end{cases}\\ \begin{cases}x>\dfrac{8}{3}\\ x=3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2{,}5\\ x=3.\end{array}\right.$$

Ответ: $x=2{,}5$; $x=3$.

Тематические задания

1. Решить уравнение $(x-1)^2+|x-1|-2=0$.

2. Решить уравнение $|5x-13|-|6-5x|=7$.

3. Найти все корни уравнения $|x^2+x-1|=2x-1$, удовлетворяющие неравенству $x<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

4. Найти все действительные x, удовлетворяющие услові $|2x-3|=3-2x$.

5. Найти все решения уравнения $x^2-4x+|x-3|+3=0$.

6. Решить уравнение $|5x^2-3|=2$.

7. Решить уравнение $x^2+3x+|x+3|=0$.

8. Решить уравнение $\dfrac{|x-2|}{|x-1|-1}=1$.

9. Решить уравнение $(x-2)\left(|x|+\sqrt{3}-1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$.

10. Решить уравнение $||3-x|-x+1|+x=6$.

11. Решить уравнение $\dfrac{x}{|x|}+x=x^2+1$.

12. Решить уравнение $x^2-6|x|-2=0$.

13. Решить уравнение $|x^2-2x-1|-x+1=0$.

14. Решите уравнение $\left(4|x-1|+\dfrac{1}{2}\right)^2=11(x-1)^2+\dfrac{5}{4}$.

15. Решить уравнение $|x-1|+|2x-3|=2$.

16. Решить уравнение $2|x+1|=2-x$.

17. Решить уравнение $|2x-15|=22-|2x+7|$.

18. Решить уравнение $|x-3|+|2x-5|+4x=5|x|$.

19. Решить уравнение $2|x-5|-1=3|2x-5|-4|x-1|$.

20. Сколько корней имеет уравнение $|||x+6|-9|-4|=4$?

21. Решить уравнение $|2x-4|+4=2x$.

22. Решить уравнение $|x| = 2 - x$.

23. Решить уравнение $\dfrac{|2x-1|}{|x-1|} = \dfrac{|2x+1|}{|x+1|}$.

24. Решить уравнение $x^2 + 2|x| - 3 = 0$.

25. Решить уравнение $|2x+1| = |x+2|$.

26. Решить уравнение $||4 - x^2| - x^2| = 1$.

27. Решить уравнение $|x-2| = \dfrac{1}{x-2}$.

28. Решить уравнение $x^2 + |x| - 6 = 0$.

29. Решить уравнение $||x^2 - 5x| - 5| = x - 2$.

3. НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ МОДУЛЬ

Неравенство вида $|f(x)| < g(x)$ и $|f(x)| > g(x)$ можно решать, раскрывая модуль по определению:

$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) < g(x), \end{cases} \end{array}\right. \quad |f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) > g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Кроме того, существует и другой способ решения этих неравенств:

$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ -f(x) < g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x), \end{cases}$$

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ -f(x) > g(x) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x). \end{array}\right.$$

В частности, неравенство вида $|f(x)| < c$ ($|f(x)| > c$), где $c > 0$, равносильно следующей системе (совокупности):

$$|f(x)| < c \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < c \\ f(x) > -c, \end{cases} \quad |f(x)| > c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > c \\ f(x) < -c. \end{array}\right.$$

Неравенство вида $|f(x)| < |g(x)|$ решается следующим образом:

$$|f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) < g^2(x) \Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) < 0.$$

Если в неравенстве модулей два или больше, мы поступаем так же, как и при решении уравнения: приравниваем выражения, стоящие под знаком модуля, к нулю, разбиваем числовую ось на промежутки, определяем знаки подмодульных выражений на этих промежутках, раскрываем модули в соответствии с этими знаками.

Пример 1. Решить неравенство

$$x^2 - 7x - |3x - 1| < 12.$$

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$x^2 - 7x - |3x - 1| < 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x - 1 \ge 0 \\ x^2 - 7x - (3x - 1) < 12 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x - 1 < 0 \\ x^2 - 7x + (3x - 1) < 12 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x \ge 1 \\ x^2 - 10x - 11 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x < 1 \\ x^2 - 4x - 13 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{3} \\ -1 < x < 11 \end{cases} \\ \begin{cases} x < \dfrac{1}{3} \\ 2-\sqrt{17} < x < 2+\sqrt{17} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{3} \leq x < 11 \\ 2-\sqrt{17} < x < \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (2-\sqrt{17}, 11).$$

Ответ: $x \in (2-\sqrt{17}, 11)$.

Пример 2. Решить неравенство

$$|\, x + |\, 1 - x \,|\,| > 3.$$

Решение. Данное неравенство равносильно следующей совокупности:

$$|\, x + |\, 1 - x \,|\,| > 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + |1-x| > 3 \\ x + |1-x| < -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |1-x| > 3 - x \\ |1-x| < -3 - x \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - x > 3 - x \\ 1 - x < x - 3 \\ \begin{cases} 1 - x < -3 - x \\ 1 - x > 3 + x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 > 3 \\ x > 2 \\ \begin{cases} 1 < -3 \\ x < -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x > 2.$$

Ответ: $x \in (2, +\infty)$.

Тематические задания

1. Решить неравенство $x^2 - 2|x+1| < 0$.
2. Решить неравенство $2|x+1| > x + 4$.
3. Решить неравенство $x^2 - |\,5x - 3\,| - x < 2$.
4. Решить неравенство $\dfrac{4}{|x+1| - 2} \geq |x - 1|$.
5. Найти все решения неравенства $\dfrac{2x+5}{|x+1|} \geq 1$.
6. Решить неравенство $3|x-2| + |5x-4| \leq 10$.
7. Решить неравенство $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{|\,x\,| - 1} \geq \dfrac{2}{x-1}$.

8. Решить неравенство $\dfrac{|x-3|}{|x-2|-1} \ge 1$.

9. Решить неравенство $\dfrac{|2-x|-x}{|x-3|-1} \le 2$.

10. Решить неравенство $\dfrac{|x+1|+|x-2|}{x+199} < 1$.

11. Решить неравенство $\dfrac{|x-5|-1}{2|x-6|-4} \le 1$.

12. Решить неравенство $\dfrac{|x+3|+x}{x+2} > 1$.

13. Решить неравенство $|x|(x^4-2x^2-3) \ge 0$.

14. Решить неравенство $\left|\dfrac{x^2-x-6}{x+2}\right| \ge 2$.

15. Решить неравенство $-3 < |x^2-9| < 16$.

16. Решить неравенство $\dfrac{16|x+1|-1}{3|x+1|+1} < 3$.

17. Решить неравенство $|x^2+x-2|+|x+4| \le x^2+2x+6$.

18. Решить неравенство $\dfrac{3|x|-11}{x-3} > \dfrac{3x+14}{6-x}$.

19. Решить неравенство $\dfrac{x^2+4x+3}{|1+x|} \le 0$.

20. Решить неравенство $\dfrac{1}{|x+1|-1} \ge \dfrac{2}{|x+1|-2}$.

21. Решить неравенство $\dfrac{3}{|x-1|} \ge 2x+5$.

22. Решить неравенство $\dfrac{4|2-x|}{4-|x|} - |x-2| \le 0$.

23. Решить неравенство $|2x-1| > \dfrac{1}{x-2}$.

24. Решить неравенство $2x > \dfrac{5x+3}{|x+2|}$.

25. Решить неравенство $\dfrac{|x-2|-|x+7|}{|x+1|-|x+4|} < \dfrac{|x+1|+|x+4|}{|x-2|}$.

26. Решить неравенство $\left||x^2-8x+2|-x^2\right| \ge 2x+2$.

27. Решить неравенство $\dfrac{(x^2+x+1)^2-2|x^3+x^2+x|-3x^2}{10x^2-17x-6} \ge 0$.

Зачетные задания

28. Решить неравенство $||1 - x^2| - |x^2 - 3x + 2|| \geq 3|x - 1|$.

29. Решить неравенство $\dfrac{1}{|x-1|} > \dfrac{1}{|x+1|}$.

30. Решить неравенство $|3x+1| + 2 + \dfrac{3}{|3x+1| - 2} \leq \dfrac{1}{|3x+1| + 2}$.

31. Решить неравенство $\dfrac{x^2 + 5x - 6}{|x+4|} < 0$.

32. Решить неравенство $\dfrac{|x-3| + 2}{|2x-3| - 5} \leq 0$.

33. Решить неравенство $\dfrac{x|x| + 1}{x - 2} + 1 \geq x$.

34. Решить неравенство $\dfrac{6}{|x|} \geq 7 + x$.

35. Решить неравенство $\dfrac{x-2}{|x+2|} + \dfrac{2x+5}{x+2} \leq 0$.

36. Решить неравенство $\dfrac{x-2}{|x-2|} \leq 4 - x^2$.

4. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ равносильно следующей системе:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Уравнение вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ можно решать одним из следующих двух способов:

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Если в уравнении корней два или больше, мы должны возводить в квадрат два раза. При каждом возведении в квадрат необходимо следить, чтобы обе части уравнения имели один и тот же знак, если это из уравнения не вытекает, то надо требовать дополнительно. Кроме того, в начале задачи необходимо найти область определения уравнения. Важным методом решения иррациональных уравнений является также метод замены переменных.

Пример 1. Решить уравнение

$$\sqrt{24 - 10x} = 3 - 4x.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующей системе:

$$\sqrt{24 - 10x} = 3 - 4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 4x \geq 0 \\ 24 - 10x = (3 - 4x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \dfrac{3}{4} \\ 16x^2 - 14x - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \dfrac{3}{4} \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2} \\ x = -\dfrac{5}{8} \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{8}.$$

Ответ: $x = -\frac{5}{8}$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt{15 + 5x} - \sqrt{19 - 5x} = 2.$$

Решение. Найдем область определения данного уравнения, для чего решим следующую систему:

$$\begin{cases} 15 + 5x \geq 0 \\ 19 - 5x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq \dfrac{19}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-3, \frac{19}{5}\right].$$

Перепишем исходное уравнение следующим образом:

$$\sqrt{15+5x} = \sqrt{19-5x} + 2.$$

Так как на области определения обе части уравнения неотрицательны, можем возвести их в квадрат:

$$15+5x = 19-5x+4\sqrt{19-5x}+4 \Leftrightarrow 2\sqrt{19-5x} = 5x-4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x-4 \ge 0 \\ 76-20x = (5x-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{4}{5} \\ 5x^2-4x-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Найденный корень принадлежит области определения данного уравнения.

Ответ: $x = 2$.

Тематические задания

1. Решить уравнение $\sqrt{x+8} - x + 2 = 0$.
2. Найти все действительные решения уравнения $\sqrt{2x^2-4x} = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}$.
3. Решить уравнение $4\sqrt{x+1} = |2x-1| + 3$.
4. Решить уравнение $\sqrt{6-4x-x^2} = x+4$.
5. Решить уравнение $2\sqrt{x+5} = x+2$.
6. Найти все значения x, удовлетворяющие условию $(x^2-4)\sqrt{x+1} = 0$.
7. Найти все решения уравнения $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-3}$.
8. Решить уравнение $\sqrt{2x^2+8x+7} - x = 2$.
9. Найти все действительные решения уравнения $(x+1)\sqrt{x^2+x-2} = 2x+2$.
10. Найти все действительные решения уравнения $(x+1)\sqrt{16x+17} = (x+1)(8x-23)$.
11. Решить уравнение $x^2 - 24 - 2\sqrt{x^2-24} = 15$.
12. Решить уравнение $\sqrt{x^4-2x-5} = 1-x$.

13. Найти все действительные решения уравнения
$\sqrt{3x+4}\cdot(9x^2+21x+10)=0$.

14. Решить уравнение $\sqrt{35-5x}=9-2x$.

15. Решить уравнение $\sqrt{4-6x-x^2}=x+4$.

16. Решить уравнение $8\sqrt{12+16x-16x^2}+4x-4x^2=33$.

17. Решить уравнение $5\sqrt{1+|x^2-1|}=3+|5x+3|$.

18. Решить уравнение $\sqrt{x+4}+x-2=0$.

19. Решить уравнение $\sqrt{3x-5}-\sqrt{4-x}=1$.

20. Решить уравнение $\sqrt{13-2x}=5-x$.

21. Решить уравнение $3\sqrt{x+4}=5-2|x+2|$.

22. Решить уравнение $y^2+2\sqrt{y^2+3y-4}-4+3y=0$.

23. Решить уравнение $\dfrac{|x^3|-|3x|}{\sqrt{3x^2-4x-2}-2+|x|}=0$.

24. Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{x^2+3}{4x}}=1$.

25. Решить уравнение $\sqrt{8x^2-7}=3x-4$.

26. Решить уравнение $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{19-x}=3$.

27. Решить уравнение $\sqrt{2-x^2}=|x|-1$.

28. Решить уравнение $22x^2+10x=\sqrt{1276x^3+364x^2}$.

29. Решить уравнение $4x-3|x-1|=4\sqrt{5x+14}-3\left|\sqrt{5x+14}-1\right|$.

30. Решить уравнение $\frac{x^2}{4}-2=\sqrt{4(x+2)}$.

31. Решить уравнение
$\sqrt{4x-x^2}+\sqrt{4x-x^2-3}=3+\sqrt{2x-x^2}$.

32. Решить уравнение
$\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\right)\cdot(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})=8$.

33. Решить уравнение $\sqrt{x+2}=|x-1|$.

34. Решить уравнение
$\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2-x-6}=-\sqrt{2x^2+4x-2}$.

Зачетные задания

35. Решить уравнение $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=2\sqrt{x^3}$.

36. Решить уравнение $\sqrt{|x^2+14x+47|-1}=|x+7|-1$.

37. Решить уравнение $2(2-x^2-x)=\sqrt{1-x^2}\cdot(3x^2-6x+4)$.

38. Решить уравнение $\sqrt{3x-x^2-2}=2x-3$.

39. Решить уравнение $\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{2x+1}=x+4$.

40. Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{4}{x-2}+1}=\dfrac{1}{x-2}$.

41. Решить уравнение $\sqrt[3]{\dfrac{2+x}{x}}-\sqrt[3]{\dfrac{2-6x}{x}}=1$.

42. Решить уравнение $\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+4x+3}=\sqrt{(x+2)^3}$.

43. Решить уравнение $\sqrt{x^4-10x^2+25}=\sqrt{x^4-4x^2+4}$.

44. Решить уравнение $-x-3\sqrt{-x}=10$.

45. Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{7}{4}-|x+1|}=1-|x|$.

5. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Неравенство вида $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$ равносильно следующей системе:

$$\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Неравенство вида $\sqrt{f(x)} < g(x)$ решается следующим образом:

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g^2(x) \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

И, наконец, неравенство вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$ равносильно совокупности двух систем:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Если в неравенстве корней два или больше, мы поступаем так же, как и при решении уравнения: находим область определения, возводим в квадрат два раза, при этом следим за знаками обеих частей неравенства. Если знаки левой и правой частей неравенства разные, то в квадрат возводить нельзя. Возможно также рассмотрение двух случаев в зависимости от знака одной из частей неравенства.

Пример 1. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 + 4x - 5} - 2x + 3 > 0.$$

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\sqrt{x^2 + 4x - 5} > 2x - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ x^2 + 4x - 5 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ x^2 + 4x - 5 > (2x-3)^2 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < \dfrac{3}{2} \\ x \in (-\infty, -5] \cup [1, +\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq \dfrac{3}{2} \\ 3x^2 - 16x + 14 < 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (-\infty, -5] \cup \left[1, \dfrac{3}{2}\right) \\ \begin{cases} x \geq \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{8 - \sqrt{22}}{3} < x < \dfrac{8 + \sqrt{22}}{3} \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (-\infty, -5] \cup \left[1, \dfrac{3}{2}\right) \\ \dfrac{3}{2} \leq x < \dfrac{8 + \sqrt{22}}{3} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -5] \cup \left[1, \frac{8+\sqrt{22}}{3}\right).$$

Ответ: $x \in (-\infty, -5] \cup \left[1, \frac{8+\sqrt{22}}{3}\right)$.

Пример 2. Решить неравенство

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} < \sqrt{x-1}.$$

Решение. Найдем область определения данного неравенства, для чего решим следующую систему:

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [2, +\infty). \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$$

Преобразуем неравенство к виду

$$\sqrt{x+3} < \sqrt{x-2} + \sqrt{x-1}.$$

Так как на области определения обе части полученного неравенства неотрицательны, можем возвести их в квадрат:

$$x+3 < x-2+2\sqrt{(x-2)(x-1)} + x - 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-3x+2} > 6-x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 6-x \geq 0 \\ 4(x^2-3x+2) > (6-x)^2 \\ x \geq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 6-x < 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leq 6 \\ 3x^2 > \dfrac{28}{3} \\ x \geq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 6 \\ x \geq 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leq 6 \\ x \in \left(-\infty, -\sqrt{\dfrac{28}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\dfrac{28}{3}}, +\infty\right) \\ x \geq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 6 \\ x \geq 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \left(\sqrt{\dfrac{28}{3}}, 6\right] \\ x > 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(\sqrt{\dfrac{28}{3}}, +\infty\right).$$

При этом равносильный переход от неравенства к совокупности был осуществлен с учетом найденной области определения.

Ответ: $x \in \left(\sqrt{\frac{28}{3}}, +\infty\right)$.

Тематические задания

1. Решить неравенство $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \ge 0$.
2. Решить неравенство $\sqrt{x+3} > x+1$.
3. Решить неравенство $\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x$.
4. Решить неравенство $\sqrt{4x-8} \ge x-5$.
5. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x} \ge 2$.
6. Решить неравенство $\sqrt{5x^2+61x} < 4x+2$.
7. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{51-2x-x^2}}{1-x} < 1$.
8. Найти все значения x, удовлетворяющие неравенству $\sqrt{x^2-3x+2} \le 3x-3$.
9. Решить неравенство $\sqrt{-25x^2+15x-2} \cdot (8x^2-6x+1) \ge 0$.
10. Решить неравенство $\sqrt{2x+3} \ge x$.
11. Решить неравенство $\sqrt{2x^2+15x-17} > x+3$.
12. Найти все решения неравенства $(x^2+8x+15)\sqrt{x+4} \ge 0$.
13. Решить неравенство $x+\sqrt{x^2+x-6} > -1$.
14. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2+x-6}+3x+13}{x+5} > 1$.
15. Найти все значения x, при которых выполнено неравенс $2x-11 < 2\sqrt{36-x^2}$.
16. Решить неравенство $\sqrt{2x^2+x} > 1+2x$.
17. Решить неравенство $|x+3| \le 6-3\sqrt{1-x}$.
18. Решить неравенство $\sqrt{1-x}-\sqrt{x} > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
19. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2-5x+8}}{3-x} \ge 1$.
20. Решить неравенство $\sqrt{x-3} \le 3-|x-6|$.
21. Решить неравенство $\sqrt{24-10x+x^2} > x-4$.
22. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-5x+6} \le 0$.

23. Решить неравенство $2x-5<2\sqrt{x^2-x-6}$.

24. Найти все целочисленные решения неравенства $\sqrt{x^3-5x-3}\le 6-x$.

25. Решить неравенство $\sqrt{x+5}>7-x$.

26. Решить неравенство $\dfrac{x-1}{x\sqrt{4+3x-x^2}}>0$.

27. Решить неравенство $\dfrac{2}{2-\sqrt{x+3}}\le 1$.

28. Решить неравенство $\sqrt{(2x+1)^4-(2x+1)^2}+(2x+1)^2\ge 0$.

29. Решить неравенство $\sqrt{|x+1|-1}>\sqrt{|x+1|-1997}$.

30. Решить неравенство $\sqrt{x^2+x+4}\le 2x+|3x-2|$.

31. Решить неравенство $\sqrt{x+3}>5-2x$.

32. Решить неравенство $\sqrt{x+3}>x+1$.

33. Решить неравенство $\sqrt{10x^2-70x+120}\le 3x-9$.

34. Решить неравенство $3\sqrt{|x+1|-3}\ge\sqrt{x^2-2x-3}$.

35. Решить неравенство $\dfrac{5x-3}{\sqrt{7x-4}}<1$.

36. Решить неравенство $\left|\sqrt{x+4}-2\right|>\dfrac{6}{\sqrt{x+4}-3}$.

37. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{(x+3)(x-5)}}{x+3}\le 0$.

38. Решить неравенство $|3x+1|+\sqrt{3x+4}\le 3$.

39. Для каждого значения x, удовлетворяющего условию $x^2-|x|-42=0$, найти все числа y, для которых выполнено неравенство $-7\sqrt{y^2-10y+34}\ge 4x+7$.

40. Решить неравенство $\sqrt{x^2-3x+2}\le x-1$.

41. Решить неравенство $\sqrt[3]{2x-(x+2)\sqrt{x+2}+3}+\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3+2x}\le 0$.

42. Решить неравенство $\dfrac{x^2-4}{\sqrt{15+2x-x^2}}\ge|x|-2$.

43. Решить неравенство $5|x|\le x(3x+2-2\sqrt{8-2x-x^2})$.

44. Решить неравенство $\sqrt{4-x}-2 \le x|x-3|+4x$.

45. Решить неравенство $11\sqrt{2x-\sqrt{48x-144}} > 2x-12$.

46. Решить неравенство $\sqrt{2-\dfrac{2}{x+1}} < \sqrt{2+\dfrac{2}{x}}+1$.

47. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2+5x-84}}{x-7} \ge 0$.

48. Решить неравенство $\sqrt{2-x}-\sqrt{4+x} \le \sqrt{x+3}$.

Зачетные задания

49. Решить неравенство $\sqrt{x-1} < 3-x$.

50. Решить неравенство $\sqrt{x+1}\cdot(x^2+3x-4) \ge 0$.

51. Решить неравенство $\sqrt{1-|x|} \ge x-2$.

52. Решить неравенство $\dfrac{x^2+4x+4}{2x+12} \le 1-\dfrac{\sqrt{x^2+8x+16}}{x+4}$.

53. Решить неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-7}}+x \le \dfrac{1}{\sqrt{x^2-7}}+9$.

54. Решить неравенство $\sqrt{6x-x^2-8}-\sqrt{7-2x} \ge \sqrt{8x-x^2-15}$.

55. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2-6x-7}}{x-7} \ge \dfrac{x+1}{3}$.

56. Решить неравенство $\sqrt{441-x^2} \le x+21$.

57. Решить неравенство $\sqrt{\dfrac{5x^2}{2}-x^3} \ge \sqrt{6x-\dfrac{5x^2}{2}}$.

58. Решить неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{3-x}} > \dfrac{1}{x-2}$.

59. Решить неравенство $\sqrt{5x-x^2+6} < \sqrt{6}-x$.

60. Решить неравенство $x\sqrt{2-x} \le x^2-x-2-\sqrt{2-x}$.

61. Решить неравенство $\sqrt{x^2-25}\cdot(x+3) < 0$.

6. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Приведем сначала основные формулы, с помощью которых производятся преобразования показательных уравнений и неравенств:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Уравнение вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$. Уравнение вида $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{h(x)}$ равносильно следующей совокупности:

$$(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{h(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 1 \\ \begin{cases} g(x) = h(x) \\ f(x) > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

В уравнениях такого вида основание степени $f(x)$ всегда должно быть положительно. Если в конце задачи получено уравнение $a^x = b$, где a и b положительны, и корень этого уравнения не угадывается в явном виде, то решением уравнения будет служить число $x = \log_a b$.

Пример 1. Решить уравнение

$$9^x - 75 \cdot 3^{x-1} - 54 = 0.$$

Решение. Пусть $y = 3^x$, $y > 0$. Тогда исходное уравнение примет следующий вид:

$$y^2 - 25y - 54 = 0 \Leftrightarrow y = 27 \text{ или } y = -2.$$

Условию $y > 0$ удовлетворяет $y = 27$. Значит,

$$y = 27 \Leftrightarrow 3^x = 27 \Leftrightarrow x = 3.$$

Ответ: $x = 3$.

Пример 2. Решить уравнение

$$9^{1-(x-1)^2} - 12 \cdot 3^{-(x-1)^2} + 1 = 0.$$

Решение. Пусть $y = 3^{-(x-1)^2}$, тогда уравнение примет следующий вид:

$$9y^2 - 12y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{3}.$$

Если $y = \frac{2+\sqrt{3}}{3}$, получим уравнение

$$3^{-(x-1)^2} = \frac{2+\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow -(x-1)^2 = \log_3\left(\frac{2+\sqrt{3}}{3}\right),$$

которое не имеет решений, так как в правой части стоит положительное число, а в левой — неположительное. Если $y = \frac{2-\sqrt{3}}{3}$, имеем:

$$3^{-(x-1)^2} = \frac{2-\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow -(x-1)^2 = \log_3\left(\frac{2-\sqrt{3}}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = -\log_3\left(\frac{2-\sqrt{3}}{3}\right) \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{-\log_3\left(\frac{2-\sqrt{3}}{3}\right)}.$$

В этом случае число, стоящее под знаком корня, положительно.

Ответ: $x = 1 \pm \sqrt{-\log_3\left(\frac{2-\sqrt{3}}{3}\right)}$.

Тематические задания

1. Решить уравнение $4^{\sqrt{3x^2-2x}+1} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$.
2. Решить уравнение $6 \cdot (0,75)^{2-2x-x^2} - (0,75)^{x^2+2x-2} = 25^{\log_{125} 8} - 3$.
3. Найти решения уравнения $3^{x^2+4x} = \frac{1}{25}$, удовлетворяющие неравенству $x > -3$.
4. Решить уравнение $4^{-x+\frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 = 0$.
5. Решить уравнение $10^{1+x^2} - 10^{1-x^2} = 99$.
6. Найти все действительные решения уравнения $4^{3x^2+x} - 8 = 2 \cdot 8^{\frac{3x^2+x}{3}}$.
7. Решить уравнение $4^x - 2^{x+1} = 3$.
8. Решить уравнение $2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} = 1$.
9. Решить уравнение $5^{|4x-6|} = 25^{3x-4}$.
10. Найти все решения уравнения $9 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 5 \cdot 6^{\frac{1}{x}} = 4 \cdot 9^{\frac{1}{x}}$.
11. Решить уравнение $3^{x+3} \cdot 7^{x+3} = 3^{2x} \cdot 7^{2x}$.
12. Решить уравнение $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} = 2^{5-x} + 9$.
13. Решить уравнение $4^x - 8 \cdot 2^x - 128 = 0$.

14. Решить уравнение $8^x - 4^x = 2^x$.

15. Решить уравнение $5^{x+1} = (0,2)^{x-2}$.

16. Решить уравнение $2^{|x+1|} = (\sqrt{2})^{-2x+3}$.

17. Решить уравнение $\dfrac{2\cdot 6^x - 4^x - 15}{6^x - 9^x - 5} = 3$.

18. Решить уравнение $8^x = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{2-0.5x^2}$.

19. Решить уравнение $7^x - 14\cdot 7^{-x} = 3^{\log_3 2} + 3$.

20. Решить уравнение $3\cdot 4^x - 7\cdot 10^x + 2\cdot 25^x = 0$.

21. Найти все решения уравнения $32^{3(x^3-8)} = 8^{19(2x-x^2)}$.

22. Решить уравнение $4^x + 3\cdot 2^{x+2} = 64$.

23. Решить уравнение $2 - 3^{x-2} = 3^{x-1}$.

24. Решить уравнение $4^{\sqrt{x}+1,5} - 13\cdot 2^{\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}} + 20 = 0$.

25. Решить уравнение $25^x + 24\cdot 5^{x-1} - 1 = 0$.

26. Решить уравнение $2^{x+5} + 8\cdot 2^{x-1} - 4 = 0$.

27. Решить уравнение $\dfrac{4^x - 2^{x+2} + 3}{2^{\frac{x}{2}} - 1} + 2^{\frac{x}{2}} + 1 = 0$.

28. Найдите число решений уравнения $2^{x+1} + 2^{1-x} = 1 - 4x - x^2$ и дайте обоснование ответа.

29. Решить уравнение $3^{\frac{x+2}{3x-4}} - 7 = 2\cdot 3^{\frac{5x-10}{3x-4}}$.

30. Решить уравнение $2^{x\log_2 7}\cdot 7^{x^2+x} = 1$.

31. Решить уравнение $5^{x-1} + 5\cdot(0,2)^{x-2} = 26$.

32. Решить уравнение $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2}\cdot 3^{2x+5} = 27^{-1}$.

33. Решить уравнение $2^{x-1}\cdot 3^x = 0,5\cdot 6^{2-x}$.

34. Решить уравнение $9^{x+1} + 3^{x+2} - 18 = 0$.

35. Решить уравнение $5^{2x} = 115\cdot 5^{x-1} + 50$.

36. Решить уравнение $4^x - 5\cdot 2^x + 4 = 0$.

37. Решить уравнение $7^{2x} = [6 - (0,7)^x]\cdot 100^x$.

38. Решить уравнение $6^{\frac{x}{2}} - 3\cdot 6^{\frac{2-3x}{2}} = 3\cdot 6^{-\frac{x}{2}}$.

39. Решить уравнение $3^{|x|} = 5^{x^2+3x}$.

40. Решить уравнение $25^x - 24 \cdot 5^{x-1} - 5^{\log_5 3} + 2 = 0$.

41. Решить уравнение $2^{-2x^2+1} - 12 \cdot 2^{-x^2} + 5 = 0$.

42. Решить уравнение $12^x + 6^x - 2 \cdot 4^x - 2 \cdot 3^x - 2^{x+1} + 4 = 0$.

43. Решить уравнение $2^{2^x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^x-1} = 3$.

Зачетные задания

44. Решить уравнение $|7^x - 3| = 7^x + 1$.

45. Решить уравнение $4 \cdot 25^{\sqrt{x}} - 23 \cdot 5^{\sqrt{x}} + 15 = 0$.

46. Решить уравнение $\sqrt{2^{(x^2)}} = (2^{\sqrt[5]{x}})^5$.

47. Решить уравнение
$(26 + 15\sqrt{3})^x - 5(7 + 4\sqrt{3})^x + 6(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 5$.

48. Решить уравнение $4^{\frac{1}{x}} - 5 \cdot 2^{2+\frac{1}{x}} + 64 = 0$.

49. Решить уравнение $4 \cdot 3^{2x+\frac{1}{2x}} - 8 \cdot 3^{x+\frac{1}{4x}} + 2 = |4 \cdot 3^{x+\frac{1}{4x}} - 1|$.

50. Решить уравнение $27^{\frac{2}{x}} + 27 \cdot 3^{\frac{3-x}{x}} - 36 = 0$.

51. Решить уравнение $2^{2x-5} - 4^{x-2} = 32^{\frac{2x}{5}} - 66$.

52. Решить уравнение $2\sqrt{3^x} + (\sqrt{3})^x - \sqrt{3} \cdot 3^x + \sqrt{3} = 0$.

53. Решить уравнение $4^{3x^2+x} - 8 = 2 \cdot 8^{x^2+\frac{x}{3}}$.

54. Решить уравнение $9^{x-1} \cdot 3^{2x} \cdot 4^{4x} + 16^{x-1} \cdot 3^{4x} \cdot 2^{4x} - 25 = 0$.

55. Решить уравнение $(x + 4)(x^2 + 4) = 5 - 2^{x+4} - 16 \cdot 2^{\frac{x}{2}}$.

56. Решить уравнение $3 \cdot 81^x - 10 \cdot 9^x + 3 = 0$.

57. Решить уравнение
$12 \cdot \left(3^{4x^2+2x-1} - 1\right)^2 - \left(3^{2(x-1)+4x^2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(3^{4x^2+2x+1} - 3\right) = 16$.

7. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Неравенство вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$ при $a > 1$ и неравенству $f(x) < g(x)$ при $a \in (0,1)$. Неравенство вида $(f(x))^{g(x)} > (f(x))^{h(x)}$ равносильно следующей совокупности:

$$(f(x))^{g(x)} > (f(x))^{h(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 1 \\ g(x) > h(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ g(x) < h(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Неравенство вида $(f(x))^{g(x)} \geq (f(x))^{h(x)}$ равносильно совокупности

$$(f(x))^{g(x)} \geq (f(x))^{h(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 1 \\ g(x) \geq h(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) \leq 1 \\ g(x) \leq h(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{7}{9^x - 2} \geq \frac{2}{3^x - 1}.$$

Решение. Пусть $y = 3^x$, $y > 0$. Тогда неравенство примет следующий вид:

$$\frac{7}{y^2 - 2} \geq \frac{2}{y - 1} \Leftrightarrow \frac{2y^2 - 7y + 3}{(y^2 - 2)(y - 1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)(y - 3)}{(y - \sqrt{2})(y + \sqrt{2})(y - 1)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\overset{(\text{т.к. } y+\sqrt{2}>0)}{\Leftrightarrow} \frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)(y - 3)}{(y - \sqrt{2})(y - 1)} \leq 0.$$

Решая данное неравенство методом интервалов (рис. 4),

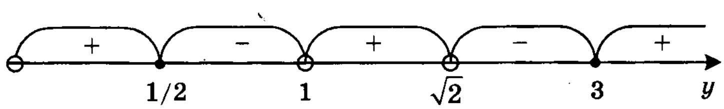

Рис. 4

получим:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} \leq y < 1 \\ \sqrt{2} < y \leq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} \leq 3^x < 1 \\ \sqrt{2} < 3^x \leq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 \frac{1}{2} \leq x < 0 \\ \log_3 \sqrt{2} < x \leq 1. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \left[\log_3 \frac{1}{2}, 0\right) \cup (\log_3 \sqrt{2}, 1]$.

Пример 2. Решить неравенство

$$2\cdot 2^{-2x^2}-7\cdot 2^{-x^2}+3>0.$$

Решение. Пусть $y=2^{-x^2}$, $y>0$. Тогда данное неравенство примет следующий вид:

$$2y^2-7y+3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y<\dfrac{1}{2} \\ y>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{-x^2}<\dfrac{1}{2} \\ 2^{-x^2}>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^2<-1 \\ -x^2>\log_2 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2>1 \\ x^2<-\log_2 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty),$$

так как второе неравенство совокупности решений не имеет, поскольку $-\log_2 3<0$.

Ответ: $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

Тематические задания

1. Решить неравенство $5^{2x-10-3\sqrt{x-2}}-4\cdot 5^{x-5}<5^{1+3\sqrt{x-2}}$.
2. Решить неравенство $98-7^{x^2+5x-48}\geq 49^{x^2+5x-49}$.
3. Решить неравенство $\dfrac{11\cdot 3^{x-1}-31}{4\cdot 9^x-11\cdot 3^{x-1}-5}\geq 5$.
4. Решить неравенство $9^{\sqrt{x^2-3}}+3<28\cdot 3^{\sqrt{x^2-3}-1}$.
5. Решить неравенство $3^{4x^2-3x+0,5}<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-40x^2}$.
6. Решить неравенство $7^{-x}-3\cdot 7^{1+x}>4$.
7. Решить неравенство $2^{x-1}>\left(\dfrac{1}{16}\right)^{\frac{1}{x}}$.
8. Решить неравенство $5^x-3^{x+1}>2(5^{x-1}-3^{x-2})$.
9. Решить неравенство $2^{x+3}-x^3\cdot 2^x\leq 16-2x^3$.
10. Решить неравенство $7^{x-0,125x^2}<7^{1-x}\cdot(\sqrt[8]{7})^{x^2}+6$.
11. Решить неравенство $4\cdot 4^x<7\cdot 2^x+2$.
12. Решить неравенство $3^x<1+12\cdot 3^{-x}$.
13. Решить неравенство $3^x-3^{0,5-x}>\sqrt{3}-1$.
14. Решить неравенство $\sqrt{2\cdot 3^{2x+1}-\dfrac{5}{2}\cdot 3^x}>3^{x+1}-1$.
15. Решить неравенство $8^x\geq 6\cdot 9^{|x-1|}$.

16. Решить неравенство $\dfrac{2^{2+\sqrt{x-1}}-24}{2^{1+\sqrt{x-1}}-8}>1$.

17. Решить неравенство $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{2-x}{x}}+\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}<\dfrac{1}{3}$.

18. Решить неравенство $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x-1|}>\left(\dfrac{1}{4}\right)^{|x+1|}$.

19. Решить неравенство $(x^2-8x+15)(2^{x-3}+2^{3-x}-2)^{-1}\sqrt{x-1}\le 0$.

20. Решить неравенство $\sqrt{9^x+12^x-2^{4x+1}}>\sqrt{3\cdot 4^{2x+1}+12^x-9^x}$.

21. Решить неравенство $\left(\sqrt[3]{7}\right)^{35x}<\dfrac{1}{7}\cdot 7^{|4x^2-12x-1|}$.

22. Решите неравенство $|3^x-4|+|x^2-4x+3|\le 3^x+4x-x^2-7$.

23. Решите неравенство $\left|x-4^{1+\sqrt{3-x}}\right|\le\dfrac{5}{3}x-4\cdot 4^{\sqrt{3-x}}$.

24. Решить неравенство $\sqrt{7+2^{1-x}}\ge 7-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2}$.

25. Решить неравенство $2^{\frac{1-x}{x}}<2^{\frac{1-2x}{2x}}+1$.

26. Решить неравенство $25^{-x}-5^{-x+1}\ge 50$.

27. Решить неравенство $\dfrac{3^x-2}{x^2-6x+5}\le 0$.

28. Найти наибольшее целое число k, удовлетворяющее неравенству $4\cdot 3^{2k+1}+3^k<1$.

29. Решить неравенство $\sqrt{8\cdot 16^x-\dfrac{1}{2}\cdot 9^x}\le 3\cdot 4^x-3^x$.

30. Решить неравенство $5\cdot\left(\dfrac{8}{125}\right)^x-13\cdot\left(\dfrac{4}{25}\right)^x-6\cdot\left(\dfrac{2}{5}\right)^x\ge 0$.

31. Решить уравнение $4\cdot 9^x-5\cdot 3^{x+1}-4\ge 0$.

32. Решить неравенство $4^{x+1}+2^{x+2}-8<0$.

33. Решить неравенство $(\sqrt{2}+1)^x+1<2(\sqrt{2}-1)^x$.

34. Решить неравенство $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{(x^2-2x-15)^3}}\cdot 7^{(x+3)^2(x-5)}\le 1$.

35. Решить неравенство $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x^2}>(2,25)^{x^2-10}$.

36. Найти все решения неравенства $\dfrac{21-2^x-2^{6-x}-|3-2^x|}{5-|3-2^x|}\ge 1$.

37. Решить неравенство $2^{x-3} < \dfrac{2}{8^{\frac{1}{x}}}$.

38. Решить неравенство $\sqrt{5} \cdot 5^{\frac{7-2x}{2}} + 5^{x-2} > 10$.

Зачетные задания

39. Решить неравенство $2\sqrt{5 \cdot 6^x - 2 \cdot 9^x - 3 \cdot 4^x} + 3^x < 2^{x+1}$.

40. Решить неравенство $4 \cdot \sqrt{\dfrac{2^x - 1}{2^x}} + \sqrt{14} \le 14 \cdot \sqrt{\dfrac{2^{x-2}}{2^x - 1}}$.

41. Решить неравенство $\dfrac{4^x + 5}{2^x - 11} \ge -1$.

42. Решить неравенство $31^x + 33 \ge 11(7 - \sqrt{18})^x + 3(7 + \sqrt{18})^x$.

43. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{1+3^{-x}}}{\sqrt{1+3^{-x}} - \sqrt{1-3^{-x}}} - \frac{3^{-x} - 1}{\sqrt{1-9^{-x}} + 3^{-x} - 1} \ge \frac{1 + \sqrt{1-9^{-x}}}{3^{-x}}.$$

44. Решить неравенство $\sqrt{25^x - 2^{3-x}} < 7 \cdot 2^{-\frac{x}{2}} - 2 \cdot 5^x$.

45. Решить неравенство $2^{x^2} \cdot 3^x < 6$.

46. Решить неравенство $(2^{|2x-1|} - 1)(\sqrt{4 \cdot 2^{-|2x-1|} - 3} - 1) \ge 0$.

47. Решить неравенство $\left|4^{3x} - 2^{4x+2} \cdot 3^{x+1} + 20 \cdot 12^x \cdot 3^x\right| \ge 8 \cdot 6^x \cdot (8^{x-1} + 6^x)$.

48. Решить неравенство $6^{\sqrt[10]{x}} \le 10^{\sqrt[6]{x}}$.

49. Решить неравенство $\sqrt{3} \cdot 4^x \le \sqrt{2} \cdot 9^x$.

50. Решить неравенство $3^{2-x} + 6 \cdot (\sqrt{3})^{2-2x} > \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+x-2}-3}$.

51. Решить неравенство $2^{\frac{6x-4}{x}} < \sqrt[3]{8^{3x-7}}$.

52. Решить неравенство $\dfrac{2^x - 2^{2-x} - 3}{2^x - 2} \ge 0$.

8. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Приведем сначала основные формулы, с помощью которых производятся преобразования логарифмических уравнений и неравенств:

$$\log_a b + \log_a c = \log_a bc, \quad \text{но} \quad \log_a bc = \log_a |b| + \log_a |c|$$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}, \quad \text{но} \quad \log_a \frac{b}{c} = \log_a |b| - \log_a |c|$$

$$c \log_a b = \log_a b^c, \quad \text{но} \quad \log_a b^c = c \log_a |b|$$

$$\log_{a^c} b = \frac{1}{c} \log_{|a|} b$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \Rightarrow \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Уравнение вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильно одной из следующих систем:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Уравнение вида $\log_{f(x)} g(x) = a$ равносильно системе

$$\log_{f(x)} g(x) = a \Leftrightarrow \begin{cases} (f(x))^a = g(x) \\ f(x) > 0 \\ f(x) \neq 1. \end{cases}$$

Пример 1. Решить уравнение

$$\log_3 x - \log_3 (x+8) = -\log_3 (x+3).$$

Решение. Найдем область определения данного уравнения, для чего решим следующую систему:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x + 8 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -8 \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0, +\infty).$$

Преобразуем исходное уравнение следующим образом:

$$\log_3 x - \log_3 (x+8) = -\log_3 (x+3) \Leftrightarrow \log_3 x + \log_3 (x+3) = \log_3 (x+8) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x(x+3) = \log_3 (x+8) \Leftrightarrow x(x+3) = x + 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \ \text{или} \ x = -4.$$

Области определения удовлетворяет только $x = 2$.

Ответ: $x = 2$.

Пример 2. Решить уравнение:

$$\log_{2x+3}(x-2)^2 = \log_{\frac{x}{6}+\frac{1}{2}}(x-2)^2.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение, воспользовавшись формулой перехода к новому основанию. Имеем:

$$\log_{2x+3}(x-2)^2 = \log_{\frac{x}{6}+\frac{1}{2}}(x-2)^2 \Leftrightarrow \frac{\lg(x-2)^2}{\lg(2x+3)} = \frac{\lg(x-2)^2}{\lg\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{2}\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg(x-2)^2\left(\frac{1}{\lg(2x+3)} - \frac{1}{\lg\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{2}\right)}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lg(x-2)^2\left(\lg\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{2}\right) - \lg(2x+3)\right)}{\lg(2x+3)\cdot\lg\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{2}\right)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \lg(x-2)^2 = 0 \\ \lg\left(\dfrac{x}{6}+\dfrac{1}{2}\right) = \lg(2x+3) \end{array}\right. \\ 2x+3 > 0, \neq 1 \\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{1}{2} > 0, \neq 1 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \\ x = -\dfrac{15}{11} \end{array}\right. \\ 2x+3 > 0, \neq 1 \\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{1}{2} > 0, \neq 1 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{или} \quad x = -\frac{15}{11}.$$

Ответ: $x = 1$, $x = -\frac{15}{11}$.

Тематические задания

1. Решить уравнение $\log_8(4^{x^2-1}-1) + \frac{2}{3} = \log_8(2^{x^2+2}-7)$.

2. Решить уравнение $\log_2\log_2 x = \log_4\log_4 2x$.

3. Решить уравнение $(x+4)\log_4(x+1) - (x-4)\log_2(x-1) = \frac{8}{3}\log_2(x^2-1)$.

4. Решить уравнение $\log_{x^2-6x+8}(\log_{2x^2-2x+3}(x^2+2x)) = 0$.

5. Решить уравнение $\log_x \sqrt[3]{4} + 3\log_x(x\sqrt[3]{2}) + (\log_x(\sqrt[3]{4})^2 = 12$.

6. Решить уравнение $\log_{x-1} \sqrt[4]{2x^2 - 8x + 9} = \frac{1}{2}$.

7. Решить уравнение $\log_{\sqrt{x^2-1}}(2x^2 - 4x + 2) = 2$.

8. Решить уравнение $\log_{16}(x^2 - 2x - 3)^2 - 2\log_{16}(x^2 + x - 2) = \frac{1}{2}$.

9. Решить уравнение $2\sqrt[3]{2\log_{16}^2 x} - \sqrt[3]{\log_2 x} - 6 = 0$.

10. Найти все решения уравнения $4 + \log_2 x^2 = \log_x 64$.

11. Решить уравнение $2\lg\left(x + \frac{1}{2}\right) - \lg(x-1) = \lg\left(x + \frac{5}{2}\right) + \lg 2$.

12. Решить уравнение $\log_{(1-2x^2)} x = \frac{1}{4} - \frac{3}{\log_2(1-2x^2)^4}$.

13. Решить уравнение $\log_{1-2x}(6x^2 - 5x + 1) - \log_{1-3x}(4x^2 - 4x + 1) = 2$.

14. Решить уравнение $1 + \lg(1 + x^2 + 2x) - \lg(6 + x^2) = 2\lg(1 + x)$.

15. Решить уравнение $3\sqrt{\log_3 x} - \log_3(3x) - 1 = 0$.

16. Решить уравнение $3\log_8(x-2) = \log_2 \sqrt{2x-1}$.

17. Решить уравнение $\log_3(2x+1) = 2\log_{2x+1} 3 + 1$.

18. Решить уравнение $2(\lg x)^2 + (1 - \sqrt{2})\lg x^2 = 2\sqrt{2}$.

19. Решить уравнение $\frac{1}{\sqrt{3x-5}} = (3x-5)^{\log_{\frac{1}{25}}(2+5x-x^2)}$.

20. Решить уравнение $\log_2(x^2 - 3) - \log_2(6x - 10) + 1 = 0$.

21. Решить уравнение $\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2 - 2x - 2) = \log_{2+\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 3)$.

22. Решить уравнение $x\log_2 x^2 + 1 = 2x + 2\log_4 x$.

23. Решить уравнение $\log_{5-x^2}(2x^2 - 8x - 2) = 1 + \log_{5-x^2} 2$.

24. Решить уравнение $\log_2(x^2 - 2x - 1) - \log_2\left(x - \frac{1}{2}\right) = 1$.

25. Решить уравнение $\log_5(x-8)^2 = 2 + 2\log_5(x-2)$.

26. Решить уравнение $(2x^2 - 5x + 2)(\log_{2x}(18x) + 1) = 0$.

27. Решить уравнение $\log_{49}(2x^2 + x - 5) + \log_{\frac{1}{7}}(1 + x) = 0$.

28. Решить уравнение $2\log_3(\sqrt{12 + x} - 2) = \log_3(x + 2)$.

29. Решить уравнение $\log_2 x^2 + 2\log_2(x-6) = 8$.

30. Решить уравнение $\left|3\log_x x^4 + 7\log_7 2 \cdot \log_2 x^2\right| = -\log_x 49$.

31. Решите уравнение $\log_2(9^x + 2\cdot 3^x - 5) = 1 + 2\log_4(3^{x+1} - 4)$.

32. Решите уравнение $\log^2_{\frac{1}{2}}(4x) + \log_2\left(\frac{x^2}{8}\right) = 8$.

Зачетные задания

33. Решить уравнение $\log_2(11-x) + \log_2(x+1) = \log_2[(x+1)(x^2+5x-5)]$.

34. Решить уравнение $\log_2(x^2-4x+3) - \log_2(x-1)\log_2(x-3) = 1$.

35. Решить уравнение $\left(\frac{1}{2}\log_3 x - 6\right)\log_9 x = 4(2 - \log_9 x)$.

36. Решить уравнение $\log_9\left(\frac{x^2}{4}\right) + \log_3(x+5) = 1$.

37. Решить уравнение $\log_{8-7x}\left(x^3 - 3x^2 - \frac{37x}{8} + \frac{55}{8}\right) + 2\log_{(8-7x)^2}(x+3) = 1$.

38. Решить уравнение $|\log_2(2x+7)| = \log_2(1+|x+3|) + \log_2(1-|x+3|)$.

39. Решить уравнение $x^{\log_7 4} + 5\cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0$.

40. Решить уравнение $\sqrt{\log_x \sqrt{2x}} \cdot \log_4 x = -1$.

41. Решить уравнение $\log_{\frac{1}{3}}(1 + (x^2-3x+2)^2) = \sqrt{x^2-6x+8}$.

42. Решить уравнение $\dfrac{\log_3(-x)}{\log_9(-5x-4)} = 1$.

43. Решить уравнение $9\cdot(x^2)^{\log_3 x} = x^5$.

44. Решить уравнение $9^{\log_3^2 x - \frac{1}{2}} = x^{\log_3 x} + 18$.

9. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Неравенство вида $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ равносильно системе

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0, \end{cases}$$

если $a > 1$, и системе

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0, \end{cases}$$

если $a \in (0,1)$. Неравенство вида $\log_{f(x)} g(x) > a$ равносильно совокупности двух систем:

$$\log_{f(x)} g(x) > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ 0 < g(x) < (f(x))^a \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 1 \\ g(x) > (f(x))^a. \end{cases} \end{array} \right.$$

Неравенство вида $\log_{f(x)} g(x) < a$ равносильно следующей совокупности:

$$\log_{f(x)} g(x) < a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ g(x) > (f(x))^a \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 1 \\ 0 < g(x) < (f(x))^a. \end{cases} \end{array} \right.$$

Пример 1. Решить неравенство

$$2\log_{\frac{1}{2}}(x-2) - \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x - 2) \ge 1.$$

Решение. Найдем область определения неравенства, для чего решим следующую систему:

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x^2 - x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2, +\infty).$$

На области определения преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 - 1 \ge \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x - 2) \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} 2(x-2)^2 \ge \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x - 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(x-2)^2 \le x^2 - x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 \le 0 \Leftrightarrow x \in [2,5].$$

С учетом области определения получаем, что $x \in (2,5]$.

Ответ: $x \in (2,5]$.

Пример 2. Решить неравенство

$$\log_2(5-x)\cdot\log_{x+1}\frac{1}{8}\ge -6.$$

Решение. Преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$\log_2(5-x)\cdot\log_{x+1}\frac{1}{8}\ge -6 \Leftrightarrow \log_2(5-x)\cdot\frac{\log_2\frac{1}{8}}{\log_2(x+1)}\ge -6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(5-x)\cdot\frac{-3}{\log_2(x+1)}\ge -6 \Leftrightarrow \frac{\log_2(5-x)}{\log_2(x+1)}\le 2 \Leftrightarrow \log_{x+1}(5-x)\le 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x+1<1\\5-x\ge(x+1)^2\end{cases}\\ \begin{cases}x+1>1\\0<5-x\le(x+1)^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1<x<0\\x^2+3x-4\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}x>0\\x<5\\x^2+3x-4\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1<x<0\\-4\le x\le 1\end{cases}\\ \begin{cases}0<x<5\\x\in(-\infty,-4]\cup[1,+\infty)\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-1,0)\cup[1,5).$$

Ответ: $x\in(-1,0)\cup[1,5)$.

Тематические задания

1. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-6)+\log_9 x^2\ge 0$.

2. Решить неравенство $\log_3\sqrt{5-2x}\cdot\log_x 3<1$.

3. Найти все значения x, для которых справедливо неравенство $2\log_7 x-\log_x 49<3$.

4. Решить неравенство $\log_4(3^x-1)\cdot\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{3^x-1}{16}\right)\le\frac{3}{4}$.

5. Решить неравенство $\log_{2x-x^2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^4>0$.

6. Решить неравенство $\log_{\frac{x^2-18x+91}{90}}\left(5x-\frac{3}{10}\right)\le 0$.

7. Решить неравенство $\dfrac{\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x+3}}{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)}<1$.

8. Верно ли, что всякое решение неравенства $\log_2(8+8x-5x^2)>2$ будет решением неравенства $\log_2(2+2x-x^2)>0$?

9. Найти все значения x, удовлетворяющие неравенству
$$\frac{\log_3\left(x+\frac{4}{5}\right)}{\log_7\left(x^2-2x+\frac{7}{16}\right)}<0.$$

10. Решить неравенство $\sqrt{1-\log_5(x^2-2x+2)}<\log_5(5x^2-10x+10)$.

11. Решить неравенство $\lg|2x+3|^3+2\log_{(2x+3)^3}10<3$.

12. Решить неравенство $\log_{9x^2-6x+1}\left(\dfrac{1}{9x^2-18x+8}\right)<-1$.

13. Решить неравенство $\log_{(x-2)}\dfrac{1}{5}\geq\log_{\frac{x-3}{x-5}}\dfrac{1}{5}$.

14. Решить неравенство $-3\log_{(x-1)}\dfrac{1}{3}+\log_{\frac{1}{3}}(x-1)>2\left|\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\right|$.

15. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{\log_2 x}}(4x^2-20x+22)<0$.

16. Найти все решения неравенства $\log_{10-x}\left(\dfrac{19}{2}-x\right)^2>2\log_{x-9}(x-9)$.

17. Решить неравенство $\sqrt{\log_9(3x^2-4x+2)}+1>\log_3(3x^2-4x+2)$.

18. Решить неравенство $\log_x\left(\dfrac{10x+2}{25(1-x)}\right)>0$.

19. Решить неравенство $\log_3\log_{\frac{9}{16}}(x^2-4x+3)\leq 0$.

20. Решить неравенство $(4x^2-16x+7)\log_2(x-3)>0$.

21. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1}\geq 0$.

22. Решить неравенство $\log_2^2(2-x)-8\log_{\frac{1}{4}}(2-x)\geq 5$.

23. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(1+x-\sqrt{x^2-4})\leq 0$.

24. Решить неравенство
$$(\sqrt{x^2-4x+3}+1)\log_5\frac{x}{5}+\frac{1}{x}\cdot(\sqrt{8x-2x^2-6}+1)\le 0.$$

25. Решить неравенство $\log_4(x^2-5)<\log_4\left(\frac{7|x|}{3}-3\right)$.

26. Решить неравенство $\sqrt{7-\log_2 x^2}+\log_2 x^4>4$.

27. Решить неравенство $0{,}25\cdot x^{0{,}5\log_2 x}\ge 2^{0{,}25\log_2^2 x}$.

28. Решить неравенство $\frac{1}{\log_2 x-4}>\frac{1}{\log_2 x}$.

29. Решить неравенство $\frac{6-\lg x^4}{3+2\lg x^2}<2$.

30. Решить неравенство $\log_{x-1}(x^2-8x+16)+2\log_{4-x}(-x^2+5x-4)>3$.

31. Решить неравенство $\log_{\sqrt{6}-\sqrt{2}}(x^2+4x+11-4\sqrt{3})>2$.

32. Решить неравенство $\log_{(x+1)^2}8+3\log_4(x+1)\ge\frac{37}{4}$.

33. Решить неравенство $\log_{10-x^2}\left(\frac{16}{5}x-x^2\right)<1$.

34. Решить неравенство $\frac{\log_3 x^7+2}{\log_9 x^6}\ge\frac{5}{\log_x 3}+2$.

35. Решить неравенство $\log_2(x-2)-2\le 4\log_{\frac{1}{4}}\sqrt{x-5}$.

36. Решить неравенство $\frac{\log_3\left(1-\frac{3}{2}x\right)}{\log_9 2x}\ge 1$.

37. Решить неравенство $49^{\log_x 5}-7^{\log_x 5}-2\ge 0$.

38. Решить неравенство $2(\log_x 2-1)\log_2(2x)\le 3$.

39. Решить неравенство $\log_x(20x+3x^2-x^3)\ge 3$.

40. Решить неравенство $\log_2(11-x)+\log_2(x+1)\le\log_2((x+1)(x^2+5x-5))$.

41. Решить неравенство $\frac{\sqrt[4]{15}}{\log_{x+1}11}\ge\frac{\log_{11}(x+1)}{\log_{123}11}$.

42. Решите неравенство $\log_{\sqrt{8-2\sqrt{7}}+1-\sqrt{3}}(4x-x^2-2)\ge 0$.

43. Решите неравенство $\log_{2-5x}3+\frac{1}{\log_2(2-5x)}\le\frac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)}$.

44. Решить неравенство $\dfrac{2}{\dfrac{2}{\log_2 x}-1} > -3$.

45. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2-25}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1} \geq 0$.

46. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{4}}(x-\sqrt{x+1}) \geq -1$.

Зачетные задания

47. Определить, какие из чисел -3, -1, 1, 3 являются решениями неравенства $\left|\dfrac{1}{3}-\log_6 2\right| \cdot x \leq \dfrac{1}{3}-\log_6 2$.

48. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{4}}(\sqrt{x+3}-x+3) \geq -2+\log_{\frac{1}{4}}\dfrac{3}{8}$.

49. Решить неравенство $\dfrac{x-4\sqrt{x}-2\log_2 x}{\log_2 x+2} > -2$.

50. Решить неравенство $\sqrt{\log_2(x^2-x-1)} \cdot \dfrac{x+5}{4x-3} \leq 0$.

51. Решить неравенство $\log_{x-1}\dfrac{x^2-x-6}{2x-8} \leq 1$.

52. Решить неравенство $\dfrac{(\log_2 3)^x-(\log_2 3)^2}{(\log_2 3)^{-x}-x\log_{2^x} 3} > 0$.

53. Решить неравенство $\log_{2x-3}(\sqrt{x+2}+x-3) \leq 1$.

54. Решить неравенство
$\left(x+\dfrac{8}{x}\right) \cdot \left|\log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2-4x+4)\right| \geq 9 \cdot \left|\log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2-4x+4)\right|$.

55. Решить неравенство $\left|\log_{x+1}\sqrt{(x-2)^4}+2\right| \geq -3+\log_{\frac{1}{x+1}}\sqrt{(x-2)^6}$.

56. Решить неравенство $\left(x^2-\log_2\dfrac{3^x}{5}-\log_3 5^x\right) \cdot \log_5(125 \cdot 25^{x-3}) < 0$.

57. Решить неравенство $\log_{\frac{3}{4}}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{x-1}{4x}\right) \geq 2$.

58. Решить неравенство $\left|3-\log_2(9x^2-30x+25)\right| \cdot \log_{5-3x}\dfrac{1}{16} \geq -4$.

59. Решить неравенство $4^{\log_{1-x}(3x^2-8x+4)} \geq (x^2-3x+2)^{\log_{1-x}16}$.

60. Решить неравенство $\dfrac{\log_4(2-x)-\log_6(2-x)}{\log_6 x-\log_9 x}\le \log_4 9$.

61. Найти $\log_2\dfrac{2x}{2^x}$ при условии

$$|\log_{\sqrt{2}} x^{\frac{x}{2}}-2\log_2 x|+||2-x|-|\log_2 x||\le (x-2)\log_8 x^3.$$

62. Решить неравенство $\log_2\left(\dfrac{x^2+|x-3|+3}{x+1}\right)^2-|\log_2 x-2|>\log_2 x+2$.

63. Решить неравенство $\log_{x+2}(2-x)\ge\dfrac{|\log_5(2x+3)-1|}{\log_5(x+2)}$.

64. Решить неравенство $\log_5\dfrac{5-x}{2-x}\ge\log_{25}\sqrt{(x-5)^4}-1$.

10. СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Одним из основных методов решения алгебраических систем является *метод подстановки*. Он заключается в том, что из одного уравнения мы можем выразить какую-либо переменную и подставить в другое уравнение. При решении системы уравнения можно умножать на отличное от нуля число, а также складывать друг с другом.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + x - 2y = 1 \\ 5x^2 + 2,5y^2 + 3x - 4y = 4. \end{cases}$$

Решение. Вычтем из второго уравнения системы первое уравнение, умноженное на $\frac{5}{2}$, оставив без изменения первое уравнение. Имеем:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + x - 2y = 1 \\ 5x^2 + 2,5y^2 + 3x - 4y = 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 2,5y^2 + 2,5x - 5y = 2,5 \\ 5x^2 + 2,5y^2 + 3x - 4y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + y^2 + x - 2y = 1 \\ 0,5x + y = 1,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + y^2 + x - 2y = 1 \\ x = 3 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(3-2y)^2 + y^2 + (3-2y) - 2y = 1 \\ x = 3 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9y^2 - 28y + 20 = 0 \\ x = 3 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = \frac{10}{9} \end{array}\right. \\ x = 3 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x = -1, y = 2 \text{ или } x = \frac{7}{9}, y = \frac{10}{9}.$$

Ответ: $\left\{(-1,2); \left(\frac{7}{9}, \frac{10}{9}\right)\right\}$.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_y x - 2\log_x y = 1 \\ x^2 + 2y^2 = 3. \end{cases}$$

Решение. Пусть $\log_y x = t$. Тогда первое уравнение системы примет следующий вид:

$$t - \frac{2}{t} = 1 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_y x = 2 \\ \log_y x = -1. \end{array}\right.$$

Если $\log_y x = 2$, т.е. $x = y^2$, то второе уравнение системы запишется следующим образом:

$$y^4 + 2y^2 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2 = 1 \\ y^2 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow y = \pm 1,$$

что не входит в область определения системы. Если $\log_y x = -1$, т.е. $x = \frac{1}{y}$, имеем:

$$\frac{1}{y^2} + 2y^2 = 3 \Leftrightarrow 2y^4 - 3y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2 = 1 \\ y^2 = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \pm 1 \\ y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right..$$

Из полученных значений только $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ входит в область определения системы. Этому значению y соответствует значение $x = \sqrt{2}$.

Ответ: $\left\{\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$.

Тематические задания

1. Решить систему уравнений $\begin{cases} x - y = 6, \\ x^3 - y^3 = 126. \end{cases}$

2. Найти все действительные решения системы уравнений $\begin{cases} 2u + v = 7, \\ |u - v| = 2. \end{cases}$

3. Решить систему уравнений $\begin{cases} y^2 - xy + 1 = 0, \\ x^2 + 2x = -y^2 - 2y - 1. \end{cases}$

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3\,|\,x + 1\,| + 2\,|\,y - 2\,| = 20, \\ x + 2y = 4. \end{cases}$

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + 2y = 6, \\ 3x^2 - xy + 4y^2 = 48. \end{cases}$

6. Решить систему $\begin{cases} |-x| - \sqrt[3]{y + 3} = 1, \\ (-x\sqrt{-x})^2 - y = 10. \end{cases}$

7. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 + xy = 42x, \\ 6x^2 + 6xy = 7y. \end{cases}$

8. Решить систему $\begin{cases} y + |x + 1| = 1, \\ |y - x| = 5. \end{cases}$

9. Найти все решения системы уравнений $\begin{cases} |x^2 - 4y + 3| + y = 1, \\ 2x + 2y = 1. \end{cases}$

10. Решить систему $\begin{cases} 3x + y - z = 4, \\ x - 2y + 3z = 0, \\ x^2 + 2y + z^2 = 6x. \end{cases}$

11. Решить систему уравнений и изобразить множество решений на координатной плоскости $\begin{cases} |x - y| + 2x = 6, \\ |2x - y| + 3x = 6. \end{cases}$

12. Решить систему $\begin{cases} x(1 + y) = y + 7, \\ x^2y - xy^2 = 6. \end{cases}$

13. Решить систему $\begin{cases} x^4 + y^2 = 30, \\ x^2 + y^4 = 30. \end{cases}$

14. Решить систему $\begin{cases} \dfrac{xy}{2} + \dfrac{5}{2x + y - xy} = 5, \\ 2x + y + \dfrac{10}{xy} = 4 + xy. \end{cases}$

15. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x^2 - y^2 + 3 = 0, \\ 6y^3 - 18y - 13x^3 - 3x = 0. \end{cases}$

16. Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{17}{2x^2 + 3y} + \dfrac{12}{3x^2 - 2y} = 3, \\ \dfrac{6}{3x^2 - 2y} + \dfrac{34}{2x^2 + 3y} = 3. \end{cases}$

17. Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2xy - z^2 = 4. \end{cases}$

18. Решить систему $\begin{cases} x^2 + y^2 = xyz, \\ y^2 + z^2 = xyz, \\ z^2 + x^2 = xyz. \end{cases}$

19. Решить систему $\begin{cases} x^2 - 2y - 3 = 0, \\ y^2 + 2x - 3 = 0. \end{cases}$

20. Решить систему $\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 12 + x - 10y, \\ x^2 + 3xy + 2y^2 = 16 + 6x + 4y. \end{cases}$

21. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x + y - 1} = 1, \\ \sqrt{x - y + 2} = 2y - 2. \end{cases}$

22. Решить систему уравнений $\begin{cases} x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2, \\ x^5\sqrt{x^2 - 4y^2} = 0. \end{cases}$

23. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x} + 3y = 9, \\ x - 1 = (\sqrt{x} + 1)y. \end{cases}$

24. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^3\sqrt{x - y} = 0, \\ 2y^2 + y = 21 + 2xy. \end{cases}$

25. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x}(x + 3y) = 36, \\ \sqrt{y}(3x + y) = 28. \end{cases}$

26. Решить систему $\begin{cases} 5y + 4x = \sqrt{16x^2 - 25y^2}, \\ x^2 + 6x - 7 = 0. \end{cases}$

27. Решить систему $\begin{cases} x + y + \sqrt{x + y} = 30, \\ x^2 + y^2 = 325. \end{cases}$

28. Решить систему $\begin{cases} x + |x + y - 1| = 0, \\ y - 3 + \sqrt{x - y + 6} = 0. \end{cases}$

29. Решить систему $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x - 3} - |3y - 1| = 0, \\ 4\sqrt{9y^2 - 6y + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} = 0. \end{cases}$

30. Решить систему уравнений $\begin{cases} 5\sqrt{2x^2 - y^4} = 4x - 3y, \\ 4\sqrt{2x^2 - y^4} = 3x - 2y. \end{cases}$

31. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x - y} = 9 - |x + 2y|, \\ x(x + 4y - 2) + y(4y + 2) = 41. \end{cases}$

32. Решить систему $\begin{cases} x + 4\sqrt{x - y} = y + 12, \\ |2x + 2 + y| + 2|2x + y - 1| = 3. \end{cases}$

33. Решить систему уравнений $\begin{cases} 25 \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2y-2} = \dfrac{1}{5^{2x}}, \\ \sqrt{x + 2} + \sqrt{2x + y + 14} = \sqrt{x + y + 12}. \end{cases}$

34. Решить систему $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = \dfrac{1}{9}, \\ y - x = 2. \end{cases}$

35. Решить систему уравнений $\begin{cases} y^2 = 4^x - 8, \\ 2^{x+1} + y + 1 = 0. \end{cases}$

36. Найти действительные x и y, удовлетворяющие системе уравнений $\begin{cases} x + 2^{y+1} = 3, \\ 4x + 4^y = 32. \end{cases}$

37. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2^{3x+1} + 2^{y-2} = 3 \cdot 2^{y+3x}, \\ \sqrt{3x^2 + 1 + xy} = \sqrt{x+1}. \end{cases}$

38. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x + 2^y = -1, \\ -20x + 3{,}5 \cdot 2^{y+1} = 146. \end{cases}$

39. Решить систему уравнений $\begin{cases} 6^x - 2 \cdot 3^y = 12, \\ 6^x \cdot 3^y = 12. \end{cases}$

40. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2^x + 2y = 1, \\ 3y - 6y^2 = 2^{x-1}. \end{cases}$

41. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3 \cdot 2^x + y = 13, \\ 2^{2x+1} + 3y = 35. \end{cases}$

42. Решить систему $\begin{cases} 4^x + 5 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = 2, \\ 2 \cdot 9^y + 2^x + 2 \cdot 3^y = 1. \end{cases}$

43. Решить систему уравнений $\begin{cases} 4 \cdot 49^x - 4 \cdot 7^{x + y\log_7 3} + 9^y = 9, \\ 49^x + 12 \cdot 3^{x\log_3 7 + y} - 4 \cdot 9^y = 9. \end{cases}$

44. Решить систему $\begin{cases} 9 \cdot 2^x \cdot 5^y - 5 \cdot 3^{x+y} = 3^x \cdot 5^y, \\ 2^{x-2} \cdot 3^{y-x+1} \cdot 5^{1-y} = 1. \end{cases}$

45. Решить систему $\begin{cases} 2^{\frac{y}{x} + \frac{3x}{y}} = 16, \\ \sqrt{y} - \sqrt{2x} = \sqrt{3} - \sqrt{2}. \end{cases}$

46. Решить систему $\begin{cases} \dfrac{6}{2^{1-x}} + 2 \cdot 3^{y+1} = 21, \\ 5 \cdot 2^{x+2} - \dfrac{18}{3^{2-y}} = 56. \end{cases}$

47. Решить систему уравнений $\begin{cases} 9^x \cdot 7^{2y} = 27, \\ 5^y \cdot 4^{x+1} = 32. \end{cases}$

Зачетные задания

48. Решить систему уравнений $\begin{cases} 7 \cdot 2^{2x-y} - 5\sqrt{4x-y} = 56 - 10x, \\ 2 \cdot 2^{2x-y} + 3\sqrt{4x-y} = 6x + 16. \end{cases}$

49. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 + 2x(x+3)3^{-y} - 8 = 0, \\ 9^y - 3(x+1)3^y + 2x^2 + 6x = 0. \end{cases}$

50. Решить систему $\begin{cases} 7 + 9^x = 2^y + 4 \cdot 3^x, \\ 11 - 3 \cdot 2^{y+1} = 3^x - 4^y. \end{cases}$

51. Решить систему уравнений $\begin{cases} 6\lg\sqrt{x} + 3 \cdot 2^y = 5, \\ 10\lg x + 3 \cdot 4^y = 17. \end{cases}$

52. Решить систему уравнений $\begin{cases} \log_2 x + \log_3 y^2 = 0, \\ \log_2 x^2 - \log_{\frac{1}{3}} y = 5. \end{cases}$

53. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3 \cdot 2^x - \log_2 y = 2, \\ 2^x \cdot \log_2 y = 1. \end{cases}$

54. Решить систему уравнений $\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 5, \\ 2\log_4 x + \log_2 y = 4. \end{cases}$

55. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x + y = 30, \\ \log_3 x + \log_3 y = 3. \end{cases}$

56. Найти все решения системы уравнений $\begin{cases} \log_x 25 + 2y = 2, \\ -(\log_x 0{,}2)^3 + y = 1. \end{cases}$

57. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2\log_2 x + 2\log_2 y = 1 + 2\log_4(xy), \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

58. Решить систему $\begin{cases} 5(\log_y x + \log_x y) = 26, \\ xy = 64, \\ y < x. \end{cases}$

59. Решить систему $\begin{cases} \log_2(3y^2 - x^2) = 3, \\ 8\log_{16}(-x) + \log_2 y^2 = 4. \end{cases}$

60. Решить систему $\begin{cases} y^x = 3y, \\ 2\log_3 y + \log_y 3 = 3x. \end{cases}$

61. Решить систему $\begin{cases} 2 \cdot 5^{1-y} = \log_3(x^{-2}), \\ 5^y + \log_3 x = 4. \end{cases}$

62. Решить систему $\begin{cases} \log_7(x-y) + 2 \cdot 7^{xy} = 2, \\ 7^{xy} + \log_7(x-y) = 1. \end{cases}$

63. Решить систему уравнений $\begin{cases} \log_{x-y} \dfrac{xy}{2} = 2, \\ x + y = xy + 1. \end{cases}$

64. Решить систему $\begin{cases} 3\log_5 x + \log_{\sqrt[3]{5}} y = 3, \\ \log_5(y-x-2) + \log_{125}(y-x+2)^3 = \log_5 12. \end{cases}$

65. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2^{x+1} \cdot \log_9 y - 2^{2x} = 2, \\ 9 \cdot 2^x \cdot \log_{27} y - \log_3^2 y = 9. \end{cases}$

11. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Формулы сокращенного умножения:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Последние две формулы иногда удобнее записывать в следующем виде:

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$
$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b).$$

Пусть n — натуральное число. Тогда *арифметическим корнем* n-ой степени из данного числа $a \geq 0$ называется число $x \geq 0$ такое, что $x^n = a$ (обозначается $\sqrt[n]{a}$). Следующие равенства справедливы для любых натуральных m и n и любых $a \geq 0$ и $b \geq 0$.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m, \quad a \neq 0$$
$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad b \neq 0$$
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$
$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}.$$

Пример 1. При всех допустимых a и b найти численное значение выражения

$$\left(\frac{9a^2 - 16b^2}{4b + 3a} - \frac{a^2b - 3ab^2}{ab}\right)^2 : \left(6ab - \frac{8a^3 - b^3}{2a - b}\right).$$

Решение. Преобразуем данное выражение следующим образом:

$$\left(\frac{9a^2 - 16b^2}{4b + 3a} - \frac{a^2b - 3ab^2}{ab}\right)^2 : \left(6ab - \frac{8a^3 - b^3}{2a - b}\right) =$$

$$= \left(\frac{(3a-4b)(3a+4b)}{3a+4b} - \frac{ab(a-3b)}{ab}\right)^2 : \left(6ab - \frac{(2a-b)(4a^2 + 2ab + b^2)}{2a-b}\right) =$$

$$= \frac{(3a - 4b - (a - 3b))^2}{6ab - (4a^2 + 2ab + b^2)} = \frac{(2a-b)^2}{4ab - 4a^2 - b^2} = \frac{(2a-b)^2}{-(2a-b)^2} = -1.$$

Ответ: -1.

Пример 2. Числа a и b таковы, что $a = \log_y x$, $b = \log_z x$. Найти

$$\log_{\sqrt[3]{xyz}} \left(\frac{yz}{x^3}\right)^2.$$

Решение. Воспользуемся формулой перехода к новому основанию в случае, когда $x \neq 1$:

$$\log_{\sqrt[3]{xyz}} \left(\frac{yz}{x^3}\right)^2 = \frac{\log_x \left(\frac{yz}{x^3}\right)^2}{\log_x \sqrt[3]{xyz}} = \frac{2\log_x y + 2\log_x z - 6}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\log_x y + \frac{1}{3}\log_x z} =$$

$$= \frac{\frac{2}{a} + \frac{2}{b} - 6}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3a} + \frac{1}{3b}} = 6 \cdot \frac{a + b - 3ab}{a + b + ab}.$$

При $x = 1$ легко получаем, что искомый логарифм равен 6.

Ответ: $6 \cdot \frac{a + b - 3ab}{a + b + ab}$, если $a \neq 0$; 6, если $a = 0$.

Тематические задания

1. При всех допустимых a упростить выражение
$$\left(\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{a-1}}\right) : \left(1 + \sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right).$$

2. При всех допустимых x и y упростить выражение
$$\left(\frac{x + \sqrt{y}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{y}} - \frac{x - \sqrt{y}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{y}} + \frac{\sqrt[3]{xy^2} - \sqrt[3]{x^4\sqrt{y}}}{x - \sqrt{y}}\right)^3.$$

3. Вычислить $\dfrac{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} + \dfrac{4\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{17}{2}}$.

4. Разность $\sqrt{|\,40\sqrt{2} - 57\,|} - \sqrt{|\,40\sqrt{2} + 57\,|}$ является целым числом. Найти это целое число.

5. Вычислить $\sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7}$.

6. Без помощи таблиц и калькулятора определить, что больше: $\log_{20} 80$ или $\log_{80} 640$?

7. Вычислить без помощи таблиц и калькулятора $\dfrac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \dfrac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$.

8. Известно, что $\log_b a = \sqrt{3}$. Найти $\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}}\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right)$.

9. Известно, что для некоторой тройки чисел x, y, z $(x \neq y)$ выражения $\log_{z\sqrt[3]{xy^2}}\left(\frac{x^2y^5}{z}\right)$ и $\log_{z\sqrt{xy}}\left(\frac{x^5y^2}{z}\right)$ равны одному и тому же числу. Найти это число.

10. Вычислить $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+1} - \frac{5\sqrt{15}-\sqrt{5}-16}{7-2\sqrt{15}}$.

11. Вычислить

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} : \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

12. Вычислить $(4\sqrt{6}+\sqrt{39}+2\sqrt{26}+6)(4\sqrt{6}+\sqrt{39}-2\sqrt{26}-6)$.

13. Вычислить $(\sqrt{28}-\sqrt{12})\cdot\sqrt{10+\sqrt{84}}$.

14. Вычислить $\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{11})(\sqrt{33}+\sqrt{15}-\sqrt{22}-\sqrt{10})}{\sqrt{75}-\sqrt{50}}$.

15. Вычислить $\left(\sqrt{\left(\sqrt{5}-\frac{5}{2}\right)^2} - \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}-\sqrt{5}\right)^3}\right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{4}$.

16. Вычислить $\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}$.

17. Проверить, что число $x = \sqrt[3]{4+\sqrt{80}} - \sqrt[3]{\sqrt{80}-4}$ является корнем уравнения $x^3+12x-8=0$.

18. Вычислить $\frac{\log_3 24}{\log_{72} 3} - \frac{\log_3 216}{\log_8 3}$.

19. Вычислить $\frac{\log_5 30}{\log_{30} 5} - \frac{\log_5 150}{\log_6 5}$.

20. Вычислить $\log_{12} 18 \cdot \log_{24} 54 + 5(\log_{12} 18 - \log_{24} 54)$.

21. Вычислить $\frac{1-\log_5^3 3}{(\log_5 3+\log_3 5+1)\log_5 \frac{5}{3}}$.

22. Вычислить $5^{\frac{1}{\log_{16} 25}} - \log_3 \log_2 \sqrt[9]{\sqrt[3]{2}} + 7^{\lg 8} - 8^{\lg 7}$.

23. Вычислить $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{2\log_5 3-\log_5 4}} + 11\cdot 8^{\log_{27} 3}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Зачетные задания

24. При всех допустимых a и b найти численное значение выражения
$$\frac{(a+b)^3-(a-b)^3}{2b(3a^2+b^2)}+1.$$

25. При всех допустимых a и b упростить выражение
$$\left(\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[6]{a^2b^3}}{(\sqrt[3]{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}-\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right):\frac{(a-b)^{-1}}{b^{-\frac{1}{2}}}.$$

26. При всех допустимых a найти численное значение выражения
$$\frac{2a+\sqrt{a^2-1}}{(\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1})(\sqrt{(a-1)^3}-\sqrt{(a+1)^3})}.$$

27. Вычислить $\left[\dfrac{3(\sqrt{13}+2)}{\sqrt{19}-4}-\dfrac{4(\sqrt{19}-2)}{\sqrt{13}-3}-2+\sqrt{19}\right](2-\sqrt{13})$.

28. Вычислить $\dfrac{\log_2^2 18-4\log_2^2 3+3\log_2 18+6\log_2 3}{\log_2 18+2\log_2 3}$.

29. Вычислить $5^{\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{2}}+\log_{\sqrt{2}}\left(\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}\right)-\log_{\frac{1}{2}}\left(10+2\sqrt{21}\right)$.

30. Вычислить $\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)\cdot\log_{\sqrt{6}+1}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\log_{2\sqrt{6}+7}\left(2\sqrt{6}+5\right)$.

31. Найти $\log_{175} 56$, если $\log_{14} 7=a$ и $\log_{14} 5=b$.

32. Найти $\log_{30} 8$, если $\lg 5=a$ и $\lg 3=b$.

33. Найти $\log_{\frac{x}{y}}^2 x+\log_{\frac{y}{x}}^2 y$, если $\log_{\frac{x}{y}} x^7=\log_{\sqrt{y}}\dfrac{y}{x}$.

12. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

1) Таблица значений тригонометрических функций следующих углов первой четверти:

Таблица 2

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$30^\circ\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$45^\circ\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
$60^\circ\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

2) **Формулы приведения:**

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\cos\alpha \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=-\cos\alpha \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$$

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha \quad \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha \quad \cos(\pi\pm\alpha)=-\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\mp\alpha\right)=\pm\operatorname{ctg}\alpha \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\mp\alpha\right)=\pm\operatorname{tg}\alpha.$$

3) Равенство $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, справедливое для всех значений α, называется *основным тригонометрическим тождеством*. Из этой формулы следуют еще две формулы:

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n; n\in Z$$

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}, \quad \alpha\neq\pi n; n\in Z.$$

4) **Формулы сложения:**

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \quad \alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n; n\in Z$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \quad \alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n; n\in Z.$$

5) Формулы двойного и тройного аргументов:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in Z$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = \sin\alpha(3 - 4\sin^2\alpha)$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \cos\alpha(4\cos^2\alpha - 3).$$

6) Формулы понижения степени:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4} \qquad \cos^3\alpha = \frac{\cos 3\alpha + 3\cos\alpha}{4}.$$

7) Формулы преобразования суммы в произведение:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

8) Формулы преобразования произведения в сумму:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)).$$

9) Формулы, использующие тангенс половинного аргумента:

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq \pi + 2\pi n; n \in Z$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}, \quad \alpha \neq \pi + 2\pi n; n \in Z.$$

Пример 1. Доказать, что при всех допустимых значениях α справедл равенство

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}.$$

Решение. Преобразуем левую часть данного равенства следующим образом:

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{2}:\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{2}=\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}.$$

Пример 2. При всех допустимых значениях x упростить выражение

$$\frac{1+\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x}.$$

Решение. Преобразуем данное выражение следующим образом:

$$\frac{1+\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x}=\left(1+\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\right):\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)=$$

$$=\frac{\cos x\cos 2x+\sin x\sin 2x}{\cos x\cos 2x}:\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{\cos x}{\cos x\cos 2x}:\frac{2}{\sin 2x}=\frac{\operatorname{tg} 2x}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x$.

Тематические задания

1. Доказать, что при всех допустимых значениях β справедливо равенство $\dfrac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)-\sqrt{2}\sin\beta}{2\cos\left(\frac{\pi}{6}+\beta\right)-\sqrt{3}\cos\beta}=-\sqrt{2}\operatorname{ctg}\beta.$

2. Доказать, что при всех допустимых значениях α справедливо равенство $\dfrac{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$

3. Доказать, что при всех допустимых значениях x справедливо равенство $\dfrac{\sin(\pi+x)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\operatorname{tg}(\pi+x)}=-\operatorname{ctg}^2 x.$

4. При всех допустимых значениях α упростить выражение $\dfrac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 2\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}.$

5. При всех допустимых значениях α упростить выражение $\dfrac{2}{\sin\alpha}-\dfrac{2}{\sin 3\alpha}-\dfrac{4\cos 2\alpha}{\sin 3\alpha}.$

6. При всех $0 < \alpha < 90^\circ$ упростить выражение $\dfrac{\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}}{4\sin\frac{\alpha}{2}}$.

7. Вычислить $\dfrac{\sin 43^\circ + \sin 17^\circ}{2\cos 13^\circ + 3\sin 77^\circ}$.

8. Вычислить $\dfrac{1-4\sin 10^\circ \sin 70^\circ}{2\sin 10^\circ}$.

9. Вычислить $\sin 70^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 10^\circ$.

10. Известно, что $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, $\pi < \alpha < \dfrac{4\pi}{3}$. Найти $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

11. Найти $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ и $\cos(\alpha-\beta)$,

если $\cos\alpha + \cos\beta = \dfrac{3}{10}$ и $\sin\alpha + \sin\beta = -\dfrac{11}{10}$.

12. Вычислить $\log_{\frac{9}{5}}\left|\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\right| + \log_{\frac{9}{5}}\left|\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-3\alpha\right)\right|$,

если известно, что $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

13. Доказать, что при всех допустимых значениях α справедливо равенство $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha + \dfrac{1}{\cos 2a}$.

14. Доказать, что при всех допустимых значениях α справедливо равенство $\dfrac{1+\sin\alpha - 2\sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{4\cos\frac{\alpha}{2}} = \sin\dfrac{\alpha}{2}$.

15. Доказать, что при всех значениях α справедливо равенство

$\sin^2(30^\circ+\alpha) - \sin^2(30^\circ-\alpha) = \dfrac{\sqrt{3}\sin 2\alpha}{2}$.

16. Доказать, что при всех допустимых значениях α справедливо равенство $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha} + \dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} - \sin\alpha = \cos\alpha$.

17. Доказать, что при всех допустимых значениях α справедливо равенство $\dfrac{\sin\alpha + \sin\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

18. Доказать, что при всех допустимых значениях α справедливо равенство $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right) = \dfrac{1+\sin\alpha}{\cos 2\alpha}$.

19. Доказать, что при всех допустимых значениях α справедливо равенство $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}3\alpha = -\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}2\alpha \cdot \operatorname{tg}3\alpha$.

20. При всех допустимых значениях α упростить выражение
$$\frac{1-\sin^4 2\alpha - \cos^4 2\alpha}{2\sin^4 2\alpha}+1.$$

21. При всех допустимых значениях α упростить выражение
$$\frac{\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)\cos(180^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)}{\sin(90^\circ+\alpha)\operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha)}.$$

22. Найти $\operatorname{tg}2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, а $\sin 4\alpha > 0$.

23. Найти $\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{7}}$.

24. Найти $\operatorname{tg}2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{4}$ и $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$.

25. Найти $\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\cos 2\alpha \le -\frac{7}{8}$ и $\cos\alpha \le -\frac{1}{4}$.

26. Вычислить $(\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin\beta - \cos\beta)$, если $\sin(\alpha+\beta) = 0{,}8$ и $\cos(\alpha-\beta) = 0{,}3$.

27. Число x удовлетворяет условиям $\operatorname{tg}2x = -\frac{3}{4}$ и $\sin 2x > 0$. Обязательно ли при этих условиях определено выражение $\log_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} \operatorname{tg}x$, и чему оно тогда равно?

28. Известно, что $5\sin\beta = \sin(2\alpha+\beta)$. Чему равно значение $\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\alpha}$?

29. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma$. Какое значение может принимать сумма $\alpha+\beta+\gamma$?

30. Какое из двух чисел больше: $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{2401}{36}\right)+2$ или $\operatorname{tg}\left(\frac{226\pi}{17}\right)$?

Зачетные задания

31. При всех допустимых значениях α упростить выражение
$$\frac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos(45^\circ-\alpha)}{2\sin(30^\circ+\alpha)-\sqrt{3}\sin\alpha}+\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

32. При всех допустимых значениях α упростить выражение
$$\operatorname{tg}3\alpha - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\operatorname{tg}\alpha + 1.$$

33. Вычислить $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$.

34. Вычислить $8\cos 260^\circ \sin 130^\circ \cos 160^\circ$.

35. Вычислить $\dfrac{20\sin 80^\circ \sin 65^\circ \sin 35^\circ}{\sin 20^\circ + \sin 50^\circ + \sin 110^\circ}$.

36. Вычислить $\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ$.

37. Вычислить $\dfrac{16\sin 251^\circ - 10\cos 161^\circ}{\cos 19^\circ}$.

38. Вычислить $\cos 10^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ$.

39. Найти $\dfrac{\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\gamma)}{\cos\gamma\cos(\alpha+\beta+\gamma)}$, если $\dfrac{\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta} = \dfrac{4}{9}$.

40. Найти дроби $a = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma}$ и $b = -\dfrac{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\cos(\alpha+\beta+\gamma)}$, если числа α, β и γ выбраны так, что обе дроби положительны и одна из них в четыре раза меньше другой.

41. Известно, что $\sin\alpha > 0$ и $\sin 3\alpha > \frac{1}{4}$. Доказать, что $\sin\alpha > \frac{109}{1296}$.

13. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим сначала, как решаются простейшие тригонометрические уравнения. Уравнение вида $\sin x = a$ решается следующим образом:

$$\sin x = a \Leftrightarrow x = (-1)^k \arcsin a + \pi k \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi k \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi k \end{array}\right.$$

при $a \in (-1, 0) \cup (0, 1)$. Если $|a| > 1$, то уравнение $\sin x = a$ решений не имеет. Если $a = 0$ или $a = \pm 1$, имеем:

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k, \quad \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

Здесь k — любое целое число. В дальнейшем мы будем писать $k \in Z$. Уравнение вида $\cos x = a$ равносильно следующей совокупности:

$$\cos x = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arccos a + 2\pi k \\ x = -\arccos a + 2\pi k \end{array}\right.$$

при $a \in (-1, 0) \cup (0, 1)$. Если $|a| > 1$, то уравнение $\cos x = a$ решений не имеет. Если $a = 0$ или $a = \pm 1$, имеем:

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi k,$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k.$$

Уравнения вида $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$ при любых действительных a решаются следующим образом:

$$\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi k,$$

$$\operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} a + \pi k.$$

Основными методами решения тригонометрических уравнений являются: сведение уравнения к квадратному, разложение на множители, понижение степени, введение дополнительного угла. Остановимся на последнем методе подробнее. Если нам дано уравнение вида $a\cos x + b\sin x = c$, то, разделив обе части этого уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2}$, получим:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Существует такой угол α, что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos\alpha, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin\alpha.$$

Действительно,

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} = 1.$$

Имеем далее

$$\cos\alpha\cos x+\sin\alpha\sin x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow\cos(x-\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-\alpha=\pm\arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+2\pi k;\quad k\in Z\Leftrightarrow x=\alpha\pm\arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+2\pi k,$$

в случае, если $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\in[-1,1]$, и нет решений в противном случае.

Пример 1. Решить уравнение

$$\cos x+\cos 5x=\cos 2x+\cos 4x.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\cos x+\cos 5x=\cos 2x+\cos 4x\Leftrightarrow 2\cos 3x\cos 2x=2\cos 3x\cos x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos 3x(\cos 2x-\cos x)=0\Leftrightarrow\cos 3x\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 3x=0\\ \sin\dfrac{3x}{2}=0\\ \sin\dfrac{x}{2}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{3}\\ x=\dfrac{2\pi k}{3}\\ x=2\pi k;\ k\in Z\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{3}\\ x=\dfrac{2\pi k}{3}.\end{array}\right.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $x=\frac{2\pi k}{3}$; $k\in Z$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+2\cos^2 x=1.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+2\cos^2 x=1\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+2\cos^2 x-1=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos 2x=0\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{x}{2}\right)=0\\ \cos\left(\dfrac{3x}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{x}{2}=\pi k\\ \dfrac{3x}{2}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}+\pi k;\ k\in Z\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi k\\ x=\dfrac{5\pi}{9}+\dfrac{2\pi k}{3}.\end{array}\right.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $x=\frac{5\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$; $k\in Z$.

Тематические задания

1. Решить уравнение $\sin x - \sin 3x = \cos 2x \sin 3x$.

2. Решить уравнение $2\sin 3x \sin x + (3\sqrt{2} - 1)\cos 2x = 3$.

3. Решить уравнение $\cos x - 2\sin 2x \sin x - 4\cos 2x - 4\sin^2 x = 0$.

4. Решить уравнение $\cos 3x + \sin x \sin 2x = 2\cos^3 x + 2\operatorname{tg} x$.

5. Решить уравнение $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$.

6. Решить уравнение $2\sin^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x} = 3$.

7. Решить уравнение $\sin 3x - \sin x + \cos 2x = 1$.

8. Решить уравнение $2\cos 2x - 1 = (2\cos 2x + 1)\operatorname{tg} x$.

9. Решить систему $\begin{cases} x + \sin(x+y) = \dfrac{3}{2}, \\ 3x - \sin(x+y) = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$

10. Решить уравнение $2\sin 2x + \sqrt{3}\cos x = 0$.

11. Решить уравнение $(\cos x - \sin x)\left(1 + \dfrac{1}{2}\sin 2x\right) + \sin x = 2\cos^2 x$.

12. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2\sin x \sin y + \cos x = 0, \\ 1 + \sin y \cos x = 2\cos^2 y \sin x. \end{cases}$

13. Найти все решения уравнения $\sin x + \cos\left(5x - \dfrac{9}{2}\pi\right) = \sqrt{3}\sin(3x + \pi)$.

14. Решить уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x$.

15. Решить уравнение $\sqrt{3} - \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(\dfrac{4\pi}{3} - x\right)$.

16. Решить уравнение $(2\cos x - \sin x - 2)(\sin x - 1) = \cos^2 x$.

17. Решить уравнение $\sin^2 x - \cos x \cos 3x = \dfrac{1}{4}$.

18. Решить уравнение $4\cos 4x + 6\sin^2 2x + 5\cos 2x = 0$.

19. Решить уравнение $\cos(3x+5) - \cos(x+1) = 2\sin(x+2)$.

20. Решить уравнение $|\sin x + \cos x| = 1 + 2\sin 2x$.

21. Решить уравнение $3\operatorname{tg} x = 2\sqrt{5}\cos\dfrac{x}{2}$.

22. Решить уравнение $\cos 2x + 4\sin^3 x = 1$.

23. Решить уравнение $4\sin^2 2x - 2\cos^2 2x = \cos 8x$.

24. Решить уравнение $8\sin^4 x + 13\cos 2x = 7$.

25. Решить уравнение
$\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5x}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{11x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{13x}{2}\right)$.

26. Решить систему уравнений $\begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 5 - 2\sqrt{6}, \\ x + y = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

27. Решить уравнение $3\operatorname{tg}^2 x - 8\cos^2 x + 1 = 0$.

28. Решить уравнение $2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 4\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{2}$.

29. Решить уравнение $\sin 2x + \sin 6x = 3\cos^2 2x$.

30. Решить уравнение $5\sin x + 6\sin 2x + 5\sin 3x + \sin 4x = 0$.

31. Решить уравнение $\sin 2x = 1 + \sqrt{2}\cos x + \cos 2x$.

32. Решить систему уравнений $\begin{cases} 4\sin y - 6\sqrt{2}\cos x = 5 + 4\cos^2 y, \\ \cos 2x = 0. \end{cases}$

33. Решить уравнение $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

34. Найти все A, при которых уравнение $2\sin x + 3\cos x = A$ имеет решение.

35. Решить уравнение $\sin\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right) - 3\cos\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) = 1 + 2\sin x$.

36. Решить уравнение $\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \cdot \sin 2x = (\sqrt{3} - 1)\cos^2 x + 1$.

37. Решить уравнение $1 + 2\cos 3x \cos x - \cos 2x = 0$.

38. Решить уравнение $\cos\left(2x - \frac{7\pi}{2}\right) = \sin(4x + 3\pi)$.

39. Решить уравнение $2\cos 2x + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 10\cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \frac{7}{2} = \frac{1}{2}\cos x$.

40. Показать, что функция $y = \sin^2 x - 12\sin x\cos x + 3\cos^2 x - 2\sqrt[3]{66}$ может принимать неотрицательные значения.

41. Решить уравнение $\sin\left(2x - \frac{7\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 8x\right) + \cos 6x = 1$.

42. Найти все решения уравнения
$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 4\sin x = 2 + \sqrt{2}(1 - \sin x)$.

43. Найти все пары действительных чисел x и y, удовлетворяющие системе уравнений $\begin{cases} \cos 4x + \sin 2y = -2, \\ x - y = 2\pi. \end{cases}$

44. Решить уравнение $\sin 3x + \sin 5x = \sin 4x$.

45. Решить уравнение $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos 2x = 1$.

46. Решить уравнение $\cos 2x + 2\cos x + 7 = 2\sin\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) + 4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

47. Решить уравнение $3 - 12\sin^2 x - 2\cos 4x = -\frac{5}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

48. Решить уравнение $2\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos 2x = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

49. Решить уравнение $\operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{2 - \sin x} = 0$.

50. Решить уравнение $9\cos 3x \cos 5x + 7 = 9\cos 3x \cos x + 12\cos 4x$.

51. Решить уравнение $2\sin x + 7\cos x = \frac{\sqrt{53}}{2}$.

52. Решить уравнение $4 - \cos(2\pi(13x + 9)^2) = 5\sin(\pi(13x + 9)^2)$.

53. Решить уравнение $2\cos(\sqrt{x} + \pi) + 1 = 0$.

54. Решить уравнение $2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\cos x$.

55. Решить уравнение $(1 + 2\sin x)\sin x = \sin 2x + \cos x$.

Зачетные задания

56. Решить уравнение $\sqrt{3}\sin 2x + 2\sin^2 x - 1 = 2\cos x$.

57. Решить уравнение
$\sin x(3\sin 2x \sin^3 x + 12\sin 2x \sin x - 16\cos x) + 2\sin 4x = 0$.

58. Решить уравнение $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$.

59. Решить уравнение $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

60. Решить уравнение $\cos x - \cos 3x = \sqrt{7}\sin 2x$.

61. Решить уравнение $\sin 2x \cos 2x - \sin x \cos x = 0$.

62. Решить уравнение $\left|\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{2}{5}\right| = 5\cos x + 1.$

63. Решить уравнение $\operatorname{tg} x(1-2\sin x) - 2\cos x = -\sqrt{3}.$

64. Решить уравнение $\sin x \sin 5x = \cos 4x.$

65. Решить уравнение
$$4\sin^2\left(2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right) - 2(\sqrt{5}-\sqrt{3})\cos(2x-\pi) + \sqrt{15} - 4 = 0.$$

66. Решить уравнение $4\cos^4 x = \cos 2x + 2\cos^2 x \cos 8x.$

67. Решить уравнение $\sin 7x \cos x = \sin 6x.$

68. Решить уравнение $(\cos x - 1)(2\sin x - \cos 2x - 2) = 2\sin^2 x.$

69. Решить уравнение $\cos x \cos 3x - 9\cos^2 x + 5 = 14\sin x \sin 3x - 30\sin^2 x.$

14. ОТБОР КОРНЕЙ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ

Важную роль в решении тригонометрических уравнений играет *отбор корней*. Существуют три основных способа отбора корней: отбор неравенством, отбор знаменателем и отбор в промежуток. Отбор неравенством возникает в задачах, в которых для полученных корней тригонометрического уравнения необходимо проверить выполнение какого-либо неравенства, заданного в явном или в неявном виде. При этом в некоторых задачах полезно рисовать тригонометрическую окружность и отмечать на ней корни уравнения.

В некоторых задачах необходимо выбрать те корни числителя, которые не являются корнями знаменателя. Делается это обычно следующим образом. Решаются два тригонометрических уравнения (находятся корни числителя и корни знаменателя), при этом для корней числителя и корней знаменателя в решении ставятся разные буквы, обозначающие целые числа. Затем на тригонометрической окружности корни числителя обозначаются кружочками, а корни знаменателя — крестиками. В ответ записываются те кружочки, которые не зачеркнуты крестиками.

Отбор тригонометрических корней в промежуток, заданный явно или неявно условием задачи, осуществляется, как правило, на числовой прямой. Перебирая подряд значения переменной, обозначающей целые числа, мы должны добиться того, чтобы найти все точки внутри промежутка и по одной точке слева и справа от данного промежутка.

Пример 1. Найти все корни уравнения

$$\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)\sin x-\operatorname{tg}^2 x+1=0,$$

удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg} x<0$.

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)\sin x-\operatorname{tg}^2 x+1=0 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos^2 x}-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x-\sin^2 x+\left(1-\sin^2 x\right)}{\cos^2 x}=0 \Leftrightarrow \frac{1+\sin x-2\sin^2 x}{\cos^2 x}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}1+\sin x-2\sin^2 x=0\\ \cos x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\ \cos x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{aligned} &x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ &x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ &x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{aligned}\right. \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n;\ \ k, n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ &x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k. \end{aligned}\right.$$

Неравенству $\operatorname{tg} x < 0$ среди полученных корней удовлетвор: $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k.$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z.$

Пример 2. Найти все x, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{49 - 4x^2} \cdot \left(\sin \pi x + 3\cos\frac{\pi x}{2}\right) = 0.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующей совокупности:

$$\sqrt{49 - 4x^2} \cdot \left(\sin \pi x + 3\cos\frac{\pi x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 49 - 4x^2 = 0 \\ \begin{cases} 49 - 4x^2 > 0 \\ \sin \pi x + 3\cos\frac{\pi x}{2} = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{7}{2} \\ \begin{cases} -\frac{7}{2} < x < \frac{7}{2} \\ \cos\frac{\pi x}{2}\left(2\sin\frac{\pi x}{2} + 3\right) = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\overset{\text{т.к.}\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right| \le 1}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{7}{2} \\ \begin{cases} -\frac{7}{2} < x < \frac{7}{2} \\ \cos\frac{\pi x}{2} = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{7}{2} \\ \begin{cases} -\frac{7}{2} < x < \frac{7}{2} \\ \frac{\pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \ k \in Z \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{7}{2} \\ \begin{cases} -\frac{7}{2} < x < \frac{7}{2} \\ x = 1 + 2k \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{7}{2} \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 3. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \pm\frac{7}{2},\ x = \pm 1,\ x = \pm 3.$

Тематические задания

1. Решить уравнение $\frac{\cos 2x - \cos 4x - 4\sin 3x - 2\sin x + 4}{2\sin x - 1} = 0$.

2. Решить уравнение $\log_3(2\sin^2 x) - 1 = 2\log_3 \cos x + \log_3 2$.

3. Решить уравнение $\log_{(\cos 2x - \sin 2x)}(1 - \cos x - \sin x) = 1$.

4. Решить уравнение $\sqrt{1 + \sin x} + \cos x = 0$.

5. Найти все решения уравнения $\frac{2(\cos x + \sin x) + 1 - \cos 2x}{2(1 + \sin x)} = \sqrt{3} + \sin x$.

6. Решить уравнение $\frac{|1 - \cos x|}{1 - \cos x} \cdot \sin x = 4\sin^2 x \cdot \cos x$.

7. Решить уравнение $\log_{\sin(-x)}\left(\sin\frac{x}{2} + \sin\frac{3x}{2}\right) = 1$.

8. Решить уравнение $\log_2\left(5 + 3\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sin^2\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$.

9. Решить уравнение $\sqrt{1 - \operatorname{tg} x + \sin^2 x} - \sqrt{\sin^2 x - \frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{9}{5} - \operatorname{tg} x}$.

10. Найти все решения уравнения $2 - \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = 4\cos^2 3x$, удовлетворяющих неравенству $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$.

11. Решить уравнение $2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1 + 8\sin 2x \cos^2 2x}$.

12. Найти все решения уравнения $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$.

13. Решить уравнение $\frac{\sin 4x}{\cos 6x} = 1$.

14. Решить уравнение $\sqrt{5\sin x + \cos 2x} + 2\cos x = 0$.

15. Решить уравнение $\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{ctg} 5x$.

16. Решить уравнение $\log_2\left(\cos 2x + \cos\frac{x}{2}\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(\sin x + \cos\frac{x}{2}\right) = 0$.

17. Решить уравнение $\frac{1 + 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + \sin 2x}{2\sin x \cos x - 1} = 1$.

18. Среди корней уравнения $\frac{\cos 2\pi x}{1 + \operatorname{tg} \pi x} = 0$ найти тот, который имеет наименьшее расстояние от числа $\sqrt{13}$ на числовой прямой.

19. Решить уравнение $(2\sin x-1)\sqrt{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=0$.

20. Решить уравнение $\sqrt{\frac{3}{4}-\cos x}=\sqrt{\frac{3}{4}-\cos 3x}$.

21. Решить уравнение $\log_2(3\sin x-\cos x)+\log_2(\cos x)=0$.

22. Найти все решения уравнения $\operatorname{tg}(4\sin x)=\sqrt{3}$, удовлетворяющие неравенствам $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$.

23. Решить уравнение $2^{|x-2|\sin x}=(\sqrt{2})^{x|\sin x|}$.

24. Решить уравнение $\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin x=|\cos x|$.

25. Решить уравнение $\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\sin x\right)=1$.

26. Решить уравнение $\frac{6\sin x+7\cos x-9}{(5\cos x-3)(\cos x+2)}=1$.

27. Решить уравнение $\sqrt{1+\cos 4x}\cdot\sin x=\sqrt{2}$.

28. Решить уравнение $\frac{\sin 3x}{\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}=-1$.

29. Найдите все решения уравнения $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\sin 3x=\cos 3x-\sqrt{2}$ на отрезке $[-2\pi,2\pi]$.

30. На отрезке $0\le x\le\pi$ найдите все значения x, удовлетворяющие уравнению $\sqrt{3}\cos x-\sin x=\sqrt{1+2\cos^2 x-\sqrt{3}\sin 2x}$.

31. Найти все решения уравнения $3\operatorname{tg}^2\left(\pi x-\frac{\pi}{8}\right)=1$, удовлетворяющие условию $1,5<x<3$.

32. Решить уравнение $\sqrt{\sin 2x}=\sqrt{\cos x-\sin x-1}$.

33. Решить уравнение $\log_3((x+10)\cos x)=\log_3\left(\frac{x+10}{\cos x}\right)$.

34. Решить уравнение $2|\sin x|+\log_{tg\,x}\left(-\frac{|\cos x|}{\sin x}\right)=0$.

35. Решить уравнение $\frac{\operatorname{tg}x(\cos 2x+3\sin x-2)}{\sqrt{187\pi^2+36\pi x-36x^2}}=0$.

36. Решить уравнение $\sqrt{\sin 3x}\cdot\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=0$.

37. Найти корни уравнения $\sin 2x + 1 + \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, лежащие в интервале $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

38. Найти все корни уравнения $2^{\cos x} + 5 \cdot 2^{-\cos x} = 2\sqrt{6}$, удовлетворяющие неравенствам $\frac{\pi}{3} < x < \frac{7\pi}{3}$.

39. Решить уравнение $\left(\operatorname{tg}\frac{19\pi}{3} - \operatorname{tg} x\right)\sqrt{6\cos\frac{15\pi}{4}\cos\frac{x}{2} - \cos x - 3} = 0$.

40. Найти все x, удовлетворяющие условию $\frac{\sin 4x + \sin 6x}{2x^2 - 5\pi x + 2\pi^2} = \frac{\sin 8x + \sin 10x}{2x^2 - 5\pi x + 2\pi^2}$ и принадлежащие интервалу $(0, \pi)$.

41. Решить уравнение $(1 - \cos 8x)\operatorname{tg} x = 6\sin^2 4x \operatorname{ctg} x$.

42. Найти все решения уравнения $\sqrt{x + \sin x} = \sqrt{x - \sin 2x}$, удовлетворяющие неравенству $-2\pi < x < 2\pi$.

43. Решить уравнение $\frac{6\sin x - 2\cos 2x - 4\cos^2 x - 3}{\sqrt{7}\sin x - 3\cos x} = 0$.

44. Решить уравнение $\sqrt{15}\cos x \operatorname{ctg} x + \sqrt{5}\cos x + \sqrt{5}\operatorname{ctg} x = 0$ и найти сумму его различных корней, принадлежащих отрезку $[-\pi, \pi]$.

45. Найти все решения уравнения $6\cos\frac{15\pi}{4}\cos\frac{x}{2} - \cos x = 3$, принадлежащие отрезку $[-2; 10,99]$.

46. Решить уравнение $\sqrt{2\cos^2 x - \sqrt{3}} + \sqrt{2}\sin x = 0$.

47. Найти все значения x из интервала $(8, 12)$, для которых справедливо равенство $2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin x = \sqrt{6 - 6\cos\left(\frac{14\pi}{5}\right)}$.

48. Решить уравнение $\frac{\sin 3x}{1 + 2\cos 2x} = 0$.

49. Найти все решения уравнения $\cos 3x = \sin x$, удовлетворяющие одновременно двум неравенствам: $\sin x \ge 0$, $\cos x \le 0$.

50. Решить уравнение $\log_{(-2\cos x)}(3\sin x - \cos 2x) = 0$.

51. Решить уравнение $\frac{|\sin x|}{\operatorname{tg} x} = \cos 3x$.

52. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2\cos x - \sin y = 0, \\ 4\sin x + 2\cos y = 5. \end{cases}$

53. Решить уравнение $\sqrt{\sin x \sin 3x} = \cos x$.

54. Найти сумму тангенсов всех $x \in (-\pi, \pi)$ таких, что $5\sin 2x + 12\cos 2x = -4$.

55. Решить уравнение $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right) - \sin\left(3x - \frac{5\pi}{16}\right) = -1$.

56. Решить уравнение $\sqrt{\operatorname{ctg} x + 1} = -\sqrt{15}\sin x$.

57. Решить уравнение $\cos(x^2 + x) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$.

58. Решить уравнение $\log_{\frac{13-|2x-1|}{12}}(\sin 2x - 2\sin x + 1) = \log_{\frac{13-|2x-1|}{12}}(\cos x)$.

59. Найти все решения уравнения
$2\sin\left(x + \frac{7\pi}{25}\right)\cdot\sin\left(3x + \frac{18\pi}{25}\right) = \cos 4x + 2^{\cos\frac{2\pi}{3}}$,
принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{10}, \frac{4\pi}{5}\right]$.

Зачетные задания

60. Найти все $x \in (-\pi, \pi)$, являющиеся решениями уравнения $\frac{1}{\sqrt{-2\sin x}} = \sqrt{-2\cos x}$.

61. Решить уравнение $\log_{\cos x}(\cos^2 x + \sin^2 x) - 2\sin^2 x + 5\sin 2x = 0$.

62. Решить уравнение $\frac{\cos 2x}{1 - \sqrt{2}\sin x} = 0$.

63. Найти все решения уравнения $\sqrt{1 - \sin 2x} - \sqrt{2}\cos 3x = 0$, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right]$.

64. Решить уравнение $|\cos x| - \sqrt{3}\sin\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) = 1$.

65. Найти все решения уравнения $\cos x - \cos 2x - \sin 2x = 1$, расположенные на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right]$.

66. Решить уравнение $\frac{\sin 3x}{\sin x + \sin 2x} = 0$.

67. Найти корни уравнения $\frac{\sqrt{3}(\sin 2x + \cos 3x)}{\cos 2x - \sin 3x} = 1$, расположенные в интервале $(1, 2)$.

68. Решить уравнение $\frac{\cos 2x + \sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{2}$.

69. Найти корни уравнения $\dfrac{\sqrt{3}\sin 2x - 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \cos 2x}{\cos\left(x - \frac{7\pi}{3}\right)} = 0$, расположенные на промежутке $x \in \left[\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right]$.

70. Сколько различных корней имеет уравнение $\sin 5\pi x + \cos 2\pi x = 0$ на отрезке $[-2, 0]$?

71. Решить систему $\begin{cases} \cos y \cdot 3^{x^3+8} = 27^{x^2+2x} \cdot |\cos y|, \\ 2\sin y = \log_2 x. \end{cases}$

72. Найти все корни уравнения $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 2(\sqrt{2} + 1)\operatorname{ctg} x$, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$.

73. Решить систему $\begin{cases} \sin x - \sin 1 = 0, \\ \cos x - \cos 1 = 0. \end{cases}$

15. УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ ПАРАМЕТР

Пример 1. При всех a решить уравнение

$$|x+3|-a|x-1|=4$$

и определить, при каких a оно имеет ровно два решения.

Решение. Данное уравнение равносильно следующей совокупности:

$$|x+3|-a|x-1|=4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le -3 \\ -(x+3)-a(1-x)=4 \end{cases} \\ \begin{cases} -3 < x \le 1 \\ (x+3)-a(1-x)=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1 \\ (x+3)-a(x-1)=4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le -3 \\ (a-1)x=a+7 \end{cases} \\ \begin{cases} -3 < x \le 1 \\ (a+1)x=a+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1 \\ (a-1)x=a-1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Рассмотрим первую систему. Если $a=1$, то эта система решений не имеет, если $a \ne 1$, то уравнение имеет решение $x=\frac{a+7}{a-1}$. Выясним, при каких a данное x будет удовлетворять первому неравенству системы:

$$\frac{a+7}{a-1} \le -3 \Leftrightarrow \frac{a+1}{a-1} \le 0 \Leftrightarrow a \in [-1,1).$$

Значит, при этих значениях a первая система будет иметь решение $x=\frac{a+7}{a-1}$, а при остальных значениях a эта система решений иметь не будет.

Во второй системе при $a=-1$ решением уравнения будет любое число x, поэтому при данном значении a решением системы будут все x из интервала $(-3,1]$. При $a \ne -1$ уравнение будет иметь единственное решение $x=1$, которое является также решением этой системы.

В третьей системе при $a=1$ решением уравнения будет любое x, поэтому при данном a решением системы будут все $x>1$. При $a \ne 1$ уравнение будет иметь единственное решение $x=1$, которое не является решением этой системы, поэтому система решений иметь не будет.

Рассмотрим, какие решения имеет исходная совокупность при различных значениях a. При $a=1$ первая система совокупности решений не имеет, вторая система имеет решение $x=1$, третья — $x>1$. Поэтому совокупность будет иметь решение $x \in [1,+\infty)$. При $a=-1$ первая система имеет решение $x=-3$, вторая — $x \in (-3,1]$, третья система совокупности решений не имеет. Значит, решением совокупности будет отрезок

$x \in [-3,1]$. При $|a|>1$ первая и третья система решений не имеют, значит, решением совокупности будет решение второй системы $x=1$. При $|a|<1$ первая система имеет решение $x=\frac{a+7}{a-1}$, вторая — $x=1$, третья система решений не имеет. Значит, решение совокупности будет состоять из двух чисел: $x=1$ и $x=\frac{a+7}{a-1}$.

Ответ: Если $a=1$, то $x \in [1,+\infty)$; если $a=-1$, то $x \in [-3,1]$; если $|a|>1$, то $x=1$; если $|a|<1$, то $x=1$ и $x=\frac{a+7}{a-1}$. При $|a|<1$ имеются ровно два решения.

Тематические задания

1. Найти все те значения параметра s, при которых корни уравнений $x^2+\frac{3x}{s}+2s=0$ и $x^2+\frac{12x}{s}-s=0$ не перемежаются, т.е. оба уравнения имеют по два корня и между двумя корнями одного из уравнений нет ни одного корня другого уравнения.

2. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=2(1+a), \\ (x+y)^2=14 \end{cases}$ имеет два решения.

3. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x|x+2a|+1-a=0$ имеет единственное решение.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых существует только одно значение x, удовлетворяющее системе уравнений $\begin{cases} |x^2-5x+4|-9x^2-5x+4+10x|x|=0, \\ x^2-2(a-1)x+a(a-2)=0. \end{cases}$

5. При каких значениях параметра a уравнение $(3a-1)x^2+2ax+3a-2=0$ имеет два действительных корня?

6. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x+y=a. \end{cases}$ имеет единственное решение?

7. Определить, при каких значениях a уравнение $x-\frac{a}{2}=4\left|4|x|-a^2\right|$ имеет ровно три корня. Найти эти корни.

8. При каких значениях a система $\begin{cases} 2axy+2x-2y+3=0, \\ x+2y+xy+1=0 \end{cases}$ имеет единственное решение?

9. Найти все значения a, при каждом из которых существует единственная тройка чисел (x, y, z), удовлетворяющая равенствам $x + y + z = x^2 + 4y^2$ и $x + 2y + 3z = a$.

10. Найти все пары значений (a, b), при каждой из которых система уравнений $\begin{cases}(a+b)x + 26y = 2,\\ 8x + (a^2 - ab + b^2)y = 4\end{cases}$ имеет бесконечно много решений.

11. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $(a+1)x^2 + (|a+2| - |a+10|)x + a = 5$ имеет два различных положительных корня.

12. При всех значениях параметра a решить уравнение $|x+2| + a|x-4| = 6$.

13. При каких значениях a все корни уравнения $3ax^2 + (3a^3 - 12a^2 - 1)x - a(a-4) = 0$ удовлетворяют условию $|x| < 1$?

14. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $5|x - 3a| + |x - a^2| + 4x = a$

1) имеет бесконечно много решений;

2) не имеет решений.

15. Найти все значения параметра c, при которых уравнение $|x^2 - 1| + |x^2 - x - 2| = x^2 + 3x + c$ имеет ровно три различных решения.

16. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases}ax^2 + 4ax - y + 7a + 1 = 0,\\ ay^2 - x - 2ay + 4a - 2 = 0\end{cases}$ имеет единственное решение?

17. При каких значениях параметра a четыре корня уравнения $x^4 + (a-5)x^2 + (a+2)^2 = 0$ являются последовательными членами арифметической прогрессии?

18. Для каждого значения параметра a решить систему $\begin{cases}x^2 - y^2 = a^2 - 4a,\\ |x| - |y| = a - 4.\end{cases}$

19. Найти все значения a, при которых уравнения $(2a-1)x^2 + 6ax + 1 = 0$ и $ax^2 - x + 1 = 0$ имеют общий корень.

20. При каких значениях параметра a уравнение $\left|x^2 - 5|x|\right| = a(x+4)$ имеет ровно три различных корня?

21. При каких значениях параметра a уравнение $|x| + \left|\frac{x+1}{3x-1}\right| = a$ имеет ровно три решения?

22. Найти все значения a, при которых уравнение
$|2x+6|+|2x-8| = ax+12$ имеет единственное решение.

23. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $(1+a)x^2+(1-a)x+a+3=0$ имеет по крайней мере один корень и все его корни являются целыми числами.

24. Число a подобрано так, что уравнение
$\sqrt{x-\sqrt{3}}+a^2x^2+2ax(\sqrt{6}-\sqrt{3}) = 6\sqrt{2}-9$ имеет решение.
Найти это решение.

25. При каждом значении параметра a решите уравнение
$2x^2+2ax-a^2=\sqrt{4x+2a+3a^2}$.

26. Найти все значения параметра p, при которых уравнение
$x-2=\sqrt{-2(p+2)x+2}$ имеет единственное решение.

27. При всех допустимых значениях параметра a найти число различных решений уравнения $\sqrt{x}+\sqrt{\sqrt{a}-x}=a$ и указать эти решения.

28. Для каждого значения параметра a из промежутка $(-3,0)$ найти число различных решений уравнения $(2x^2-5ax+2a^2)\sqrt{x-\frac{2}{a}}=0$.

29. При каждом a решить уравнение $4^x-2a(a+1)\cdot 2^{x-1}+a^3=0$.

30. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система
$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+5\,|x|+4=3y+5x^2+3a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

31. При каких значениях p уравнение $4(x-\sqrt{p\cdot 4^p})x+4(4^p-1)+p=0$ имеет корни и каковы знаки корней при различных значениях p?

Зачетные задания

32. При всех значениях параметра a решить уравнение
$25^x-(a-1)\cdot 5^x+2a+3=0$ и указать,
при каких a оно имеет единственное решение.

33. При каких действительных p уравнение
$4^x+2^{x+2}+7=p-4^{-x}-2\cdot 2^{1-x}$ имеет решение?

34. Найти все значения a, при которых уравнение
$\left|\frac{x(2^x-1)}{2^x+1}+2a\right|=a^2+1$ имеет нечетное число решений.

35. Найти все значения x, удовлетворяющие уравнению $2\log_{2+a^2}(4-\sqrt{7+2x}) = \log_{2+a^2x^2}(4-3x)$ при любом действительном a.

36. Для всех вещественных значений a решить уравнение $(a+2)^2\log_3(2x-x^2)+(3a-1)^2\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=0.$

37. Определить, при каких k уравнение $\log_{\sqrt{2-x}}(4x+k)=4$ имеет решения и найти все эти решения.

38. Найти все значения a, при каждом из которых любое решение системы $\begin{cases} y-2a\log_2 x = 1, \\ y+a^2\log_2 x = 1 \end{cases}$ удовлетворяет неравенству $y<1+x$.

39. Для каждого a решить систему $\begin{cases} \dfrac{\log_2(|a|x^2-3x+4)}{\log_2(-3x+4)} = 5^{-|x|(x+1)^2}, \\ x \le 1 \end{cases}$

40. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\dfrac{(x^3-1)(x^2-16)}{\lg(15a-x)-\lg(x-a)}=0$ имеет единственное решение.

41. При всех значениях a решить уравнение $\log_2^2\left(\frac{x-5a}{x}\right)+4[\log_4(x-5a)]\log_2 x-8\log_4^2 x=0$.

16. НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ ПАРАМЕТР

Пример 1. Определить, при каких значениях a решения неравенства $\sqrt{x+a} \ge x$ образуют на числовой прямой отрезок длины $2|a|$.

Решение. Данное неравенство равносильно следующей совокупности:

$$\sqrt{x+a} \ge x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0 \\ x+a \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 0 \\ x+a \ge x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0 \\ x \ge -a \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2-x-a \le 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Дискриминант квадратного неравенства есть $D = 1+4a$. Рассмотрим три случая:

1) Если $a < -\frac{1}{4}$, то ни первая, ни вторая система совокупности решений не имеют.

2) Если $-\frac{1}{4} \le a \le 0$, то первая система совокупности решений не имеет.

Рассмотрим теперь вторую систему. Квадратное неравенство этой системы будет иметь решением промежуток $x \in \left[\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}, \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right]$.

При данных a левый конец промежутка неотрицателен, значит, решение системы есть $x \in \left[\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}, \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right]$. Найдем те a, при которых выполнено условие задачи:

$$\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} - \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2} = 2\,|\,a\,| \Leftrightarrow \sqrt{1+4a} = 2\,|\,a\,| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+4a = 4a^2 \Leftrightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

Выбранному промежутку принадлежит $a = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

3) Если $a > 0$, то первая система совокупности имеет решением промежуток $x \in [-a, 0)$. Рассмотрим вторую систему. Квадратное неравенство этой системы будет иметь решением промежуток $x \in \left[\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}, \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right]$. При данных a левый конец промежут-

ка отрицателен, значит, решение системы есть $x \in \left[0, \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right]$, а решение совокупности есть $x \in \left[-a, \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right]$. Найдем те a, при которых выполнено условие задачи:

$$\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} + a = 2|a| \overset{(\text{т.к}\,|a|=a)}{\Leftrightarrow} \sqrt{1+4a} = 2a - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 1 \ge 0 \\ 1 + 4a = (2a-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge \dfrac{1}{2} \\ a^2 - 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2.$$

Полученное значение a принадлежит выбранному промежутку.

Ответ: $a = 2$, $a = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

Тематические задания

1. Найти все значения параметра a, при каждом из которых имеется хотя бы одна пара чисел (x, y), удовлетворяющая условиям
$$\begin{cases} x^2 + (y+3)^2 < 4, \\ y = 2ax^2. \end{cases}$$

2. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \ge \dfrac{1-a}{1+a}, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \le -2 \end{cases}$ имеет решение.

3. Найти все значения p, при каждом из которых множество решений неравенства $(p - x^2)(p + x - 2) < 0$ не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \le 1$.

4. Найти все пары чисел p и q, при которых неравенство $|x^2 + px + q| > 2$ не имеет решений на отрезке $[1, 5]$.

5. Найти все значения параметра p, при каждом из которых число целочисленных решений неравенства $x^2 + 5(x+1) + 3|x - p| + p \le 0$ максимально.

6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $x^2 + 2|x - a| \ge a^2$ справедливо для всех действительных x.

7. Найти все значения a, для каждого из которых система неравенств $\begin{cases} -x^2 + 12x - a \ge 0, \\ x \le 2 \end{cases}$ выполняется хотя бы при одном значении x.

8. Найти все значения a, для которых неравенство $ax^2 + 1 > 4x - 3a$ выполняется для всех x из интервала $(-1, 0)$.

9. Найти все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} ax^2 + 4ax - y + 7a + 2 \ge 0, \\ ay^2 - x - 2ay + 4a - 1 \ge 0 \end{cases}$ имеет единственное решение.

10. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $|x^2 - 2x + a| > 5$ не имеет решений на отрезке $[-1, 2]$.

11. Найти все значения параметра b, при каждом из которых отрезок $[-3, -1]$ целиком содержится среди решений неравенства $\dfrac{x - 3b}{b - 2x} < 0$.

12. Найти все положительные значения a, при которых неравенство $\dfrac{a + 2x}{ax - 4} \ge \dfrac{5}{x}$ выполнено при всех $x > 10$.

13. Пусть $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} - 3$, $g(x) = \sqrt{x} - a$, где a — параметр. Решить относительно x неравенство $f(g(x)) \le 0$.

14. Найти все значения a, при каждом из которых среди решений неравенства $\sqrt{(a - x^2)(a + x^2)} + a > x$ есть ровно два различных целочисленных решения.

15. Для всех значений a решить неравенство $a - 2 < (a - 1)\sqrt{x + 1}$.

16. Для каждого значения параметра $b \le 0$ решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \ge b$.

17. Для всех значений параметра a решить неравенство $\sqrt{x + 2a} > x + \sqrt{2a}$.

18. Найти все значения a, при которых каждое решение неравенства $x^2 + a \le 0$ удовлетворяет неравенству $(x + 2a)\sqrt{3 - x} \le 0$.

19. При всех значениях параметра a решить неравенство $3(2x - a) + 5a\sqrt{2x - a} - 2a^2 > 0$.

20. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $9^x < 20 \cdot 3^x + a$ не имеет ни одного целочисленного решения.

Зачетные задания

21. Для всех значений a решить неравенство $3^{\sqrt{x+1}} > 2^{a-1}$.

22. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} 4^x - 2^{x+y} \le \dfrac{108a - 161}{2a - 3}, \\ 5 \cdot 2^{x+y} - 9 \cdot 4^y \ge 54 \end{cases}$ имеет решение.

23. Для каждого значения a решить неравенство $\dfrac{x^2 \cdot 2^{|2a-1|} - 2x + 1}{x^2 - (a-2)x - 2a} > 0$.

24. Для каждого значения a решить неравенство
$x^3 - x^2(3^a + 3^{1-a}) + 3x \le 0$.

25. Определить, для каких a неравенство $\log_{\frac{a}{a+1}}(x^2 + 2) > 1$ выполняется при любом действительном x.

26. Найти все действительные значения a, при которых каждое решение неравенства $\log_{\frac{1}{2}} x^2 \ge \log_{\frac{1}{2}}(x + 2)$ является решением неравенства $49x^2 - 4a^4 \le 0$.

27. Найти все значения p, для которых неравенство $\log_{x-p} x^2 < 2$ выполняется хотя бы для одного числа x такого, что $|x| < 0,01$.

28. При всех значениях параметра a решить систему
$$\begin{cases} 4\log_4^2 x + 9\log_8^2 y \le 4(a^2 + a), \\ \log_2^2 xy \ge 8(a^2 + a). \end{cases}$$

29. Для каждого допустимого значения a решить неравенство
$\log_{ax}\left(\dfrac{a}{2}\right) \cdot \log_{a^2-2}(a - 1) < 0$.

30. Для каждого значения параметра a решить неравенство
$(x^2 + 2x - a^2 - 4a - 3)(\sin x + 2x) > 0$.

ДИАГНОСТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1

1. Решить неравенство $\dfrac{(x-2)(x-5)(x-8)}{(x+2)(x+5)(x+8)} \ge -1$.

2. Решить уравнение $|1-x| + |x+1| = \dfrac{2x}{|x|}$.

3. Решить неравенство $(|x|-1)(2x^2+x-1) \le 0$.

4. Решить уравнение $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{3x+7}$.

5. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{2}(x-4)}{\sqrt{x^2-8x+17}} > 1$.

6. Решить уравнение $\dfrac{(\sqrt{3})^{2x} + 5\cdot 3^{2-x} - 14}{49 - 7^x} = 0$.

7. Решить неравенство $\dfrac{1}{2^x+5} < \dfrac{1}{2^{x+3}-2}$.

8. Решить уравнение $2\sqrt{\log_4^2(x-2)} = 3 - \log_2(2x+1)$.

9. Решить неравенство $x\log_2(4^{x+1} - 2^{x+1} + 8) < x^2 + 4x$.

10. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 4x + 2y = 1, \\ 3x^2 - 2y^2 - 6x - 4y = 5. \end{cases}$

11. При всех допустимых x упростить выражение

$$\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + 4\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

12. Решить уравнение $2(\sin 6x - \sin 4x \sin 2x) = \cos 6x + \cos 2x$.

13. Решить уравнение $\dfrac{\sin 5x - \sin 3x}{2\sin x} = 1$.

14. Для каждого целого значения параметра m решить уравнение $\log_{\frac{m^2}{4}+x^2}(3x)^{m^2+1} = m^2 + 1$.

15. Найти все значения a, при которых неравенство $\dfrac{x-2a-4}{x+3a-2} \le 0$ выполняется для всех x из промежутка $1 \le x \le 3$.

ДИАГНОСТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2

1. Решить неравенство $\frac{5x+1}{(x+2)(x-3)} \geq 1+\frac{16}{x-3}$.
2. Решить уравнение $|x^2-3|x|+1|=1$.
3. Решить неравенство $\frac{(x^2-9)(x+4)}{|x|-3} \geq 0$.
4. Решить уравнение $\sqrt{x-2}-\sqrt{2x+2}=\sqrt{2x-5}-\sqrt{3x-1}$.
5. Решить неравенство $2\sqrt{(x-3)(x^2-5x+6)} \leq x^2-5x+6$.
6. Решить уравнение $\frac{2^{x+1}}{2^{x+2}-3^x}=\frac{2^{x+2}+3^x}{2^{x-1}}$.
7. Решить неравенство $15\cdot\frac{4^{x-2}}{4^x-3^x} > 1+\left(\frac{3}{4}\right)^x$.
8. Решить уравнение $\log_3(x-2)-\log_9(x^2-10x+25)=\log_3 2$.
9. Найти область определения функции
   $f(x)=\sqrt{\log_{\frac{4}{x}}\frac{1}{2}-\log_2(2x)\cdot\log_{\frac{8}{x}}\frac{1}{2}}$.
10. Найти все решения системы уравнений $\begin{cases} 2xy+y^2-4x-3y+2=0, \\ xy+3y^2-2x-14y+16=0. \end{cases}$
11. При всех допустимых m и n найти численное значение выражения
    $\left(\frac{1+n}{n^2-mn}-\frac{1-m}{m^2-mn}\right)\cdot\left(\frac{m+n}{m^2n-n^2m}\right)^{-1}$.
12. Решить уравнение $\sin 2x+\sin 3x+\cos 5x=1$.
13. Решить уравнение $2\sin(6\cos x\cos 2x-3\cos 3x)=1$.
14. При всех допустимых значениях параметра a решить уравнение $\log_a(x^2-3a)=\log_a(a^2-3x)$.
15. Найти все значения $a \in [-6,6]$,
    при которых неравенство $(a+3)\cdot((x+1)(a+2)+3x) > 0$
    выполняется при всех неотрицательных x.

ДИАГНОСТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3

1. Решить неравенство $\frac{1}{2x^2+3x} \le \frac{1}{3x-2x^3}$.
2. Решить уравнение $|2x+8|-|x-5|=12$.
3. Решить неравенство $\frac{|x^2+x-12|}{x-3} \ge 1$.
4. Решить уравнение $4+\sqrt{x+9}=|x+5|$.
5. Решить неравенство $\frac{\sqrt{2-x}}{3-2x} < 1$.
6. Решить уравнение $5^{x\sqrt{12}} - 5\sqrt{3}\cdot 15^{x\sqrt{3}} + 4\cdot 3^{1+x\sqrt{12}} = 0$.
7. Решить неравенство $\left(\frac{1}{5}\right)^{1-x}\cdot 5^{\sqrt{-x}} > \frac{1}{25}$.
8. Решить уравнение $\frac{1}{4}\log_{x-1}(x-5)^4 - 8 + 4\log_{5-x}(6x-x^2-5) = 0$.
9. Решить неравенство $\log_2\log_{\frac{1}{2}}\frac{3x+4}{4x-8} \le 0$.
10. Решить систему $\begin{cases} x+y+xy=7, \\ x^2+y^2+xy=13. \end{cases}$
11. При всех допустимых p и q найти численное значение выражения $\frac{2p^3}{p^3+q^3}\cdot\frac{p+q}{p} - \frac{2p^2}{p^2-pq+q^2}$.
12. Решить уравнение $8\sin^2 x + 4\sin^2 2x = 5 - 8\cos 2x$.
13. Решить уравнение $\cos 8x \operatorname{ctg} x + 2\sin^2 4x = \operatorname{ctg} x$.
14. При каждом значении a решить уравнение $\log_3\left(\frac{x^2}{x-1} - a + 1\right) = \log_3\frac{x^2}{x-1} - \log_3(a-1)$.
15. При каждом значении параметра a найти все решения неравенства $x + 2a - 2\sqrt{3ax+a^2} > 0$.

ДИАГНОСТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4

1. Решить неравенство $\frac{x^2-3x-4}{x+1} \le 1$.
2. Решить уравнение $|x^2-5x+3| = x-3$.
3. Решить неравенство $\frac{5-4x}{|x-2|} \le |2-x|$.
4. Решить уравнение $\frac{1}{\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+2} = \sqrt{3x+1}$.
5. Решить неравенство $\frac{\sqrt{9+4x-x^2}}{3-x} < 1$.
6. Решить уравнение $18^x - 9^{x+1} - 2^{x+2} + 36 = 0$.
7. Решить неравенство $9^x - 2^{\frac{2x+1}{2}} < 2^{\frac{2x+7}{2}} - 3^{2x-1}$.
8. Найти $\log_3 x$, если $x < 3$ и $\log_3 3x \cdot \log_3 9x \cdot \log_3 27x = \log_3^3 x + 23$.
9. Решить неравенство $\log_2(2^x - 3) \cdot \log_{\sqrt{2}}(4^{x+2} - 12 \cdot 2^{x+3} + 144) < 32$.
10. Решить систему $\begin{cases} \sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{y+2} = 1, \\ x - y = 22. \end{cases}$
11. При всех допустимых x упростить выражение

    $$2(x^2 + \sqrt{x^4-1}) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x}} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{x}} \right)^{-2}.$$
12. Решить уравнение $\cos 7x + \cos x = 2\cos 3x(\sin 2x - 1)$.
13. Решить уравнение $2\sin^2 4x \cdot \mathrm{tg}(\sin x) + \cos 8x = 1$.
14. При каких значениях c уравнение $\sqrt{16-x^2} = -c - x$ имеет един венное решение?
15. Доказать, что при всех a и b имеет место неравенство

    $$\frac{5^{a+1}}{5^{2a}+25} \le 13 - 5b + \frac{1}{2}b^2,$$

    и определить, при каких a и b достигается равенство.

ДИАГНОСТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5

1. Решить неравенство $\dfrac{x^2+8x+15}{x^2+7x+14} \le 0$.
2. Решить уравнение $||x-1|-7| = 10$.
3. Решить неравенство $|2x+8| \ge 8 - |1-x|$.
4. Решить уравнение $(x^2 - 7|x| + 6)\sqrt{4x+23} = 0$.
5. Решить неравенство $\sqrt{x^2 + |x-4| - 18} > x - 4$.
6. Решить уравнение $3|3^{x-1} - 2| + |9^{\frac{x}{2}} - 3| = 3$.
7. Решить неравенство $\sqrt{2^{x^2-4} - 1} \cdot (x^2 - 7x + 6) \le 0$.
8. Решить уравнение $\log_3(x-5)^2 - 4 = \log_{\sqrt{3}}(x-1)$.
9. Решить неравенство $\dfrac{\log_7 12}{\log_7(x^2-9)} \ge \dfrac{\log_5(x^2+8x+12)}{\log_5(x^2-9)}$.
10. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{2x-1} + \sqrt{y+3} = 3, \\ 2xy - y + 6x - 3 = 4. \end{cases}$
11. При всех допустимых a и b упростить выражение
$$\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+ab}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}} + \left(\frac{a}{a+b}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] : \left(\frac{a}{a+b}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$
12. Решить уравнение $5\sin 2x = \sin 9x - \sin 5x$.
13. Найти все решения уравнения $5\sin^2 2x + 8\cos^3 x = 8\cos x$, лежащие на отрезке $\left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.
14. Найти все значения a, при которых уравнение $4^x + (a^2+5)\cdot 2^x - a^2 + 9 = 0$ не имеет решений.
15. Для каждого значения a решить неравенство $\sqrt{a^2 - x^2} \ge a + 1$.

ДИАГНОСТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6

1. Решить неравенство $\dfrac{-1}{\dfrac{8}{9-x^2}+1} \le 3-x$.
2. Решить уравнение $|x-2|+2|x+1|=9$.
3. Решить неравенство $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{|x|} \ge 2$.
4. Решить уравнение $\dfrac{6x^2-21x+16}{1+\sqrt{2x-4}} = \sqrt{2x-4}-1$.
5. Решить неравенство $|x+1| \le \sqrt{(x+1)^2(x^2-25)}$.
6. Решить уравнение $4^{x+\frac{1}{2}}-7^{x-\frac{1}{2}} = 7^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x+1}$.
7. Решить неравенство $\dfrac{3\cdot 2^{1-x}+1}{2^x-1} \ge \dfrac{1}{1-2^{-x}}$.
8. Решить уравнение $1+\log_4(x+2)^2 = \log_2(2x+8)$.
9. Решить неравенство $\dfrac{1}{\log_2 \dfrac{4}{x}} \ge \log_2 \dfrac{x}{8} - 1$.
10. Решить систему уравнений $\begin{cases} \left(\sqrt{3}\right)^{x-y} + 3^x \cdot 3^{-y} = 12, \\ 3^x + 3^{-y} = 10. \end{cases}$
11. При всех допустимых значениях α и β упростить выражение
$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)-\cos(\pi-\alpha)\cos(2\pi-\beta)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha+\beta\right)}.$$
12. Решить уравнение $2(\cos x-1)\sin 2x = 3\sin x$.
13. Найти все решения уравнения $|\sin 2x|+\cos x = 0$, принадлежащие отрезку $\left[-\sqrt{3}, \dfrac{8}{3}\right]$.
14. При каких значениях a все решения уравнения $2|x-a|+a-4+x=0$ удовлетворяют неравенству $0 \le x \le 4$?
15. Найти все значения действительного параметра a, для которых неравенство $4^x - a\cdot 2^x - a + 3 \le 0$ имеет хотя бы одно решение.

ДИАГНОСТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 7

1. Решить неравенство $\frac{2x+1}{x+4} \geq \frac{4}{x+1}$.
2. Решить уравнение $|x^2 - 3x| = 2x - 4$.
3. Решить неравенство $\frac{|x-3|}{2 - \frac{8}{|x-3|}} < -1$.
4. Решить уравнение $2\sqrt{2x^2 - x + 8} = x - 2x^2 + 7$.
5. Решить неравенство $\frac{\sqrt{x^6 - 64}}{x-3} \geq 0$.
6. Решить уравнение $2^{2x+1} - 15 \cdot 2^x + 10 = 6\,|2^{x-1} - 1|$.
7. Решить неравенство $x \log_2(4^{x+1} - 2^{x+1} + 8) < x^2 + 4x$.
8. Решить уравнение $\log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{4}} x + \log_4 \log_2 (16x^2) = 0$.
9. Решить неравенство $\log_{\frac{2x+2}{5x-1}}(10x^2 + x - 2) \leq 0$.
10. Решить систему уравнений $\begin{cases} |3^x - 3^y| + 3^x + 3 \cdot 3^y = 8\sqrt{3}, \\ |3^x + 3^{-y}| + 2 \cdot 3^x - 28 \cdot 3^{-y} = 0. \end{cases}$
11. При всех допустимых значениях α упростить выражение $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin\alpha\cos\alpha} - 2\operatorname{tg}^2\alpha$.
12. Решить уравнение $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \cos 2x$.
13. Решить уравнение $|\sin x| + \sin 3x = \sin 2x$.
14. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a + 3 = 0$ является наибольшей? Чему равна эта сумма?
15. Найти все x, для которых $0{,}5 < x < 2{,}5$ и которые удовлетворяют неравенству $\log_{3x - x^2}(3a - ax) < 1$ при всех a из промежутка $0 < a < 2$.

ДИАГНОСТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8

1. Решить неравенство $-2 < \dfrac{6}{x^2 - x - 6} < -1$.
2. Решить уравнение $x^2 + 1 + |x - 1| = 2|x|$.
3. Решить неравенство $|x^2 + 3x| + x^2 - 2 \geq 0$.
4. Решить уравнение $\sqrt{x+2} + \sqrt{8-x} = \sqrt{15}$.
5. Решить неравенство $|x - 6| + \sqrt{3x+1} \leq 5$.
6. Решить уравнение $\left(\dfrac{5}{7}\right)^{x-2} \cdot \left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \dfrac{125}{343}$.
7. Решить неравенство $\left(1 - \dfrac{2x}{5}\right)^{7+11x-6x^2} \geq 1$.
8. Решить уравнение $\log_{\left|\cos\frac{\pi x}{8}\right|}(9^x - 3^{x+2} + 12) = \log_{\left|\cos\frac{\pi x}{8}\right|}(3^x + 3)$.
9. Решить неравенство
$\log_{3-x}(2x+1))(\log_{2x+1} x^2) \leq (\log_{3-x}(3x+1))(\log_{3x+1}(x+2))$.
10. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{3 + \log_x(1-y)} = \log_x x(1-y), \\ xy = -6. \end{cases}$
11. При всех допустимых значениях α упростить выражение
$\dfrac{2(\sin 2\alpha + 2\cos^2\alpha - 1)}{\cos\alpha - \sin\alpha - \cos 3\alpha + \sin 3\alpha}$.
12. Решить уравнение $\sin 3x \sin x + 1 = \cos 2x$.
13. Найти все решения уравнения $\sqrt{\operatorname{tg} 3x} = \sqrt{-\operatorname{tg} x}$, лежащие в промежутке $x \in [0, \pi)$.
14. Найти все значения a, при которых система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ (x-3)^2 + (y+4)^2 = a \end{cases}$
имеет единственное решение.
15. Для любого допустимого значения a решить неравенство
$2 - \log_a(x-3) < \log_a x$.

ДИАГНОСТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 9

1. Решить неравенство $\dfrac{\dfrac{1}{x-1}-1}{1-\dfrac{1}{x-7}} \geq 0$.

2. Решить уравнение $|5x-2|-|7x-3|=-2x+1$.

3. Решить неравенство $\left|2-\dfrac{1}{x-4}\right|<3$.

4. Решить уравнение $3\sqrt{x^2-4x+4}-4-x=(\sqrt{-x^2+x+2})^2$.

5. Решить неравенство $(x^2-7x+6)\sqrt{x^2-10x+21} \geq 0$.

6. Решить уравнение $3^{2x}-2\cdot 3^{x-1}+\left|3^x-\dfrac{1}{4}\right|=\dfrac{13}{12}$.

7. Решить неравенство $3^{(x+3)^2}+\dfrac{1}{9} \leq 3^{x^2-2}+27^{2x+3}$.

8. Решить уравнение $\log_{x+6}(x^3+10x^2+15x)\cdot\log_2(x+6)=\log_2(3x^2+5x)$.

9. Решить неравенство $\sqrt{\log_5(x+2)} > \log_{\frac{1}{5}}\dfrac{5}{x+2}$.

10. Решить систему $\begin{cases} x^2+y^2+3y=11, \\ \log_{\frac{1}{3}}(3y-5)+3\log_{27}(x+y)=0. \end{cases}$

11. При всех допустимых значениях α упростить выражение
$2\sin\alpha\cos\alpha-\dfrac{\sin\alpha-\sin(\pi+3\alpha)+\sin 2\alpha}{2\cos\alpha+1}$.

12. Решить уравнение $4\cos^3 x+3\sqrt{2}\sin 2x=8\cos x$.

13. Решить уравнение $\dfrac{4\sin x-2\cos 2x-1}{\cos 2x+\sqrt{3}\cos x-2}=0$.

14. Для каждого значения параметра a определить число решений уравнения $\sqrt{2|x|-x^2}=a$.

15. Найти все значения a, при которых неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+ax+1)<1$ выполняется для всех x из промежутка $x<0$.

ДИАГНОСТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 10

1. Решить неравенство $x \le \frac{8x-2}{x+5}$.
2. Решить уравнение $(x-3)^2 - 5\,|\,x-3\,| = 24$.
3. Решить неравенство $|\,x^2 + 2x - 8\,| > 2x$.
4. Решить уравнение $\sqrt{x+1} - \sqrt{4x-3} = 1$.
5. Решить неравенство $\frac{\sqrt{x^2-2}}{4-2x} \ge -1$.
6. Решить уравнение $7 \cdot \frac{4^{x-2}}{4^x - 3 \cdot 5^x} = 1 + 3 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^x$.
7. Решить неравенство $3 \cdot 4^{\sqrt{2-x}} + 3 < 10 \cdot 2^{\sqrt{2-x}}$.
8. Сколько корней имеет уравнение $\log_2(40 - 5x^2 + x^2 \cdot 2^x) = x + 3$?
9. Решить неравенство $\left(1 - \frac{x}{2}\right)\log_{13-3\cdot 2^x} 4 \le 1$.
10. Решить систему уравнений $\begin{cases} \log_2 xy \cdot \log_{4x} y = 2, \\ 8x - y = 1. \end{cases}$
11. При всех допустимых значениях x упростить выражение
$$\frac{1 + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) - \sin^2 x}{\sin 2x \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin x \cos(\pi - 2x)}.$$
12. Решить уравнение $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{15}{8}\cos 2x - \frac{1}{2}$.
13. Решить уравнение $\log_4(4\sin^2 2x) = 2 - \log_2(-2\,\mathrm{tg}\,x)$.
14. Найти все значения a, для которых система $\begin{cases} a(x-4) = 3y + 6, \\ y + \sqrt{x} = 0 \end{cases}$ имеет два различных решения.
15. Для любого допустимого значения a решить неравенство $\log_{2a}(\log_3 x^2) > 1$ и найти, при каком значении a множество точек x, не являющихся решениями неравенства, представляет собой промежуток, длина которого равна 6.

ОТВЕТЫ

1. Метод интервалов для решения нера

1. $x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$.
2. 46.
3. $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup \left(-1, \frac{1}{2}\right)$.
4. $x \in (-\infty, 1)$.
5. $x \in (-\infty, -4] \cup [-2, -1] \cup [1, +\infty)$.
6. $x \in \left(-\infty, -\frac{7}{5}\right] \cup \left(2, \frac{13}{5}\right]$.
7. $x \in (-1, 0) \cup (2, 4)$.
8. $x \in (1, 3-\sqrt{3}) \cup (3+\sqrt{3}, +\infty)$.
9. $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{8}\right) \cup [2, +\infty)$.
10. $x \in (-1-\sqrt{6}, -1+\sqrt{6})$.
11. $x \in (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.
12. $x \in (3, +\infty)$.
13. $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup (1, +\infty)$.
14. $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right] \cup (1, +\infty)$.
15. $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$.
16. $x \in (-\infty, -1] \cup (1, 2]$.
17. $x \in (1, 2) \cup (3, +\infty)$.
18. $x \in (-\infty, -3-\sqrt{2}) \cup (-4, -3+\sqrt{2})$.
19. $x \in [-1, 1) \cup (1, 3]$.
20. $x \in [1, 2]$.
21. $x \in [-5, 1] \cup (2, 3)$.
22. $x \in (-\infty, 0) \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right)$.
23. $(-\infty, -2] \cup \left(0, \frac{1}{4}\right]$.
24. $x \in (-\infty, 1] \cup (1996, +\infty)$.
25. $x \in (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (5, +\infty)$.
26. $x \in \left(-2, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, 2\right)$.
27. $x \in (1, 2)$.
28. $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 2)$.
29. $x \in (-2, 0]$.
30. $x \in (-\infty, -1)$.
31. $x \in (-\infty, 2-\sqrt{8}] \cup \{2\} \cup [2+\sqrt{8}, +\infty)$.

32. $x \in [-6, 0)$.
33. $x \in (-\infty, -2] \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$.
34. $x \in (-\infty, -9) \cup \left(\frac{2}{3}, 1\right) \cup \left[\frac{11}{2}, +\infty\right)$.
35. $x \in \left(-2, -\frac{3}{2}\right) \cup (1, +\infty)$.
36. $x \in (-\infty, 1] \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.
37. $x \in (-4, -1) \cup (-1, 2)$.
38. $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup \{2\}$.
39. $x \in (-\infty, 1] \cup (1, 2) \cup [4, +\infty)$.
40. $x \in \{-2\} \cup (3, +\infty)$.
41. $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

2. Уравнения, содержащие модуль

1. $x = 0$, $x = 2$.
2. $x \in \left(-\infty, \frac{6}{5}\right]$.
3. $x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$.
4. $x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$.
5. $x = 2$, $x = 3$.
6. $x = -1$, $x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $x = 1$.
7. $x = -3$, $x = -1$.
8. $x \in (2, +\infty)$.
9. $x = 2$.
10. $x = -2$, $x = 4$.
11. $x = 1$.
12. $x = -3 - \sqrt{11}$, $x = 3 + \sqrt{11}$.
13. $x = 2$, $x = 3$.
14. $x = \frac{4}{5}$, $x = \frac{6}{5}$.
15. $x = 2$, $x = \frac{2}{3}$.
16. $x = -4$, $x = 0$.
17. $x \in \left[-\frac{7}{2}, \frac{15}{2}\right]$.
18. $x = -\frac{4}{3}$, $x = 2$.
19. $x \in \left\{\frac{5}{4}\right\} \cup [5, +\infty)$.
20. 6 корней.

21. $x \in [2, +\infty)$.
22. $x = 1$.
23. $x = 0$, $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.
24. $x = \pm 1$.
25. $x = \pm 1$.
26. $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$.
27. $x = 3$.
28. $x = \pm 2$.
29. $x = 3$, $x = 3 + 2\sqrt{3}$, $x = 3 + \sqrt{2}$, $x = 2 + \sqrt{11}$.

3. Неравенства, содержащие модул

1. $x \in (1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$.
2. $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.
3. $x \in (-5; 3 + 2\sqrt{2})$.
4. $x \in [-1 - \sqrt{8}, -3) \cup (1, 3]$.
5. $x \in [-2, -1) \cup (-1, +\infty)$.
6. $x \in [-1, 0]$.
7. $x \in (-\infty, -1) \cup \left[-\frac{1}{3}, 1\right) \cup (1, +\infty)$.
8. $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.
9. $x \in (-\infty, 2) \cup \{3\} \cup (4, +\infty)$.
10. $x \in (-\infty, -199) \cup (-66, 200)$.
11. $x \in (-\infty, 4) \cup (4, 8) \cup [10, +\infty)$.
12. $x \in (-5, -2) \cup (-1, +\infty)$.
13. $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup \{0\} \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.
14. $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 1] \cup [5, +\infty)$.
15. $x \in (-5, 5)$.
16. $x \in \left(-\frac{11}{7}, -\frac{3}{7}\right)$.
17. $x \in [-6, -1] \cup [0, +\infty)$.
18. $x \in (-2, 2) \cup (2, 3) \cup (6, +\infty)$.
19. $x \in [-3, -1)$.
20. $x \in (-3, -2) \cup \{-1\} \cup (0, 1)$.
21. $x \in (-\infty, -2] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(1, \frac{\sqrt{73} - 3}{4}\right]$.
22. $x \in (-\infty, -4) \cup \{0\} \cup \{2\} \cup (4, +\infty)$.
23. $x \in (-\infty, 2) \cup \left(\frac{5 + \sqrt{17}}{4}, +\infty\right)$.
24. $x \in \left(-\frac{9 + \sqrt{57}}{4}, -2\right) \cup (-2, -1) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

25. $x \in (-1, 2) \cup (2, 11)$.

26. $x \in (-\infty, 0] \cup [1, 2] \cup [5, +\infty)$.

27. $x \in (-\infty, -2-\sqrt{3}] \cup \left(-\frac{3}{10}, -2+\sqrt{3}\right] \cup \{1\} \cup (2, +\infty)$.

28. $x \in (-\infty, -1] \cup \{1\} \cup [2, +\infty)$.

29. $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

30. $x \in \left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left\{-\frac{1}{3}\right\} \cup \left[\frac{\sqrt{3}-2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

31. $x \in (-6, -4) \cup (-4, 1)$.

32. $x \in (-1, 4)$.

33. $x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup (2, +\infty)$.

34. $x \in (-\infty, -6] \cup [-1, 0) \cup \left(0, \frac{\sqrt{73}-7}{2}\right]$.

35. $x \in [-7, -2) \cup (-2, -1]$.

36. $x \in [-\sqrt{5}, 2)$.

4. Иррациональные уравнен

1. $x = \frac{5+\sqrt{41}}{2}$.

2. $x = -\sqrt{2+\sqrt{5}}$.

3. $x = 0$, $x = 3$.

4. $x = -1$.

5. $x = 4$.

6. $x = -1$, $x = 2$.

7. $x = 2$.

8. $x = -1$.

9. $x = -3$, $x = 2$.

10. $x = -1$, $x = 4$.

11. $x = -7$, $x = 7$.

12. $x = -\sqrt{3}$.

13. $x = -\frac{4}{3}$, $x = -\frac{2}{3}$.

14. $x = 2$.

15. $x = -1$.

16. $x = \frac{1}{2}$.

17. $x \in (-\infty, -1] \cup \left\{\frac{1}{5}\right\}$.

18. $x = 0$.

19. $x = 3$.

20. $x = 2$.

21. $x = -\frac{15}{4}$, $x = -3$, $x = -\frac{7}{4}$.

22. $y=-4$, $y=1$.

23. $x=-\sqrt{3}$.

24. $x=1$, $x=3$.

25. $x=23$.

26. $x=3$, $x=18$.

27. $x=-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$, $x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

28. $x=0$, $x=2$.

29. $x=7$.

30. $x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

31. $x=2$.

32. $x=0$.

33. $x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$.

34. $x=-4$.

35. $x=0$, $x=2$.

36. $x=-9$, $x=-8$, $x=-6$, $x=-5$.

37. $x=0$, $x=1$, $x=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

38. $x=\dfrac{15+\sqrt{5}}{10}$.

39. $x=\dfrac{3+\sqrt{65}}{2}$.

40. $x=\sqrt{5}$.

41. $x=-1$, $x=\dfrac{2}{7}$.

42. $x=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

43. $x=\pm\sqrt{\dfrac{7}{2}}$.

44. $x=-25$.

45. $x=\dfrac{1}{2}$, $x=\dfrac{2\sqrt{2}-3}{2}$.

5. Иррациональные нера

1. $x\in\{-1\}\cup[2,+\infty)$.
2. $x\in[-3,1)$.
3. $x\in(3,5]$.
4. $x\in[2,11]$.
5. $x\in(-\infty,0)\cup[1,2]$.
6. $x\in\left[0,\dfrac{1}{11}\right)\cup(4,+\infty)$.
7. $x\in[-1-\sqrt{52},-5)\cup(1,-1+\sqrt{52}]$.

8. $x \in \{1\} \cup [2, +\infty)$.

9. $x \in \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right] \cup \left\{\frac{2}{5}\right\}$.

10. $x \in \left[-\frac{3}{2}, 3\right]$.

11. $x \in \left(-\infty, -\frac{17}{2}\right] \cup \left(\frac{\sqrt{185}-9}{2}, +\infty\right)$.

12. $x \in \{-4\} \cup [-3, +\infty)$.

13. $x \in (-\infty, -7) \cup [2, +\infty)$.

14. $x \in (-\infty, -7) \cup (-5, -3] \cup [2, +\infty)$.

15. $x \in \left[-6, \frac{11+\sqrt{157}}{4}\right)$.

16. $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$.

17. $x \in \{-3\} \cup [0, 1]$.

18. $x \in \left[0, \frac{3-\sqrt{5}}{6}\right)$.

19. $x \in [1, 3)$.

20. $x \in \{3\} \cup [4, 7]$.

21. $x \in (-\infty, 4)$.

22. $x \in \{1\} \cup (2, 3)$.

23. $x \in (-\infty, -2] \cup \left(\frac{49}{16}, +\infty\right)$.

24. $x = -1$, $x = 3$.

25. $x \in (4, +\infty)$.

26. $x \in (-1, 0) \cup (1, 4)$.

27. $x \in \{-3\} \cup (1, 8)$.

28. $x \in (-\infty, -1] \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup [0, +\infty)$.

29. $x \in (-\infty, -1998] \cup [1996, +\infty)$.

30. $x \in (-\infty, 0] \cup \left[\frac{7}{8}, +\infty\right)$.

31. $x \in \left(\frac{21-\sqrt{89}}{8}, +\infty\right)$.

32. $x \in [-3, 1)$.

33. $x \in \{3\} \cup [4, 13]$.

34. $x \in \left[3, \frac{11+\sqrt{61}}{2}\right]$.

35. $x \in \left(\frac{4}{7}, \frac{37+\sqrt{69}}{50}\right)$.

36. $x \in [-4, 5) \cup (21, +\infty)$.

37. $x \in (-\infty, -3) \cup \{5\}$.

38. $x \in \left\{-\frac{4}{3}\right\} \cup [-1, 0]$.

39. При $x = -7$, $y = 5$.

40. $x \in \{1\} \cup [2, +\infty)$.

41. $x \in \{-2\} \cup \left[-\frac{3}{2}, -1\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$.

42. $x \in (-3, -2] \cup \left[\frac{3-\sqrt{31}}{2}, \frac{\sqrt{23}-1}{2}\right] \cup [2, 5)$.

43. $x \in \left[-4, \frac{2\sqrt{101}-25}{13}\right] \cup \{0\} \cup \left[\frac{23}{13}, 2\right]$.

44. $x \in [0, 4]$.

45. $x \in [3, 6) \cup \left(6, \frac{133-22\sqrt{6}}{2}\right)$.

46. $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$.

47. $x \in \{-12\} \cup (7, +\infty)$.

48. $x \in \left[-\frac{1+2\sqrt{29}}{5}, 2\right]$.

49. $x \in [1, 2)$.

50. $x \in \{-1\} \cup [1, +\infty)$.

51. $x \in [-1, 1]$.

52. $x \in (-\infty, -6) \cup [-2\sqrt{5}, -5) \cup \{-2\}$.

53. $x \in (-\infty, -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}, 9]$.

54. $x = 3$, $x = \frac{7}{2}$.

55. $x \in (-\infty, -2] \cup \{-1\} \cup (7, 8]$.

56. $x \in \{-21\} \cup [0, 21]$.

57. $x \in \{0\} \cup \left[2, \frac{12}{5}\right]$.

58. $x \in (-\infty, 2) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 3\right)$.

59. $x \in [-1, 0)$.

60. $x \in (-\infty, -1] \cup \{2\}$.

61. $x \in (-\infty, -5)$.

6. Показательные уравнения

1. $x = 1$, $x = -\frac{1}{3}$.

2. $x = -1 + \sqrt{3 + \log_{0.75} 2}$, $x = -1 - \sqrt{3 + \log_{0.75} 2}$.

3. $x = -2 + \sqrt{4 - 2\log_3 5}$.

4. $x = -2$.

5. $x = -1$, $x = 1$.

6. $x = -1$, $x = \frac{2}{3}$.

7. $x = \log_2 3$.

8. $x = 1$.

9. $x = \frac{7}{5}$.

10. $x = \frac{1}{2}$.

11. $x = 3$.

12. $x = 2 - \log_2 9$.

13. $x = 4$.

14. $x = \log_2(1 + \sqrt{5}) - 1$.

15. $x = \frac{1}{2}$.

16. $x = \frac{1}{4}$.

17. $x = \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)$.

18. $x = -1$, $x = 4$.

19. $x = 1$.

20. $x = \log_{\frac{2}{5}} 2$, $x = -\log_{\frac{2}{5}} 3$.

21. $x = -5$, $x = -\frac{4}{5}$, $x = 2$.

22. $x = 2$.

23. $x = 2 - \log_3 2$.

24. $x = (\log_2 5 - 2)^2$.

25. $x = -1$.

26. $x = -\log_2 9$.

27. $x = 1$.

28. Нет решений.

29. $x = 2$.

30. $x = 0$, $x = -2$.

31. $x = 1$.

32. $x = -2$, $x = 4$.

33. $x = 1$.

34. $x = 0$.

35. $x = 2$.

36. $x = 0$, $x = 2$.

37. $x = \log_{\frac{7}{10}} 2$.

38. $x = 1$.

39. $x = 0$, $x = -3 - \log_5 3$.

40. $x = 1$.

41. $x = \pm\sqrt{-\log_2 \frac{6 - \sqrt{26}}{2}}$.

42. $x = 0$, $x = \log_3 2$.

43. $x = 0$.
44. $x = 0$.
45. $x = 1$.
46. $x = 0$, $x = \sqrt[9]{100000}$.
47. $x = \pm 1$.
48. $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$.
49. $x = \frac{1}{2}\left(\log_3 \frac{3-\sqrt{6}}{2} \pm \sqrt{\log_3^2 \frac{3-\sqrt{6}}{2} - 1}\right)$.
50. $x = 3$.
51. $x = 3$.
52. $x = 2\log_5 \frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}$.
53. $x = -1$, $x = \frac{2}{3}$.
54. $x = \frac{1}{2}$.
55. $x = -4$.
56. $x = \pm\frac{1}{2}$.
57. $x = -1$, $x = \frac{1}{2}$.

7. Показательные неравенства

1. $x \in [2, 18)$.
2. $x \in [-10, 5]$.
3. $x \in (-\infty, -\log_3 2] \cup [1 - \log_3 5, \log_3 5 - 1)$.
4. $x \in (-\sqrt{7}, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \sqrt{7})$.
5. $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{6}\right) \cup \left(\frac{1}{12}, +\infty\right)$.
6. $x \in (-\infty, -1)$.
7. $x \in (0, +\infty)$.
8. $x \in (3, +\infty)$.
9. $x \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.
10. $x \in (-\infty, 4 - 2\sqrt{2}) \cup (4 + 2\sqrt{2}, +\infty)$.
11. $x \in (-\infty, 1)$.
12. $x \in (-\infty, \log_3 4)$.
13. $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.
14. $x \in \left(\log_3 \frac{1}{2}, \log_3 \frac{2}{3}\right)$.
15. $x \in \left[\frac{a+3}{3a+2}, \frac{1-a}{2-3a}\right]$, где $a = \log_3 2$.
16. $x \in [1, 5) \cup (10, +\infty)$.
17. $x \in (0, \log_3 2)$.

18. $x \in (-\infty, -3) \cup \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

19. $x = \{1\} \cup (3, 5]$.

20. $x \in \left[\log_{\frac{3}{4}} 4, \log_{\frac{3}{4}} \sqrt{7}\right)$.

21. $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{12}\right) \cup \left(0, \frac{1}{12}\right) \cup (6, +\infty)$.

22. $x \in [\log_3 4, 3]$.

23. $x = 3$.

24. $x \in (-\infty, 0]$.

25. $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

26. $x \in (-\infty, -1 - \log_5 2]$.

27. $x \in (-\infty, \log_3 2] \cup (1, 5)$.

28. $k = -2$.

29. $x \in \left[\log_{\frac{4}{3}}\left(3 + \frac{\sqrt{30}}{2}\right), +\infty\right)$.

30. $x \in \left(-\infty, \log_{\frac{2}{5}} 3\right]$.

31. $x \in [\log_3 4, +\infty)$.

32. $x \in (-\infty, 1)$.

33. $x \in (-\infty, 0)$.

34. $x \in (-\infty, -3] \cup \{5\}$.

35. $x \in \left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right)$.

36. $x \in (3, +\infty)$.

37. $x \in (-\infty, 0) \cup (1, 3)$.

38. $x \neq 3$.

39. $x \in \left[0, \log_{\frac{2}{3}} \frac{4}{3}\right) \cup \left(\log_{\frac{2}{3}} \frac{4}{3}, 1\right]$.

40. $x \in (0, 3]$.

41. $x \in (-\infty, 1] \cup (\log_2 11, +\infty)$.

42. $x \in (-\infty, \log_{7+\sqrt{18}} 11] \cup [\log_{7-\sqrt{18}} 3, +\infty)$.

43. $x \in (0, +\infty)$.

44. $x \in [\log_{50} 8, \log_{50} 9)$.

45. $x \in (-\log_2 6, 1)$.

46. $x = \frac{1}{2}$.

47. $x \in (-\infty, 0] \cup [\log_{\frac{4}{3}} 4, \log_{\frac{4}{3}} 7] \cup [\log_{\frac{4}{3}} 12, +\infty)$.

48. $x \in \{0\} \cup [\lg^{15} 6, +\infty)$.

49. $x \in \left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

50. $x \in (-\infty, -2] \cup (2, +\infty)$.

51. $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$.

52. $x \in (-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$.

8. Логарифмические уравнени

1. $x = \pm\sqrt{\log_2 3}$.
2. $x = 2$.
3. $x = \frac{4}{3}$, $x = 3$.
4. $x = 1$.
5. $x = 16^{-\frac{1}{27}}$, $x = 2^{\frac{1}{3}}$.
6. $x = 4$.
7. $x = 3$.
8. $x = -2 - \sqrt{5}$, $x = \sqrt{\frac{7}{3}}$.
9. $x = 2^{-8}$, $x = 2^{27}$.
10. $x = \frac{1}{8}$, $x = 2$.
11. $x = \frac{3}{2}$.
12. $x = \frac{1}{2}$.
13. $x = \frac{1}{4}$.
14. $x = 2$.
15. $x = 3$, $x = 81$.
16. $x = 5$.
17. $x = -\frac{1}{3}$, $x = 4$.
18. $x = \frac{1}{10}$, $x = 10^{\sqrt{2}}$.
19. $x = 2$, $x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$.
20. $x = 2$.
21. $x = 1 \pm \sqrt{11 + 4\sqrt{3}}$.
22. $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$.
23. $x = -1$.
24. $x = 4$.
25. $x = 3$.
26. $x = 2$, $x = \frac{1}{6}$.
27. $x = 3$.

28. $x = \frac{1}{4}$.

29. $x = 8$.

30. $x = \frac{1}{7}$, $x = 7^{\frac{-3\pm\sqrt{2}}{7}}$.

31. $x = 1$.

32. $x = 2$, $x = \frac{1}{128}$.

33. $x = 2$.

34. $x = 5$.

35. $x = 9^4$, $x = 9^{-2}$.

36. $x = -3$, $x = -2$, $x = 1$.

37. $x = -1$.

38. $x = -3$.

39. $x = 7^{\log_2\left(\frac{\sqrt{41}-5}{2}\right)}$.

40. $x = 2^{\frac{-1-\sqrt{33}}{2}}$.

41. $x = 2$.

42. $x = -4$.

43. $x = 9$, $x = \sqrt{3}$.

44. $x = 3^{\pm\sqrt{2}}$.

9. Логарифмические нера

1. $x \in [-3, -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}, 3]$.
2. $x \in (0,1) \cup \left(\sqrt{6} - 1, \frac{5}{2}\right)$.
3. $x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{7}}\right) \cup (1, 49)$.
4. $x \in (0,1] \cup [2, +\infty)$.
5. $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right)$.
6. $x \in \left[\frac{13}{50}, 9 + 4\sqrt{5}\right)$.
7. $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$.
8. Верно.
9. $x \in \left(-\frac{4}{5}, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{7}{4}, \frac{9}{4}\right)$.
10. $x \in [-1, 1) \cup (1, 3]$.
11. $x \in \left(-\frac{3}{2}, 1\right) \cup \left(\frac{\sqrt[3]{10} - 3}{2}, \frac{\sqrt[3]{100} - 3}{2}\right)$.
12. $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{7}{12}, \frac{2}{3}\right)$.
13. $x \in [4 - \sqrt{3}, 3) \cup [4 + \sqrt{3}, +\infty)$.

14. $x \in (2, 4)$.

15. $x \in \left(\frac{3}{2}, \frac{5-\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{2}, +\infty\right)$.

16. $x \in \left(9, \frac{19}{2}\right) \cup \left(\frac{19}{2}, \frac{39}{4}\right)$.

17. $x \in \left(-1, \frac{1}{3}\right] \cup \left[1, \frac{7}{3}\right)$.

18. $x \in \left(0, \frac{23}{35}\right)$.

19. $x \in \left(2-\sqrt{2}, \frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{13}{4}, 2+\sqrt{2}\right)$.

20. $x \in \left(3, \frac{7}{2}\right) \cup (4, +\infty)$.

21. $x \in \{5\} \cup (4+\sqrt{2}, +\infty)$.

22. $x \in (-\infty, 0] \cup \left[\frac{63}{32}, 2\right)$.

23. $x \in [2, +\infty)$.

24. $x = 1$.

25. $x \in (-3, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, 3)$.

26. $x \in \left[-2^{\frac{7}{2}}, -2^{\frac{3}{8}}\right) \cup \left(2^{\frac{3}{8}}, 2^{\frac{7}{2}}\right]$.

27. $x \in \left(0, 2^{-2\sqrt{2}}\right] \cup \left[2^{2\sqrt{2}}, +\infty\right)$.

28. $x \in (0, 1) \cup (16, +\infty)$.

29. $x \in (-\infty, -1) \cup \left(-10^{-\frac{3}{4}}, 0\right) \cup \left(0, 10^{\frac{3}{4}}\right) \cup (1, +$

30. $x \in \left(2, \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, 3\right)$.

31. $x \in (-3, -1)$.

32. $x \in (0, \sqrt[6]{2} - 1] \cup [63, +\infty)$.

33. $x \in (0, 3) \cup \left(\frac{25}{8}, \sqrt{10}\right)$.

34. $x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right] \cup (1, \sqrt[5]{9}]$.

35. $x \in (5, 6]$.

36. $x \in \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{2}\right)$.

37. $x \in (1, 5^{\log_2 7}]$.

38. $x \in \left[\frac{1}{4}, 1\right) \cup [\sqrt{2}, +\infty)$.

39. $x \in (1, 4]$.

40. $x \in [2, 11)$.

41. $x \in (-1, 0)$.

42. $x \in (2-\sqrt{2}, 1] \cup [3, 2+\sqrt{2})$.

43. $x\in\left[-\frac{1}{3},0\right)\cup\left(\frac{1}{5},\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$.

44. $x\in(0,1)\cup(1,4)\cup(64,+\infty)$.

45. $x\in\{5\}\cup(4+\sqrt{2},+\infty)$.

46. $x\in\left[-1,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{9+\sqrt{21}}{2}\right)$.

47. $x=-3$, $x=-1$.

48. $\{-3\}\cup[-2,6)$.

49. $x\in\left(\frac{1}{4},4\right)\cup(4,+\infty)$.

50. $x\in[-5,1]\cup\{2\}$.

51. $x\in(1,2)\cup(2,3)\cup[7,+\infty)$.

52. $x\in(-1,0)\cup(0,2)$.

53. $x\in\left(\frac{3}{2},2\right)\cup(2,+\infty)$.

54. $x\in\{3\}\cup[8,+\infty)$.

55. $x\in\left(-1,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left(0,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{13}}{2},+\infty\right)$.

56. $x\in(-\infty,\log_3 5)\cup\left(\frac{3}{2},\log_2 3\right)$.

57. $x\in[-3,0)$.

58. $x\in[-1,1]\cup\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)$.

59. $x\in\left[2-\sqrt{2},\frac{2}{3}\right)$.

60. $x\in(0,1)\cup(1,2)$.

61. -1.

62. $x\in\left(0,\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right)$.

63. $x\in\left(-\frac{3}{2};-1\right)\cup\left[-\frac{1}{2},1\right]$.

64. $x\in[-3,2)\cup(5,7]$.

10. Системы алгебраических уравнений

1. $\{(1,-5);(5,-1)\}$.

2. $\left\{(3,1);\left(\frac{5}{3},\frac{11}{3}\right)\right\}$.

3. $\{(-2,-1)\}$.

4. $\left\{\left(\frac{17}{4},-\frac{1}{8}\right);\left(-\frac{23}{4},\frac{39}{8}\right)\right\}$.

5. $\left\{(4,1);\left(-\frac{2}{3},\frac{10}{3}\right)\right\}$.

6. $\{(-2,-2)\}$.

7. $\left\{(0,0);(1,6);\left(\frac{7}{5},-\frac{42}{5}\right)\right\}$.

8. $\left\{\left(\frac{5}{2},-\frac{5}{2}\right)\right\}$.

9. $\left\{\left(\frac{\sqrt{7}-3}{2},\frac{4-\sqrt{7}}{2}\right);\left(\frac{\sqrt{19}-5}{2},\frac{6-\sqrt{19}}{2}\right)\right\}$.

10. $\left\{(1,2,1);\left(\frac{44}{25},-\frac{28}{25},-\frac{108}{25}\right)\right\}$.

11. $\{(0,-6);(t,6-t)\}$; $t\in R$, $t\le 2$.

12. $\{(3,2);(-2,-3);(\sqrt{10}+3,\sqrt{10}-3);(3-\sqrt{10},-3-\sqrt{10})\}$.

13. $\{(\sqrt{5},\sqrt{5});(-\sqrt{5},-\sqrt{5});(-\sqrt{5},\sqrt{5});(\sqrt{5},-\sqrt{5})\}$.

14. $\left\{(1,5);\left(\frac{5}{2},2\right)\right\}$.

15. $\left\{(0,\sqrt{3});(0,-\sqrt{3});\left(\sqrt{\frac{3}{119}},11\sqrt{\frac{3}{119}}\right);\left(-\sqrt{\frac{3}{119}},-11\sqrt{\frac{3}{119}}\right)\right\}$.

16. $\{(-2,3);(2,3)\}$.

17. $\{(2,2,-2)\}$.

18. $\{(0,0,0);(2,2,2);(2,-2,-2);(-2,2,-2);(-2,-2,2)\}$.

19. $\{(1,-1);(-3,3)\}$.

20. $\left\{(-8,6);\left(-\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right);\left(\frac{2}{3},\frac{11}{3}\right)\right\}$.

21. $\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)\right\}$.

22. $\left\{(4,2);\left(\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)\right\}$.

23. $\{(9,2)\}$.

24. $\left\{\left(0,-\frac{1}{2}\right);(21,21)\right\}$.

25. $\{(9,1)\}$.

26. $\left\{(1,0);\left(1,-\frac{4}{5}\right);\left(-7,\frac{28}{5}\right)\right\}$.

27. $\{(10,15);(15,10)\}$.

28. $\{(-1,1)\}$.

29. $\left\{\left(1,\frac{1}{3}\right)\right\}$.

30. $\left\{(0,0);\left(2\sqrt{7},\sqrt{7}\right)\right\}$.

31. $\left\{(5,1);\left(\frac{1}{3},-\frac{11}{3}\right)\right\}$.

32. $\left(\frac{5}{3},-\frac{7}{3}\right)$.

33. $\{(-2,-1)\}$.

34. $\{(-2,0)\}$.

35. $\{(0,-3)\}$.

36. $\{(-17, \log_2 10)\}$.

37. $\left\{(0, 3-\log_2 11); \left(\log_8 \frac{3+\sqrt{8}}{2}, 2-\log_2(3+\sqrt{8})\right)\right\}$.

38. $\left\{\left(-\frac{9}{2}, 3\right)\right\}$.

39. $\{(1, \log_3 2)\}$.

40. $\left\{\left(\log_2 \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)\right\}$.

41. $\left\{(2,1); \left(-1, \frac{23}{2}\right)\right\}$.

42. $\left\{\left(\log_2(\sqrt{6}-2), \log_2 \frac{\sqrt{6}-2}{2}\right)\right\}$.

43. $\left\{(\log_7 3, 2); \left(\log_7 \frac{5}{3}, -1\right)\right\}$.

44. $\{(2,1)\}$.

45. $\{(1,3)\}$.

46. $\{(\log_2 3, \log_3 2)\}$.

47. $\left\{\left(\frac{3}{2}, 0\right)\right\}$.

48. $\left\{\left(\frac{1+\sqrt{13}}{4}, \frac{-5+\sqrt{13}}{2}\right)\right\}$.

49. $\left\{(2, \log_3 5); \left(\frac{\sqrt{21}-1}{2}, \log_3(\sqrt{21}-1)\right)\right\}$.

50. $\{(\log_3 2, \log_2 3); (1,2)\}$.

51. $\left\{\left(10^{-\frac{\sqrt{26}}{3}}, \log_2\left(\frac{5+\sqrt{26}}{3}\right)\right)\right\}$.

52. $\left\{\left(2^{\frac{10}{3}}, 3^{-\frac{5}{3}}\right)\right\}$.

53. $\{(0,2)\}$.

54. $\{(4,4)\}$.

55. $\{(9,3); (1,27)\}$.

56. $\left\{(5,0); \left(\frac{1}{5}, 2\right)\right\}$.

57. $\{(2,1); (1,2)\}$.

58. $\{(32,2)\}$.

59. $\{(-2,-2); (-2,2)\}$.

60. $\left\{\left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right); \left(\frac{3}{2}, 9\right)\right\}$.

61. $\left\{\left(\frac{1}{3}, 1\right)\right\}$.

62. $\{(0,-1); (1,0)\}$.

63. $\left\{\left(1,\frac{1}{2}\right)\right\}$.
64. $\{(1,5)\}$.
65. $\{(1,27)\}$.

11. Преобразование алгебраических выражений

1. $\sqrt{a-1}$.
2. $-27x\sqrt{y}$.
3. 15.
4. −10.
5. −2.
6. Второе число больше.
7. 3.
8. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.
9. 18.
10. 3.
11. 1.
12. −5.
13. 8.
14. $-\frac{6}{5}$.
15. 2.
16. 3.
18. 2.
19. 1.
20. 1.
21. $\log_5 3$.
22. 7.
23. 3.
24. 2.
25. $-2\sqrt[3]{a}$.
26. −1/2.
27. −54.
28. 4.
29. 6.
30. −1.
31. $\frac{3-2a}{2b+a}$.
32. $\frac{3-3a}{1+b}$.
33. 3/7.

12. Преобразование тригонометрических выражений

4. $2\cos\alpha$.
5. 0.
6. 0,5.
7. 0,2.
8. 1.
9. 1/8.
10. $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{5}$.
11. 1) $-\frac{11}{3}$; 2) $-\frac{7}{20}$.
12. −1.
20. $1 + \operatorname{ctg}^2 2\alpha$.
21. −1.
22. $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{24}{7}$.
23. $-\frac{\sqrt{7}}{4}$.
24. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{15}}{7}$.
25. $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{5}{8}}$.
26. −0,5.
27. Обязательно, −2.
28. 3/2.
29. $\alpha + \beta + \gamma = \pi n$; $n \in Z$.
30. Второе число больше.
31. 0.
32. 1.
33. 2.
34. 1.
35. 5.
36. 4.
37. −6.
38. $\frac{\sqrt{3}}{8}$.
39. 4/5.
40. $a = \frac{3}{4}$, $b = 3$.

13. Основные методы решения тригонометрических уравнений

1. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x = \pi n$; $n \in Z$.
2. $x = \pm\frac{\pi}{8} + \pi n$; $n \in Z$.

3. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $n \in Z$.

4. $x = (-1)^n \arcsin(1 - \sqrt{2}) + \pi n$; $n \in Z$.

5. $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$; $n \in Z$.

6. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; $n \in Z$.

7. $x = \pi n$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$; $n \in Z$.

8. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$; $n \in Z$.

9. $\left\{\left(1, (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n - 1\right)\right\}$; $n \in Z$.

10. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{3}}{4} + \pi n$; $n \in Z$.

11. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $n \in Z$.

12. $\left\{\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n, (-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + \pi k\right); \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k\right)\right\}$; $n, k \in Z$.

13. $x = \frac{\pi n}{3}$, $x = \pm\frac{5\pi}{12} + \pi n$; $n \in Z$.

14. $x = \frac{(-1)^n \arcsin(\sqrt{3} - 1)}{2} + \frac{\pi n}{2}$; $n \in Z$.

15. $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $x = \pi n$; $n \in Z$.

16. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $n \in Z$.

17. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$; $n \in Z$.

18. $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$; $n \in Z$.

19. $x = -2 + \pi n$, $x = -\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4} + \pi n$; $n \in Z$.

20. $x = \frac{\pi n}{2}$; $n \in Z$.

21. $x = 2 \cdot (-1)^n \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi n$, $x = \pi + 2\pi n$; $n \in Z$.

22. $x = \pi n$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$; $n \in Z$.

23. $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$; $n \in Z$.

24. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$; $n \in Z$.

25. $x = \frac{\pi n}{4}$, $x = \frac{\pi}{32} + \frac{\pi n}{8}$; $n \in Z$.

26. $\left\{\left(\frac{5\pi}{24} + \pi n, \frac{\pi}{24} - \pi n\right); \left(\frac{\pi}{24} + \pi n, \frac{5\pi}{24} - \pi n\right)\right\}$; $n \in Z$.

27. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; $n \in Z$.

28. $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $n \in Z$.

29. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x = \frac{(-1)^n \arcsin \frac{3}{4}}{2} + \frac{\pi n}{2}$; $n \in Z$.

30. $x = \frac{\pi n}{2}$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $n \in Z$.

31. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{5\pi}{12} + 2\pi n$, $x = \frac{13\pi}{12} + 2\pi n$; $n \in Z$.

32. $\left\{\left(\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k\right)\right\}$; $n, k \in Z$.

33. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$; $n \in Z$.

34. $A \in [-\sqrt{13}, \sqrt{13}]$.

35. $x = \pi n$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$; $n \in Z$.

36. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$; $n \in Z$.

37. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; $n \in Z$.

38. $x = \frac{\pi n}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$; $n \in Z$.

39. $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$; $n \in Z$.

41. $x = \frac{\pi n}{3}$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$; $n \in Z$.

42. $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$; $n \in Z$.

43. $\left\{\left(\frac{7\pi}{4} + \pi n, -\frac{\pi}{4} + \pi n\right)\right\}$; $n \in Z$.

44. $x = \frac{\pi n}{4}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $n \in Z$.

45. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $n \in Z$.

46. $x = \pi + 2\pi n$; $n \in Z$.

47. $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{17 - \sqrt{385}}{16} + \pi n$; $n \in Z$.

48. $x = 2\pi n$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$; $n \in Z$.

49. $x = (-1)^n \arcsin\frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \pi n$; $n \in Z$.

50. $x = \pm\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{6} + \frac{\pi n}{2}$; $n \in Z$.

51. $x = -\operatorname{arctg}\frac{7}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$; $n \in Z$.

52. $x = \dfrac{-18 \pm \sqrt{2+8n}}{26}$; $n \in Z$, $n \ge 0$.

53. $x = \left(\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n\right)^2$; $n \in Z$.

54. $x = \pi n$; $n \in Z$.

55. $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$; $n \in Z$.

56. $x = \dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{2\pi n}{3}$, $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $n \in Z$.

57. $x = \dfrac{\pi n}{2}$, $x = \pm \arcsin\sqrt{\dfrac{2}{3}} + \pi n$; $n \in Z$.

58. $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x = -\dfrac{5\pi}{6} + \pi n$, $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$; $n \in Z$.

59. $x = -\dfrac{\pi}{3} \pm \arccos\dfrac{3}{4} + 2\pi n$, $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $n \in Z$.

60. $x = \dfrac{\pi n}{2}$; $n \in Z$.

61. $x = \dfrac{\pi n}{2}$, $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n$; $n \in Z$.

62. $x = \pm \arccos\left(-\dfrac{1}{5}\right) + 2\pi n$; $n \in Z$.

63. $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$; $n \in Z$.

64. $x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi n}{5}$; $n \in Z$.

65. $x = \pm\dfrac{5\pi}{12} + \pi n$; $n \in Z$.

66. $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$; $n \in Z$.

67. $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{7}$, $x = \pi n$; $n \in Z$.

68. $x = 2\pi n$, $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$; $n \in Z$.

69. $x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2}{5} + \pi n$; $n \in Z$.

14. Отбор корней в тригонометрических уравнениях

1. $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n$; $n \in Z$.

2. $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$; $n \in Z$.

3. $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n$; $n \in Z$.

4. $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \pi + 2\pi n$; $n \in Z$.

5. $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$; $n \in Z$.

6. $x = \pi + 2\pi n$, $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2}$; $n \in Z$.

7. $x = \dfrac{4\pi}{3} + 4\pi n$; $n \in Z$.

8. $x = \dfrac{13\pi}{12} + 2\pi n$; $n \in Z$.

9. $x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n$; $n \in Z$.

10. $x = \dfrac{5\pi}{48} + \pi n$, $x = \dfrac{17\pi}{48} + \pi n$, $x = \dfrac{7\pi}{24} + \pi n$; $n \in Z$.

11. $x = \dfrac{\pi}{12} + 2\pi n$, $x = \dfrac{17\pi}{12} + 2\pi n$; $n \in Z$.

12. $x = \dfrac{\pi}{4}$.

13. $x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{\pi n}{5}$, $n \neq 5k + 1$; $n, k \in Z$.

14. $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n$; $n \in Z$.

15. $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$; $n \in Z$.

16. $x = \dfrac{\pi}{6} + 4\pi n$, $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n$; $n \in Z$.

17. $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n$; $n \in Z$.

18. $x = \dfrac{13}{4}$.

19. $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$; $n \in Z$.

20. $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \pi + 2\pi n$; $n \in Z$.

21. $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$, $x = \operatorname{arctg} 2 + 2\pi n$; $n \in Z$.

22. $x = \pi + \arcsin \dfrac{\pi}{6}$, $x = \pi - \arcsin \dfrac{\pi}{12}$.

23. $x = \dfrac{4}{3}$, $x = \pi n$; $n \in Z$.

24. $x = 2\pi n$, $x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi n$; $n \in Z$.

25. $x = (-1)^{n+1} \dfrac{\pi}{4} + \pi n$; $n \in Z$.

26. $x = \pi - \arcsin \dfrac{4}{5} + 2\pi n$; $n \in Z$.

27. $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$; $n \in Z$.

28. $x = \dfrac{5\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2}$; $n \in Z$.

29. $x = -\dfrac{\pi}{12}$, $x = \dfrac{23\pi}{12}$.

30. $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$.

31. $x = \frac{47}{24}$, $x = \frac{55}{24}$, $x = \frac{71}{24}$.

32. $x = 2\pi n$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $n \in Z$.

33. $x = 2\pi n$, $x = \pi + 2\pi k$; $n, k \in Z$, $n \geq -1$, $k \leq -3$.

34. $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$; $n \in Z$.

35. $x = -\frac{7\pi}{6}$, $x = -\pi$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$, $x = \pi$, $x = 2\pi$, $x = \frac{13\pi}{6}$.

36. $x = \frac{\pi}{12} + 2\pi n$, $x = \frac{19\pi}{12} + 2\pi n$, $x = \pi n$, $x = \frac{2\pi}{3} + \pi n$; $n \in Z$.

37. $x = \frac{3\pi}{4}$, $x = \pi$.

38. $x = 2\pi - \arccos\log_2(\sqrt{6} - 1)$, $x = 2\pi + \arccos\log_2(\sqrt{6} - 1)$.

39. $x = \frac{\pi}{3} + 4\pi n$; $n \in Z$.

40. $x = \frac{\pi}{14}$, $x = \frac{3\pi}{14}$, $x = \frac{5\pi}{14}$, $x = \frac{9\pi}{14}$, $x = \frac{11\pi}{14}$, $x = \frac{13\pi}{14}$.

41. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$; $n \in Z$.

42. $x = 0$, $x = \pi$, $x = \frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{4\pi}{3}$.

43. $x = \pi - \arcsin\frac{3}{4} + 2\pi n$; $n \in Z$.

44. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; $n \in Z$; $\Sigma = \frac{5\pi}{6}$.

45. $x = \pm\frac{\pi}{2}$.

46. $x = -\frac{\pi}{12} + 2\pi n$, $x = -\frac{11\pi}{12} + 2\pi n$; $n \in Z$.

47. $x = \frac{13\pi}{5}$.

48. $x = \pi n$; $n \in Z$.

49. $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $x = \frac{5\pi}{8} + 2\pi n$; $n \in Z$.

50. $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; $n \in Z$.

51. $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n$; $n \in Z$.

52.

$$\left\{\left(\arcsin\frac{37}{40} + 2\pi n, \arccos\frac{13}{20} + 2\pi k\right); \left(\pi - \arcsin\frac{37}{40} + 2\pi n, -\arccos\frac{13}{20} + 2\pi k\right)\right\};$$

$n, k \in Z$.

53. $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$; $n \in Z$.

54. 5/2.

55. $x = \frac{15\pi}{16} + 2\pi n$; $n \in Z$.

56. $x = \pi + \operatorname{arcctg} 2 + 2\pi n$; $n \in Z$.

57. $x = \pm\sqrt{2\pi n}$, $x = -1 \pm \sqrt{1 + 2\pi n}$; $n \in Z$, $n \geq 0$.

58. $x = -\frac{11\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = 2\pi$, $x = \frac{13\pi}{6}$.

59. $x = -\frac{19\pi}{200}$, $x = \frac{131\pi}{200}$.

60. $x - \frac{11\pi}{12}$, $x = -\frac{7\pi}{12}$; $n \in Z$.

61. $x = \operatorname{arctg} 5 + 2\pi n$; $n \in Z$.

62. $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \pi n$; $n \in Z$.

63. $x = -\frac{11\pi}{8}$, $x = -\frac{21\pi}{16}$.

64. $x = (-1)^{n+1} \arcsin\frac{1}{3} + \pi n$; $n \in Z$.

65. $x = -\frac{3\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{5\pi}{4} - \arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

66. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

67. $x = \frac{11\pi}{30}$.

68. $x - (-1)^{n+1} \arcsin\frac{1}{3} + \pi n$; $n \in Z$.

69. $x = \frac{7\pi}{2}$.

70. 9.

71. $\left\{(1, 2\pi n); \left(\frac{1}{4}, -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right); \left(4, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)\right\}$; $n \in Z$.

72. $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = \pi + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$.

73. $x = 1 + 2\pi n$; $n \in Z$.

15. Уравнения, содержащие параметр

1. $s \in \left(-\sqrt[3]{36}, -3\right] \cup \left(0, \frac{\sqrt[3]{9}}{2}\right)$.

2. $a = \frac{5}{2}$.

3. $a \in \left(-\infty, \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$.

4. $a \in \{-1\} \cup (1, 3) \cup (4, 6]$.

5. $a \in \left(\frac{9 - \sqrt{17}}{16}, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{9 + \sqrt{17}}{16}\right)$.

6. $a = -\sqrt{2}$, $a = \sqrt{2}$.

7. $\left\{-1, \frac{15}{17}, \frac{17}{15}\right\}$, если $a = -2$; $\left\{-\frac{1}{136}, 0, \frac{1}{120}\right\}$, если $a = -\frac{1}{8}$.

8. $a = 1$, $a = -\frac{1}{2}$, $a = \frac{-7 - 4\sqrt{2}}{2}$, $a = \frac{-7 + 4\sqrt{2}}{2}$.

9. $a = -\frac{17}{48}$.

10. $a = -2$, $b = 6$ или $a = 6$, $b = -2$.

11. $a \in (0, 3) \cup \left[\frac{25}{8}, \sqrt{10}\right)$.

12. Если $a < -1$, то $x = 4$; если $a = -1$, то $x \in [4, +\infty)$; если $-1 < a < 1$, то $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{4a - 8}{a + 1}$; если $a = 1$, то $x \in [-2, 4]$; если $a > 1$, то $x = 4$.

13. $a \in \{0\} \cup (2 + \sqrt{3}, 2 + \sqrt{5})$.

14. 1) таких a нет; 2) $a \in (-\infty, -8) \cup (0, +\infty)$.

15. $a = 2$, $a = \frac{10}{3}$.

16. $a = 0$, $a = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$, $a = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

17. $a = -5$, $a = -\frac{5}{13}$.

18. Если $a < 2$, то нет решений; если $a \geq 2$, $a \neq 4$, то $x = \pm(a - 2)$, $y = \pm 2$ (4 решения); если $a = 4$, то $x = \pm y$.

19. $a = -\frac{3}{4}$, $a = 0$, $a = \frac{2}{9}$.

20. $a = 0$; $a = 1$.

21. $a = 2$.

22. $a \in (-\infty, -4] \cup \left\{-\frac{2}{3}\right\} \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup [4, +\infty)$.

23. $a = -1$, $a = -\frac{5}{7}$, $a = -3$.

24. $x = \sqrt{3}$.

25. Если $a = 0$, то $x = 0$, $x = 1$; если $0 < |a| < \frac{2}{\sqrt{3}}$, то $x = \frac{1 - a + \sqrt{1 + 3a^2}}{2}$; если $|a| \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$, то $x = \frac{1 - a + \sqrt{1 + 3a^2}}{2}$, $x = \frac{-1 - a - \sqrt{3a^2 - 3}}{2}$.

26. $p \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$.

27. Если $a = 0$, то $x = 0$; если $a = 2^{\frac{2}{3}}$, то $x = 2^{-\frac{2}{3}}$; если $1 \leq a < 2^{\frac{2}{3}}$, то $x = \left(\frac{a \pm \sqrt{2\sqrt{a} - a^2}}{2}\right)^2$; при $0 < a < 1$ и $a > 2^{\frac{2}{3}}$ нет решений.

28. Если $-3 < a \leq -2$, то одно решение; если $-2 < a \leq -1$, то два решения; если $-1 < a < 0$, то три решения.

29. Если $a < 0$, то $x = 2\log_2 |a|$; если $a = 0$, то нет решений; если $a > 0$, то $x = \log_2 a$, $x = 2\log_2 a$.

30. $a = \frac{4}{3}$.

31. Корни существуют при $p = 0$ (нулевой корень) и при $p \geq 4$, когда оба корня положительны.

32. Если $a < -\frac{3}{2}$, то $x = \log_5 \frac{a-1+\sqrt{a^2-10a-11}}{2}$; если $-\frac{3}{2} \leq a < 11$, то нет решений; если $a = 11$, то $x = 1$; если $a > 11$, то $x = \log_5 \frac{a-1+\sqrt{a^2-10a-11}}{2}$, $x = \log_5 \frac{a-1-\sqrt{a^2-10a-11}}{2}$. Единственное решение при $a \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \{11\}$.

33. $p \in [17, +\infty)$.

34. $a = \pm 1$.

35. $x = 1$.

36. Если $a = \frac{1}{3}$, то $x = 1$; если $a \neq \frac{1}{3}$, то нет решений.

37. $k \in (-8, -3) \cup (-3, +\infty)$; $x = 4 - \sqrt{12 + k}$.

38. $a \neq -2$.

39. Если $a = 0$, то $x = 0$, $x = -1$; если $a \neq 0$, то $x = 0$.

40. $a \in \left(\frac{1}{15}, \frac{1}{8}\right) \cup \left(\frac{1}{10}, \frac{5}{19}\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup [1, 5)$.

41. Если $a = 0$, то $x > 0$; если $a \neq 0$, то $x = \frac{5a + \sqrt{25a^2 + 4}}{2}$.

16. Неравенства, содержащие параметр

1. $a \in \left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{5}}{16}\right)$.

2. $a < -1$.

3. $p \in (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$.

4. $p = -6$, $q = 7$.

5. $p \in \{-5\} \cup \left[-\frac{7}{2}, -\frac{13}{4}\right]$.

6. $a \in [-1, 1]$.

7. $a \in (-\infty, 20]$.

8. $a \in \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

9. $a = -\frac{1}{2}$.

10. $a \in [-4, 2]$.

11. $b \in (-\infty, -6) \cup \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

12. $a \in \left[\frac{2}{5}, \frac{11}{2}\right]$.

13. Если $a < -5$, то нет решений; если $-5 \leq a \leq 1$, то $x \in [0, (a+5)^2]$; если $a > 1$, то $x \in [(a-1)^2, (a+5)^2]$.

14. $a \in [-15, -5) \cup \{1\}$.

15. Если $a < 1$, то $x \in \left[-1, \frac{3-2a}{a^2-2a+1}\right)$; если $1 \le a < 2$, то $x \in [-1, +\infty)$; если $a \ge 2$, то $x \in \left(\frac{3-2a}{a^2-2a+1}, +\infty\right)$.

16. Если $b \le -1$, то $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$; если $-1 < b \le 0$, то $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}, -1\right] \cup [1, +\infty)$.

17. Если $0 \le a \le \frac{1}{8}$, то $x \in (0, 1 - 2\sqrt{2a})$; если $\frac{1}{8} < a \le \frac{1}{2}$, то $x \in (1 - 2\sqrt{2a}, 0)$; если $a > \frac{1}{2}$, то $x \in [-2a, 0)$; если $a < 0$, то решений нет.

18. $a \in \left[-9, -\frac{1}{4}\right] \cup \{0\}$.

19. Если $a < 0$, то $x \in \left(2a^2 + \frac{a}{2}, +\infty\right)$; если $a \ge 0$, то $x \in \left(\frac{a^2}{18} + \frac{a}{2}, +\infty\right)$.

20. $a \in (-\infty, -99]$.

21. Если $a < 1$, то $x \in [1, +\infty)$; если $a \ge 1$, то $x \in \left(((a-1)\log_3 2)^2 - 1, +\infty\right)$.

22. $a \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

23. Если $a = \frac{1}{2}$, то $x \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)$; если $a < -2$, то $x \in (-\infty, a) \cup (-2, +\infty)$; если $a = -2$, то $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$; если $-2 < a < -\frac{1}{2}$ или $a > \frac{1}{2}$, то $x \in (-\infty, -2) \cup (a, +\infty)$.

24. Если $a < \frac{1}{2}$, то $x \in (-\infty, 0] \cup [3^a, 3^{1-a}]$, если $a \ge \frac{1}{2}$, то $x \in (-\infty, 0] \cup [3^{1-a}, 3^a]$.

25. $a \in (-\infty, -2)$.

26. $a \in (-\infty, -\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7}, +\infty)$.

27. $p \in \left(-\infty, -\frac{99}{100}\right) \cup \left(-\frac{1}{50}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{100}\right)$.

28. Если $a < -1$, $a > 0$, то $x_1 = y_1 = 2^{\sqrt{2(a^2+a)}}$, $x_2 = y_2 = 2^{-\sqrt{2(a^2+a)}}$; если $a = -1$, $a = 0$, то $x = y = 1$; если $-1 < a < 0$, то нет решений.

29. Если $a = 2$, то решений нет; если $\sqrt{2} < a < \sqrt{3}$, то $x \in \left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$; если $\sqrt{3} < a < 2$ и $a > 2$, то $x \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$.

30. Если $a \le -3$, то $x \in (a+1, 0) \cup (-a-3, +\infty)$; если $-3 < a < -2$, то $x \in (a+1, -a-3) \cup (0, +\infty)$; если $a = -2$, то $x \in (0, +\infty)$; если $-2 < a < -1$, то $x \in (-a-3, a+1) \cup (0, +\infty)$; если $a \ge -1$, то $x \in (-a-3, 0) \cup (a+1, +\infty)$.

Диагностическая работа № 1

1. $x \in (-\infty, -8) \cup (-5, -2) \cup [0, +\infty)$.
2. $x \in (0, 1]$.
3. $x \in \{-1\} \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
4. $x = 3$.
5. $x \in (5, +\infty)$.
6. $x = \log_3 5$.
7. $x \in (-2, 0)$.
8. $x = \frac{17}{6}$, $x = \frac{3+\sqrt{89}}{4}$.
9. $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 2)$.
10. $\{(1+\sqrt{2}, -1); (1-\sqrt{2}, -1)\}$.
11. $4x$.
12. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}$; $n \in Z$.
13. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $n \in Z$.
14. Если $m = 0$, то $x = 3$; если $m = \pm 1$, то $x = \pm\frac{(3 \pm 2\sqrt{2})}{2}$; если $m = \pm 2$, то $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$; если $m = \pm 3$, то $x = \pm\frac{3}{2}$.
15. $a \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

Диагностическая работа № 2

1. $x \in \{-5\} \cup (-2, 3)$.
2. $x = 0$, $x = \pm 1$, $x = \pm 2$, $x = \pm 3$.
3. $x \in [-4, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$.
4. $x = 3$.
5. $x \in \{2\} \cup \{3\} \cup [6, +\infty)$.
6. $x = \log_{\frac{3}{2}} \sqrt{15}$.
7. $x \in \left(0, \log_{\frac{3}{4}} \frac{1}{4}\right)$.
8. $x = 4$, $x = 8$.
9. $x \in \{2\} \cup (4, 8)$.
10. $\{(-1, 3); (t, 2)\}$, $t \in R$.
11. -1.
12. $x = \frac{2\pi n}{5}$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$; $n \in Z$.
13. $x = \pm\arccos\frac{\pi}{18} + 2\pi n$, $x = \pm\arccos\frac{5\pi}{18} + 2\pi n$; $n \in Z$.

14. Если $0 < a < 1$ или $1 < a \le 3$, то $x = -a - 3$; если $a > 3$, то $x = -a - 3$, $x = a$.
15. $a \in [-6, -5] \cup (-2, 6]$.

Диагностическая работа № 3

1. $x \in \left(-\frac{3}{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \cup [-1, 0) \cup \left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.
2. $x = -25$, $x = 3$.
3. $x \in (3, +\infty)$.
4. $x = -9$, $x = \frac{\sqrt{33} - 1}{2}$.
5. $x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right]$.
6. $x = \frac{1}{\sqrt{3}} \log_{\frac{5}{3}} \sqrt{3}$, $x = \frac{1}{\sqrt{3}} \log_{\frac{5}{3}} 4\sqrt{3}$.
7. $x \in \left(-\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, 0\right]$.
8. $x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$.
9. $x \in (-\infty, -8] \cup (12, +\infty)$.
10. $\{(1,3); (3,1)\}$.
11. 0.
12. $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$; $n \in Z$.
13. $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $n \in Z$.
14. Если $a > 2$, то $x = a - 1$ и $x = \frac{a-1}{a-2}$; если $1 < a \le 2$, то нет решений.
15. Если $a < 0$, то нет решений; если $a = 0$, то $x \in (0, +\infty)$; если $a > 0$, то $x \in \left[-\frac{a}{3}, 0\right) \cup (8a, +\infty)$.

Диагностическая работа № 4

1. $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 5]$.
2. $x = 4$, $x = 3 + \sqrt{3}$.
3. $x \in (-\infty, -1] \cup [1, 2) \cup (2, +\infty)$.
4. $x = \frac{-1 + \sqrt{57}}{4}$.
5. $x \in [2 - \sqrt{13}, 0) \cup (3, 2 + \sqrt{13}]$.
6. $x = \log_3 2$, $x = \log_2 9$.
7. $x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$.

8. $\log_3 x = -\frac{17}{6}$.
9. $x \in (\log_2 49 - 4, \log_2 7)$.
10. $\{(28, 6); (-7, -29)\}$.
11. $\sqrt[3]{x^2}$.
12. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $x = \frac{1}{2}(-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{17}-1}{4} + \frac{\pi n}{2}$; $n \in Z$.
13. $x = \frac{\pi n}{4}$, $x = (-1)^n \arcsin\frac{\pi}{4} + \pi n$; $n \in Z$.
14. $c \in \{-4\sqrt{2}\} \cup (-4, 4]$.
15. $a = 1$, $b = 5$.

Диагностическая работа № 5

1. $x \in [-5, -3]$.
2. $x = -16$, $x = 18$.
3. $x \in (-\infty, -5] \cup [-1, +\infty)$.
4. $x = -\frac{23}{4}$, $x = \pm 1$, $x = 6$.
5. $x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{57}}{2}\right] \cup \left(\frac{38}{9}, +\infty\right)$.
6. $x \in [1, \log_3 6]$.
7. $x \in \{-2\} \cup [2, 6]$.
8. $x = \frac{7}{5}$.
9. $x \in [-8, -6) \cup (3, \sqrt{10})$.
10. $\left\{(1, 1); \left(\frac{5}{2}, -2\right)\right\}$.
11. $\frac{a+b}{a}$.
12. $x = \frac{\pi n}{2}$; $n \in Z$.
13. $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = 2\pi$, $x = 2\pi - \arccos\frac{2}{5}$.
14. $a \in [-3, 3]$.
15. Если $a < -1$, то $x \in [a, -a]$; если $-1 \le a \le -\frac{1}{2}$, то $x \in [-\sqrt{-2a-1}, \sqrt{-2a-1}]$; если $a > -\frac{1}{2}$, то нет решен

Диагностическая работа № 6

1. $x \in (-\infty, -\sqrt{17}) \cup [-4, -3) \cup (-3, 3) \cup (\sqrt{17}, 5]$.
2. $x = \pm 3$.
3. $x \in (-1, 0) \cup \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

4. $x = \frac{7}{3}$.

5. $x \in (-\infty, -\sqrt{26}] \cup \{-1\} \cup [\sqrt{26}, +\infty)$.

6. $x = \frac{1}{2}$.

7. $x \in (0, \log_2 3]$.

8. $x = -3$.

9. $x \in (0, 4) \cup \{8\}$.

10. $\{(0, -2); (2, 0)\}$.

11. 1.

12. $x = \pi n$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $n \in Z$.

13. $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{6}$.

14. $a \in \left[\frac{4}{3}, 2\right]$.

15. $a \in [2, +\infty)$.

Диагностическая работа № 7

1. $x \in (-\infty, -4) \cup \left[-\frac{5}{2}, -1\right) \cup [3, +\infty)$.

2. $x = 4$, $x = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$.

3. $x \in (-1, 1) \cup (5, 7)$.

4. $x = -\frac{1}{2}$, $x = 1$.

5. $x \in \{-2\} \cup \{2\} \cup (3, +\infty)$.

6. $x = 3$, $x = \log_2(3 - \sqrt{7})$.

7. $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 2)$.

8. $x = 2^{4-4\sqrt{2}}$.

9. $x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right] \cup (1, +\infty)$.

10. $\left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right); \left(\frac{3}{2} - \log_3 2, \frac{1}{2} + \log_3 2\right)\right\}$.

11. 0.

12. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$; $n \in Z$.

13. $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$; $n \in Z$.

14. При $a = -3$ эта сумма равна 18.

15. $x \in \left[2, \frac{5}{2}\right]$.

Диагностическая работа № 8

1. $x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, 0\right) \cup \left(1, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$.
2. $x = 1$.
3. $x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.
4. $x = \frac{6 \pm 5\sqrt{3}}{2}$.
5. $x \in \left[5, \frac{25-\sqrt{145}}{2}\right]$.
6. $x = 3 \pm \sqrt{5}$.
7. $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \cup \left[\frac{7}{3}, \frac{5}{2}\right)$.
8. $x = 2$.
9. $x \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \cup (0, 2) \cup (2, 3)$.
10. $\{(3, -2)\}$.
11. $\frac{1}{\sin\alpha}$.
12. $x = \pi n$; $n \in Z$.
13. $x = 0$, $x = \frac{3\pi}{4}$.
14. $a = 9$, $a = 49$.
15. Если $0 < a < 1$, то $x \in \left(3, \frac{3+\sqrt{9+4a^2}}{2}\right)$;

    если $a > 1$, то $x \in \left(\frac{3+\sqrt{9+4a^2}}{2}, +\infty\right)$.

Диагностическая работа № 9

1. $x \in (1, 2] \cup (7, 8)$.
2. $x \in \left[\frac{3}{7}, +\infty\right)$.
3. $x \in (-\infty, 3) \cup \left(\frac{21}{5}, +\infty\right)$.
4. $x = 0$.
5. $x \in (-\infty, 1] \cup \{3\} \cup [7, +\infty)$.
6. $x = 0$.
7. $x \in \left(-\infty, -\frac{11}{6}\right] \cup \{0\}$.
8. $x = -2$.
9. $x \in \left[-1{,}5^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} - 2\right)$.

10. $\{(-1,2)\}$.

11. 0.

12. $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n$; $n\in Z$.

13. $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$; $n\in Z$.

14. Если $a<0$, то нет решений; если $a=0$, то три решения; если $0<a<1$, то четыре решения; если $a=1$, то два решения; если $a>1$, то нет решений.

15. $a\in\left(-\infty,\sqrt{2}\right)$.

Диагностическая работа № 10

1. $x\in(-\infty,-5)\cup[1,2]$.

2. $x=-5$, $x=11$.

3. $x\in(-\infty,-2+2\sqrt{3})\cup(2\sqrt{2},+\infty)$.

4. $x=\frac{7}{9}$.

5. $x\in\left(-\infty,-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2},2\right)\cup\left[\frac{8+\sqrt{10}}{3},+\infty\right)$.

6. $x=\log_{\frac{4}{5}}4$.

7. $x\in(2-\log_2^2 3,2]$.

8. 3 корня.

9. $x\in\left[\log_2\frac{1}{3},2\right)\cup\left(2,\log_2\frac{13}{3}\right)$.

10. $\left\{\left(\frac{5}{8},4\right)\right\}$.

11. $\sin x$.

12. $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$; $n\in Z$.

13. $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$; $n\in Z$.

14. $a\in\left[-\frac{3}{2},-\frac{3}{4}\right)\cup\left(-\frac{3}{4},0\right)$.

15. 1) Если $0<a<\frac{1}{2}$, то $x\in(-3^a,-1)\cup(1,3^a)$;

если $a>\frac{1}{2}$, то $x\in(-\infty,-3^a)\cup(3^a,+\infty)$.

2) При $a=1$.

Справочное издание

Садовничий Юрий Владимирович

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИКЕ

Решение уравнений и неравенств. Преобразование алгебраических выражений

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU. AE51. H 16466 от 25.03.2013 г.

Главный редактор *Л.Д. Лаппо*
Редактор *И.М. Бокова*
Технический редактор *Т.В. Фатюхина*
Корректор *И.В. Русанова*
Дизайн обложки *Л.В. Демьянова*
Компьютерная верстка *М.В. Демина, О.В. Попова*

107045, Москва, Луков пер., д. 8.
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами
в ООО «ИПК Парето-Принт», г. Тверь, www.pareto-print.ru

Качество печати соответствует
качеству предоставленных диапозитивов

По вопросам реализации обращаться по тел.:
641-00-30 (многоканальный).