

ЕДИНЬЙ
ГОСУДАРСТВЕНЬЙ



ЭКЗАМЕН

К НОВОЙ
ОФИЦИАЛЬНОЙ
ДЕМОНСТРАЦИОННОЙ ВЕРСИИ ЕГЭ

УТВЕРЖДЕНО
31.10.13

Под редакцией А. Л. Семенова, И. В. Ященко

МАТЕМАТИКА

БАЗОВЬЙ и ПРОФИЛЬНЬЙ УРОВНИ

СОЗДАНО РАЗРАБОТЧИКАМИ ЕГЭ

ЕГЭ

2014

ТИПОВЬЕ ТЕСТОВЬЕ
ЗАДАНИЯ

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

Под редакцией А. Л. Семенова, И. В. Яценко

МАТЕМАТИКА

ТИПОВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

10 вариантов заданий

Ответы и решения

Критерии оценок

Бланки ответов

***Издательство
«ЭКЗАМЕН»***

**МОСКВА
2014**

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
Е33

Е33 **ЕГЭ 2014. Математика. Типовые тестовые задания** / И. Р. Высоцкий, П. И. Захаров, В. С. Панферов, С. Е. Посицельский, А. В. Семенов, М. А. Семенова, И. Н. Сергеев, В. А. Смирнов, С. А. Шестаков, Д. Э. Шноль, И. В. Ященко; под ред. **А. Л. Семенова, И. В. Ященко**. — М.: Издательство «Экзамен», 2014. — 56 с. (Серия «ЕГЭ. ОФЦ. Типовые тестовые задания»)

ISBN 978-5-377-07669-8

Типовые тестовые задания по математике содержат 10 вариантов комплектов заданий, составленных с учётом всех особенностей и требований Единого государственного экзамена в 2014 году. Назначение пособия — предоставить читателям информацию о структуре и содержании контрольных измерительных материалов 2014 г. по математике, степени трудности заданий.

В состав авторского коллектива входят специалисты, имеющие большой опыт работы в школе и вузе и принимающие участие в разработке тестовых заданий для ЕГЭ.

В сборнике даны ответы на все варианты тестов и приводятся решения всех заданий одного из вариантов. Кроме того, приведены образцы бланков, используемых на ЕГЭ для записи ответов и решений.

Пособие может быть использовано учителями для подготовки учащихся к экзамену по математике в форме ЕГЭ, а также старшеклассниками и абитуриентами — для самоподготовки и самоконтроля.

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных учреждениях.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

Справочное издание

**Высоцкий И. Р., Захаров П. И., Панферов В. С., Посицельский С. Е.,
Семенов А. В., Семенов А. Л., Семенова М. А., Сергеев И. Н., Смирнов В. А.,
Шестаков С. А., Шноль Д. Э., Ященко И. В.**

ЕГЭ. МАТЕМАТИКА

ТИПОВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Издательство **«ЭКЗАМЕН»**

Гигиенический сертификат № РОСС RU. АЕ51. Н 16466 от 25.03.2013 г.

Главный редактор *Л. Д. Лапто*. Редактор *И. М. Бокова*. Технический редактор *Л. В. Павлова*
Корректор *Л. К. Корнилова*. Дизайн обложки *Л. В. Демьянова*. Компьютерная верстка *Т.Н. Меньшова*

107045, Москва, Луков пер., д. 8. www.examen.biz

E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz; по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Подписано в печать 08.11.2013. Формат 60×90/8. Гарнитура «Школьная». Бумага газетная.

Уч.-изд. л. 2,45. Усл. печ. л. 7. Тираж 20 000 экз. Заказ 3081

Общероссийский классификатор продукции

ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Отпечатано в «Красногорская типография»

143405, Московская область, г. Красногорск, Коммунальный квартал, 2

ISBN 978-5-377-07669-8

© Высоцкий И. Р., Захаров П. И., Панферов В. С.,
Посицельский С. Е., Семенов А. В., Семенов А. Л.,
Семенова М. А., Сергеев И. Н., Смирнов В. А., Шестаков С. А.,
Шноль Д. Э., Ященко И. В., 2014
© Издательство **«ЭКЗАМЕН»**, 2014

СОДЕРЖАНИЕ

Инструкция по выполнению работы.....	4
Вариант 1	
Часть 1. Базовый уровень.....	5
Часть 2. Профильный уровень	7
Вариант 2	
Часть 1. Базовый уровень.....	9
Часть 2. Профильный уровень	11
Вариант 3	
Часть 1. Базовый уровень.....	14
Часть 2. Профильный уровень	16
Вариант 4	
Часть 1. Базовый уровень.....	18
Часть 2. Профильный уровень	20
Вариант 5	
Часть 1. Базовый уровень.....	22
Часть 2. Профильный уровень	24
Вариант 6	
Часть 1. Базовый уровень.....	26
Часть 2. Профильный уровень	28
Вариант 7	
Часть 1. Базовый уровень.....	30
Часть 2. Профильный уровень	32
Вариант 8	
Часть 1. Базовый уровень.....	34
Часть 2. Профильный уровень	36
Вариант 9	
Часть 1. Базовый уровень.....	38
Часть 2. Профильный уровень	41
Вариант 10	
Часть 1. Базовый уровень.....	43
Часть 2. Профильный уровень	45
Ответы	
Вариант 1.....	48
Вариант 2.....	48
Вариант 3.....	49
Вариант 4.....	49
Вариант 5.....	49
Вариант 6.....	49
Вариант 7.....	50
Вариант 8.....	50
Вариант 9.....	50
Вариант 10	50
Решение заданий	
Вариант 5.....	51

Инструкция по выполнению работы

На выполнение заданий варианта КИМ по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание.

Часть 1 содержит 10 заданий (задания В1–В10) базового уровня сложности, проверяющих наличие практических математических знаний и умений.

Часть 2 содержит 11 заданий (задания В11–В15 и С1–С6) базового, повышенного и высокого уровней по материалу курса математики средней школы, проверяющих уровень профильной математической подготовки.

Ответом к каждому из заданий В1–В15 является целое число или конечная десятичная дробь. При выполнении заданий С1–С6 требуется записать полное решение и ответ.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручки.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, как они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

ВАРИАНТ 1

Часть 1. Базовый уровень

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

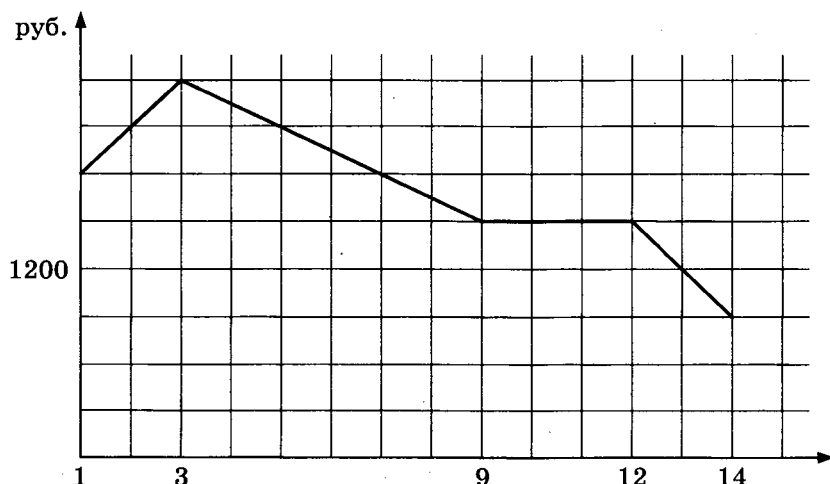
В1. Поезд Москва–Мурманск отправляется в 00:12, а прибывает в 13:12 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

 В1

В2. Футболка стоит 160 рублей. Какое наибольшее число футболок можно купить на 600 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 20%?

 В2

В3. На графике, изображенном на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций газодобывающей компании в первые две недели ноября. 2 ноября бизнесмен приобрел 10 акций этой компании. Шесть из них он продал 6 ноября, а 13 ноября — остальные 4. Сколько рублей потерял бизнесмен в результате этих операций?

 В3

B4

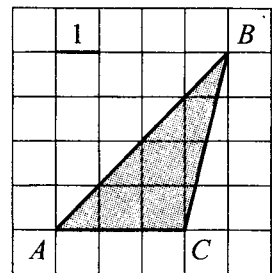
- B4.** В трех салонах сотовой связи один и тот же телефон продается в кредит на разных условиях. Условия даны в таблице.

Салон	Цена телефона	Первоначальный взнос (в процентах от цены)	Срок кредита (мес.)	Сумма ежемесячного платежа
Эпсилон	23 400	10	12	2160
Дельта	25 300	5	6	4520
Омикрон	27 800	25	6	3600

Определите, в каком из салонов покупка обойдется дешевле всего (с учетом переплаты) и в ответ напишите эту наименьшую сумму в рублях.

B5

- B5.** Найдите площадь треугольника ABC .

**B6**

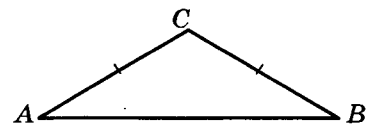
- B6.** В классе 7 мальчиков и 14 девочек. 1 сентября случайным образом определяют двух дежурных на 2 сентября, которые должны приготовить класс к занятиям. Найдите вероятность того, что будут дежурить два мальчика.

B7

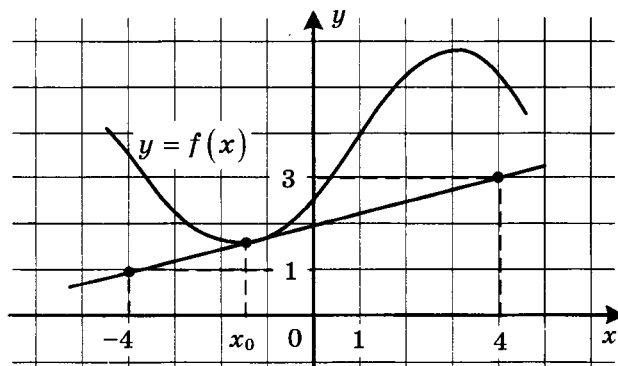
- B7.** Решите уравнение $\sqrt{x+9} = 5$.

B8

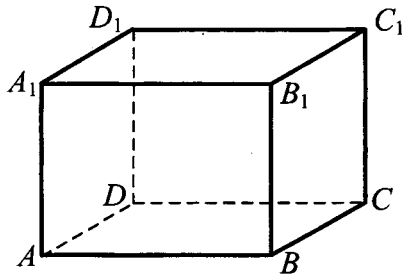
- B8.** В треугольнике ABC угол A равен 29° , $AC = BC$. Найдите угол C .

**B9**

- B9.** На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



- B10.** В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 27$, $AD = 36$, $AA_1 = 10$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины D , D_1 и B .



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2. Профильный уровень

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- B11.** Найдите значение выражения $\log_6 144 - \log_6 4$.

- B12.** Зависимость объёма спроса q (тыс. руб.) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задается формулой $q = 160 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 280 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

- B13.** Объем цилиндра равен 12. Чему равен объем конуса, который имеет такое же основание и такую же высоту, как и данный цилиндр?

- B14.** Численность волков в двух заповедниках в 2009 году составляла 220 особей. Через год обнаружили, что в первом заповеднике численность волков возросла на 10%, а во втором — на 20%. В результате общая численность волков в двух заповедниках составила 250 особей. Сколько волков было в первом заповеднике в 2009 году?

B10

B11

B12

B13

B14

B15

B15. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 8e^x + 9$ на отрезке $[0; 2]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1

C1. а) Решите уравнение $7 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

C2

C2. Диаметр окружности основания цилиндра равен 20, образующая цилиндра равна 28. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 12 и 16. Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

C3

C3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{5x} x^2 + \log_{x^2} 5x \leq 2, \\ \log_{x-3}^4 (x^2 - 17) + \log_{x^2-17}^2 (x - 3) - \log_{5x} 25 > 79. \end{cases}$$

C4

C4. В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона равны соответственно 5 и 20. Найдите биссектрису угла при основании треугольника.

C5

C5. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^6 + (5a - 8x)^3 + 3x^2 + 15a = 24x$$

не имеет корней.

C6

C6. Десятичная запись натурального числа n должна состоять из различных (не менее двух) цифр одной четности, а само оно должно быть квадратом целого числа. Найдите все такие n .

ВАРИАНТ 2

Часть 1. Базовый уровень

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

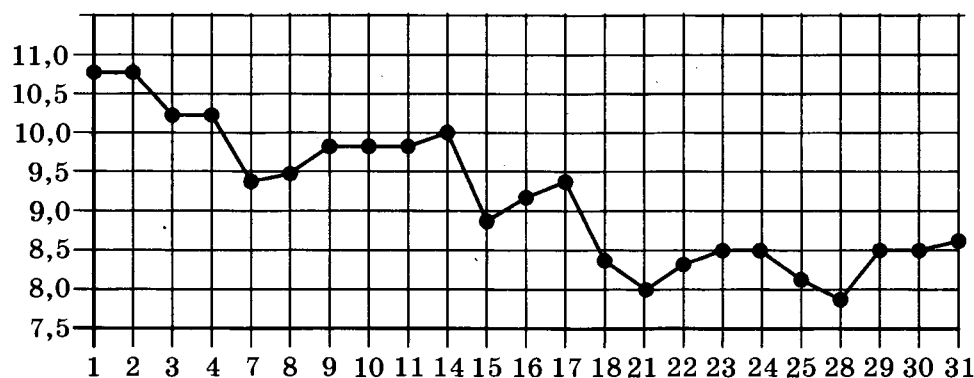
В1. Павел Иванович купил американский автомобиль, спидометр которого показывает скорость в милях в час. Американская миля равна 1609 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 39 миль в час? Ответ округлите до целого числа.

 В1

В2. Цена на электрический чайник была повышена на 24% и составила 1488 рублей. Сколько рублей стоил чайник до повышения цены?

 В2

В3. На рисунке жирными точками показана цена серебра, установленная Центробанком РФ во все рабочие дни в октябре 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена серебра в рублях за грамм. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена серебра была наименьшей за указанный период.

 В3

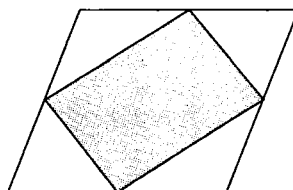
B4

- B4.** Для группы иностранных гостей требуется купить путеводители в количестве 10 шт. Нужные путеводители нашлись в трех интернет-магазинах. Условия покупки и доставки даны в таблице. Определите, в каком из магазинов общая сумма покупки с учётом доставки будет наименьшей. В ответе напишите наименьшую сумму в рублях.

Интернет-магазин	Цена одного путеводителя (руб.)	Стоимость доставки (руб.)	Доп. условия
А	394	300	Нет
Б	396	250	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 3500 р.
В	398	200	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 4000 р.

B5

- B5.** Площадь параллелограмма равна 14. Найдите площадь четырёхугольника, вершинами которого являются середины сторон данного параллелограмма.

**B6**

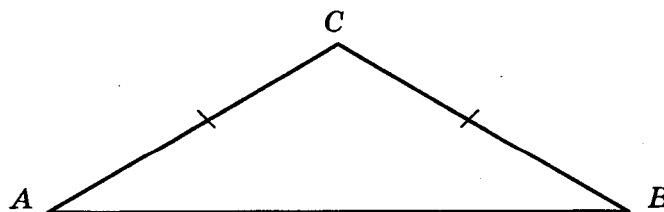
- B6.** В среднем на 150 карманных фонариков приходится три неисправных. Найдите вероятность купить работающий фонарик.

B7

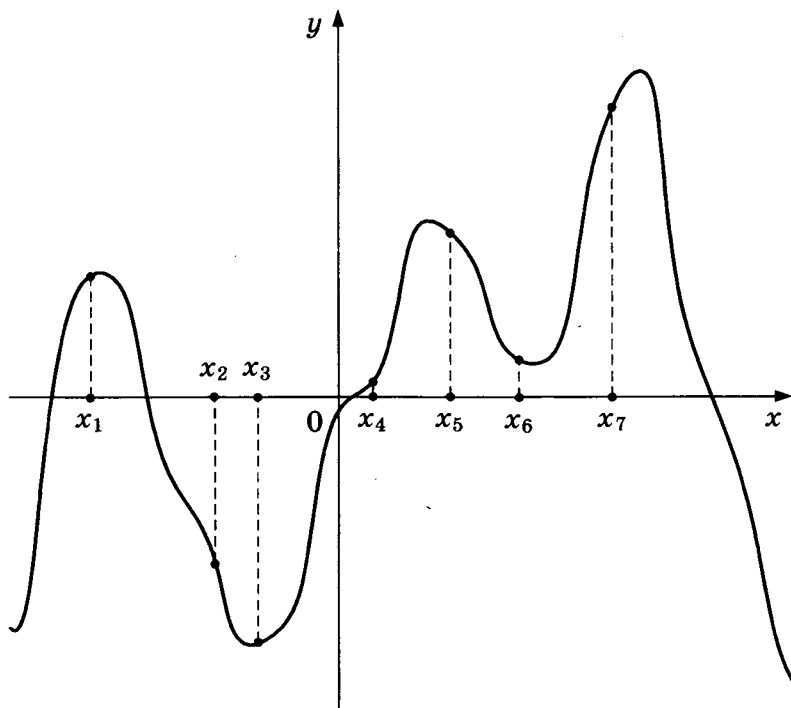
- B7.** Найдите корень уравнения $\sqrt{14 + 5x} = 7$.

B8

- B8.** В треугольнике ABC $AC = BC$, угол C равен 120° , $AB = \sqrt{3}$. Найдите AC .



- В9.** На рисунке изображены график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, и семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_7$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?



В9

- В10.** Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды вдвое больше ее высоты. Найдите угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

В10

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2. Профильный уровень

Ответом на задания В11–В15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- В11.** Найдите $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ и $\alpha \in (\pi; 2\pi)$.

В11

B12

B12. Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 120 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = pq$. Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка $r(p)$ составит 320 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

B13

B13. Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды равны 6, боковые ребра равны 5. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

B14

B14. Моторная лодка прошла против течения 24 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 20 мин меньше, чем при движении против течения. Найдите скорость (в км/ч) лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч.

B15

B15. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 29$ на отрезке $[-1; 4]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1

C1. а) Решите уравнение $2 \sin^2 x + (2 - \sqrt{2}) \cos x + \sqrt{2} - 2 = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$.

C2

C2. Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

C3

C3. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 4^x - 12 \cdot 2^x + 32 \geq 0, \\ \log_x(x-2) \cdot \log_x(x+2) \leq 0. \end{cases}$$

C4. Окружности с центрами O и B радиуса OB пересекаются в точке C . Радиус OA окружности с центром O перпендикулярен OB , причем точки A и C лежат по одну сторону от прямой OB . Окружность S_1 касается меньших дуг AB и OC этих окружностей, а также прямой OA , а окружность S_2 касается окружности с центром B , прямой OA и окружности S_1 . Найдите отношение радиуса окружности S_1 к радиусу окружности S_2 .

C4

C5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\left| \frac{x^2 - 6x + a}{a - 2x} - 2 \right| \leq 1$ справедливо при всех значениях x из отрезка $[0; 1]$.

C5

C6. Найдите все натуральные числа, последняя десятичная цифра которых 0 и которые имеют ровно 15 различных натуральных делителей (включая единицу и само число).

C6

ВАРИАНТ 3

Часть 1. Базовый уровень

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В1

- В1.** Сырок стоит 5 руб. 40 коп. Какое наибольшее число сырков можно купить на 40 рублей?

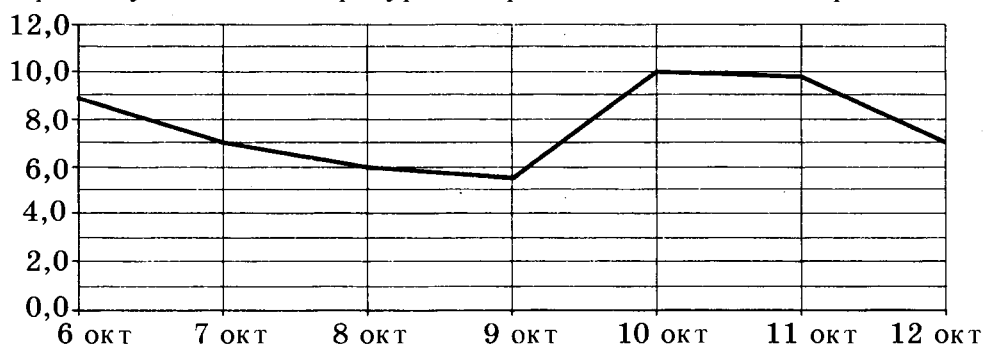
В2

- В2.** Тетрадь стоит 20 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 200 рублей после понижения цены на 25%?

В3

- В3.** На рисунке изображен график среднесуточной температуры в г. Саратове в период с 6 по 12 октября 1969 г. На оси абсцисс откладываются числа, на оси ординат — температура в градусах Цельсия.

Среднесуточная температура в Саратове с 6 по 12 октября 1969 г.

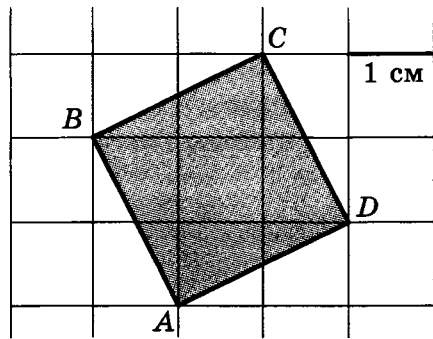


Определите по графику, сколько дней из указанного периода средняя температура была в пределах от 6,5 °C до 9 °C.

В4

- В4.** Ткань можно покупать либо по метру, стоимостью 23 рубля за метр, либо рулонами по 100 метров, стоимостью 1950 рублей за рулон. Сколько рублей придется заплатить за самый дешевый вариант приобретения 80 метров ткани?

- B5.** Найдите площадь квадрата $ABCD$. Размер каждой клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.


 B5

- B6.** В случайном эксперименте бросают две игральные кости (кубика). Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.

 B6

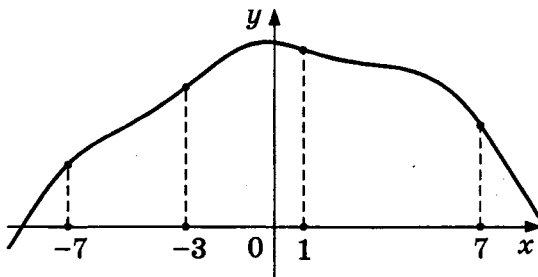
- B7.** Решите уравнение $\sqrt{x+4} = 7$.

 B7

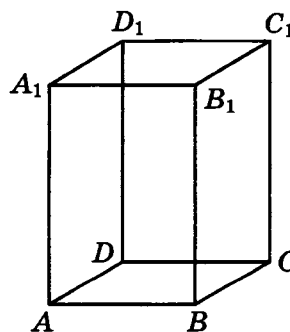
- B8.** Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD пересекаются в точке M . Найдите MC , если $AB = 11$, $DC = 33$, $AC = 28$.

 B8

- B9.** На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -7 , -3 , 1 , 7 . В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.

 B9


- B10.** Диагональ правильной четырехугольной призмы наклонена к плоскости основания под углом 30° . Боковое ребро равно 3. Найдите диагональ призмы.


 B10

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2. Профильный уровень

Ответом на задания В11–В15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В11 **В11.** Найдите значение выражения $\log_3 13 - \log_3 117$.**В12** **В12.** В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 (мг) — начальная масса изотопа, t (мин.) — время, прошедшее от начального момента, T (мин.) — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа $m_0 = 200$ мг. Период его полураспада $T = 4$ мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 25 мг?**В13** **В13.** Объем данного правильного тетраэдра равен 64 см^3 . Найдите объем правильного тетраэдра, ребро которого в 2 раза меньше ребра данного тетраэдра. Ответ дайте в см^3 .**В13** **В14.** Половину времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 46 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.**В15** **В15.** Найдите наибольшее значение функции $y = x^5 + 20x^3 - 65x$ на отрезке $[-4; 0]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

С1 **С1.** а) Решите уравнение $2 \cos^2 x = \sqrt{3} \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

С2. Дана правильная четырёхугольная пирамида $МАВCD$, все рёбра основания которой равны $5\sqrt{2}$. Угол между прямыми DM и AL , где L — середина ребра MB , равен α , $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$. Найдите высоту данной пирамиды.

 С2

С3. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 2^{x^2+|x|} \cdot 3^{-|x|} \leq 1, \\ |x-1| \leq \frac{9x^2}{2} + 2,5x. \end{cases}$$

 С3

С4. На окружности радиуса 15 с центром в вершине C треугольника ABC взята точка P . Известно, что $AB = 25$, $AC = 15$, $BC = 20$, а треугольники APC и BPC равновелики. Найдите расстояние от точки P до прямой AB , если известно, что оно меньше 20.

 С4

С5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\left| \frac{x^2 - x - 2a}{x - a} - 1 \right| \leq 2$ имеет единственное решение на отрезке $[1; 3]$

 С5

С6. Дана арифметическая прогрессия, в которой 100 чисел. Разность прогрессии равна 60.

 С6

а) Может ли в прогрессии быть ровно 8 чисел, кратных 11?

б) Какое наименьшее количество чисел, кратных 11, может быть в прогрессии?

в) Какое наибольшее количество чисел, кратных 11, может быть в прогрессии?

ВАРИАНТ 4

Часть 1. Базовый уровень

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В1

- В1. Каждый день во время конференции расходуется 120 пакетиков чая. Конференция длится 3 дня. Чай продается в пачках по 50 пакетиков. Сколько пачек нужно купить на все дни конференции?

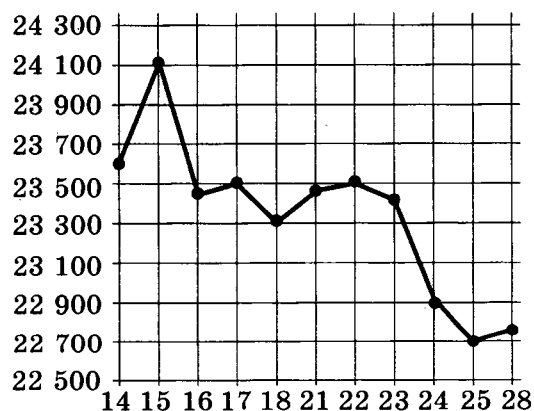
В2

- В2. Школа закупает книги по цене 70 рублей за штуку. При покупке на сумму больше 500 рублей магазин дает скидку 10%. Сколько рублей будет стоить покупка 23 книг?

В3

- В3. На рисунке жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 14 по 28 июля 2008 года.

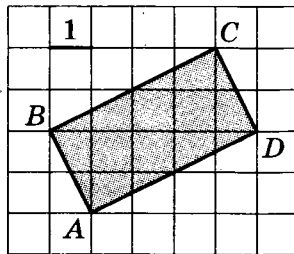
По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена олова на момент закрытия торгов была наименьшей за данный период



В4. Чтобы связать свитер, хозяйке нужно 900 граммов шерсти синего цвета. Можно купить синюю пряжу по цене 70 рублей за 100 г, а можно купить неокрашенную пряжу по цене 60 рублей за 100 г и окрасить её. Один пакетик краски стоит 40 рублей и рассчитан на окраску 300 г пряжи. Какой вариант покупки дешевле? В ответ напишите, сколько рублей будет стоить эта покупка.

 B4

В5. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$.


 B5

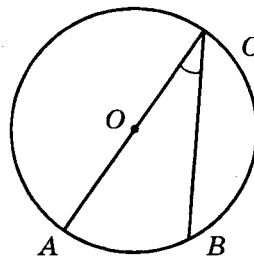
В6. Марина и Дина бросают кубик по одному разу. Выигрывает та девочка, у которой выпадет больше очков. Первой кубик бросила Марина, у нее выпало 3 очка. Найдите вероятность того, что Дина выиграет.

 B6

В7. Найдите корень уравнения $5^{4-x} = 25$.

 B7

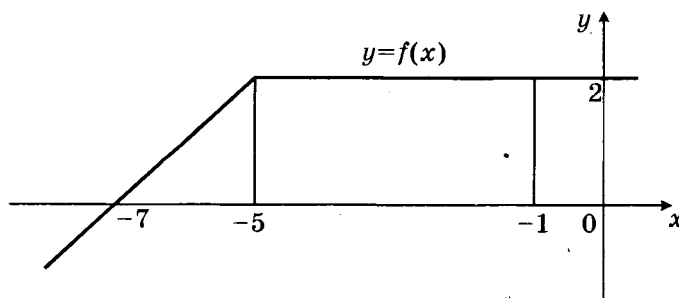
В8. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет $1/5$ окружности. Ответ дайте в градусах.


 B8

В9. На рисунке изображен график некоторой функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите определенный интеграл

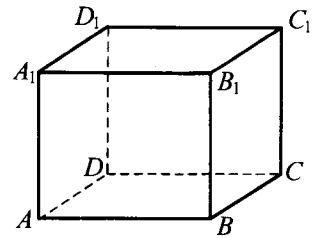
 B9

$$\int_{-7}^{-1} f(x) dx.$$



B10

- B10.** В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 3$, $AD = 4$, $AA_1 = 32$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины C , C_1 и A .



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2. Профильный уровень

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B11

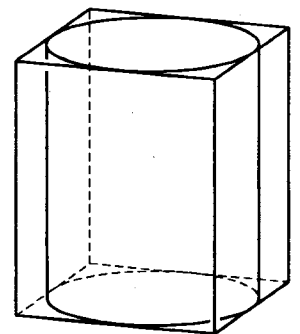
- B11.** Найдите значение выражения $\log_8 126 - \log_8 3,5$.

B12

- B12.** Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур задается выражением $T(t) = T_0 + at + bt^2$, где $T_0 = 900$ К, $a = 31$ К/мин, $b = -0,2$ К/мин². Известно, что при температурах нагревателя свыше 1550 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите (в минутах), через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор.

B13

- B13.** Цилиндр вписан в прямоугольный параллелепипед. Радиус основания цилиндра равен 2. Объем параллелепипеда равен 80. Найдите высоту цилиндра.

**B14**

- B14.** Первый сплав содержит 5% меди, второй — 11% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 4 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах?

B15. Найдите наименьшее значение функции $y = 11 \operatorname{tg} x - 11x + 16$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

B15

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1. а) Решите уравнение $2 \sin^2 x + (2 - \sqrt{2}) \cos x + \sqrt{2} - 2 = 0$.

C1

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$.

C2. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S , все рёбра которой равны 2, точка M — середина ребра AB , точка O — центр основания пирамиды, точка F делит отрезок SO в отношении $3:1$, считая от вершины пирамиды. Найдите расстояние от точки C до прямой MF .

C2

C3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{5x} x^2 + \log_{x^2} 5x \leq 2, \\ \log_{x-3}^4 (x^2 - 17) + \log_{x^2-17}^2 (x - 3) - \log_{5x} 25 > 79. \end{cases}$$

C3

C4. Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма $ABCD$ как на диаметре, проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма.

C4

а) Докажите, что $ABCD$ — ромб.

б) Эта окружность пересекает сторону AB в точке M , причём $AM:MB = 2:1$. Найдите диагональ AC , если известно, что $AD = \sqrt{6}$.

C5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = |x - a| - x^2$ не меньше 1.

C5

C6. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 792 и

C6

а) пять;

б) четыре;

в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

ВАРИАНТ 5

Часть 1. Базовый уровень

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В1

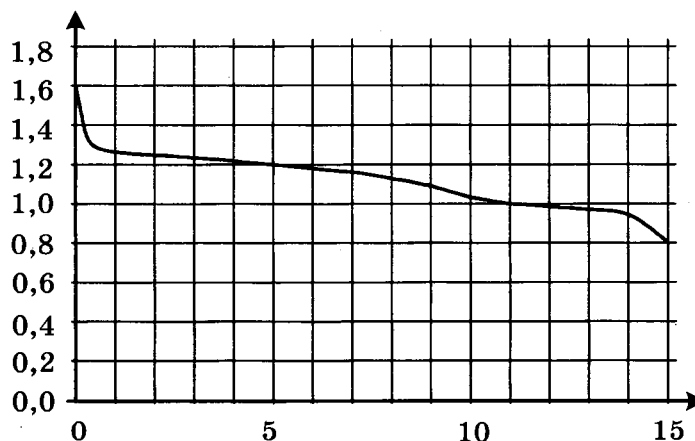
- В1.** Стоимость проездного билета на месяц составляет 800 руб. А стоимость билета на одну поездку 22 руб. Аня купила проездной и сделала за месяц 45 поездок. Сколько рублей она сэкономила?

В2

- В2.** Брюки стоили 850 рублей. После снижения цены они стали стоить 680 рублей. На сколько процентов была снижена цена на брюки?

В3

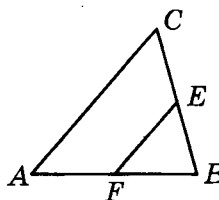
- В3.** При работе фонарика батарейка постепенно разряжается и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На рисунке показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечается время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по рисунку, какое напряжение будет в цепи через 15 часов работы фонарика. Ответ дайте в вольтах.



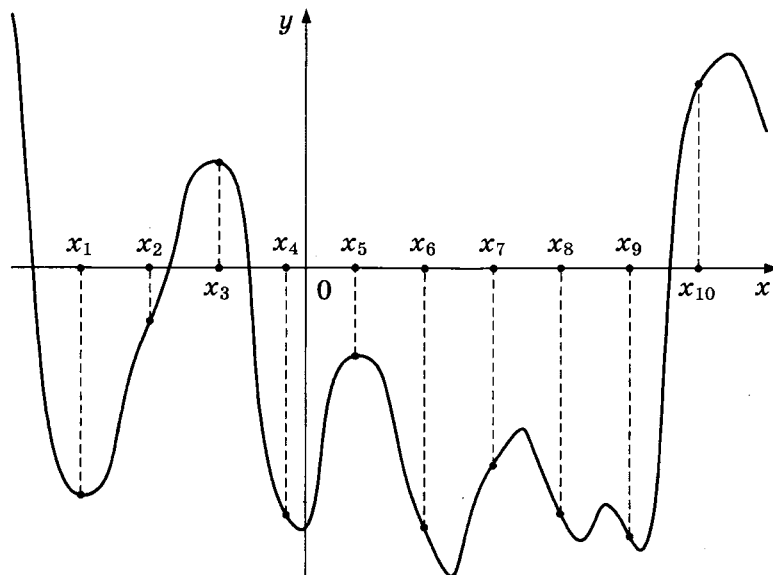
- В4.** Строительная фирма планирует приобрести 72 кубометра пеноблоков у одного из трех поставщиков. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую покупку с доставкой? Цены и условия доставки приведены в таблице.

Поставщик	Стоимость пеноблоков (руб. за м ³)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	2850	4900	
Б	3100	4600	При заказе на сумму более 150 000 руб. доставка бесплатно
В	2900	4800	При заказе на сумму более 200 000 руб. доставка бесплатно

- В5.** В треугольнике ABC EF — средняя линия. Площадь треугольника BEF равна 4. Найдите площадь треугольника ABC .



- В6.** В среднем из 2000 садовых насосов, поступивших в продажу, 2 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.
- В7.** Найдите корень уравнения: $\sqrt{-24 - 5x} = 4$.
- В8.** Найдите число сторон правильного многоугольника, каждый из углов которого равен 140° .
- В9.** На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и десять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$. Сколько из этих точек являются решениями неравенства $f'(x) < 0$?



В4

В5

В6

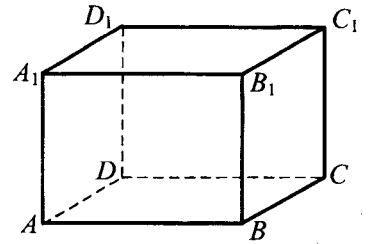
В7

В8

В9

B10

- B10.** В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 21$, $AD = 20$, $AA_1 = 23$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины A , A_1 и C .



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2. Профильный уровень

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B11

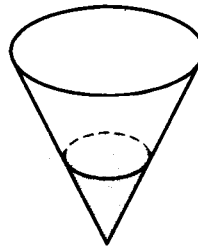
- B11.** Найдите значение выражения $\frac{\log_8 14}{\log_{64} 14}$.

B12

- B12.** Масса радиоактивного вещества уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$. В лаборатории получили вещество, содержащее в начальный момент времени $m_0 = 280$ мкг изотопа железа-59, период полураспада которого $T = 45$ суток. В течение скольких суток содержание изотопа железа-59 в веществе будет превосходить 17,5 мкг?

B13

- B13.** В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{3}$ высоты. Объём жидкости равен 12 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?

**B14**

- B14.** Имеются два сосуда, содержащие 42 кг и 6 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 40% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 50% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом растворе?

B15. Найдите наименьшее значение функции $y = (x^2 - 9x + 9)e^{x-7}$ на отрезке $[6; 8]$.

B15

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1. а) Решите уравнение $(49^{\cos x})^{\sin x} = 7^{\sqrt{2} \cos x}$.

C1

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

C2. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S , все рёбра которой равны 4, точка N — середина ребра AC , точка O — центр основания пирамиды, точка P делит отрезок SO в отношении $3:1$, считая от вершины пирамиды. Найдите расстояние от точки B до прямой NP .

C2

C3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 7^{x-1} + 7^x + 7^{x+1} > 171, \\ \log_3 \frac{1}{x} + \log_3 (x^2 + 3x - 9) \leq \log_3 \left(x^2 + 3x + \frac{1}{x} - 10 \right). \end{cases}$$

C3

C4. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

C4

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.

б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 6 и 2.

C5. Найдите все a , при каждом из которых уравнение

$$\sin |\arctg x| + a \cos \left(\frac{\arctg x}{2} \right) = \frac{a|x|}{\sqrt{1+x^2}}$$

имеет хотя бы одно решение.

C5

C6. Найдутся ли хотя бы три десятизначных числа, делящихся на 11, в записи каждого из которых использованы все цифры от 0 до 9?

C6

ВАРИАНТ 6

Часть 1. Базовый уровень

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В1

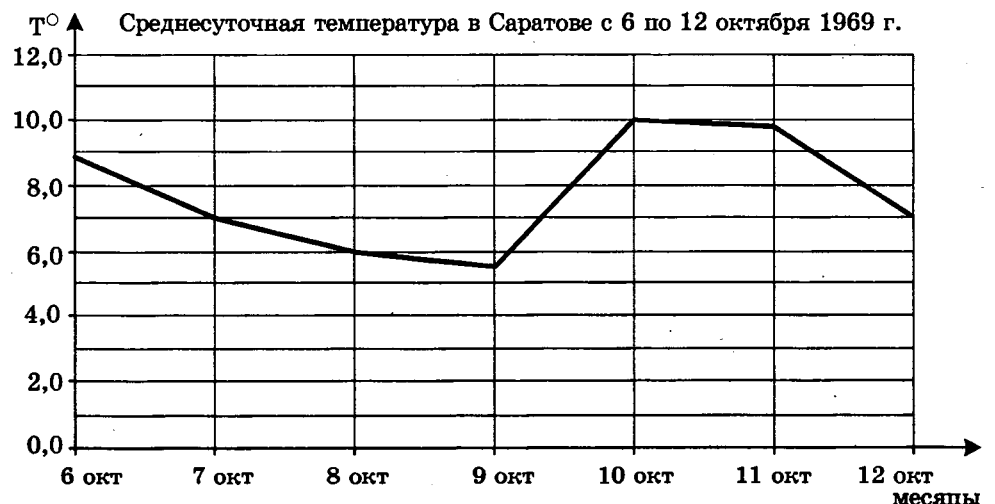
- В1. Поезд Москва–Ижевск отправляется в 17:41, а прибывает в 10:41 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

В2

- В2. Тетрадь стоит 30 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 150 рублей после понижения цены на 30%?

В3

- В3. На рисунке изображен график среднесуточной температуры в г. Саратове в период с 6 по 12 октября 1969 г. На оси абсцисс откладываются числа, на оси ординат — температура в градусах Цельсия. Определите по графику, какая была средняя температура 8 октября. Ответ дайте в градусах Цельсия.



- В4.** В магазине одежды объявлена акция — если покупатель приобретает товар на сумму свыше 5000 руб., он получает скидку на следующую покупку в размере 10%. Если покупатель участвует в акции, он теряет право вернуть товар в магазин.

В4

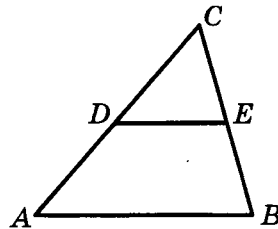
Покупатель В. хочет приобрести куртку ценой 4500 руб., рубашку ценой 800 руб. и кеды ценой 1600 руб. В каком случае В. заплатит за покупку меньше всего?

1. В. купит все три товара сразу.
2. В. купит сначала куртку и рубашку, а потом кеды со скидкой.
3. В. купит сначала куртку и кеды, а потом рубашку со скидкой.

В ответ запишите сумму (в рублях), которую заплатит В. за покупку в этом случае.

- В5.** В треугольнике ABC DE — средняя линия. Площадь треугольника CDE равна 24. Найдите площадь треугольника ABC .

В5



- В6.** В каждой пятой банке кофе согласно условиям акции есть приз. Призы распределены по банкам случайно. Галя покупает банку кофе в надежде выиграть приз. Найдите вероятность того, что Галя не найдет приз в своей банке?

В6

- В7.** Решите уравнение $\log_2 x = -2$.

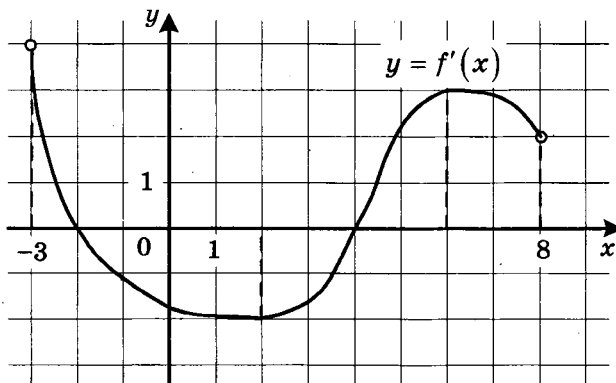
В7

- В8.** В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, делит прямой угол на два угла, один из которых равен 56° . Найдите меньший угол данного треугольника. Ответ дайте в градусах.

В8

- В9.** На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$.

В9



B10

B10. Высота основания правильной треугольной пирамиды равна 9, а высота боковой грани пирамиды, проведенная к ребру основания, равна $\sqrt{73}$. Найдите боковое ребро пирамиды.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2. Профильный уровень

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B11

B11. Найдите значение выражения $\frac{4 \sin 17^\circ \cos 17^\circ}{\cos 56^\circ}$.

B12

B12. Для одного из предприятий-монополистов зависимость объема спроса на продукцию q (единиц в месяц) от ее цены p (тыс. руб.) задается формулой: $q = 100 - 10p$. Определите максимальный уровень цены p (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит не менее 210 тыс. руб.

B13

B13. В цилиндрический сосуд, в котором находится 4 литра воды, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся в 1,5 раза. Чему равен объем детали? Ответ выразите в литрах.

B14

B14. Заказ на 140 деталей первый рабочий выполняет на 4 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 4 детали больше?

B15

B15. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 6e^x + 7$ на отрезке $[0; 2]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

С1. а) Решите уравнение $\frac{\sin 2x}{\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)} = 1$.

 С1

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

С2. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите угол между плоскостями $AB_1 C_1$ и $A_1 B_1 C$.

 С2

С3. Решите неравенство $\log_{2-x}(x+2) \cdot \log_{x+3}(3-x) \leq 0$.

 С3

С4. Дана окружность радиуса 2 с центром O . Хорда AB пересекает радиус OC в точке D , причем $\angle CDA = 120^\circ$. Найдите радиус окружности, вписанной в угол ADC и касающейся дуги AC , если $OD = \sqrt{3}$.

 С4

С5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} (x - 2a - 5)^2 + (y - 3a + 5)^2 = 16, \\ (x - a - 2)^2 + (y - 2a + 1)^2 = 81. \end{cases}$$

 С5

С6. Найдите все такие целые a и b , что корни уравнения

$$x^2 + (2a + 9)x + 3b + 5 = 0$$

являются различными целыми числами, а коэффициенты $2a + 9$ и $3b + 5$ — простыми числами.

 С6

ВАРИАНТ 7

Часть 1. Базовый уровень

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В1

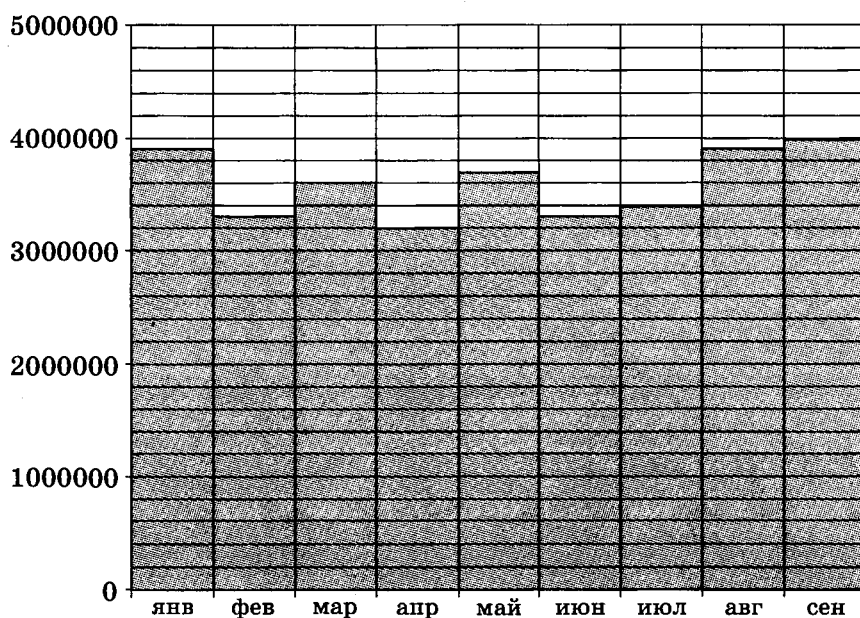
- В1.** В туристический поход отправляется группа из 18 человек. В походе на одного человека приходится 60 грамм гречки на прием пищи. Планируется 7 раз готовить гречку. Сколько килограммовых пачек необходимо купить, чтобы гречки хватило?

В2

- В2.** Цена на люстру была повышена на 15% и составила 2300 рублей. Сколько рублей стоила люстра до повышения цены?

В3

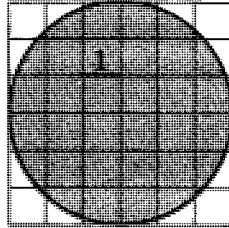
- В3.** На диаграмме показано число запросов со словом КИНО, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по сентябрь 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число запросов за данный месяц. Определите по диаграмме наибольшее месячное число запросов со словом КИНО в указанный период.



В4. Семья из трёх человек планирует поехать из Москвы в Чебоксары. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 940 рублей. Автомобиль расходует 9 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 700 км, а цена бензина равна 29 рублям за литр. Сколько рублей придётся заплатить за наиболее дешёвую поездку на троих?

 В4

В5. Найдите площадь S круга. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

 В5


В6. Перед началом матча по футболу судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первая владеть мячом. Команда «Белые» по очереди играет с командами «Красные», «Синие» и «Зеленые». Найдите вероятность того, что ровно в двух матчах из трёх право первой владеть мячом получит команда «Белые».

 В6

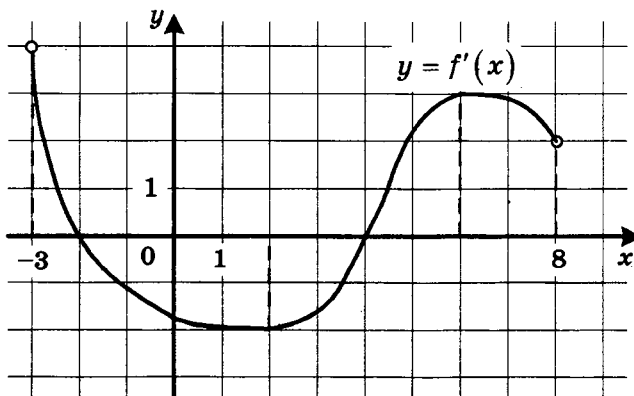
В7. Найдите корень уравнения $\frac{1}{4x+9} = \frac{1}{6x+12}$.

 В7

В8. В треугольнике ABC AD — биссектриса, угол C равен 21° , угол CAD равен 30° . Найдите угол B . Ответ дайте в градусах.

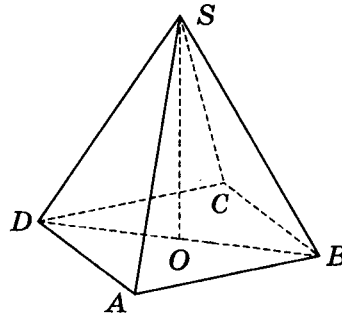
 В8

В9. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. Найдите точку максимума функции $f(x)$.

 В9


B10

- B10.** В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S вершина, $CS = 17$, $BD = 16$. Найдите длину отрезка SO .



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2. Профильный уровень

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B11

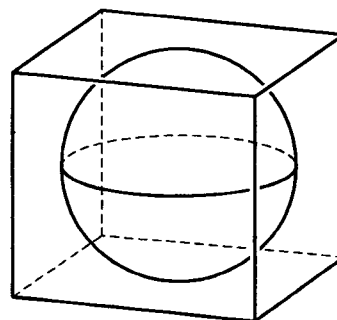
- B11.** Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{29}}{29}$ и $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

B12

- B12.** В электросеть включён предохранитель, рассчитанный на силу тока 20 А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Сила тока в цепи I связана с напряжением U соотношением $I = \frac{U}{R}$, где R — сопротивление электроприбора. (Ответ выразите в омах.)

B13

- B13.** Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 4. Найдите его объем.



B14. Первый сплав содержит 5% меди, второй — 14% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 7 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

B14

B15. Найдите наибольшее значение функции

$$y = -\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 3x + 19$$

на отрезке $[8; 21]$.

B15

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1. а) Решите уравнение $\cos 2x + 2\cos^2 x - \sin 2x = 0$.

C1

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

C2. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью BCC_1 .

C2

C3. Решите систему неравенств

C3

$$\begin{cases} 2^{2x-1} - 7 \cdot 2^{x-1} + 5 \leq 0, \\ \frac{x^2 - 2x - 1}{x - 2} + \frac{2}{x - 3} \leq x. \end{cases}$$

C4. Точки B_1 и C_1 лежат на сторонах соответственно AC и AB треугольника ABC , причём $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B$. Прямые BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O .

C4

а) Докажите, что прямая AO делит пополам сторону BC .

б) Найдите отношение площади четырёхугольника AB_1OC_1 к площади треугольника ABC , если известно, что $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B = 1 : 2$.

C5. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 3|$ имеет два корня.

C5

C6. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 672 и

C6

а) пять;

б) четыре;

в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

ВАРИАНТ 8

Часть 1. Базовый уровень

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В1

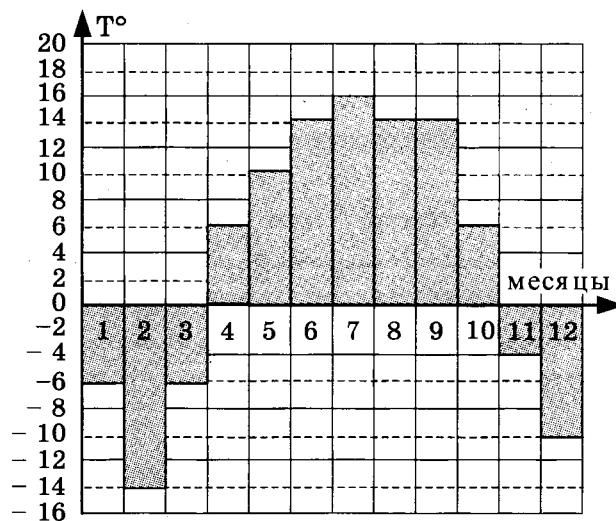
- В1.** В школе есть трехместные туристические палатки. Какое наименьшее число палаток нужно взять в поход, в котором участвуют 20 человек?

В2

- В2.** В двух автомобилях перевозилось одинаковое количество помидоров. При этом в первом автомобиле при транспортировке испортилось 20% перевозимых помидоров, что составило 96 штук. Во втором автомобиле испортилось 15% помидоров. Сколько помидоров испортилось во втором автомобиле?

В3

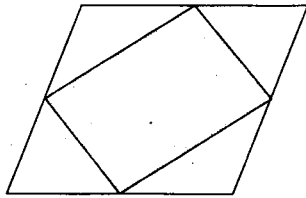
- В3.** На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность между наибольшей и наименьшей среднемесячными температурами в 1994 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



- В4.** Керамическая плитка одной и той же торговой марки выпускается трех разных размеров. Плитки упакованы в пачки. Пользуясь данными таблицы, определите, в каком случае цена одного квадратного метра плитки будет наименьшей. В ответ запишите найденную наименьшую цену квадратного метра в рублях.

Размер плитки (см)	Количество плиток в пачке	Цена пачки
20×20	30	576 р.
30×30	13	585 р.
40×40	8	608 р.

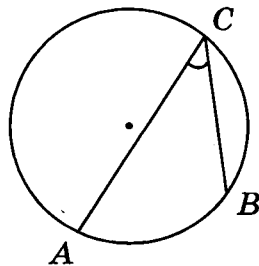
- В5.** Площадь параллелограмма равна 6. Найдите площадь параллелограмма, вершинами которого являются середины сторон данного параллелограмма.



- В6.** Перед началом матча по футболу судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первая владеть мячом. Команда «Белые» по очереди играет с командами «Красные», «Синие» и «Зеленые». Найдите вероятность того, что ровно в одном матче право первой владеть мячом получит команда «Белые».

- В7.** Найдите корень уравнения $\sqrt{15 + 7x} = 6$.

- В8.** На окружности отмечены точки A , B и C . Дуга окружности AC , не содержащая точку B , составляет 200° . Дуга окружности BC , не содержащая точку A , составляет 80° . Найдите вписанный угол ACB . Ответ дайте в градусах.



В4

В5

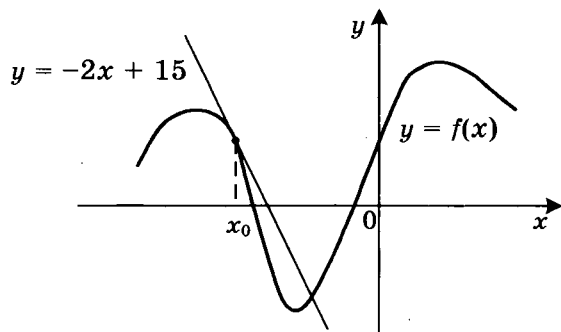
В6

В7

В8

B9

- B9.** На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке x_0 . Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение производной функции $y = -\frac{1}{4}f(x) + 5$ в точке x_0 .

**B10**

- B10.** Тангенс угла между плоскостью боковой грани и плоскостью основания правильной четырехугольной пирамиды равен $3\sqrt{2}$. Найдите тангенс угла между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2. Профильный уровень

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B11

- B11.** Найдите значение выражения $\log_2 7 \cdot \log_7 4$.

B12

- B12.** В электросеть включён предохранитель, рассчитанный на силу тока 16 А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Сила тока в цепи I связана с напряжением U соотношением $I = \frac{U}{R}$, где R — сопротивление электроприбора. (Ответ выразите в омах.)

B13

- B13.** Объем цилиндра равен 24. Радиус основания цилиндра уменьшили в 2 раза, а образующую увеличили в 5 раз. Найдите объем получившегося цилиндра.

B14. Смешали 14 литров 30-процентного водного раствора некоторого вещества с 10 литрами 18-процентного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора? Знак % в ответе не пишете.

B14

B15. Найдите наибольшее значение функции $y = 4 \cos x - \frac{21}{\pi} x + 9$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.

B15

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1. а) Решите уравнение $5 \cdot 4^{x^2+4x} + 20 \cdot 10^{x^2+4x-1} - 7 \cdot 25^{x^2+4x} = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3; 1]$.

C1

C2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ ребро основания $AB = 8\sqrt{3}$, а боковое ребро $AA_1 = 7$. Найдите тангенс угла между плоскостями BCA_1 и BB_1C_1 .

C2

C3. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \log_7(x^2 - 9) \leq 1, \\ \frac{2x^2 + x - 28}{6^{x-6} + 5^{x-5} - 4} \leq 0. \end{cases}$$

C3

C4. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина стороны AB .

C4

а) Докажите, что $CM = \frac{1}{2} DK$.

б) Найдите расстояния от точки M до центров квадратов, если $AC = 14$, $BC = 16$ и $\angle ACB = 150^\circ$.

C5. Найдите все значения параметра k , при каждом из которых уравнение $\frac{6k - (2 - 3k) \cos t}{\sin t - \cos t} = 2$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

C5

C6. Найдите наибольший общий делитель всех чисел вида $p^2 - 1$, где p — простое число, большее 3, но меньше 2010.

C6

ВАРИАНТ 9

Часть 1. Базовый уровень

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В1

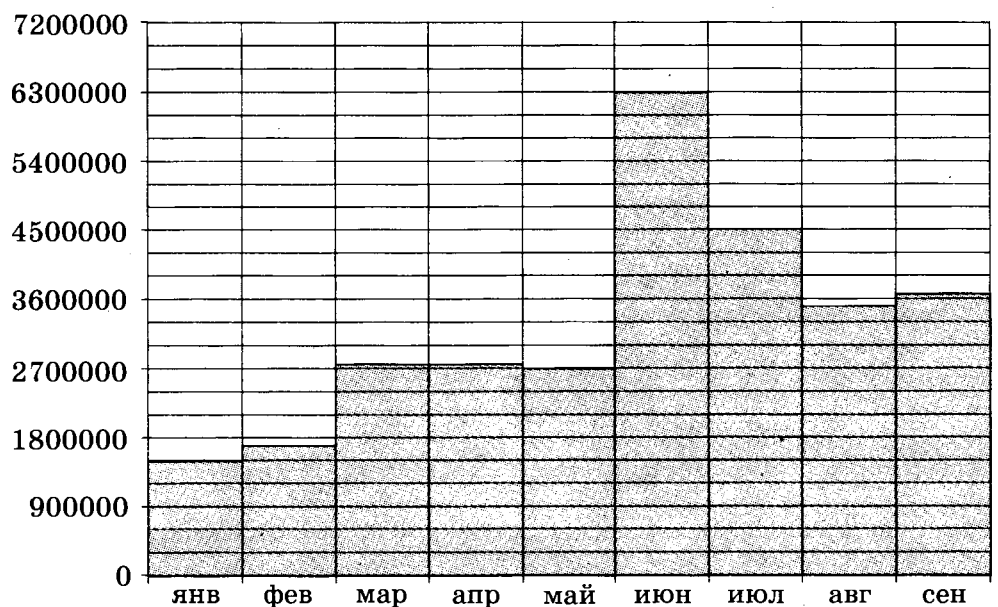
- В1.** Летом килограмм черешни стоит 80 рублей. Мама купила 1 кг 800 г черешни. Сколько рублей сдачи она должна получить с 500 рублей?

В2

- В2.** Билет на автобус стоит 110 рублей. Ожидается повышение цены на 10%. Какое наибольшее число билетов можно будет купить на 1000 рублей?

В3

- В3.** На диаграмме показано число запросов со словом **ФУТБОЛ**, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по сентябрь 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число запросов за данный месяц. Определите по диаграмме, сколько было месяцев в указанный период, когда число запросов со словом **ФУТБОЛ** было меньше 3 600 000.



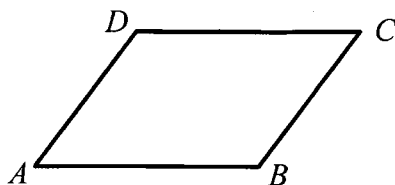
- В4.** Автомобильный журнал определяет рейтинг автомобилей на основе показателей безопасности S , комфорта C , функциональности F , качества Q и дизайна D . Каждый отдельный показатель оценивается по 5-балльной шкале. Рейтинг R вычисляется по формуле

$$R = \frac{3S + 2C + 2F + 2Q + D}{50}$$

В таблице даны оценки каждого показателя для трёх моделей автомобилей. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей автомобилей.

Модель автомобиля	Безопасность	Комфорт	Функциональность	Качество	Дизайн
А	2	5	5	3	2
Б	4	1	1	5	2
В	2	1	3	1	2

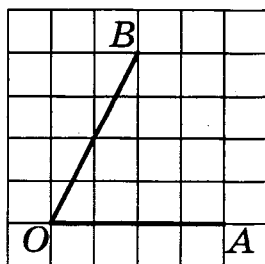
- В5.** Периметр параллелограмма равен 30. Большая сторона равна 10. Найдите меньшую сторону параллелограмма.



- В6.** Двое играют в кости — они по разу бросают игральный кубик. Выигрывает тот, у кого больше очков. Если выпадает поровну, то наступает ничья. Первый бросил кубик, и у него выпало 4 очка. Найдите вероятность того, что он выиграет.

- В7.** Найдите корень уравнения $\log_4(5 - x) = 2$.

- В8.** Найдите тангенс угла AOB , изображённого на клетчатой бумаге.



В4

В5

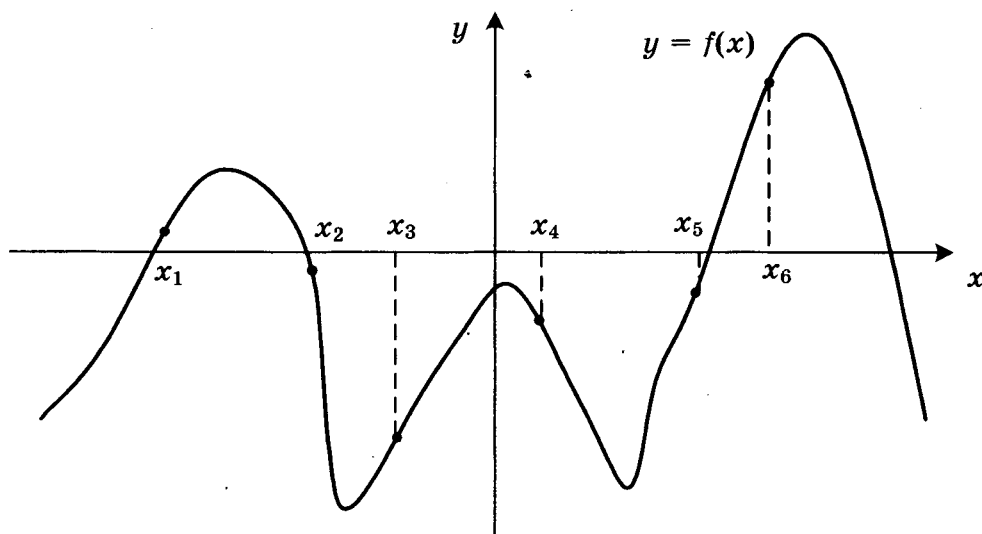
В6

В7

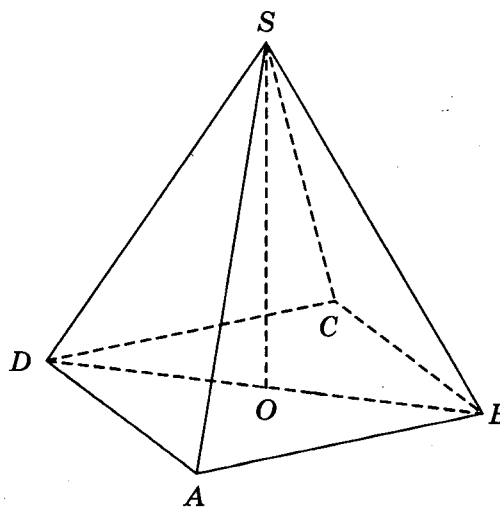
В8

B9

- B9.** На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Найдите среди точек x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и x_6 те точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответ запишите количество найденных точек.

**B10**

- B10.** В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S вершина, $SA = 26$, $BD = 20$. Найдите длину отрезка SO .



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2. Профильный уровень

Ответом на задания В11–В15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В11. Найдите значение выражения $\frac{5 \sin 61^\circ}{\sin 299^\circ}$.

В11

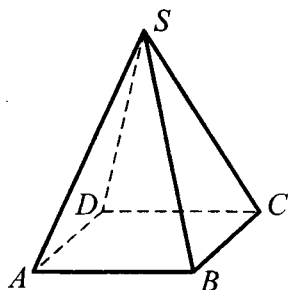
В12. Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. При каком наименьшем значении угла α (в градусах)

В12

время полёта будет не меньше 3,2 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 16$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

В13. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ боковое ребро SC равно 37, сторона основания равна $35\sqrt{2}$. Найдите объём пирамиды.

В13



В14. Города A , B и C соединены прямолинейным шоссе, причем город B расположен между городами A и C . Из города A в сторону города C выехал легковой автомобиль, и одновременно с ним из города B в сторону города C выехал грузовик. Через сколько часов после выезда легковой автомобиль догонит грузовик, если скорость легкового автомобиля на 28 км/ч больше скорости грузовика, а расстояние между городами A и B равно 112 км?

В14

В15. Найдите наибольшее значение функции $y = (21 - x)e^{20-x}$ на отрезке $[19; 21]$.

В15

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

С1

- С1. Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x + 5 \operatorname{tg} x + 6 = 0$ и найдите корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

С2

- С2. Ребро AD пирамиды $DABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC . Найдите расстояние от вершины A до плоскости, проходящей через середины ребер AB , AC и AD , если $AD = 2\sqrt{5}$, $AB = AC = 10$, $BC = 4\sqrt{5}$.

С3

- С3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4^{x+1} - 17 \cdot 2^x + 4 \leq 0, \\ \log_{|x|}^2(x^2) + \log_2(x^2) \leq 8. \end{cases}$$

С4

- С4. Точки B_1 и C_1 лежат на сторонах соответственно AC и AB треугольника ABC , причём $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B$. Прямые BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O .
- а) Докажите, что прямая AO делит пополам сторону BC .
- б) Найдите отношение площади четырёхугольника AB_1OC_1 к площади треугольника ABC , если известно, что $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B = 1 : 4$.

С5

- С5. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$64x^6 + 4x^2 = (3x + a)^3 + 3x + a$$

не имеет корней.

С6

- С6. Квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + px + q$ имеет два различных целых корня. Один из корней трехчлена и его значение в точке $x = 11$ являются простыми числами. Найдите корни трехчлена.

ВАРИАНТ 10

Часть 1. Базовый уровень

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

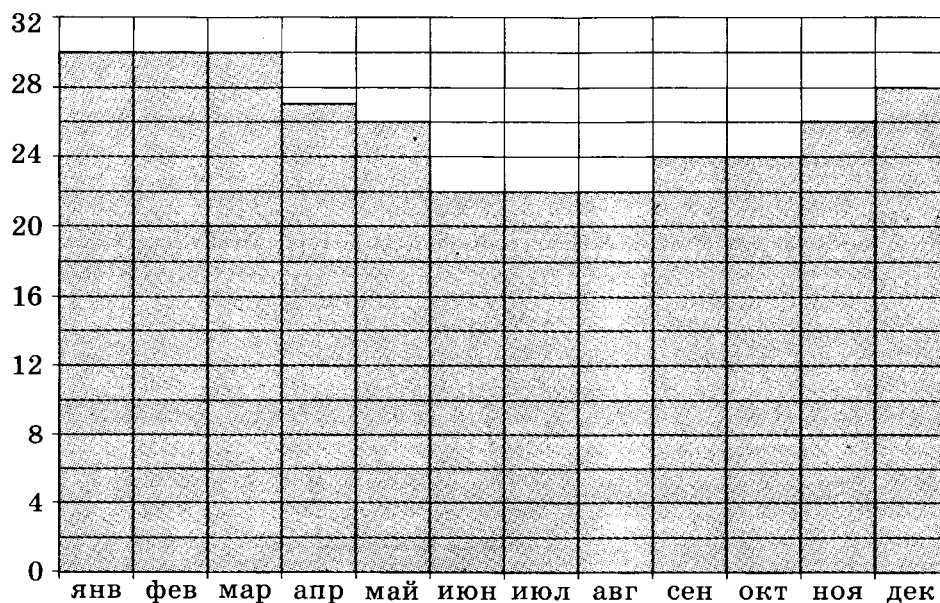
В1. Вера отправила SMS-сообщения с новогодними поздравлениями своим 26 друзьям. Стоимость одного SMS-сообщения 1 рубль 20 копеек. Перед отправкой сообщений на счете у Веры оставалось 46 рублей. Сколько рублей останется у Веры после отправки всех сообщений?

 В1

В2. Одна таблетка лекарства весит 20 мг и содержит 11% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,32 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку весом 5 кг в течение суток?

 В2

В3. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Рио-де-Жанейро за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность между наибольшей и наименьшей среднемесячной температурой в 2009 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.

 В3

B4

- B4.** Рейтинговое агентство определяет рейтинги автомобилей на основе оценок безопасности S , комфорта C , функциональности F , качества Q и дизайна D . Каждый показатель оценивается читателями журнала по 5-балльной шкале. Рейтинг R вычисляется по формуле:

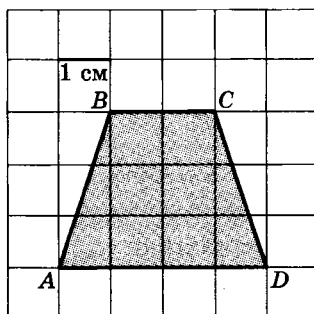
$$R = \frac{3S + 2C + 2F + 2Q + D}{50}.$$

В таблице даны оценки каждого показателя для трех моделей автомобилей. Определите, какой автомобиль имеет наивысший рейтинг. В ответ запишите значение этого рейтинга.

Модель автомобиля	Безопасность	Комфорт	Функциональность	Качество	Дизайн
А	3	3	5	5	3
Б	4	5	3	4	3
В	4	4	3	3	4

B5

- B5.** Найдите площадь трапеции $ABCD$. Размер каждой клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

**B6**

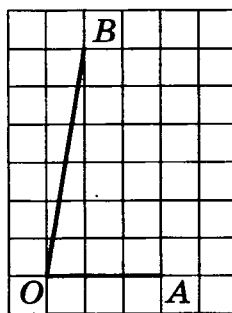
- B6.** В среднем из 1800 садовых насосов, поступивших в продажу, 18 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

B7

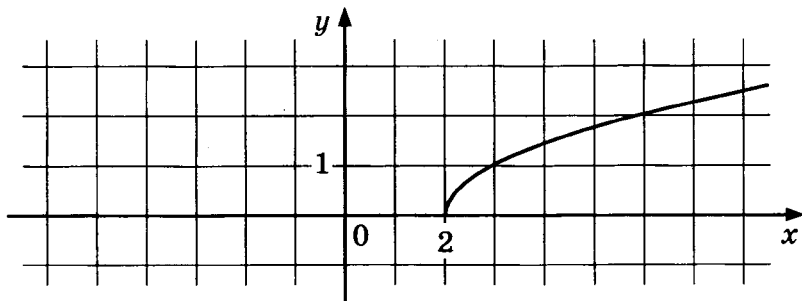
- B7.** Решите уравнение $\log_2 x = 5$.

B8

- B8.** Найдите тангенс угла AOB , изображённого на клетчатой бумаге.

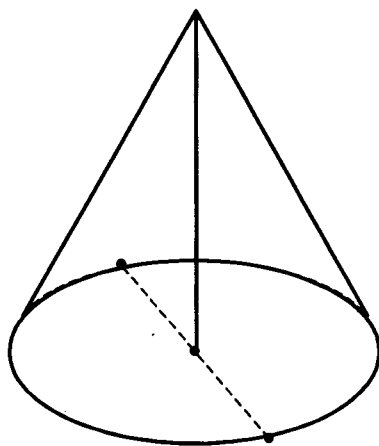


- B9.** На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через точку $(-6; -1)$, касается этого графика в точке с абсциссой 6. Найдите $f'(6)$.



B9

- B10.** Высота конуса равна 30, а длина образующей — 34. Найдите диаметр основания конуса.



B10

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2. Профильный уровень

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- B11.** Найдите $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ и $\alpha \in (0; 0,5\pi)$.

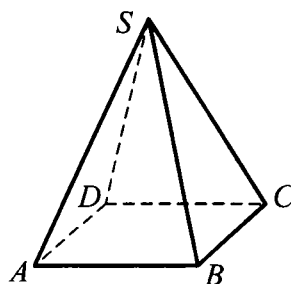
B11

B12

- B12.** Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому мощность излучения P (в ваттах) нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma ST^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь поверхности S измеряется в квадратных метрах, а температура T — в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \frac{1}{18} \cdot 10^{21}$ м², а излучаемая ею мощность P равна $4,104 \cdot 10^{27}$ Вт. Определите температуру этой звезды. Дайте ответ в градусах Кельвина.

B13

- B13.** В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ боковое ребро SC равно 17, сторона основания равна $15\sqrt{2}$. Найдите объём пирамиды.

**B14**

- B14.** Первая труба наполняет бак объемом 600 литров, а вторая труба — бак объемом 900 литров. Известно, что одна из труб пропускает в минуту на 3 л воды больше, чем другая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если баки были наполнены за одно и то же время?

B15

- B15.** Найдите наименьшее значение функции $y = 5 \cos x - 6x + 4$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1

- C1.** Решите уравнение $5 \cos^2 x - 12 \cos x + 4 = 0$ и найдите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

C2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины ребер: $AA_1 = 5$, $AB = 12$, $AD = 8$. Найдите тангенс угла между плоскостью ABC и плоскостью, проходящей через точку B перпендикулярно прямой AK , если K — середина ребра $C_1 D_1$.

 C2

C3. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \log_7(x^2 - 9) \leq 1, \\ \frac{2x^2 + x - 28}{6^{x-6} + 5^{x-5} - 4} \leq 0. \end{cases}$$

 C3

C4. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

 C4

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.

б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 4 и 1.

C5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\left|2^{1-x} - a\right| - \left|\frac{1}{2^x} + 2a\right| = 4^{-x}$ имеет единственное решение.

 C5

C6. Решите в целых числах уравнение $3^n + 8 = x^2$.

 C6

ОТВЕТЫ

№ задания	№ варианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B1	37	63	7	8	190	17	8	7	356	14,8
B2	4	1200	13	1449	20	7	2000	72	8	3
B3	4500	28	3	25	0,8	6	4000000	30	6	8
B4	28260	3960	1840	630	208800	6740	1827	475	0,68	0,78
B5	6	7	5	10	16	96	9	3	5	9
B6	0,1	0,98	0,17	0,5	0,999	0,8	0,375	0,375	0,5	0,99
B7	16	7	45	2	-8	0,25	-1,5	3	-11	32
B8	122	1	21	36	9	34	99	40	2	6
B9	0,25	5	7	10	4	4	-2	0,5	2	0,25
B10	450	45	6	160	667	10	15	3	24	32
B11	2	-0,75	-2	2	2	2	0,4	2	-5	0,75
B12	14	8	12	25	180	7	11	13,75	90	6000
B13	4	84	8	5	312	2	512	30	9800	1200
B14	140	21	53	6	15,4	10	63	25	4	9
B15	-7	-2	44	16	-5	-2	28	21	1	9

Вариант 1

C1	а) $\left\{ \left((-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi k \right) \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\frac{3\pi}{2}; \frac{9\pi}{4}; \frac{5\pi}{2}$
C2	2 или 14
C3	5
C4	6
C5	$\left(\frac{16}{5}; +\infty \right)$
C6	64 и 6084

Вариант 2

C1	а) $2\pi k, \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{11\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}$
C2	$\arctg 3$ или $\arctg \frac{21}{17}$
C3	3
C4	$\frac{7 \pm 2\sqrt{6}}{6}$
C5	$(-\infty; 0)$
C6	2500 или 400

Вариант 3

C1	а) $\pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ б) $-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}$
C2	5
C3	$\left[\frac{2}{9}; \log_2 \frac{3}{2}\right]$
C4	2,4 или 12
C5	3
C6	а) Нет; б) 9; в) 10

Вариант 4

C1	а) $2\pi k, \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{11\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}$
C2	1
C3	5
C4	$2\sqrt{5}$
C5	$a \leq -0,75; a \geq 0,75$
C6	а) нет, б) нет, в) да.

Вариант 5

C1	а) $\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{2}; \frac{11\pi}{4}; \frac{7\pi}{2}$
C2	2
C3	$[2; +\infty)$
C4	3
C5	$(-\infty; 0]; (2 + \sqrt{2}; +\infty)$
C6	Да

Вариант 6

C1	а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{3}$
C2	$\frac{\pi}{3}$
C3	$(-2; -1] \cup (1; 2)$
C4	$2\sqrt{21} - 9$ или $3 + 2\sqrt{3}$
C5	-8; 0; 1; 9
C6	$a = -3, b = -1$

Вариант 7

C1	а) $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $-\arctg 3 + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi - \arctg 3$; $\frac{9\pi}{4}$
C2	$\arctg \frac{\sqrt{2}}{2}$
C3	1; $(2; \log_2 5)$
C4	1:6
C5	$-24 < a < 18$
C6	а) нет, б) нет, в) да.

Вариант 8

C1	а) $-2 \pm \sqrt{5}$; б) $-2 + \sqrt{5}$
C2	$\frac{12}{7}$
C3	-4; [3,5; 4]
C4	13
C5	$0 \leq k < \frac{4\sqrt{2}-2}{21}$ или $\frac{4\sqrt{2}-2}{21} < k \leq \frac{1}{3}$
C6	24

Вариант 9

C1	$-\arctg 2 + \pi n$, $-\arctg 3 + \pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$; $-\pi - \arctg 2$, $-\pi - \arctg 3$
C2	2
C3	[-2; -1); (-1; 0); (0; 1); (1; 2]
C4	1:15
C5	$(-\infty; -\frac{9}{16})$
C6	$x_1 = 12, x_2 = 13$

Вариант 10

C1	$\pm \arccos \frac{2}{5} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-2\pi - \arccos \frac{2}{5}$, $-2\pi + \arccos \frac{2}{5}$
C2	2
C3	-4; [3,5; 4]
C4	1,92
C5	$a = -\frac{9}{4}$, $a = 0$, $a = \frac{1}{12}$
C6	$n = 0, x = 3$; $n = 0, x = -3$

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ

Вариант 5

С1. а) Решите уравнение $(49^{\cos x})^{\sin x} = 7^{\sqrt{2} \cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$7^{2 \cos x \sin x} = 7^{\sqrt{2} \cos x}; \quad 2 \sin x \cos x = \sqrt{2} \cos x; \quad \cos x (2 \sin x - \sqrt{2}) = 0;$$

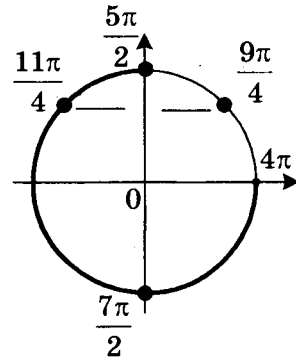
$$\cos x = 0 \text{ или } \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ или $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью единичной окружности отберем

корни на отрезке $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Получаем: $\frac{5\pi}{2}, \frac{11\pi}{4}, \frac{7\pi}{2}$.



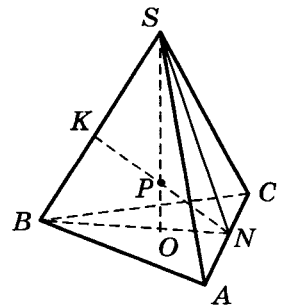
Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. б) $\frac{5\pi}{2}, \frac{11\pi}{4}, \frac{7\pi}{2}$.

С2. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S , все рёбра которой равны 4, точка N — середина ребра AC , точка O — центр основания пирамиды, точка P делит отрезок SO в отношении 3:1, считая от вершины пирамиды. Найдите расстояние от точки B до прямой NP .

Решение:

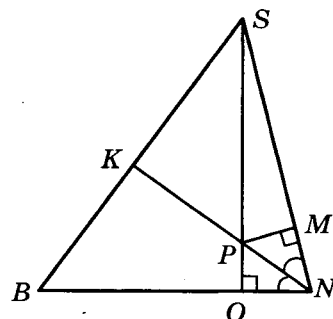
Точка O принадлежит отрезку BN , значит точка P , лежащая на отрезке SO , находится в плоскости SBN . Поэтому прямая PN содержится в плоскости SBN и пересекает SB в точке K .

$\triangle SNB$ равнобедренный, поскольку отрезки SN и BN — медианы одинаковых равносторонних треугольников SAC и BAC . Поэтому $SN = BN$. В точке O пересекаются медианы основания, значит, $ON = \frac{1}{3}BN = \frac{1}{3}SN$.



Опустим перпендикуляр из точки P на сторону SN . Пусть он пересекает SN в точке M . Треугольники SPM и SNQ подобны, поэтому $\frac{SP}{PM} = \frac{SN}{ON} = 3$.

Значит, $PM = \frac{1}{3}SP = PO$. Следовательно треугольники NPO и NPM равны и PN — биссектриса угла SNB . В равнобедренном треугольнике биссектриса является медианой и высотой. Значит, $NK \perp BS$ и поэтому расстояние от точки B до прямой PN равно $BK = \frac{1}{2}BS = 2$.



Ответ: 2.

С3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 7^{x-1} + 7^x + 7^{x+1} > 171, \\ \log_3 \frac{1}{x} + \log_3 (x^2 + 3x - 9) \leq \log_3 \left(x^2 + 3x + \frac{1}{x} - 10 \right). \end{cases}$$

Решение.

Из первого неравенства получаем:

$$7^{x-1}(1 + 7 + 49) > 171; \quad 7^{x-1} > 3; \quad x - 1 > \log_7 3; \quad x > 1 + \log_7 3.$$

Решим второе неравенство. Сделаем замену $a = \frac{1}{x}$, $b = x^2 + 3x - 9$. Неравенство принимает вид

$$\begin{cases} \log_3 a + \log_3 b \leq \log_3 (a + b - 1); \\ \log_3 ab \leq \log_3 (a + b - 1), \\ a > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} ab \leq a + b - 1, \\ a > 0, \\ b > 0. \end{cases}$$

В первом из полученных неравенств перенесем все члены в левую часть и разложим ее на множители: $(a - 1)(b - 1) \leq 0$.

Сделаем обратную замену:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) (x^2 + 3x - 10) \leq 0, \\ \frac{1}{x} > 0, \\ x^2 + 3x - 9 > 0; \\ b > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x - 1)(x^2 + 3x - 10) \geq 0, \\ x > 0, \\ x^2 + 3x - 9 > 0; \end{cases}$$

Из неравенства $x > 1 + \log_7 3$ следует, что $x > 1$. Учитывая это, перейдем к системе

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 10 \geq 0, \\ x^2 + 3x - 9 > 0. \end{cases}$$

Второе неравенство можно отбросить, поскольку оно выполняется, если выполняется первое. Получаем:

$$x^2 + 3x - 10 \geq 0.$$

Решение: $x \leq -5$ или $x \geq 2$.

Учитывая условие $x > 1 + \log_7 3$, получаем: $x \geq 2$.

Ответ: $[2; +\infty)$.

С4. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.

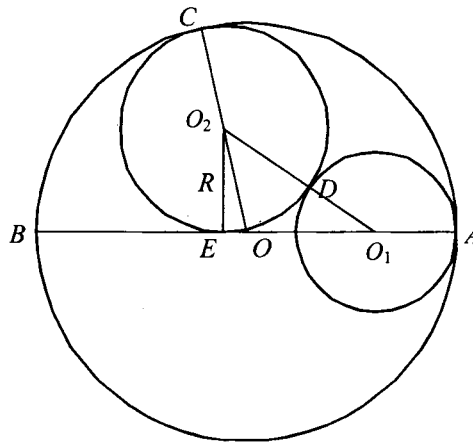
б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 6 и 2.

Решение:

а) Пусть AB — диаметр большей из трёх окружностей, O — её центр, O_1 — центр окружности радиуса r , касающейся окружности с диаметром AB в точке A , O_2 — центр окружности радиуса R , касающейся окружности с диаметром AB в точке C , окружности с центром O_1 — в точке D , отрезка AB — в точке E .

Точки O , O_2 и C лежат на одной прямой, поэтому $OO_2 = OC - O_2C = OC - R$. Аналогично $OO_1 = OA - O_1A = OA - r$ и $O_1O_2 = O_1D + O_2D = r + R$. Следовательно, периметр треугольника OO_1O_2 равен

$$OO_1 + OO_2 + O_1O_2 = OA - r + OC - R + r + R = OA + OC = 2OA = AB.$$



б) Пусть $OA = 6$, $r = 2$. Тогда

$$O_2E = R, O_1O_2 = 2 + R, OO_1 = OA - O_1A = 6 - 2 = 4, OO_2 = OC - O_2C = 6 - R.$$

Из прямоугольных треугольников O_1O_2E и OO_2E находим, что

$$O_1E = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2E^2} = \sqrt{(2 + R)^2 - R^2} = \sqrt{4 + 4R},$$

$$OE = \sqrt{OO_2^2 - O_2E^2} = \sqrt{(6 - R)^2 - R^2} = \sqrt{36 - 12R},$$

а так как $O_1E = OO_1 + OE$, то $\sqrt{4 + 4R} = 4 + \sqrt{36 - 12R}$. Из этого уравнения находим, что $R = 3$ (это значит, что диаметр искомой окружности равен радиусу наибольшей из трёх окружностей, то есть точка E совпадает с O).

Ответ: 3.

С5. Найдите все a , при каждом из которых уравнение $\sin|\arctg x| + a \cos\left(\frac{\arctg x}{2}\right) = \frac{a|x|}{\sqrt{1+x^2}}$

имеет хотя бы одно решение.

Решение:

Воспользуемся формулой $\sin(\operatorname{arctg}x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ и преобразуем правую часть уравнения:

$$\frac{a|x|}{\sqrt{1+x^2}} = a|\sin(\operatorname{arctg}x)| = a\sin|\operatorname{arctg}x|.$$

Ввиду чётности косинуса $a\cos\left(\frac{\operatorname{arctg}x}{2}\right) = a\cos\left(\frac{1}{2}|\operatorname{arctg}x|\right)$. Таким образом, уравнение принимает вид $\sin|\operatorname{arctg}x| + a\cos\left(\frac{1}{2}|\operatorname{arctg}x|\right) = a\sin|\operatorname{arctg}x|$.

Введём переменную $t = \frac{1}{2}|\operatorname{arctg}x|$; заметим, что $0 \leq t < \frac{\pi}{4}$. Преобразуем уравнение:

$$\begin{aligned}\sin 2t + a \cos t &= a \sin 2t; \\ 2(1-a)\cos t \sin t + a \cos t &= 0; \\ \cos t(2(1-a)\sin t + a) &= 0.\end{aligned}$$

Так как $0 \leq t < \frac{\pi}{4}$, $\cos t \neq 0$. Разделим обе части на $\cos t$:

$$2(1-a)\sin t + a = 0; \quad \sin t = \frac{a}{2(a-1)}.$$

Это уравнение имеет решения на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right)$, если и только если

$0 \leq \frac{a}{2(a-1)} < \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Таким образом, нужно решить систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{a}{a-1} \geq 0, \\ \frac{a}{a-1} < \sqrt{2}. \end{cases}$$

Решение первого неравенства: $a \leq 0$ или $a > 1$. Решение второго неравенства: $a < 1$ или $a > 2 + \sqrt{2}$. Получаем решение системы: $a \leq 0$, $a > 2 + \sqrt{2}$.

Ответ: $(-\infty; 0]$; $(2 + \sqrt{2}; +\infty)$.

С6. Найдутся ли хотя бы три десятизначных числа, делящихся на 11, в записи каждого из которых использованы все цифры от 0 до 9?

Решение:

Число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность между суммами его цифр, стоящих на нечётных и на чётных местах, делится на 11.

Запишем все цифры подряд: 9876543210. В написанном числе указанная разность сумм равна 5. Меняя местами, например, 5 и 8, мы одну сумму увеличиваем на 3, а другую уменьшаем на 3. Значит, разность между суммами его цифр, стоящих на нечётных и на чётных местах, становится равной 11. Меняя местами, например, 4 и 7, или 3 и 6, получаем требуемые примеры.

Примечание. В задаче не требуется нахождение всех чисел, обладающих указанным свойством.

Ответ: Да.

